

Att urskilja grafiska aspekter av derivata



Att urskilja grafiska  
aspekter av derivata –  
hur elevernas möjligheter påverkas av  
innehållets behandling i undervisningen

Ulf Ryberg



© ULF RYBERG, 2020  
ISBN 978-91-7963-018-8 (tryckt)  
ISBN 978-91-7963-019-5 (pdf)  
ISSN 0436-1121

Doktorsavhandling i ämnesdidaktik vid institutionen för didaktik och pedagogisk profession, Utbildningsvetenskapliga fakulteten, Göteborgs universitet.

Avhandlingen finns även i fulltext på:  
<http://hdl.handle.net/2077/63051>

Prenumeration på serien eller beställningar av enskilda exemplar skickas till:  
Acta Universitatis Gothoburgensis, Box 222, 405 30 Göteborg, eller till  
[acta@ub.gu.se](mailto:acta@ub.gu.se)

Foto: Ulf Ryberg

Tryck:  
Stema Specialtryck AB, Borås, 2020



## Abstract

Title: Discerning graphical aspects of the derivative – how the handling of the content during instruction influences students' opportunities

Author: Ulf Ryberg

Language: Swedish with an English summary

ISBN: 978-91-7963-018-8 (tryckt)

ISBN: 978-91-7963-019-5 (pdf)

ISSN: 0436-1121

Keywords: derivative, graph, intervention, variation

The aim of this thesis is to investigate in what ways students' opportunities to discern graphical aspects of the concept of derivative can be related to the design of instruction. The thesis is based on two empirical studies that together included 144 Swedish upper-secondary students who were enrolled in the course in which the derivative is first introduced. Study 1 was conducted in natural settings and involved collaboration between researchers and teachers. The study generated three different 120-min lesson designs, all of which concerned the same mathematical content, the relationship between a graph and its derivative graph. The designs were equivalent regarding organization and teaching methods. However, the content was handled differently during instruction. Design 1 used multiple representations and graphs of polynomial functions. Design 2 restricted instructions to fewer representations but used a broader variety of graphs. Design 3 was a hybrid of Designs 1 and 2 and contained limited variation regarding both representations and graphs. The results of the study, which were based mainly on qualitative data consisting of observations and students' explanations on posttest questions, suggested that Design 2 offered the best opportunities to discern graphical aspects of the derivative. The results of Study 1 were further tested in Study 2 wherein Design 1 and a slightly modified Design 2 were implemented in more controlled experimental conditions. Quantitative as well as qualitative data were collected. Statistical analyses of quantitative data showed that the students who participated in Design 2 performed significantly higher posttest scores. However, further analyses also showed that the effect of Design 2 was dependent of students' prior knowledge. For students with

less prior knowledge, the design was not a significant predictor in relation to the posttest. The results of the statistical analyses were strengthened by qualitative data. Analyses of student interviews suggested that Design 2 offered better opportunities to discern graphical aspects of the derivative. However, in line with the quantitative data, the interviews suggested that to what extent discernment took place was dependent of students' prior knowledge. Overall, the results of the studies highlight the importance of examining how the handling of the content may affect students' learning of mathematics. In particular, they challenge the assumption that the use of multiple representations is always beneficial and suggest that how to use representations during instruction concerned with the derivative is an important topic for further investigation, both with regard to practice and research.

# Innehåll

## Förord

KAPITEL 1: INTRODUKTION.....	11
1.1 Undervisning, lärande och relationen dem emellan i matematik .....	12
1.2 Relationen mellan undervisning och lärande av derivata .....	14
1.3 Avhandlingens empiriska studier.....	15
1.4 Syfte och forskningsfråga .....	17
1.5 Avhandlingens disposition .....	17
KAPITEL 2: BAKGRUND .....	19
2.1 De empiriska studiernas utgångspunkt.....	19
2.2 Att beskriva vad en förståelse för derivata innebär.....	21
2.3 Om undervisningen av derivata.....	23
2.4 Stort fokus på algebra .....	25
2.5 Ett uttryckt behov av den grafiska representationsformen.....	26
2.6 Att utveckla elevers förståelse för derivata .....	27
2.7 Litet fokus på innehållets behandling .....	29
2.8 Vilket innehåll och varför? .....	30
KAPITEL 3: TEORETISKA UTGÅNGSPUNKTER OCH STUDIERNAS DESIGN.....	33
3.1 Variationsteori .....	33
3.1.1 Mönster av variation .....	35
3.1.2 Tre olika lärandeobjekt .....	35
3.2 Att studera relationen mellan undervisning och lärande.....	36
3.3 Forskningsansatserna i avhandlingens två empiriska studier.....	38
3.3.1 Om learning study som forskningsansats.....	40
3.3.2 Bakgrund och beskrivning av forskningsansatsen i avhandlingens andra studie.....	42
3.4 Genomförande av studie 1.....	43
3.4.1 Urval.....	44
3.4.2 Datainsamling .....	45
3.4.3 Lärandeobjekt .....	46
3.4.4 Design, genomförande och revidering av forskningslektionerna.....	47
3.4.5 Analysprocess.....	47
3.5 Genomförande av studie 2.....	48

3.5.1 Urval.....	49
3.5.2 Förberedelse och genomförande av forskningslektioner .....	50
3.5.3 Datainsamling .....	50
3.5.4 Analysprocess.....	52
3.6 Etiska överväganden .....	53
KAPITEL 4: RESULTAT.....	55
4.1 Delarbete I: Licentiatuppsats .....	55
4.2 Delarbete II: Artikel 1.....	58
4.3 Delarbete III: Artikel 2.....	60
KAPITEL 5: DISKUSSION .....	63
5.1 Studiernas resultat i ett ämnesdidaktiskt perspektiv .....	63
5.1.1 Kritiska aspekter och missuppfattningar – inte samma sak .....	64
5.1.2 Om innehållets behandling i design 1 .....	65
5.1.3 Innehållets behandling påverkar det erfarna lärandeobjektet .....	66
5.1.4 Effekten av en specifik undervisningsdesign beror på elevernas förkunskaper.....	68
5.2 Studiernas resultat i ett variationsteoretiskt perspektiv .....	70
5.3 Studiernas resultat i ett metodologiskt perspektiv.....	71
5.4 Slutsatser och implikationer .....	72
SUMMARY .....	75
REFERENSER .....	87

Bilaga 1-4  
 Licentiatuppsats  
 Artikel 1  
 Artikel 2



## Förord

Arbetet med denna avhandling har, förutom läsande och skrivande, också inkluderat kurser, seminarier och konferenser. Jag har tyckt om dessa delar. Allra mest har jag dock tyckt om alla möten med människor. Under mina år som doktorand har jag haft förmånen att få träffa många kompetenta människor som haft många tankvärda saker att berätta.

Ett stort tack till ledningen och alla doktorander i forskarskolan learning study. Ett särskilt tack till Göteborgsgruppen med Heléne Bergentoft, Jenny Svanteson Wester, Per Selin och, sist men verkligen inte minst, Joakim Magnusson.

Tack till all personal på IDPP. Alltid vänliga bemötanden och stor hjälpsamhet, både gällande praktiska och teoretiska frågor. Ett extra tack till Cecilia Kilhamn, Hoda Ashjari, Rimma Nyman och Tuula Maunula. Extra tack också till Catherine Machale Gunnarsson och till variationsteorigruppen med bland andra Airi Rovio-Johansson, Angelika Kullberg och Ference Marton.

Eftersom min forskarutbildning bestod av två olika perioder fick jag möjligheten att ha fem olika handledare. Mona Holmqvist, Constanta Olteanu, Peter Nyström, Monica Rosén och Åke Ingerman. Ni är alla eminenta och jag har många gånger tänkt på vilken kompetens jag genom er har fått chansen att ta del av. Ett fantastiskt stort tack till er alla fem!

Avslutningsvis tack till de elever och lärare som deltog i forskningsstudierna. Ett särskilt tack till er lärare. Det finns säkert många lärare som kan säga att de är bättre än er på olika saker. Det finns dock inte många lärare som kan säga att de är bättre än er på att undervisa.

*Mf*



# Kapitel 1: Introduktion

I denna avhandling studeras hur undervisningens design påverkar elevers lärande. I centrum står två empiriska studier genomförda inom gymnasiekursen matematik 3. I båda studierna deltog flera elevgrupper i en 120-minuters lektion som syftade till att eleverna skulle urskilja grafiska aspekter av begreppet derivata. Lektionens innehåll, relationen mellan grafen till en funktion och grafen till funktionens derivata, var detsamma i alla elevgrupper. Innehållet behandlades dock på olika sätt och avhandlingen avser bidra med kunskap om hur innehållets behandling i undervisningen kan komma att påverka i vilken grad olika aspekter av derivata synliggörs för eleverna.

Det skulle kunna antas att relationen mellan de två inom skolverksamhet mest fundamentala begreppen, undervisning och lärande, vore utförligt studerad och väl utredd. Trots att den utbildningsvetenskapliga forskningen under många år varit omfattande och genererat en allt större kunskapsmassa kan dock så inte sägas vara fallet. Samtidigt som det idag propageras för att läraren är den faktor som har störst påverkan på elevers utveckling (se t.ex. Hanushek, 2011; Hattie, 2009) är förhållandevis lite känt om vad som utmärker en kvalitativ undervisning samt under vilka former och på vilket sätt en sådan undervisning kan utvecklas. Ball och Rowan (2004) uttrycker situationen på följande sätt:

It is increasingly clear that instructional quality affects what students learn in school and how they grow academically over time. However, less is known about what makes teaching good, or effective. Researchers also lack adequate knowledge of how to measure good teaching, assess its effects on students' academic achievement, and promote such teaching in schools (Ball & Rowan, 2004, s.3).

Ball och Rowan (2004) konstaterar att forskning kring undervisning visserligen har en lång historia men de pekar också på svårigheter som denna typ av studier innebär. Olika forskningsmetoder för med sig olika typer av validitetsproblem och Ball och Rowan (2004) menar att om undervisningens effekter ska studeras krävs en kombination av forskningsansatser liksom flera olika typer av data. Också Hiebert och Grouws (2007) hävdar att det råder

stor osäkerhet kring relationen mellan undervisning och lärande. De lyfter fram flera utmaningar för forskningen inom området. Exempelvis det faktum att undervisning är en komplex verksamhet där olika variabler samverkar med varandra på en mängd olika sätt. Detta borgar i sin tur för metodologiska svårigheter, både i fråga om vilka variabler som ska mätas liksom på vilket sätt de ska mätas (Hiebert & Grouws, 2007).

Utmaningar och svårigheter med att studera relationen mellan undervisning och lärande diskuteras även av Nuthall (2004) som gör en kritisk granskning av fyra av de vanligaste forskningsmetoderna: studier av skickliga lärare, korrelations- och experimentella studier, design experiments och aktionsforskning. Nuthall (2004) menar att ingen av dem leder till resultat som förklarar hur undervisning kan relateras till lärande på ett sådant sätt att de blir praktiskt användbara för lärare. Samtidigt som Nuthalls (2004) kritik är omfattande beskriver han emellertid också vilka inslag och vilka data han anser att denna typ av studier bör innefatta. I metodkapitlet senare i denna text ställs uppläggningsen av de empiriska studier som genomfördes inom ramen för denna avhandling i relation till såväl den kritik som till de propåer som lyfts av bland andra Nuthall (2004) och Hiebert och Grouws (2007). Det kan dock redan nu konstateras att även om studier som behandlar relationen mellan undervisning och lärande är behäftade med svårigheter och utmaningar är de samtidigt högst relevanta. Dels på grund av sin ännu idag ringa omfattning (Carlgren, 2018; Charalambous & Pitta-Pantazi, 2015; Svensson, 2016) men framförallt på grund av det faktum att de adresserar den för skolpraktiken kanske mest intressanta frågeställningen (Carlgren, 2018; Hiebert & Morris, 2012; Kennedy, 1999). Det senare tydliggörs i Kennedys (1999) studie där hon lät lärare ta del av ett antal forskningsartiklar i syfte att undersöka vilken forskningsmetod de uppfattade som mest relevant och inflytelserik. Resultatet visade att betydelsen av forskningsmetod var helt underordnat vilka forskningsfrågor som ställdes i artiklarna. Gemensamt för de artiklar lärarna bedömde som mest relevanta var att de alla behandlade relationen mellan undervisning och lärande.

## 1.1 Undervisning, lärande och relationen dem emellan i matematik

Var för sig har begreppen undervisning och lärande en lång historia inom matematikutbildning. Frågan om vilken matematik som bör ges utrymme i

skolan (vad som ska läras) liksom frågor om med vilka metoder matematik ska undervisas har varit föremål för diskussioner bland matematiker och matematiklärare under mer än två århundranden (Kilpatrick, 1992). Vägen till ett definierat forskningsfält som rör undervisning och lärande i matematik har emellertid varit snårigare och det var först i början på 1970-talet som matematikdidaktiken undan för undan började etablera sig som en egen disciplin (Kilpatrick, 1992; Niss, 2001). Idag, knappt 50 år senare, existerar diverse nationella och internationella intressegrupper som organiserar forskare och matematikdidaktikens framväxt har också gett upphov till en mängd tidskrifter vilka tillsammans genererar ett konstant flöde av publicerade forskningsartiklar.

Niss (2001) definierar matematikdidaktikens studieobjekt som de företeelser och processer som är en del av undervisning och lärande i matematik. Han konstaterar dock att medan det finns en omfattande forskning med inriktning mot elevers lärprocesser och inlärningsprodukter finns det många frågor som är obesvarade när det gäller relationen mellan undervisning och lärande. En liknande slutsats dras av Charalambous och Pitta-Pantazi (2015) efter att de försökt sammanfatta var det matematikdidaktiska forskningsfältet befinner sig. De menar att under de senaste decennierna har forskningen kring lärares kunskaper, undervisning och lärande gjort framsteg. Detta gäller emellertid de tre fälten betraktade *var för sig*. När det gäller på vilket sätt dessa områden kan relateras till varandra är de flesta frågorna enligt Charalambous och Pitta-Pantazi (2015) obesvarade:

We initiated this chapter by pointing out that, after almost four decades of significant scholarly work, we have by now accumulated sufficient empirical evidence suggesting that teachers make a difference in student learning. However, questions regarding the interactions among teacher knowledge, teaching quality, and student learning – as well as the particular ways in which these interactions are manifested – remain open (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2015, s.44).

I linje med Ball och Rowan (2004) ovan menar Charalambous och Pitta-Pantazi (2015) att undervisningens kvalitet, i termer av dess förmåga att generera lärande, är komplicerad att mäta. Det saknas också enligt Charalambous och Pitta-Pantazi (2015) teoretiska ramverk, både om undervisning och, i än högre grad, om relationen mellan undervisning och lärande. Gällande den matematikdidaktiska teoribildningen hävdar Hiebert och Grouws (2007) att det finns en tydlig förskjutning mot lärande. De

konstaterar att teorier om lärande i matematik ofta är tydligt artikulerade medan detta inte gäller teorier om undervisning i matematik. Hiebert och Grouws (2007) menar att även om teorier om lärande kan ge viss guidning för undervisning kan de inte översättas rakt av och de kan inte heller i sin ensamhet användas vid studier av relationen mellan undervisning och lärande.

De teoretiska utgångspunkterna inom matematikdidaktiken var under slutet av förra seklet präglade av kognitiva perspektiv och Björkqvist (1993) hävdar att det i början på 1990-talet var svårt att hitta matematikdidaktiska forskare vars arbete inte var influerat av konstruktivismen. I enlighet med detta beskriver Sriraman och Nardi (2013) hur matematikdidaktiska forskningsartiklar vid denna tid ofta fokuserade på lärande i termer av hur individen konstruerade sin kunskap. Den konstruktivistiska inriktningen har under de senaste decennierna kommit att kompletteras av sociala teorier (se t.ex. Lerman, 2000) och enligt Jablonka, Wagner och Walshaw (2013) har det blivit allt vanligare att matematikdidaktiker refererar till exempelvis det sociokulturella perspektivet. Inriktningen mot lärande är dock fortfarande central (Sriraman & Nardi, 2013) och enligt Cobb (2007) har det sociokulturella perspektivet en uppenbar svaghet i form av att det är svårt att tillämpa i samband med design av undervisningen.

## 1.2 Relationen mellan undervisning och lärande av derivata

Den matematikdidaktiska forskningen kring derivata är relativt omfattande och tog fart redan på tidigt 80-tal (t.ex. Orton, 1983; Tall & Vinner, 1981). På samma sätt som hos matematikdidaktiken i stort finns dock inom området en övervikt av studier som inriktar sig på elevers lärande. Vanligt förekommande har exempelvis varit att med en konstruktivistiskt grundad teoretisk utgångspunkt (t.ex. APOS, se Dubinsky & Mc Donald, 2001; Concept Image, se Tall & Vinner, 1981) undersöka och analysera elevers begreppsförståelse eller strategier. Studier om elevers förståelse, strategier och (miss)uppfattningar är väl representerade även de senaste åren (t.ex. Jones & Watson, 2018; Jukić & Dahl, 2012; Park, 2013) och resultaten kan sägas vara relativt entydiga: elever uppvisar ofta en bristfällig förståelse för derivata och det florerar många missuppfattningar kring begreppet. Denna situation gör studier om undervisning motiverade men även om sådana förekommer (t.ex. Park, 2015), liksom det också förekommer studier om relationen mellan

undervisning och lärande (t.ex. Habre & Abboud, 2006; Ubuz, 2007) är de förhållandevis få. Gällande de senare har det dessutom varit vanligt att de tagit sin utgångspunkt i konstruktivismen och undersökt på vilket sätt olika undervisningsmetoder (grupparbete, laborationer, diskussioner etc.) kan förbättra inläringen i ett längre perspektiv, till exempel i form av en hel kurs. I flertalet av dessa studier har också inslaget av digitala hjälpmedel varit betydande (Hallet, 2006).

Sammanfattningsvis kan alltså tidigare forskning sägas ha bidragit med utförlig kunskap om elevers förståelse av derivata. Den har också, om än i mindre omfattning, intresserat sig för hur olika sätt att organisera undervisningen kan påverka elevernas lärande. Kvar finns dock fortfarande ett behov av studier som tar sin utgångspunkt i innehållet (snarare än metoden) och som undersöker hur elevers lärande av derivata kan relateras mer direkt till undervisningen i ett kortare tidsperspektiv. Det är inom detta område föreliggande avhandling avser ge ett bidrag. Den har samtidigt en tydlig koppling till de forskningsresultat som rör elevers förståelse av derivata på så sätt att denna typ av studier utgör en av utgångspunkterna vid design av undervisning.

### 1.3 Avhandlingens empiriska studier

Avhandlingen baseras på två empiriska studier som har samma frågeställning men olika forskningsansats. Den inledande studien genomförs i form av en learning study (Lo, 2012; Marton, 2015) vilket innebär en praktikinära ansats där forskare och lärare samarbetar. I en learning study genomförs en lektion i flera elevgrupper efter varandra. Innehållet i lektionerna är detsamma men mellan varje grupp görs förändringar i innehållets behandling och mot bakgrund av dessa förändringar analyseras elevernas lärande. Innehållets behandling syftar på vilka aspekter av innehållet som är närvarande i de exempel som används i undervisningen. Det syftar också på hur respektive aspekt varierar i de olika exemplen samt på vilka aspekter som placeras i förgrunden i den meningen att de fokuseras av läraren. Målet är att, med avseende på innehållsliga aspekter, skapa ett systematiskt mönster av variation som erbjuder eleverna möjligheter att lära sig det som är lektionens avsikt.

En learning study genomförs under naturliga förutsättningar (ordinarie klasser undervisas av sina ordinarie lärare) och analyser och slutsatser bygger i stor utsträckning på kvalitativa data. I avhandlingens andra studie genomförs

därför två av lektionsdesignerna som genereras i den första studien igen, nu under mer experimentella betingelser. De deltagande eleverna randomiseras till de två designerna och de undervisas inte av sin ordinarie lärare. Analyser och slutsatser i den andra studien bygger huvudsakligen på kvantitativa data. De två studierna kompletterar därmed varandra och bildar tillsammans en helhet med ett gemensamt resultat. Nedan ges en översiktlig beskrivning av hela forskningsprojektets uppläggning och genomförande.

#### Studie 1

- Pilotstudie. Elevintervjuer (eleverna ej deltagare i huvudstudien).
- Screening. Elevintervjuer.
- Design och genomförande av lektioner. Tre elevgrupper efter varandra. För- och eftertest i direkt anslutning till respektive lektion.
- Fördröjt eftertest.

#### Studie 2

- Förtester.
- Samtidigt genomförande av två olika lektionsdesigner från studie 1.
- Eftertest.
- Elevintervjuer.

I studie 1 analyseras kvalitativa data i form av lektionsobservationer och elevernas strategier på olika testuppgifter. I studie 2 bidrar de avslutande intervjuerna med kvalitativa data men i övrigt baseras analysen på kvantitativa data i form av elevernas testresultat.

Att studera elevers lärande i matematik med hjälp av kvantitativa data har under de senaste decennierna varit relativt ovanligt (Sriraman & Nardi, 2013). Även avhandlingens teoretiska utgångspunkt, variationsteori (Marton & Booth, 1997; Marton, 2015), innebär ett avsteg mot vad som i tidigare studier om derivata varit mest frekvent. Variationsteorin gör att fokus inte är placerat på faktorer som undervisningsmetoder eller digitala verktyg utan på innehållet. Dels i termer av de aspekter av innehållet som är *kritiska*, det vill säga nödvändiga för eleverna att urskilja för att erfarra innehållet på ett mer kvalitativt sätt. Dels i termer av hur innehållets behandling i undervisningen, mönstret av variation, påverkar elevernas möjligheter att urskilja de kritiska aspekterna.



## 1.4 Syfte och forskningsfråga

Avhandlingens syfte är att studera på vilket sätt undervisningens design påverkar elevers lärande. Mer precist innebär det variationsteoretiska perspektivet att såväl design av undervisningen som analys av elevers lärande sker mot bakgrund av innehållets behandling. Enligt variationsteorin innebär lärande att urskilja kritiska aspekter av ett innehåll. Avhandlingen ämnar bidra med kunskap om hur innehållets behandling, i form av vilka aspekter av derivata som är närvarande och på vilket sätt de varierar under en lektions olika delar, påverkar i vilken grad olika aspekter av derivata synliggörs och därmed blir möjliga för eleverna att urskilja. I avhandlingen adresseras följande övergripande frågeställning:

Vilka sätt att behandla innehållet kan identifieras som framgångsrika för att synliggöra de aspekter av relationen mellan grafen till en funktion och grafen till funktionens derivata som är kritiska för eleverna att urskilja?

Frågeställningen studeras med utgångspunkt i tidigare ämnesdidaktiska forskningsresultat och lärares undervisningserfarenhet. Den besvaras, via olika typer av data och analysmetoder, ur olika perspektiv i avhandlingens tre delarbeten som utgörs av en licentiatuppsats samt två artiklar.

## 1.5 Avhandlingens disposition

Introduktionskapitlet har översiktligt ramat in avhandlingen samt beskrivit dess syfte. I kapitel 2 ges en mer utförlig bakgrund till valet av ämnesinnehåll inom avhandlingens empiriska studier. Valet var bland annat grundat i tidigare forskning och i kapitlet görs en genomgång av genomförande och resultat i ett antal tidigare studier som behandlat undervisning och lärande av derivata. I kapitel 3 presenteras inledningsvis avhandlingens teoretiska utgångspunkter. Därefter följer en metoddiskussion. Denna startar i ett allmänt perspektiv på undervisning och lärande för att sedan riktas in på de forskningsansatser som använts inom avhandlingens studier. Sist i kapitel 3 redogörs för studiernas genomförande. I kapitel 4 presenteras en sammanfattning av resultaten i avhandlingens tre delarbeten och resultaten diskuteras därefter i kapitel 5.



## Kapitel 2: Bakgrund

Motivet till att undersöka hur undervisningens design påverkar elevers lärande av derivata är grundat i en kombination av lärares erfarenheter och tidigare forskningsresultat. Som nämndes i introduktionskapitlet genomförs den inledande studien inom avhandlingen i form av en learning study. Karaktäristiskt för denna forskningsansats är att forskare och lärare samarbetar och att det innehåll som fokuseras i undervisningen härstammar från lärarna. Valet av innehåll baseras dels på att det är något som lärarna av erfarenhet vet att eleverna har svårt att lära, dels på att det är av en karaktär som gör att ett lärande bedöms kunna generera lärande av ett eller flera begrepp i en vidare mening. Vid sidan om lärares erfarenheter vilar en learning study också på tidigare forskning. I den aktuella studien spelade tidigare forskningsresultat en central roll vid designen av undervisningen. Tidigare forskningsresultat spelade också en central roll vid avgränsningen av innehållet och i detta kapitel presenteras bakgrunden till varför derivata, och mer specifikt, relationen mellan grafen till en funktion och grafen till funktionens derivata, kan anses som särskilt relevant att studera närmare.

### 2.1 De empiriska studiernas utgångspunkt

De i learning studyn deltagande lärarna hade efter många års undervisning av derivata gemensamma erfarenheter. Trots att begreppet är centralt inom flera kurser i gymnasie matematiken var uppfattningen att många elever har en begränsad förståelse och i hög utsträckning använder det som Lithner (2008) benämner som algoritmiskt resonemang. Vid lösning av uppgifter innebär denna sorts ”resonemang” att klargöra vilken algoritm som är passande i det aktuella fallet, resten utförs enligt rutiner. I Lithners (2008) ramverk innefattar begreppet algoritm inte bara beräkningar utan alla typer av på förhand kända procedurer.

Bergqvist, Lithner och Sumpter (2008) delar upp algoritmiskt resonemang i två underkategorier. Den första kategorin innebär att valet av algoritm görs med utgångspunkt i liknande uppgifter som har lösts tidigare. Den andra kategorin innebär att guidas i sitt resonemang, antingen i text (t.ex. via ett övningsexempel) eller av en person som bistår med de delar av algoritmen

som är obekanta. Ett algoritmiskt resonemang inom den första kategorin kan leda till ett korrekt svar men vid minsta osäkerhet, vilket gör att valet av algoritm inte är givet, uppstår problem. Inom derivata exemplifieras detta av Bergqvist et al. (2008) som beskriver strategin hos en elev som arbetar med en uppgift vilken går ut på att bestämma största och minsta värde för en andragsgradsfunktion inom ett givet intervall. Eleven börjar på rätt sätt genom att derivera funktionen och bestämma för vilket  $x$  som  $f'(x)=0$ . Hon sätter därefter in detta värde i funktionsuttrycket och får fram ett funktionsvärde (det korrekta största värdet). Hon är dock tveksam till sitt resultat då frågeställningen innebär att ge två värden medan denna metod bara ger henne ett (hon glömmer att kontrollera intervallgränserna). Hon övergår då till att använda sin miniräknare och tar fram både en graf och en tabell som beskriver funktionen. Hon kan dock inte heller via dessa representationer komma fram till något svar varför hon istället bestämmer sig för att lösa ekvationen  $f(x)=0$ . Även om hon är en aning konfunderad över detta val av algoritm (vilket är felaktigt och dessutom ger henne  $x$ - istället för  $y$ -värden) ser hon det som slutgiltigt eftersom formeln för att lösa andragsgradsekvationer ger henne två värden vilket efterfrågades.

Exemplet från Bergqvist et al. (2008) beskriver en enskild elevs strategi i en enskild uppgift. Kvantitativa studier (t.ex. Bentley, 2009) visar emellertid att beskrivningen är representativ; hos många elever sträcker sig kunskaperna inom derivata till att kunna utföra ett antal procedurer och den begreppsliga (konceptuella) förståelsen är ofta svagt utvecklad. Denna situation förefaller vara densamma över stora delar av västvärlden och också konstant över tid (Asiala, Cottrill, Dubinsky & Schwingendorf, 1997; Berry & Nyman, 2003; Jukić & Dahl, 2012; Orton, 1983; Selden, Selden & Mason, 1994).

Att procedurer i sin ensamhet inte är tillräckliga synliggörs i exemplet från Bergqvist et al. (2008). Isolerade procedurkunskaper kan också dölja en oförståelse även om svaret är rätt. Detta visas i en studie av Borgen och Manu (2002) där de analyserar strategierna för två elever som tillsammans löser ett problem (vilket för övrigt var mycket likt det från Bergqvist et al., 2008 ovan). I Borgen och Manus (2002) studie skulle de två eleverna, givet en andragsgradsfunktion i algebraisk form, bestämma funktionens stationära punkt samt punktens karaktär. En av eleverna tog initiativet och föreföll ha kontroll över hur uppgiften skulle lösas. Funktionen deriverades och därefter sattes uttrycket för derivatans funktion lika med noll. Efter några beräkningar nådde eleverna fram till rätt koordinater för punkten och de konstaterade också att

det var en minimipunkt. Det korrekta svaret till trots visade Borgen och Manus (2002) analys av lösningsprocessen att eleven som inledningsvis var drivande saknade förståelse för flera av de i processen ingående begreppen. Hon förstod till exempel inte att minimipunkten kunde kopplas till den graf de gemensamt skissade. Hon förstod inte heller relationen mellan begreppen derivata och tangent och Borgen och Manu (2002) konstaterar att ett korrekt svar inte innebär att elever har en förståelse för den matematik som uppgiften innehåller.

## 2.2 Att beskriva vad en förståelse för derivata innebär

Att hantera procedurer är det som ges mest utrymme i många klassrum (Boesen et al., 2014; Stigler & Hiebert, 1999). Procedurer är en stor och viktig del av matematiken men samtidigt är undervisningens mål inte utantillinlärning utan att eleverna ska utveckla en förståelse för ämnet. Beträffande derivata är det dock enligt Zandieh (2000) inte rimligt att ställa sig frågan huruvida en elev förstår begreppet eller inte. Hon menar att för ett så mångfacetterat begrepp handlar det snarare om att försöka beskriva elevens förståelse; vilka aspekter av derivata känner eleven till och i vilken utsträckning kan eleven relatera olika aspekter till varandra? Med syftet att kunna studera detta på ett systematiskt vis utvecklar Zandieh (2000) ett teoretiskt ramverk inom vilket derivata beskrivs via en matris bestående av kontexter och process-objekt lager (se figur 1).

Process-object layer	Contexts				
	Graphical Slope	Verbal Rate	Physical Velocity	Symbolic Difference Quotient	Other
Ratio					
Limit					
Function					

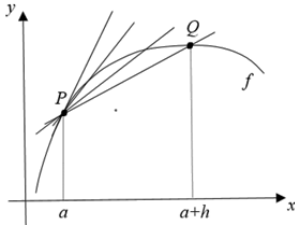
Figur 1. Matris över derivatans olika kontexter och lager (i enlighet med Zandieh, 2000).

Zandieh (2000) menar att en komplett förståelse för derivata innefattar att förstå innebörden av samtliga tre process-objekt lager i alla kontexter. Kontexter är för Zandieh (2000) i princip synonymt med

representationsformer. Hon använder termerna växelvis men menar att ordet kontext har en något bredare betydelse. Den högra kolumnen i matrisen, ”other”, är tänkt att kunna rymma andra fysiska kontexter än hastighet, eller varianter av de övriga kontexterna. Att en förståelse för derivata innefattar att kunna tolka dess innebörd i olika representationsformer är inget som är utmärkande för Zandieh och samma sak poängteras av flera andra forskare (se t.ex. Berry & Nyman, 2003; Goerdts, 2007; Haciomeroglu, Aspinwall & Presmeg, 2010). Det som dock tillkommer i Zandiehs (2000) ramverk är de tre process-objekt lager hon använder för att beskriva hur derivata är uppbyggt:

The derivative of  $f, f'$ , is a function whose value at any point is defined as the limit of a ratio. I will call these underlined aspects of the concept of the derivative (ratio, limit, function) the three “layers” of the framework (Zandieh, 2000, s.106).

Första lagret (ratio) kan ses som en approximation av derivatan i en punkt. Andra lagret (limit) representerar derivatan i en punkt medan det tredje lagret (function) representerar derivatan som en funktion. De tre lagren gör det möjligt att på ett mer finkalibrigt sätt klassificera hur en elevs förståelse är beskaffad; vilka lager, inom vilka representationer, har eleven förståelse för? Varje ruta i matrisen definierar Zandieh (2000) som en aspekt av derivata men benämningen av lagren som process-objekt tillför ytterligare en dimension. Termerna process-objekt har sitt ursprung i Sfards (1991, 1992) teori och Zandieh (2000) menar att de är passande då alla tre lager kan ses både som en dynamisk process och som ett statiskt objekt. Till exempel, i den grafiska representationen svarar lutningen hos en sekant mot *objektet* i första lagret. Enligt Zandieh (2000) vilar objektet på en underliggande *process* vilken i detta fall består av att beräkna sekantens lutning. På motsvarande sätt är objektet i andra lagret tangentens lutning och den underliggande processen utgörs av att låta sekanten närma sig tangenten genom att låta värdet på  $h$  (se figur 2) gå mot noll. Avslutningsvis utgör derivatans graf objektet i det tredje lagret. Processen innebär att konstruera derivatans graf genom att *i varje punkt* på grafen till ursprungsfunktionen föreställa sig tangentens lutning.



Figur 2. Sekanten PQ närmar sig tangenten i P.

Zandieh (2000) menar att eleverna behöver ges möjlighet att utveckla en förståelse för de tre processerna inom respektive representation och också för hur en process i en representation kan kopplas till samma process i en annan representation. Hon påtalar emellertid att uppgifter inom derivata ofta kan lösas med det hon benämner som en förståelse i form av pseudo-objekt. Detta innebär att använda sig av ett objekt, exempelvis genom att manipulera ett algebraiskt funktionsuttryck eller referera till lutningen hos en tangent, utan att nödvändigtvis ha någon förståelse för den bakomliggande processen.

## 2.3 Om undervisningen av derivata

Många studier som undersökt elevers förståelse av derivata visar på en övervikt av procedurkunskaper (jfr algoritmiskt resonemang och pseudo-objekt ovan) och enligt Tall (1996) kan detta ses som en effekt av hur undervisningen och examinationer utformas. Han menar att den procedurinriktning som ofta präglar derivata initieras av att de grundläggande begreppen, till exempel gränsvärde, för många elever är svåra att förstå. Eleverna lägger då istället sitt fokus på att lära sig procedurer. Lärarna kompenserar i sin tur med att vid examinationer ställa frågor som eleverna kan besvara och det som Tall (1996) benämner som en ”ond cirkel” av en procedurinriktad undervisning och ett procedurinriktat lärande är därmed igångsatt.

Tall (1996) är inte ensam om sin beskrivning och exempelvis hävdar både Jukić och Dahl (2012) och Berry och Nyman (2003) att derivata för många elever är synonymt med en uppsättning löst sammanhållna regler. Berry och Nyman (2003) påtalar att även framgångsrika elever tenderar att fokusera på saker som ”att hitta var derivatan är noll” utan att ha någon förståelse för varför det är viktigt. I likhet med Tall (1996) menar de att förmågan att

manipulera algebraiska funktionsuttryck är tillräcklig för att vara lyckosam på examinationer.

I en artikel av Tall och Vinner (1981) beskrivs *concept image* som den totala kognitiva strukturen som för en individ är associerad med ett visst begrepp. Beskrivningen av *concept image* har kommit att tas som en teoretisk utgångspunkt för ett stort antal studier, bland annat inom derivata (t.ex. Hähkiöniemi; 2006; Koirala, 1997; Zandieh, 2000). Tall och Vinner (1981) artikel är emellertid till stor del en återspeglning av empiriska data och författarna hävdar att en bristfällig förståelse för ett matematiskt begrepp delvis kan hänföras till undervisningen. Exempelvis menar de att elevers förståelse för funktioner kan begränsas och vara oklar på grund av undervisningens utformning:

But a teacher may give the formal definition and work with the general notion for a short while before spending long periods in which all examples are given by formulae. In such a case the concept image may develop into a more restricted notion, only involving formulae, whilst the concept definition is largely inactive in the cognitive structure. Initially the student in this position can operate quite happily with his restricted notion adequate in its restricted context (Tall & Vinner, 1981, s.153).

Tall och Vinner (1981) redogörelse för hur behandlingen av funktioner, kort efter att begreppet introducerats, har en benägenhet att begränsas till formler är applicerbar även för derivata. Derivatans definition utgörs av ett gränsvärde och enligt Tall och Vinner (1981) tenderar definitionen att snabbt hamna i skymundan då undervisningen istället inriktas mot formler och deriveringsregler. Goerdt (2007) beskriver situationen på liknande sätt och menar att medan derivata i regel introduceras via den symboliska och den grafiska representationsformen i kombination fokuserar de uppgifter elever därefter arbetar med i princip enbart på den symboliska representationsformen.

Hur derivata introduceras studeras av Park (2015) som följer tre lärare under deras tre första lektioner där begreppet behandlas. Hon noterar dels att lärarna i samband med introduktionen använder en kombination av den grafiska och den symboliska representationsformen (jfr Goerdt, 2007 ovan), dels att de refererar till derivatans tre lager (jfr Zandieh, 2000 ovan). Parks (2015) analys visar emellertid också att lärarna tar flera innehållsliga aspekter för givet genom att endast beröra dem implicit i sina framställningar:



These results show that the aspects of the derivative that the past mathematicians and today's students have difficulties with are not explicitly addressed in these three classrooms (Park, 2015, s.233).

Exempelvis lyfter Park (2015) hur lärarna definierar derivatan i en punkt via ett gränsvärde (symboliskt) parallellt med en tangent (grafiskt) utan att explicit förklara hur dessa två representationer kan relateras till varandra. Park (2015) diskuterar också hur lärarna behandlar derivatan i en punkt respektive derivatan som en funktion. I detta fall utgår lärarna i första hand från den symboliska representationsformen och beskriver hur derivatan i en punkt definieras som  $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$  (alternativt  $x_0$  istället för  $a$ ). De övergår sedan till derivatan som en funktion genom att ersätta bokstaven  $a$  med ett  $x$ . Derivatan i en punkt och derivatan som en funktion är två konceptuellt sett mycket olika tolkningar av begreppet. Skillnaden i skrivsätt är emellertid subtil och enligt Park (2015) synliggör inte lärarna explicit vad skiftet av bokstäver innebär. Två av lärarna demonstrerar även derivatan som en funktion med hjälp av grafer. Park (2015) konstaterar dock att då lärarna företrädesvis utgår från grafer till linjära funktioner varierar inte värdet på derivatans graf. Detta medför att derivatans värde betraktas i ett intervall och skillnaden mellan derivatan i en punkt och derivatan som en funktion förblir därför även här implicit.

## 2.4 Stort fokus på algebra

Parks (2015) ansats att analysera hur olika aspekter av derivata hanteras i undervisningen kan inte sägas utgöra normen för studier inom området. Betydligt mer vanligt förekommande har varit att undersöka och beskriva elevers förståelse och de strategier de använder (t.ex. Aspinwall, Shaw & Presmeg, 1997; Bergqvist et al., 2008; Borgen & Manu, 2002; Çetin, 2009; García, Llinares & Sánchez-Matamoros, 2010; Haciomeroglu et al., 2010; Hähkiöniemi, 2006; Jones & Watson, 2018; Jukić & Dahl, 2012; Lauten, Graham & Ferrini-Mundy, 1994; Orton, 1983; Selden, Selden & Mason, 1994; Zandieh & Knapp, 2006). Naturligtvis har olika studier haft olika forskningsansats men den teoretiska utgångspunkt som varit vanligast är konstruktivismen. Flera studier har också presenterat liknande resultat och några resultat har dessutom varit frekvent återkommande över tid. Ett exempel är elevers uppfattningar om gränsvärden där många studier har rapporterat hur detta begrepp innebär stora svårigheter för eleverna (t.ex. Hähkiöniemi, 2006; Juter, 2006; Lauten et al., 1994; Orton, 1983; Tall &

Vinner, 1981). Ett annat exempel är elevers benägenhet att fokusera på hanteringen av algebraiska funktionsuttryck. Tall och Vinnars (1981) beskrivning av hur undervisningen kan vara en bakomliggande faktor refererades till tidigare men trots att deras artikel är nästan 40 år gammal och flitigt citerad kan situationen sägas vara liknande idag. Den kan dessutom sägas ha varit liknande under tiden där emellan och de senaste decennierna har ett stort antal studier noterat att derivata ofta är synonymt med algebraiska manipulationer och att många elever efterfrågar formler i samband med problemlösning (t.ex. Asiala et al., 1997; Bergqvist et al., 2008; Berry & Nyman, 2003; Borgen & Manu, 2002; Haciomeroglu et al., 2010; Jukić & Dahl, 2012; Selden et al., 1994).

## 2.5 Ett uttryckt behov av den grafiska representationsformen

Elevers tendens att fokusera på algebra har genom åren gett upphov till ett antal förslag gällande undervisningens uppläggning. Orton (1983) intervjuar 110 elever och konstaterar att medan i princip alla kan derivata polynomfunktioner är förståelsen för derivata hos många elever bristfällig. Orton (1983) rekommenderar en mer informell ingång till derivata där den grafiska representationsformen ges stort utrymme. Han menar att många av de centrala begreppen, såsom förändringshastighet, sekant, tangent, stationär punkt (med flera), i ett första skede bör studeras enbart med hjälp av grafer. Enligt Orton (1983) ska den mer strikta symbolismen introduceras först därefter. Liknande förslag har senare återkommit från flera andra håll (t.ex. Berry & Nyman, 2003; Koirala, 1997; Tall, 2008).

Koirala (1997) skiljer mellan två typer av undervisning inom derivata vilka han benämner som formell respektive informell. Den formella startar med definitioner och bevis och följs av en mängd uppgifter där dessa tillämpas. Koirala (1997) förespråkar emellertid den informella där undervisningen utgår från den intuitiva förståelse som eleverna har för ett begrepp redan innan det definierats på det formella sättet. Enligt Koirala (1997) bygger den informella ansatsen till stor del på grafer och han menar att denna typ av undervisning har potential att generera starkare konceptuella kunskaper hos eleverna. Koirala (1997) citeras av Berry och Nyman (2003) som för ett mycket liknande resonemang. På samma sätt som Koirala (1997) menar de att grafer bör ges större utrymme inom undervisningen av derivata. De delar också

Koiralas (1997) och Ortons (1983) ståndpunkt att den formella symboliska behandlingen av begrepp bör närmas långsamt och att denna behandling underlättas om eleverna dessförinnan utvecklat en intuitiv förståelse via den grafiska representationsformen. Även Tall (2008) hävdar att introduktionen till derivata bör ske via grafer. Hans argument är att då elever första gången stöter på begreppet är det lättare att inse dess betydelse i form av lutningen hos en graf än som ett symboliskt gränsvärde.

## 2.6 Att utveckla elevers förståelse för derivata

Den bredaste och mest omfattande utvecklingsinsatsen som genomförts inom undervisningen av derivata inleddes i USA i slutet av 1980-talet och kom att kallas The Calculus Reform Movement (Goerdt, 2007; Hallet, 2000, 2006; Schoenfeld, 1995). Huvudsyftet med reformen var enligt Hallet (2006) att på ett nationellt plan förändra undervisningen inom calculus (jfr reell analys) så att den i högre grad utvecklade elevernas konceptuella förståelse. Ett stort antal projekt startades vid olika skolor och inledningsvis hade dessa olika titlar och inriktningar (Hallet, 2006; Schoenfeld, 1995). Det som dock kom att bli mest utmärkande för den reformerade undervisningen var det kraftigt ökade inslaget av teknologi och enligt Tall (1996) var datorer eller grafitande miniräknare involverade i nästintill samtliga av de utvecklingsprojekt som genomfördes.

Goerdt (2007) hävdar att även om reformeringen av calculus inledningsvis var centrerad kring datorer och miniräknare är det inte längre detta som skiljer en reformkurs från den mer traditionella undervisningen. Istället menar hon att skillnaden främst består av i vilken utsträckning olika representationsformer används i undervisningen. Medan traditionell undervisning företrädesvis inriktas mot den symboliska representationen lägger en reformkurs stor vikt vid att växla mellan olika representationer. Att användandet av multipla representationer kom att bli mycket centralt för reformen tydliggörs även från andra håll. Exempelvis beskriver både Schoenfeld (1995) och Hallet (2006) hur detta blev en av de viktigaste principerna inom den reformerade undervisningen. De refererar också båda till uttrycket ”rule of three” som enligt Hallet (2006) myntades inom reformen och innebär att undervisningen hela tiden bör sträva efter att kombinera den symboliska, den grafiska och den numeriska representationen. ”Rule of three”

har senare kommit att utvidgas till ”rule of four” och innefattar då också den verbala representationsformen.

På vilket sätt teknologi och multipla representationer kan bidra till att utveckla elevernas förståelse för derivata har varit utgångspunkten för flera forskningsstudier (t.ex. Asiala et al, 1997; Berry & Nyman, 2003; Goerdts, 2007; Habre & Abboud, 2006). Även om teknologi och multipla representationer kan ses som två olika faktorer blir det i flera interventionsstudier tydligt att de snarare är att betrakta som en helhet; införandet av teknologi möjliggör eller förenklar användandet av flera representationer i undervisningen. Ett exempel på detta är studien av Berry och Nyman (2003) där de deltagande eleverna hade tillgång till en grafitande miniräknare som var kopplad till en rörelsedetektor. Givet grafen till en funktions derivata var elevernas uppgift att röra sig framför detektorn på ett sådant sätt att grafen till ursprungsfunktionen ritades av miniräknaren. I denna studie gav alltså den tekniska utrustningen eleverna möjlighet att undersöka sambandet mellan den grafiska och den fysiska representationen av derivata. Enligt Berry och Nyman (2003) bidrog teknologin till att rikta elevernas uppmärksamhet mot begrepp istället för beräkningar och de menar att eleverna under aktiviteten visade prov på en alltmer utvecklad grafisk förståelse för derivata.

Berry och Nymans (2003) intervention varade under en lektion och resultatet baserades på observationer. Gemensamt för interventionerna av Habre och Abboud (2006) och Goerdts (2007) var att båda prövade effekten av att, under en hel kurs inom derivata, introducera och arbeta med begrepp inom multipla representationer. I studien av Habre och Abboud (2006) låg extra stort fokus på den grafiska representationen. Kursen innehöll i princip inga föreläsningar utan eleverna gavs istället mycket tid att diskutera olika problemställningar. Datorer användes kontinuerligt och eleverna hade också tillgång till ett datorlabb. Interventionen utvärderades via intervjuer och skriftliga test och Habre och Abboud (2006) rapporterar att designen gynnade de starkaste eleverna som efter kursens slut uppvisade en väl utvecklad konceptuell förståelse för derivata. För svagare elever var designen däremot inte framgångsrik. Jämfört med det traditionella upplägg (föreläsningar och övningsuppgifter) som använts tidigare var det enligt Habre och Abboud (2006) en ovanligt stor andel studenter som antingen hoppade av kursen i förtid eller underkändes vid examinationen.

I studien av Goerdts (2007) användes en traditionell undervisningsmetod i form av föreläsningar med efterföljande uppgifter. Under interventionen fokuserade dock såväl föreläsningar som uppgifter på att växla mellan derivatans olika representationer och många av uppgifterna tog sin utgångspunkt i en naturlig kontext. Eleverna hade under hela kursen tillgång till grafritande miniräknare och de uppmuntrades att använda den både på och utanför föreläsningar. För att utvärdera effekten av interventionen jämför Goerdts (2007) med en kontrollgrupp där föreläsningar och uppgifter företrädesvis fokuserat på den symboliska representationen utan stöd av miniräknare. Goerdts (2007) analyserar både kvantitativa och kvalitativa data och konstaterar att elevernas lärande styrs av hur de undervisas. På uppgifter som innefattade att kunna växla mellan derivatans olika representationer presterade eleverna som deltagit i interventionen ett signifikant högre resultat jämfört med eleverna från kontrollgruppen.

Asiala et al. (1997) genomförde en studie med syfte att undersöka elevers grafiska förståelse för derivata. Studien avsåg också att pröva huruvida en specifik undervisningsdesign ledde till en mer utvecklad förståelse jämfört med en traditionell undervisning baserad på föreläsningar. Studien sträckte sig över en hel kurs och i likhet med Habre och Abboud (2006) utgjorde datoraktiviteter och elevdiskussioner bärande inslag under interventionen. I studien av Asiala et al. (1997) var emellertid undervisningens design grundad i en konstruktivistisk teori (APOS, se t.ex. Dubinsky & McDonald, 2001). Undervisningen följde dessutom en cyklisk process i tre steg: datoraktiviteter (1), diskussioner (2) och uppgifter (3). Avsikten var att eleverna i de tre stegen skulle konstruera kunskap (1), reflektera över kunskapen (2) samt stärka kunskapen (3). I syfte att utvärdera elevernas lärande intervjuades 24 elever som deltagit i traditionell undervisning och 17 elever som deltagit i interventionen. Enligt Asiala et al. (1997) uppvisade de senare en betydligt mer utvecklad förståelse för derivata i den grafiska representationen.

## 2.7 Litet fokus på innehållets behandling

Som framgått i detta kapitel har den matematikdidaktiska forskningen sedan lång tid tillbaka beskrivit derivata som ett problematiskt begrepp för många elever. Tidigare studier har återkommande rapporterat hur elevernas kunskaper är begränsade till ett antal algebraiska regler och flera forskare har efterlyst en mer utvecklad förståelse för derivata i den grafiska

representationen. Även om det genomförts ett antal interventionsstudier som syftat till att utveckla elevernas grafiska förståelse för derivata är de, i relation till det uttryckta behovet och i jämförelse med det totala antalet studier inom området, förhållandevis få. Flera studier har dessutom haft liknande utgångspunkter med avseende på både metod och teori. Exempelvis innehöll samtliga fyra studier som refererades till ovan (Asiala et al, 1997; Berry & Nyman, 2003; Goerdt, 2007; Habre & Abboud, 2006) betydande inslag av teknologi och samtliga fyra hade sin teoretiska grund i konstruktivismen. Studierna svarar därmed på frågor som: Vilka kunskaper ges eleverna möjlighet att utveckla (själva konstruera) när undervisningen innehåller vissa typer av aktiviteter och tekniska hjälpmedel? I och med att betydelsen av organisation, aktiviteter och tekniska hjälpmedel är det som studeras blir innehållet, och i synnerhet dess behandling, i sig sekundärt. En del studier (t.ex. Goerdt, 2007; Habre & Abboud, 2006) har förvisso tagit innehållet som utgångspunkt men i första hand har det inneburit ett kvantitativt fokus; att helt enkelt ägna *mer* tid än brukligt åt vissa innehållsiga aspekter av derivata. Denna typ av interventioner har dessutom ofta sträckt sig över långa tidsperioder såsom en hel kurs. Kvar finns därmed ett behov av studier som undersöker betydelsen av innehållets behandling i ett kortare tidsperspektiv och i en mer kvalitativ mening. Studier vars resultat på ett mer finkalibrigt sätt berör frågor om hur derivatabegreppets behandling under enskilda lektioner och enskilda undervisningsmoment påverkar elevernas lärande.

## 2.8 Vilket innehåll och varför?

Den övervikt på algebra och procedurkunskaper som beskrivs i tidigare forskning överensstämmer till stor del med erfarenheterna hos den lärargrupp som deltog i den inledande studien inom denna avhandling. Både tidigare forskningsresultat och lärarnas erfarenheter pekade därmed ut derivata i den grafiska representationen som ett relevant område att studera närmare. Forskningsansatsen *learning study* innebar emellertid att avgränsa innehållet ytterligare och det beslutades att inrikta studien mot relationen mellan grafen till en funktion och grafen till funktionens derivata. Lärarna hade tidigare undervisat detta innehåll vid flera tillfällen och samtidigt som det ansågs vara avancerat bedömdes det också ha potential att utveckla elevernas förståelse för derivata i en vidare mening. Bedömningen var baserad på undervisningserfarenhet men den fick också stöd i tidigare forskning.

Haciomeroglu et al. (2010) visar till exempel hur uppgifter som behandlar relationen mellan grafen till en funktion och grafen till funktionens antiderivata ger tillfälle att kombinera den symboliska och den grafiska representationen av derivata. Berry och Nyman (2003) hävdar å sin sida att innehållet är synnerligen väl anpassat för att utveckla elevernas begreppsliga förståelse för derivata i den grafiska representationsformen:

We would argue that making connections of the properties of graphs, i.e., going from graph of a function to the graph of the derived function and especially reversing the process, builds a better understanding of the underlying graphical concepts of calculus (Berry & Nyman, 2003, s.485).

Vilka grafiska begrepp som berörs kan specificeras genom att studera Zandieh's (2000) teoretiska ramverk som presenterades ovan. I detta utgör tangentens lutning objektet i det andra lagret av derivatans grafiska representationsform. Processen i det tredje lagret innebär att i varje punkt på grafen till en funktion föreställa sig tangentens lutning och därigenom erhålla objektet i tredje lagret: grafen till funktionens derivata. Relationen mellan grafen till en funktion och grafen till funktionens derivata är nära knuten till processen i det tredje lagret men den innefattar även de båda objekten i andra respektive tredje lagret. Att behandla detta innehåll i undervisningen innebär därmed att simultant behandla derivatan i en punkt och derivatan som en funktion. Denna tvärsidiga tolkning av derivata är något som i senare studier har pekats ut som särskilt problematiskt för elever (Park, 2013, 2015).

Relationen mellan grafen till en funktion och grafen till funktionens derivata är ett innehåll som återkommande har studerats i tidigare forskning. Tidigare studier har både undersökt elevers förståelse (t.ex. Aspinwall & Shaw, 2002; Aspinwall et al., 1997; Haciomeroglu et al., 2010; Nemirovsky & Rubin, 1992) liksom hur olika undervisningsmetoder i kombination med digitala verktyg kan bidra till att utveckla elevers förståelse (t.ex. Berry & Nyman, 2003; Ubuz, 2007). Även denna avhandling syftar till att undersöka hur elevernas förståelse kan utvecklas men i enlighet med det behov som beskrevs i avsnittet ovan är utgångspunkten inte att pröva effekten av digitala verktyg eller specifika undervisningsmetoder. Istället riktas fokus mot hur innehållet behandlas i undervisningen och hur detta i sin tur påverkar vilka aspekter som synliggörs för eleverna.





## Kapitel 3: Teoretiska utgångspunkter och studiernas design

I detta kapitel presenteras inledningsvis det teoretiska ramverk som använts inom avhandlingen – variationsteorin (Marton, 2015; Marton, Runesson & Tsui, 2004). Presentationen är av översiktlig karaktär och fokuserar huvudsakligen de begrepp som senare blir centrala inom de empiriska studierna. I kapitlet följer därefter en metoddiskussion. Denna startar i ett allmänt perspektiv på relationen mellan undervisning och lärande för att sedan riktas in på de forskningsansatser som använts inom avhandlingen. Sist i kapitlet beskrivs studiernas genomförande. I samband med detta framkommer också vilken roll variationsteorin haft i studiernas olika faser, såsom design av undervisning och analys av elevernas lärande.

### 3.1 Variationsteori

Att studera betydelsen av innehållets behandling innefattar dels frågan om vilka aspekter av innehållet som är närvarande i undervisningen, dels frågan om vilka av dessa aspekter som utgör förgrund respektive bakgrund i undervisningen. Båda dessa frågor kan studeras och analyseras med hjälp av variationsteori, en innehållsorienterad teori om lärande som har vuxit fram ur den fenomenografiska forskningsansatsen (Marton, 1981, 2015; Marton & Booth, 1997). Ontologiskt innebär det ett icke-dualistiskt synsätt. Utgångspunkten är att det endast existerar en värld, alltså inte en verklig värld ”där ute” och en subjektiv värld ”där inne” (Marton & Booth, 1997). Eftersom det inte finns någon subjektiv värld är inte kunskap något som ”konstrueras” av individen. Enligt variationsteorin erhålls kunskap genom att erfara världen på ett nytt sätt vilket innebär att urskilja nya aspekter av i världen förekommande fenomen (Marton & Booth, 1997).

Den grundläggande utgångspunkten inom fenomenografien är att människor erfar olika fenomen i vår omvärld, till exempel begreppet derivata, på kvalitativt skilda sätt. Varje fenomen har ett stort antal aspekter men det är endast ett begränsat antal av dem som definierar fenomenet och särskiljer det från andra fenomen (Pang, 2003). Ett mer kvalitativt erfalande innebär att

urskilja fler av de aspekter som definierar fenomenet och dessutom relatera dem på ett relevant sätt till varandra (Marton & Booth, 1997).

Medan fenomenografi är en ansats som används för att beskriva kvalitativa skillnader mellan människors olika sätt att erfara ett fenomen är variationsteorin en teori om vilka förutsättningar som behövs för lärande. Att erfara ett fenomen på ett nytt, mer kvalitativt sätt, är enligt Marton och Booth (1997) vad lärande ytterst handlar om. Undervisningens roll är att skapa möjligheter till detta och variationsteori kan användas både som en guidande princip för undervisningens design och som ett redskap för att analysera relationen mellan undervisning och lärande.

Centralt inom variationsteorin är lärandeobjektet vilket svarar mot vad som är avsett att lära. Marton et al. (2004) beskriver lärandeobjektet på följande sätt:

[...] the object of learning is a capability, and any capability has a general and a specific aspect. The general aspect has to do with the nature of the capability, such as remembering, discerning, interpreting, grasping, or viewing, that is, the acts of learning carried out. The specific aspect has to do with the thing or subject on which these acts are carried out, such as formulas, engineering problems, simultaneous equations [...] (Marton et al., 2004, s.4).

Lärandeobjektet är alltså tvåsidigt. Dels består det av ett specifikt innehåll vilket benämns som det *direkta* lärandeobjektet (t.ex. relationen mellan grafen till en funktion och grafen till funktionens derivata). Dels består det av en generell förmåga, kopplad till innehållet, vilken benämns som det *indirekta* lärandeobjektet (t.ex. kunna *tolka* relationen mellan grafen till en funktion och grafen till funktionens derivata).

Ett lärandeobjekt definieras av de aspekter som är kritiska. Detta svarar mot de aspekter av innehållet som är nödvändiga för eleverna att urskilja för att de ska utveckla den förmåga som beskrivs av lärandeobjektet. Begreppet kritiska aspekter kan exemplifieras via en studie om negativa tal som återfinns i Kullberg (2010). Det indirekta lärandeobjektet innebar där att kunna addera och subtrahera negativa tal. Det eleverna behövde urskilja, de kritiska aspekterna, utgjordes i detta fall av minustecknets två olika betydelser, subtraktion som skillnad, storleken hos tal givna på tallinjen samt att kommutativa lagen inte var tillämpbar.

De kritiska aspekterna hos ett lärandeobjekt är inte desamma för alla elever. Grundat i empiriska undersökningar visar emellertid Marton (1981) att

det finns ett begränsat antal (i regel 3-5) kvalitativt skilda sätt att erfara ett fenomen. På samma sätt finns det i regel ett begränsat antal kritiska aspekter när ett lärandeobjekt introduceras i en elevgrupp. Studien ovan (Kullberg, 2010), utgör med sina fyra kritiska aspekter ett typiskt exempel.

### 3.1.1 Mönster av variation

Enligt variationsteorin är möjligheterna att urskilja olika aspekter av ett innehåll beroende av på vilket sätt de varierar respektive hålls invarianta i undervisningen (Marton, 2015; Marton et al., 2004). De aspekter som undervisningen avser att synliggöra ska behandlas enligt en viss systematik som beskrivs genom tre olika mönster av variation: kontrast, generalisering och fusion. Det första mönstret är karaktäristiskt för variationsteorin och Marton (2015) menar att det utgör motsatsen till det klassiska, induktiva sättet att undervisa. I det senare hålls den aspekt som ska synliggöras invariant medan andra aspekter tillåts variera. Variationsteorins mest fundamentala idé bygger istället på att vi urskiljer de aspekter som varierar. En kontrast innebär därför att den aspekt som ska synliggöras varierar mot en invariant bakgrund. Mönstret generalisering innebär att den fokuserade aspekten hålls invariant medan bakgrunden varierar. Detta svarar alltså mot det induktiva sättet att undervisa men notera att syftet är annorlunda. I samband med generaliseringen är inte målet att aspekten ska urskiljas (som vid induktiv undervisning) utan att den ska separeras från andra aspekter. Det sista variationsmönstret, fusion, innebär att flera kritiska aspekter varierar simultant. Att samtidigt kunna urskilja och fokusera på flera aspekter utgör målet med lärandet. I enlighet med resonemanget ovan stipulerar dock variationsteorin att den mest effektiva vägen till ett simultant urskiljande är att först behandla de kritiska aspekterna en i taget.

### 3.1.2 Tre olika lärandeobjekt

Även om ett lärandeobjekt på förhand är tydligt definierat och avgränsat kommer också andra aspekter av innehållet än de som är kritiska att vara närvarande (och variera) i undervisningen. Detta gör att lärandeobjektet kan beskrivas och analyseras ur tre olika perspektiv: lärarens, forskarens och elevernas (Marton, 2015; Marton et al, 2004; Runesson, 2017). De aspekter av lärandeobjektet som vid undervisningens design lyfts fram som kritiska utgör det *avsedda* lärandeobjektet. Detta är lärandeobjektet ur lärarens perspektiv och

beskriver vilka aspekter av innehållet som undervisningen avser att synliggöra. Det eleverna faktiskt lär sig, det vill säga vilka aspekter de verkligen urskiljer, utgör det *erfarna* lärandeobjektet. Som beskrivs av Marton et al. (2004) ligger det avsedda och det erfarna lärandeobjektet i bästa fall nära varandra men de kan också vara mycket olika. Många (eller vissa) av eleverna kan helt enkelt rikta sin uppmärksamhet mot andra aspekter än de som läraren avser. Överensstämmelser och avvikelser mellan det avsedda och det erfarna lärandeobjektet kan förklaras genom det *iscensatta* lärandeobjektet. Detta är forskarens analys av vilka lärandemöjligheter som erbjuds i undervisningen. Analysen grundar sig på innehållets behandling i termer av vilka aspekter som är närvarande och i vilken utsträckning dessa, via olika mönster av variation, synliggörs i undervisningen. Vilka aspekter av innehållet som hamnar i förgrunden under en lektion påverkas av både elevernas sätt att agera liksom av lärarens sätt att hantera detta. Det iscensatta lärandeobjektet kan därför, på samma sätt som det erfarna, skilja sig avsevärt från det avsedda.

### 3.2 Att studera relationen mellan undervisning och lärande

I introduktionskapitlet konstaterades att det finns ett uttryckt behov av studier som undersöker relationen mellan undervisning och lärande. Det konstaterades emellertid också att denna relation är komplicerad att mäta och att tidigare forskning pekar på flera utmaningar och svårigheter. Något som återkommande framställs som ett problem för studier inom området är avsaknaden av användbara teorier (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2015; Hiebert & Grouws, 2007; Nuthall, 2004). Den sista delen av 1900-talet vilade matematikdidaktiken tungt på konstruktivismen (Björkkvist, 1993) och detta gäller i synnerhet matematikdidaktiska studier inom derivata (Artigue, Batanero & Kent, 2007). Under de senaste decennierna har allt fler matematikdidaktiska studier kommit att referera till det sociokulturella perspektivet. Både konstruktivismen och det sociokulturella perspektivet redogör dock för lärande på en övergripande nivå och medan Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer och Schauble (2003) beskriver konstruktivismen som svår att använda i samband med undervisningsdesign menar Cobb (2007) att detsamma gäller det sociokulturella perspektivet. Inom denna avhandling används variationsteori vilken, i kraft av dess beskrivning av vad lärande innebär, också erbjuder möjligheter att designa en undervisning som är

teoretiskt grundad (Carlgren, 2017). Variationsteorin utgör därmed ett alternativ till det som efterfrågas av såväl Hiebert och Grouws (2007) som Nuthall (2004); en teori som kan användas för att analysera både undervisning och lärande liksom relationen dem emellan.

Ett annat spörsmål gällande studier som rör relationen mellan undervisning och lärande är vilken omfattning en studie bör ha. Å ena sidan kan det argumenteras för att lärande sker över tid och är beroende av många faktorer (Hiebert & Grouws, 2007). Å andra sidan riskerar studier som sträcker sig över lång tid och genererar mycket data att gå miste om detaljerna (Nuthall, 2004; Shavelson, Phillips, Towne & Feuer, 2003). Ball och Rowan (2004) beskriver genomförandet av en omfattande studie som avsåg mäta undervisningens kvalitet. De menar att då deras intresse bestod i att ”dokumentera elevers möjligheter till lärande” samlade de in data om lärares undervisning på daglig basis. Hiebert och Grouws (2007) hävdar att en lektion utgör en lämplig tidsrymd. Den är tillräckligt omfattande för att det ska vara möjligt att fånga interaktionen mellan olika aspekter av undervisningen men samtidigt tillräckligt avgränsad för att den ska vara möjlig att analysera. Problemet med att fokusera på en enskild lektion är enligt Hiebert och Grouws (2007) att elevers lärande inte alltid kan hänföras till en specifik lektion. De ser därför även en lektionsserie som behandlar ett visst ämnesinnehåll eller ett visst begrepp som en lämplig avgränsning.

Clement (2013) menar att den matematikdidaktiska forskningen inte i tillräckligt hög utsträckning bidrar till att utveckla praktiken i form av ett ökat lärande hos eleverna. För studier om relationen mellan undervisning och lärande använder Nuthall (2004) begreppet pragmatisk validitet vilket syftar på huruvida de metoder som används producerar resultat som är praktiskt användbara för lärare. Han påtalar att detta ofta inte är fallet och att det finns ett gap mellan forskning om effektiv undervisning och undervisningspraktiken; medan forskare förväntar sig att deras resultat ska forma praktiken betraktar lärare i regel forskningen som för generell och teoretisk. Något som föreslagits i syfte att öka den ämnesdidaktiska forskningens relevans för praktiken är att i studier om undervisning och lärande också involvera lärare (Carlgren, 2017; Hiebert, Gallimore & Stigler, 2002; Hiebert & Morris, 2012).

I likhet med Clement (2013) menar Hiebert et al. (2002) att den utbildningsvetenskapliga forskningen inte i tillräckligt hög grad bidrar till att utveckla och förbättra undervisningen. Enligt Hiebert et al. (2002) kan

orsaken spåras till historien. Under lång tid var studier som strävade efter att isolera variabler och utföra kvantitativa jämförelser den accepterade normen. Hiebert et al. (2002) beskriver hur detta innebar att forskare och lärare delades i två olika yrkesgrupper. Medan forskare blev ansvariga för att generera kunskap blev det lärarnas ansvar att tillämpa kunskapen. Enligt Hiebert et al. (2002) har detta system kommit att bli ett problem, särskilt då de kunskaper som dessa forskningsmetoder producerar är mycket svåra att tillämpa för lärare. Hiebert et al. (2002) menar att processen att bygga en kunskapsbas för lärarprofessionen inte bara ska involvera forskare utan också lärare och att denna process dessutom ska utgå från lärares kunskaper. Samma resonemang förs av såväl Hiebert och Morris (2012) som Carlgren (2017). De hävdar att istället för en forskning som levererar kunskaper som ska förbättra lärarna (vilket i sin tur ska förbättra undervisningen), bör forskningen istället genomföras i samarbete mellan forskare och lärare och ta sin utgångspunkt i undervisningen.

Hiebert et al. (2002) och Hiebert och Morris (2012) pekar på japanska *lesson study* (Lewis, 2000; Lewis, Perry & Murata, 2006) och menar att denna modell är ett exempel på en ansats som skulle kunna utgöra grunden i ett system där lärare är aktiva deltagare i forskningen. Carlgren (2017) använder å sin sida istället *learning study* som exempel på en modell som kan svara mot detta behov. Learning study kan ses som en utveckling, eller snarare en modifiering, av lesson study och de två modellerna har flera likheter, särskilt när det gäller det praktiska genomförandet. Det finns emellertid också ett antal skillnader som, om syftet är ämnesdidaktisk forskning, talar till learning studys fördel. Dels att ansatsen är teoretiskt grundad och dels att ansatsen är tydligt inriktad på att studera en förmåga kopplad till ett specifikt ämnesinnehåll.

### 3.3 Forskningsansatserna i avhandlingens två empiriska studier

Den första av avhandlingens två empiriska studier genomförs i form av en learning study vilket är en klassrumsbaserad forskningsansats som utvecklades för knappt två decennier sedan via ett samarbete mellan forskare från Sverige och Hong Kong (Kullberg, 2010; Lo, Marton, Pang & Pong, 2004). Med utgångspunkt i en teoretiskt grundad undervisning och en iterativ och cyklisk forskningsdesign är syftet att beskriva på vilket sätt innehållets behandling påverkar elevernas lärande. Forskningsansatsen har prövats i ett stort antal

studier och visat sig ge bestående effekter på lärares undervisning (Elliot, 2012; Holmqvist, 2010) liksom kunskaper om på vilket sätt undervisningens design påverkar elevernas lärande (Lo, 2012; Runesson, 2017). Enligt Pang och Ki (2016) har emellertid många av de studier som hittills genomförts riktat sig mot yngre elever och lärandeobjekten har i regel inte varit av komplex karaktär.

Carlgren (2012) förespråkar att learning study ska betraktas som motsvarigheten till den kliniska forskningen inom medicin. Vanligare är emellertid att ansatsen beskrivs som en hybrid av en lesson study och ett design experiment (se t.ex. Marton & Pang, 2003, 2006). En learning study innebär ett samarbete mellan lärare och forskare som är centrerat kring ett specifikt ämnesinnehåll. Detta innehåll svarar, i enlighet med beskrivningen av variationsteorin ovan, mot det direkta lärandeobjektet. Valet av innehåll baseras på att det är något som lärarna anser som särskilt relevant men som eleverna samtidigt har svårt att lära. Den eller de förmågor, kopplade till innehållet, som undervisningen avser att utveckla svarar i sin tur mot det indirekta lärandeobjektet.

Inom en learning study undervisas samma lärandeobjekt i flera elevgrupper efter varandra. De deltagande lärarna undervisar sina ordinarie grupper medan övriga lärare samt forskare(n) observerar lektionerna vilka även videofilmas. I de fall en learning study, likt inom föreliggande avhandling, är grundad i variationsteori designas undervisningen för den första elevgruppen med utgångspunkt i de aspekter av innehållet som är *presumtivt* kritiska. Bedömningen av vilka aspekter som är presumtivt kritiska baseras inledningsvis på en analys av ämnesinnehållet, lärarnas erfarenheter och tidigare ämnesdidaktiska forskningsresultat. De ringas därefter in ytterligare genom att innan undervisningen genomföra tester och/eller intervjuer med de i studien deltagande eleverna. Efter undervisningen genomför eleverna ett test som avser fånga och beskriva deras lärande, det vill säga det erfarna lärandeobjektet. Resultatet av testet i kombination med lektionsobservationer ligger till grund för att revidera designen inför nästkommande grupp. Den reviderade designen genomförs och processen med att revidera och genomföra undervisningen upprepas därefter med varje ny elevgrupp enligt ett cykliskt förlopp.

### 3.3.1 Om learning study som forskningsansats

Learning study kan ses i relation till de fyra forskningsmetoder om sambandet mellan undervisning och lärande som granskas och diskuteras av Nuthall (2004). Det första exemplet rör studier av framgångsrika lärare (t.ex. Hopkins & Stern, 1996). Nuthalls (2004) främsta invändning mot denna ansats är att den blandar ihop bra undervisning med vad som kan betecknas som goda egenskaper hos lärare. Denna sammanblandning känns igen i såväl Carlgren (2017) som Hiebert och Morris (2012) vilka hävdar att undervisningsutveckling ofta innebär att istället försöka utveckla lärarna. I en learning study fokuseras innehållet och dess behandling medan egenskaper hos läraren inte berörs överhuvudtaget. Ansatsen kan därmed i en mening sägas försvara sig väl mot kritiken om att fokus hamnar på läraren istället för undervisningen. Detta betyder emellertid inte att det i en learning study går att bortse från lärarens inverkan. Baumert et al. (2010) visar att samtidigt som lärarens ämnesdidaktiska kunskaper är det som har störst påverkan på elevernas lärande är också lärarens ämneskunskaper av betydelse i undervisningssituationen. Även om ämnesdidaktiken, i termer av innehållets behandling, är det som fokuseras i en learning study utgör de deltagande lärarnas ämneskunskaper därmed en bakomliggande variabel som indirekt kan komma att påverka resultatet.

Nuthalls (2004) andra exempel rör den så kallade process-produkt-forskningen vilken innebär att frekvensen av en specifik variabel, till exempel hur många öppna frågor en lärare ställer eller den tid som ägnas åt en viss typ av lektionsaktivitet, korreleras mot elevers resultat på standardiserade tester. Problemet med dessa studier är enligt Nuthall (2004) att de, i syfte att öka generaliserbarheten, bortser från kontextuella detaljer. Effekten av frekvensen av en viss variabel måste dock ses i sitt sammanhang, det går exempelvis inte att säga att ”ju mer öppna frågor desto bättre”. Process-produkt-forskningen kritiseras även av Schoenfeld (2007) som menar att denna typ av studier inte förklarar varför något fungerar. Då en learning study utgår från innehållet kan ansatsen sägas fokusera en variabel. En viktig skillnad är emellertid att variabeln inte är kvantitativ; resultatet beskriver inte hur mycket (eller lite) något bör göras utan hur. Analysen av undervisningen syftar till att beskriva just *varför* ett visst sätt att behandla innehållet gynnar elevernas lärande. En learning study delar emellertid ”problemet” med kontexten. På samma sätt som frekvensen av en viss variabel måste ses i sitt sammanhang måste också



innehållets behandling ses i sitt sammanhang. En learning study innefattar normalt 3-4 elevgrupper vilka undervisas i sina ordinarie klasser och av sina ordinarie lärare. De revideringar som genomförs i designen utgår från en elevgrupp men testas därefter på en helt annan. Det är därmed svårt att avgöra i vilken utsträckning andra faktorer (än innehållets behandling i undervisningen) påverkar elevernas lärande.

En learning study har beskrivits som en hybrid av en lesson study och ett design experiment. Nuthalls (2004) tredje exempel behandlar just design experiments vilka innebär en cyklisk process av undervisningsdesign, genomförande, analys och revidering (Brown, 1992; Cobb et al., 2003). Svagheter hos design experiments är enligt Nuthall (2004) att de spänner över relativt lång tid och innefattar en mängd okontrollerade variabler; vad i processen som har genererat lärandet går därmed inte att specificera. En learning study har flera inslag som är gemensamma med design experiments. En viktig skillnad är emellertid omfattningen. Medan ett design experiment kan sträcka sig över flertalet veckor och omfatta många elevgrupper (Cobb et al., 2003; Collins, Joseph & Bielaczyc, 2004; Nuthall, 2004) är en learning study begränsad till en eller ett fåtal lektioner där en elevgrupp fokuseras i taget. Som beskrevs ovan menar Hiebert och Grouws (2007) att vid studier av relationen mellan undervisning och lärande är en lektion en rimlig omfattning då den är möjlig att analysera. Detta skulle alltså tala till learning studys fördel. Samtidigt som den snävare omfattningen öppnar för en mer detaljerad analys utgör den emellertid också en begränsning på så sätt att de revideringar som görs grundar sig på ett litet antal elever.

Som sitt sista exempel tar Nuthall (2004) upp lärare som beforskar sin egen praktik (se t.ex. Noffke & Somekh, 2009). Han hävdar att också denna metod har flera begränsningar:

I have already made the point that teachers cannot be aware of critical elements in the teaching-learning process in their own classrooms unless they already have a clear understanding of what to look for and have additional ways of observing or recording the experience of individual students. Working on their own, teachers can only see the classroom through their own eyes and can only occasionally see what students are learning (Nuthall, 2004, s.14).

Även en learning study innebär att lärare forskar på sin egen praktik. Ansatsen innehåller dock flera inslag som är högst relevanta i förhållande till den kritik som Nuthall (2004) riktar mot denna typ av studier. Dels är den teoretiskt

grundad och möter kravet om att kunna specificera vad som studeras och analyseras. Ansatsen innefattar också omfattande observationer; förutom den undervisande läraren observeras lektionerna av både lärare och forskare och dessutom videofilmas de för att kunna granskas i efterhand. Vid sidan om observationer utvärderas elevernas lärande också via tester som genomförs före och efter interventionen. Sammantaget kan alltså en learning study sägas innehålla många av de delar som Nuthall (2004) menar saknas inom lärares praktiknära forskning. Liksom vid jämförelsen med process-produkt-forskningen respektive design experiments kan dock småskaligheten och den naturliga kontexten återigen pekas ut som potentiella hot mot såväl den interna som den externa validiteten (Shadish, Cook & Campbell, 2002).

### **3.3.2 Bakgrund och beskrivning av forskningsansatsen i avhandlingens andra studie**

Brown (1992) beskriver hur hon övergick från experiment till klassrumsforskning och design experiments på grund av svårigheterna med att studera lärande i laboratorieliknande miljöer. Metodvalet vid undersökningar av relationen mellan undervisning och lärande är dock inte givet och bland forskare kan det inte sägas råda konsensus kring vilken typ av studier som är mest lämpliga. Shavelson et al. (2003) kritiserar exempelvis design experiments och hävdar att metodens komplexitet och det stora antalet okontrollerade variabler gör det svårt att påvisa vad som orsakat resultatet. Shavelson et al. (2003) menar att design experiments har en plats att fylla inom den utbildningsvetenskapliga forskningen men de anser samtidigt att metoden bör kombineras med andra ansatser i syfte att underbygga de kunskapsanspråk som görs. Shavelson et al. (2003) citeras av Jaworski (2004) som ser framför sig hur en liknande kritik som den mot design experiments kan riktas även mot learning study.

Torgerson och Torgerson (2001) argumenterar för fler randomiserade studier inom utbildningsvetenskaplig forskning. De ger exempel, både på interventioner som uppvisat en effekt och på interventioner som inte gjort det, och menar att eftersom studierna inte tillämpat randomisering kan resultaten inte anses tillförlitliga. Torgerson och Torgerson (2001) pekar på det faktum att i de fall deltagarna i en studie inte randomiseras till en intervention (respektive kontrollgrupp) kan en eventuell skillnad mellan grupperna lika gärna orsakas av andra faktorer. På motsvarande sätt kan en

icke uppmätt skillnad i själva verket existera men döljas av att grupperna gick in i studien med olika förutsättningar.

Nuthall (2004) hävdar att om syftet är att undersöka relationen mellan undervisning och lärande är småskaliga klassrumsstudier att föredra framför storskaliga studier. Samtidigt påtalar han att klassrumsstudier inte är kompletta och för att öka generaliserbarheten behöver de replikeras i diverse olika kontexter. På liknande sätt argumenterar Schoenfeld (2007), via jämförelser med området medicin, för en utbildningsvetenskaplig forskning i tre faser. Den första fasen innebär interventionsstudier av typen design experiments. I den andra fasen testas resultat och hypoteser från den första fasen i olika kontexter och i den tredje fasen genomförs mer storskaliga undersökningar (Schoenfeld, 2007). I linje med detta resonemang innebär den andra empiriska studien inom föreliggande avhandling att två av de undervisningsdesigner som genereras i den första studien genomförs igen i nya elevgrupper. Den andra studien bygger därmed på den första och avsikten är att pröva hållbarheten av resultaten från den första studien.

Uppläggningsen av den andra studien baseras på den typ av design som Shadish et al. (2002) benämner som ”alternative-treatments design with pretest” (s.261). Jämfört med den första studien innebär detta att de två undervisningsdesignerna nu implementeras och testas under mer experimentella betingelser. De deltagande eleverna randomiseras till en av de två designerna och de undervisas inte av sina ordinarie lärare. Uppläggningsen av den andra studien tar i flera fall fasta på de förslag och på den kritik som i tidigare forskning framförts gällande studier av relationen mellan undervisning och lärande (Hiebert & Grouws, 2007; Nuthall, 2004; Schoenfeld, 2007; Shavelson et al., 2003; Torgerson & Torgerson, 2001). Därav till exempel valet att som komplement till learning study använda en forskningsansats som innefattar ett mer experimentellt upplägg och där resultatet också baseras på analyser av kvantitativa data. En utförligare beskrivning av vilka likheter och skillnader som finns mellan de två studierna och på vilket sätt den andra studien utformas för att komplettera den första ges i de följande avsnitten.

### 3.4 Genomförande av studie 1

Avhandlingen har sitt ursprung i ett projekt finansierat av Vetenskapsrådet (dnr 2011-5273) som syftade till att öka skolans kunskapsbas genom att forskarutbilda verksamma lärare. Den forskarutbildning inom vilken denna

avhandling tog sin början hade learning study som inriktning. Valet av forskningsansats för den första studien var därmed bestämt på förhand och utgångspunkten var att studien skulle genomföras på den skola där den till forskarutbildningen antagna läraren arbetade. I det aktuella fallet betydde det en gymnasieskola i en mindre kommun belägen i sydvästra Sverige.

### 3.4.1 Urval

Då en learning study innebär ett samarbete mellan lärare och forskare bestod det första steget av att rekrytera lärare till studien. Redan i samband med ansökan till forskarutbildningen tillfrågades tre lärare på den skola forskaren tjänstgjorde om de ville delta i en kommande studie. Samtliga ställde sig positiva till denna förfrågan. Det fanns vid tillfället ett drygt tiotal matematiklärare på den aktuella skolan och urvalet gjordes utifrån en kombination av utbildning, undervisningserfarenhet och programtillhörighet. Alla tre lärarna hade en lärarutbildning med minst tre terminers matematikstudier och dessutom åtminstone cirka 20 års erfarenhet av undervisning. De arbetade också alla inom gymnasieskolans teoretiska program vilket var en förutsättning eftersom förslaget från forskaren, bland annat baserat på svenska elevers resultat i den internationella jämförelsen TIMSS advanced (Skolverket, 2009), var att inrikta studien mot begreppet derivata.

I studien deltog elever från teknikprogrammet (TE) årskurs 2, naturvetenskapsprogrammet (NA) årskurs 2, samhällsvetenskapliga programmet (SP) årskurs 3 samt idrott- och ledarskapsprogrammet (IL, vilket var ett lokalt utformat program näraliggandes SP) årskurs 3. Studien genomfördes i skarven för införandet av den nya gymnasiereformen Gy 11 och medan TE och NA programvis läste kursen Matematik 3 enligt denna reform läste SP och IL gemensamt kursen Matematik C enligt den gamla reformen Lpf 94. För enkelhetens skull kallas hädanefter gruppen med elever från SP/IL enbart SP. Totalt deltog alltså tre elevgrupper vilka inom sina respektive kurser undervisades av de tre i studien deltagande lärarna. Gruppen från TE bestod av 27 elever, gruppen från NA bestod av 23 elever och gruppen från SP bestod av 21 elever. På grund av frånvaro reducerades TE till 26 elever och SP till 19 elever. Vid studiens genomförande var TE och NA ungefär mitt i kurs 3 medan SP var en bit in på andra halvan av kurs C.

### 3.4.2 Datainsamling

Det empiriska materialet samlades in före, i anslutning till och efter forskningslektionernas genomförande. Under våren 2012, ett år före learning studyn, genomfördes en pilotstudie där forskaren via fenomenografiska intervjuer (Marton & Booth, 1997) undersökte fyra elevers sätt att resonera kring problem relaterade till derivata. Ansatsen innebär att intervjuaren intar ett andra ordningens perspektiv (Marton, 2015; Marton & Booth, 1997). Intresset ligger då inte i att undersöka huruvida elevens svar eller resonemang är korrekt utan i att undersöka hur eleven erfar problemet. Erfarandet återspeglas i elevens påståenden och handlingar och genom att betrakta dessa är syftet att beskriva vilka aspekter av innehållet eleven urskiljer (Marton & Booth, 1997). Eleverna som deltog i pilotstudien tillhörde naturvetenskapliga programmets dåvarande årskurs 2 och skulle inte delta i den kommande learning studyn. De hade dock samma bakgrund och pilotstudien genomfördes som ett steg i processen att försöka kartlägga elevers uppfattningar om derivata i den grafiska representationsformen. Intervjuerna pågick i cirka 25 minuter vardera och spelades in med videokamera.

I mars 2013, ungefär tio dagar innan forskningslektionerna, genomförde forskaren intervjuer med sex av de i studien deltagande eleverna. En pojke och en flicka från TE, NA respektive SP intervjuades i cirka 20 minuter och samtalet spelades in med diktafon. Uppläggnen av intervjuerna kan beskrivas med det som Goldin (2000) benämner som ”task-based interview” vilket innebär att intervjun är centrerad kring en sekvens av specifika uppgifter. I det aktuella fallet utgick intervjun från sju frågor (bilaga 1) vilka behandlade funktioner och derivator.

Forskningslektionerna genomfördes under en period av två veckor i mars-april 2013. Varje cykel innefattade två lektioner á 60 minuter och de tre cyklerna genomfördes enligt tabell 1 nedan. Alla sex forskningslektionerna videofilmades med två kameror. En kamera var placerad längst fram i klassrummet och riktad mot eleverna. Den andra kameran manövrerades av forskaren och följde den undervisande läraren. Vid sidan av forskaren observerades lektionerna också av de två lärare som för tillfället inte undervisade. Direkt efter att en lektion avslutats hölls ett möte där den undervisande och de observerande lärarnas samt forskarens reflektioner och iakttagelser diskuterades och noterades.

Tabell 1. Studiens genomförande.

Punkt	Dag	Aktivitet
1	1	Förttest samt lektion 1 med Teknikprogrammet.
2	1	Analys av lektion 1 och förttestet. Revidering av planeringen för lektion 2 med Teknikprogrammet.
3	2	Lektion 2 med Teknikprogrammet samt eftertest.
4	2-6	Gemensam analys av de två lektionerna och eftertestet. Revidering av planeringen för kommande lektioner med Naturvetenskapsprogrammet.
5	7	Förttest samt lektion 1 med Naturvetenskapsprogrammet.
6	7	Analys och revidering enligt punkt 2.
7	8	Lektion 2 med Naturvetenskapsprogrammet samt eftertest.
8	8-11	Gemensam analys enligt punkt 4. Revidering av planeringen inför kommande lektioner med Samhällsvetenskapliga programmet.
9	12	Förttest samt lektion 1 med Samhällsvetenskapliga programmet.
10	12-13	Analys och revidering enligt punkt 2.
11	14	Lektion 2 med Samhällsvetenskapliga programmet samt eftertest.

Innan och i direkt anslutning till lektion 1 genomförde eleverna ett förttest (bilaga 2). Efter och i direkt anslutning till lektion 2 genomförde eleverna ett eftertest (bilaga 2). Testen var snarlika och tog vardera cirka 10 minuter att genomföra. Båda testen innehöll tre frågor relaterade till lärandeobjektet. Alla tre frågorna innehöll en uppmaning till eleverna att förklara och motivera sina svar. Vikten av detta påpekades även muntligt i samband med att testen lämnades ut. Sex veckor efter studiens sista forskningslektion genomförde eleverna ett fördröjt eftertest vilket var identiskt med eftertestet.

### 3.4.3 Lärandeobjekt

Redan hösten 2011, i samband med att lärarna tillfrågades om att delta i studien, diskuterades lämpliga ämnesinnehåll. Forskaren hade derivata som förslag och i detta skede togs beslutet att inrikta studien mot detta begrepp inom den grafiska representationsformen. Drygt ett år senare startade learning study-processen via två möten mellan forskaren och lärarna. Vid denna tidpunkt hade pilotstudien genomförts och forskaren kunde också redogöra för ett relativt stort antal ämnesdidaktiska forskningsresultat om elevers uppfattningar av derivata i den grafiska representationsformen. I samband med de två mötena specificerades det direkta lärandeobjektet till relationen mellan grafen till en funktion och grafen till funktionens derivata. Det indirekta lärandeobjektet beskrevs i termer av att eleverna skulle utveckla

förmågan att, med utgångspunkt i grafen till en funktion, kunna tolka (en befintlig) eller skissa grafen till funktionens derivata och antiderivata. På ett mer övergripande plan var målet att lärandeobjektet skulle ge eleverna möjlighet att urskilja grafiska aspekter av derivata och därigenom erfara begreppet på ett mer kvalitativt sätt.

### **3.4.4 Design, genomförande och revidering av forskningslektionerna**

I samband med att lärandeobjektet specificerades diskuterades också vilka aspekter som var presumtivt kritiska. Tidigare forskningsresultat utgjorde utgångspunkten och aspekter som där framstod som kritiska ställdes i relation till resultatet av pilotstudien och de deltagande lärarnas erfarenhet av undervisning. Designen av undervisningen skulle emellertid även ta hänsyn till de i studien deltagande eleverna och därför genomfördes intervjuer med sex elever (enligt beskrivningen ovan). Intervjuerna syftade till att undersöka i vilken utsträckning de aktuella elevernas uppfattningar om funktioner och derivator överensstämde med tidigare forskningsresultat. Argumentet att inte testa alla elever, och att i intervjuerna utgå från frågor som inte var direkt kopplade till lärandeobjektet, var att undvika ett tillfälle för lärande innan forskningslektionernas genomförande.

Baserat på forskargruppens diskussioner och de genomförda intervjuerna färdigställde forskaren ett designutkast. Detta reviderades och justerades vid två möten som hölls i forskargruppen dagarna innan implementering. Den första av studiens tre cykler genomfördes därefter med elevgruppen från TE. Grundat i lektionsobservationer och elevernas testresultat reviderades designen och den andra cykeln genomfördes därefter med elevgruppen från NA. Samma process upprepades ytterligare en gång och den tredje cykeln genomfördes med elevgruppen från SP.

### **3.4.5 Analysprocess**

Analysen av de intervjuer som genomfördes före forskningslektionerna gjordes med ett fenomenografiskt perspektiv (Marton, 2015; Marton & Booth, 1997) vilket innebar att fokus var riktat mot att beskriva vilka aspekter av innehållet de intervjuade eleverna urskilde. Analysen av det övriga empiriska materialet genomfördes med ett variationsteoretiskt perspektiv (Runesson, 2017; Thorsten, 2018). Detta innebar att analysen tog sin utgångspunkt i

överensstämmelsen mellan vad som var avsett att lära och vad som faktiskt lärdes, det vill säga det avsedda och det erfarna lärandeobjektet. Likheter och skillnader mellan dessa två beskrivningar av lärandeobjektet ställdes i sin tur i relation till en analys av vilka aspekter av innehållet som synliggjorts i undervisningen, det vill säga det iscensatta lärandeobjektet.

Det avsedda lärandeobjektet och dess presumtivistiska aspekter formulerades före forskningslektionernas genomförande. Det erfarna och det iscensatta lärandeobjektet analyserades i flera omgångar, både i direkt anslutning till forskningslektionerna och efter att de avslutats. Det iscensatta lärandeobjektet analyserades löpande under de tre cyklernas genomförande via observationer. Det erfarna lärandeobjektet analyserades löpande via lektionsobservationer och via elevernas motiveringar på eftertestet. Under varje lektion fanns två icke undervisande lärare och forskaren närvarande. Vid sidan om att observera de helklassaktiviteter som genomfördes cirkulerade även lärarna och forskaren i klassrummet och lyssnade till de elevdiskussioner som förekom. Varje observatör erhöll därmed en uppfattning om vilka aspekter eleverna föreföll urskilja. Vid det möte som hölls i forskargruppen i direkt anslutning till att varje lektion avslutats diskuterades de olika observatörernas och den undervisande lärarens uppfattningar. Denna gemensamma bild jämfördes därefter med elevernas resultat på eftertestet. Var och en av de tre frågorna innebar att eleverna skulle motivera sina svar och eftertestet bidrog därmed med väsentlig information om vilka aspekter som fokuserades av eleverna. Analysen av hur det iscensatta lärandeobjektet påverkade det erfarna lärandeobjektet i cykel 1 låg sedan till grund för de revideringar som gjordes i lektionsdesignen inför cykel 2. Analysen av cykel 1 och 2 i kombination låg därefter till grund för revideringarna inför cykel 3.

Efter det att studien var avslutad och det fördröjda eftertestet hade genomförts analyserades materialet på nytt. Även denna analys gjordes med ett variationsteoretiskt perspektiv. I detta läge fanns emellertid materialet från alla cykler, inklusive det fördröjda eftertestet, tillgängligt och det var heller ingen tidspress. Den variationsteoretiska analysen kunde därför nu, i enlighet med Thorstens (2018) beskrivning, göras djupare och mer genomarbetad.

### 3.5 Genomförande av studie 2

Den andra av avhandlingens två empiriska studier genomfördes i april 2016, det vill säga ganska precis tre år efter den inledande studien. Genomförandet



skedde på samma gymnasieskola som den första studien men eftersom tre år förflutit hade hela skolans elevunderlag hunnit skiftas. Studien genomfördes i syfte att pröva resultatet av studie 1 och innebar att lektionsdesignerna från cykel 1 och 2 (design 2 något reviderad) genomfördes igen i nya elevgrupper vilka nu inte undervisades av sina ordinarie matematiklärare. Eftersom tidpunkten på året var densamma som i studie 1 var eleverna i ett liknande läge i matematikkursen (alla elever läste nu Matematik 3).

### 3.5.1 Urval

Två av de lärare som deltagit i learning studyn tillfrågades om att delta i den andra studien. De blev informerade om att deras deltagande skulle innebära att genomföra samma lektioner som i den tidigare studien, denna gång i elevgrupper som de i normala fall inte undervisade i matematik. Båda lärarna tackade ja till att delta. I samband med planeringen diskuterades mellan forskare huruvida nya lärare skulle rekryteras till studien. Det diskuterades också huruvida de två lärarna skulle skifta undervisningsdesigner sinsemellan så att den lärare som i studie 1 undervisat design 1 i studie 2 istället skulle undervisa design 2. Det beslutades dock att i studie 2 låta samma lärare genomföra samma designer som de gjort i studie 1. Detta val gjordes då det borgade för att de två designerna skulle komma att genomföras på ett likvärdigt sätt som i studie 1. Designerna innehöll samma antal undervisningsmoment och samma undervisningsmetoder och ett skifte ansågs kunna riskera en sammanblandning av de skillnader som fanns gällande innehållets behandling. De två lärarna hade dessutom flera gemensamma egenskaper; båda var utbildade ämneslärare i matematik och fysik och hade många års undervisningserfarenhet (28 respektive 35 år).

Utgångspunkten var att studie 2 skulle innehålla elever från samma program som studie 1. Vid studiens genomförande läste dock alla elever inom gymnasieskolan enligt Gy 11 varför idrott- och ledarskapsprogrammet ersattes av ekonomiprogrammet (ekonomi var tidigare en gren av samhällsvetenskapliga programmet). De deltagande eleverna kom därmed från teknikprogrammet (TE) årskurs 2 (18 elever), naturvetenskapsprogrammet (NA) årskurs 2 (24), samhällsvetenskapsprogrammet (SA) årskurs 3 (22) samt ekonomiprogrammet (EK) årskurs 3 (18). Under forskningslektionerna var sex elever frånvarande varför det totala antalet elever som deltog i studien var 76.

### 3.5.2 Förberedelse och genomförande av forskningslektioner

Inom studien förekom inget samarbete mellan de två lärarna. De kände till varandras medverkan men de visste ingenting om varandras lektionsdesigner. De hade heller ingen kännedom om på vilket sätt elevernas kunskaper skulle testas. Som förberedelse inför genomförandet fick lärarna tillgång till videoinspelningar av sina lektioner från studie 1 samt ett cirka 10 sidor långt manuskript som beskrev den undervisningsdesign de skulle komma att genomföra. Manuskriptet innehöll dels en beskrivning av designens olika moment men också färdigformulerade frågor som skulle ställas muntligt till eleverna. Det detaljerade manuskriptet användes dels för att strikt kunna följa en viss design men också i syfte att minska betydelsen av egenskaper hos läraren (jfr kritiken mot att studera framgångsrika lärare ovan). Inför forskningslektionerna hade forskaren två möten á två timmar med var och en av lärarna. Under det första mötet diskuterades designen och vad som kännetecknade den på ett övergripande plan. Det andra mötet hölls i ett klassrum och vid detta tillfälle skissades alla de grafer som ingick i designen på tavlan och de olika lektionsmomenten diskuterades mer detaljerat.

Eleverna som deltog i studien randomiserades till en av de två designerna. Varje elev tilldelades ett nummer och därefter delades varje program i två lika stora grupper med hjälp av en slumpstalstabell. Grupp 1 innebar design 1 och grupp 2 design 2. TE och NA läste sina matematikkurser parallellt och samma sak gällde SA och EK. För att upprätthålla normalstora elevgrupper och underlätta genomförandet slogs därför TE samman med NA och SA slogs samman med EK. Design 1 och 2 genomfördes därefter samtidigt för de två SA/EK-grupperna och två dagar senare upprepades samma process med de två TE/NA-grupperna. Uppläggningsen var densamma båda dagarna. Undervisningen startade på morgonen och pågick i 2 x 60 minuter med 20 minuters rast däremellan. Eleverna hade därefter 30 minuters rast innan de i en gemensam sal genomförde ett eftertest.

### 3.5.3 Datainsamling

All datainsamling gjordes av forskaren. Cirka tio dagar innan forskningslektionerna genomförde eleverna en enkät (bilaga 3). Denna innehöll totalt 24 frågor som hämtats från de enkäter som används inom de internationella jämförelserna PISA och TIMSS advanced (Skolverket, 2009,

2010). Flera av frågorna behandlade intresse och självskattning inom matematik. Dessa besvarades av eleverna på en skala 1-6. Enkäten innehöll också ett antal frågor som rörde annan bakgrundsinformation, till exempel tid för läxor och föräldrarnas utbildning. Dessa var formulerade som flervalsfrågor.

Vid samma tillfälle som enkäten genomförde eleverna också två förtest. Testen hade före studien prövats ut i två omgångar på sammanlagt cirka 130 elever. Utprövningen genomfördes på två olika skolor varav ingen var belägen på den ort där studien genomfördes. De båda testen tog cirka 50 minuter och eleverna arbetade utan tidspress.

Det ena testet var ett flervalstest som bestod av 25 uppgifter med vardera fem svarsalternativ. Alla uppgifterna handlade om funktionsbegreppet och 19 av dem kom från The Precalculus Concept Assessment (PCA) (Carlson, Oehrtman & Engelke, 2010). PCA-testet har under flera års tid, via flera forskningsstudier och utprövningscykler, utvecklats av amerikanska forskare. Genom att pröva begreppsliga kunskaper om funktioner mäter testet hur väl förberedda elever är för studier inom bland annat derivata. I original innehåller PCA-testet 25 uppgifter men för att anpassa det till studiens förhållanden byttes sex av uppgifterna ut. De ersättningsuppgifter som användes konstruerades med PCA-testet som mall. Vid sidan om Carlson et al. (2010) hävdar även flera andra forskare att en förståelse för funktioner utgör en avgörande faktor för att utveckla en förståelse för derivata (t.ex. Asiala et al., 1997; Koirala, 1997). I den aktuella studien bedömdes därför PCA-testet som ändamålsenligt i syfte att ge ett mått på elevernas förkunskaper.

Det andra förtestet (bilaga 4) konstruerades av forskaren i samarbete med andra forskare. Testet innehöll sju uppgifter med sammanlagt 14 deluppgifter vilka alla var relaterade till lärandeobjektet. De första fyra frågorna behandlade derivatan i en punkt och de sista tre frågorna behandlade derivatan som en funktion. På två av de 14 deluppgifterna krävdes en kortare motivering. Övriga uppgifter var av flervalskaraktär eller krävde enbart ett svar. Argumentet för denna typ av testkonstruktion var att i största möjliga utsträckning kunna bedöma elevernas svar som rätt eller fel utan att samtidigt behöva göra någon tolkning. Några av uppgifterna innebar att eleverna skulle skissa grafer och till dessa uppgifter gjordes på förhand en rättningsmall. I denna beskrevs noggrant hur en graf, eller ett parti av en graf, skulle se ut för att ge poäng. Maximala poängen på förtestet om lärandeobjektet var 19.

30 minuter efter forskningslektionerna gjorde eleverna ett eftertest (bilaga 4). Testet innehöll samma frågeställningar som förtestet men flera små justeringar var gjorda. Till exempel hade flera grafer bytts ut eller förändrats och svarsalternativen i flervalsuppgifter var i en annan ordning.

En dryg vecka efter forskningslektionerna intervjuades 16 elever. Testens konstruktion medförde att eleverna i regel inte behövde redogöra för vilka strategier de hade använt. Som ett komplement till testen valdes därför åtta elever (fyra från TE/NA och fyra från SA/EK) från varje design slumpmässigt ut för en intervju. Efter några frågor om studiens genomförande fick eleverna i tur och ordning tillgång till sitt för- och eftertest och ombads i samband med detta beskriva och redogöra för vilka strategier de använt när de löst vissa av uppgifterna. Under denna del av intervjun hade forskaren en passiv roll och indikerade inte på något sätt huruvida elevens svar var korrekt eller inte. Vid vissa tillfällen ombads dock eleven att ytterligare redogöra för sina resonemang. Avslutningsvis bad forskaren eleverna att försöka beskriva vad de lärt sig under studien. I denna del av intervjun intog forskaren en mer aktiv och deltagande roll i samtalet. Intervjuerna pågick under cirka 20 minuter och spelades in med videokamera.

Sommaren 2016, efter att eleverna avslutat kursen Matematik 3, inhämtades uppgifter om deras betyg i både denna kurs och kursen innan (Matematik 2).

### 3.5.4 Analysprocess

Kvantitativa data sammanställdes först i form av deskriptiv statistik. Resultatet analyserades därefter genom multipel linjär regression (Field, 2013) med hjälp av statistikprogrammet SPSS 23. Elevernas resultat på eftertestet fungerade som beroende variabel och de två förtesten samt designen fungerade som oberoende variabler. Designens påverkan på resultatet av eftertestet analyserades inledningsvis med avseende på alla elever. Därefter genomfördes ytterligare en regression där de två TE/NA-grupperna jämfördes med varandra och de två SA/EK-grupperna jämfördes med varandra. Analyserna gjordes efter att först ha kontrollerat för andra bakgrundsvariabler som intresse, självskattning, kön, betyg etcetera.

De videospelade intervjuerna analyserades med ett fenomenografiskt perspektiv (Marton, 1981; Marton & Booth, 1997). Syftet med analysen var att beskriva och kategorisera elevernas sätt att erfara de olika uppgifterna.

Eleverna redogjorde under intervjun för vilka strategier de använt när de försökt lösa uppgifterna. Dessa redogörelser togs i sin tur som utgångspunkt för att beskriva; dels vilka aspekter av innehållet eleverna hade urskilt och fokuserade på, dels vilka aspekter de inte föreföll ha urskilt.

### 3.6 Etiska överväganden

Avhandlingens studier har följt Vetenskapsrådets riktlinjer för god forskningssed (2011). Studierna föregicks av utförlig information till de deltagande lärarna och eleverna. I samband med detta presenterades studiernas syfte och praktiska genomförande. Det informerades också om att deltagande var frivilligt. För eleverna innebar studierna ett flertal tester och det klargjordes att resultaten enbart skulle användas i forskningssyfte och inte utgöra underlag för bedömning. Alla deltagare i studierna har avidentifierats och inte i någon av avhandlingens skrifter förekommer namn på personer, skolor eller kommuner.

De lärare som deltagit i studierna lämnade sitt muntliga medgivande. Detsamma gäller de elever som deltog i utprovningen av tester i anslutning till studie 2. Alla elever som deltog i forskningslektioner lämnade ett skriftligt medgivande. I samband med detta hade de också möjlighet att undanbe deltagande i videoinspelningar. Ett fåtal elever valde att delta utan att samtidigt videofilmas och i dessa fall placerades de utanför kamerans räckvidd i klassrummet. De elever som deltog i intervjuer lämnade ett ytterligare medgivande muntligt. På samma sätt som vid förfrågan om att delta i studien informerades de om att deltagande i intervjuer, med tillhörande ljud och/eller bildinspelning, var frivilligt. Under studiernas genomförande var det ingen av de elever som tillfrågades som tackade nej till att delta i intervjuer.



## Kapitel 4: Resultat

I detta kapitel presenteras en sammanfattning av resultaten i avhandlingens tre delarbeten. Samtliga tre delarbeten är centrerade kring frågeställningen om hur elevers lärande påverkas av innehållets behandling i undervisningen och de är alla grundade i ett fenomenografiskt och variationsteoretiskt perspektiv. Resultatet av respektive delarbete kan betraktas i sin ensamhet men de kompletterar samtidigt varandra och utgör tillsammans en helhet.

### 4.1 Delarbete I: Licentiatuppsats

*Variationens betydelse för elevernas lärande: Relationen mellan en funktions graf och grafen till funktionens derivata.* Göteborg: Göteborgs universitet.

Resultatet av delarbete I är baserat på data från studie 1 och består av tre olika undervisningsdesigner samt analys och beskrivning av: (a) vilka aspekter av innehållet som för eleverna i studien föreföll vara kritiska att urskilja; (b) hur de tre olika designernas sätt att behandla innehållet påverkade elevernas lärande.

Undervisningsdesignerna var centrerade kring det specifika lärandeobjektet, relationen mellan grafen till en funktion och grafen till funktionens derivata, och utgick från fyra presumtivt kritiska aspekter. Eleverna behövde urskilja:

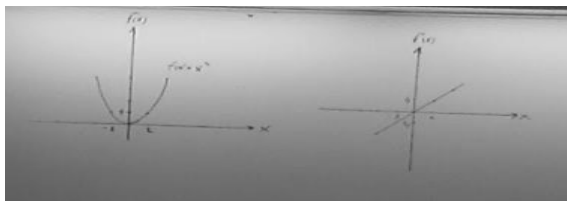
1. att derivatan kan vara både en funktion och lutningen i en punkt
2. relationen mellan lutningen hos grafen till en funktion och värdet på grafen till funktionens derivata
3. att grafen till en funktion och grafen till funktionens derivata i regel inte liknar varandra
4. betydelsen av grafernas nollställen och vändpunkter

Designen i cykel 1 var indelad i sju olika moment vilka innehöll olika variationsmönster som var skapade med hjälp av grafer. Ett av två övergripande drag hos designen var att variationen av grafer var begränsad. Detta innebar att endast grafer till polynomfunktioner av grad 0-3 förekom i

undervisningen. Det andra övergripande draget var att representationsformen varierade. Detta innebar dels att två av momenten tog sin utgångspunkt i vardagliga fysiska händelser som innefattade begreppen acceleration, hastighet och sträcka, dels att flera av de grafer som förekom även beskrevs i termer av algebraiska funktionsuttryck.

I cykel 2 innehöll designen samma sju moment och samma typer av variationsmönster. Designen var dock reviderad på så sätt att variationen av grafer hade ökat samtidigt som alla jämförelser med algebra var borttagna. Revideringarna kan illustreras genom att jämföra innehållets behandling i cykel 1 och 2 i det första respektive det sista av de sju momenten.

Syftet med det första momentet var bland annat att synliggöra hur derivatan kan svara mot både lutningen i en punkt liksom mot en funktion i sig. I både cykel 1 och 2 var utgångspunkten grafen till en funktion (där  $f(x) = x^2$ ) och i båda cyklerna innebar momentet att skissa grafen till funktionens derivata (se figur 3).



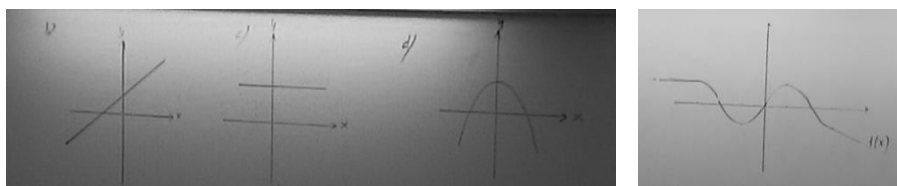
Figur 3. Graferna till funktion respektive derivata i moment 1.

Tillvägagångssättet var emellertid olika. I cykel 1 var funktionen representerad av både grafen och det algebraiska uttrycket. Det senare deriverades och därefter skissades grafen till derivatan med hjälp av det algebraiska uttrycket,  $f'(x) = 2x$ . Förvisso skapades en kontrast mellan derivatan som en funktion (den räta linjen) och derivatan som lutningen i en punkt genom att tre tangenter drogs till parabeln. Tangenternas lutning bestämdes dock genom att sätta in tangeringspunkternas  $x$ -värden i det algebraiska uttrycket för derivatan; även i detta fall synliggjordes alltså sambandet mellan den grafiska och den algebraiska representationsformen. Detta sätt att behandla innehållet kan jämföras med cykel 2 där algebraiska uttryck inte förekom överhuvudtaget. Där skissades istället grafen till derivatan med hjälp av fem tangenter som dragits till parabeln. Läraren beräknade deras lutning (via  $\Delta y/\Delta x$ ) och prickade undan för undan in respektive värde i ett tomt koordinatsystem. Värdena utgjorde i sin tur punkter på den räta linje (se figur



3 ovan) som svarade mot grafen till derivatan, en graf som läraren avslutningsvis skissade genom att binda samman punkterna.

Medan det första momentet exemplifierar skillnaden vad gäller förekomsten av algebra kan det sista momentet användas för att exemplifiera skillnaden vad gäller grafer. I cykel 1 utgick momentet från tre grafer (se figur 4) och eleverna fick till uppgift att skissa graferna till deras derivator och antiderivator. I cykel 2 var uppgiften densamma men den utgick nu endast från en graf (se figur 4).



Figur 4. Graferna i cykel 1 till vänster. Grafen i cykel 2 till höger.

Som framgår av figur 4 utgick momentet i cykel 1 från grafer till polynomfunktioner medan det i cykel 2 utgick från en graf som inte kunde översättas till ett algebraiskt funktionsuttryck.

Lektionsobservationer och elevernas motiveringar på eftertestet visade att flertalet av eleverna som deltog i cykel 1 fokuserade på den kontrast som i undervisningen hade skapats genom jämförelser mellan den grafiska och den algebraiska representationsformerna. Vid lösning av uppgifterna, som alla innebar att tolka eller skissa grafer, identifierade eleverna graferna som polynom och tillämpade därefter deriveringsregler. Strategin ledde många gånger till ett korrekt svar men den innebar samtidigt att det erfarna lärandeobjektet skilde sig från det avsedda; många av eleverna löste helt enkelt grafiska uppgifter med ett algebraiskt resonemang. Det faktum att designen endast innehöll grafer till polynomfunktioner innebar dessutom att denna strategi aldrig blev otillräcklig.

I motsats till resultatet av cykel 1 indikerade lektionsobservationer och resultatet av eftertestet att innehållets behandling i cykel 2 ledde till ett erfaret lärandeobjekt som låg nära det avsedda. Elevernas strategier var nu i princip uteslutande baserade på grafiska aspekter av derivata och motiveringarna på eftertestet vittnade om att fler elever hade urskilt lärandeobjektets kritiska aspekter.

I cykel 3 minskades återigen variationen av grafer. Algebran var dock fortfarande borttagen och cykel 3 blev därmed en hybrid av cykel 1 och 2. Enligt resultatet försämrade revideringen elevernas möjligheter att urskilja de kritiska aspekterna. Elevernas strategier och motiveringar var förvisso inte baserade på algebraiska resonemang men de var heller inte av så utförlig karaktär som i cykel 2. Jämförelser mellan cykel 3 och de övriga cyklerna försvårades emellertid av att eleverna i cykel 3 hade en annan bakgrund då de gick på gymnasieprogram som var mindre matematikintensiva.

Sammanfattningsvis indikerade resultatet av eftertester, fördröjda eftertester och observationer att aspekt 1 och 2 var kritiska att urskilja medan aspekt 3 och 4 var underordnade aspekt 2. Detta på så sätt att ett urskiljande av aspekt 2 även innebar att aspekt 3 och 4 urskildes (omvändningen gällde däremot inte). Resultatet indikerade också att en undervisning utan inslag av algebra men med en stor variation av grafer bidrog till att synliggöra de kritiska aspekterna.

## 4.2 Delarbete II: Artikel 1

Generating different lesson designs and analyzing their effects: The impact of representations when discerning aspects of the derivative. *Journal of Mathematical Behavior*, 2018, Vol.51, 1-14.

Resultatet är baserat på data från studie 1 och 2. Resultatet av studie 1 presenteras i sammanfattad form och därefter presenteras och analyseras kvantitativa data från studie 2.

Inom studie 2 prövades resultatet av studie 1 genom att ställa två lektionsdesigner mot varandra. I den ena, design 1, varierade representationsformen medan variationen av grafer var begränsad. I den andra, design 2, var förhållandet omvänt; undervisningen innehöll en stor variation av grafer men var samtidigt begränsad till den grafiska representationsformen. Eleverna testades före och efter undervisningen. Deskriptiv statistik för de fyra grupper som deltog i studien presenteras i tabell 2.

Tabell 2. Medelvärde och standardavvikelse per test och grupp inom studie 2.

Grupp (program och design)	N	Förtest funktioner Max: 25		Förtest lärandeobjekt Max: 19		Eftertest lärandeobjekt Max: 19	
		M	SD	M	SD	M	SD
Samhällsvetenskap/ Ekonomi, design 1	18	7.9	3.1	5.7	2.5	7.8	3.3
Samhällsvetenskap/ Ekonomi, design 2	19	8.4	2.5	4.8	2.6	8.2	3.9
Naturvetenskap/ Teknik, design 1	18	15.2	4.9	9.1	3.9	11.0	4.8
Naturvetenskap/ Teknik, design 2	21	16.1	5.0	8.7	4.2	13.7	3.8

För att jämföra resultatet av de två designerna genomfördes en multipel linjär regression. De två förtesten och designen var modellens oberoende variabler. Eftertestet var modellens beroende variabel. I ett första steg inkluderades förtesten och i ett andra steg inkluderades designen. Resultatet redovisas i tabell 3.

Tabell 3. Linjär modell över prediktorer på eftertestet. 95% konfidensintervall i parentes.

	b	SE b	$\beta$	p
<b>Steg 1</b>				
Konstant	2.08 (0.68, 3.47)	0.70		.004
Förtest funktioner	0.41 (0.22, 0.59)	0.09	0.49	.000
Förtest lärandeobjekt	0.47 (0.21, 0.73)	0.13	0.40	.001
<b>Steg 2</b>				
Konstant	-0.42 (-2.53, 1.69)	1.06		.696
Förtest funktioner	0.34 (0.17, 0.52)	0.09	0.41	.000
Förtest lärandeobjekt	0.56 (0.31, 0.82)	0.13	0.47	.000
Design	1.72 (0.59, 2.85)	0.57	0.19	.003

$R^2 = .705$  för Steg 1;  $\Delta R^2 = .033$  för Steg 2 ( $p = .003$ )

Tabell 3 visar att designen signifikant påverkade resultatet på eftertestet ( $p = .003$ ). De elever som deltagit i design 2 presterade ett signifikant bättre resultat.

I syfte att jämföra de två SA/EK-gruppernas respektive de två TE/NA-gruppernas resultat på eftertestet genomfördes ytterligare en multipel linjär regression. Resultatet redovisas i tabell 4 (steg 1 detsamma som i tabell 3).

Tabell 4. Jämförelse av design 1 och 2 med avseende på program. 95% konfidensintervall i parentes (Steg 1 identiskt med tabell 3).

	<b>b</b>	<b>SE b</b>	<b>β</b>	<b>p</b>
<b>Steg 2</b>				
Konstant	2.21 (0.90, 3.52)	0.66		.696
Förtest funktioner	0.34 (0.16, 0.51)	0.09	0.41	.000
Förtest lärandeobjekt	0.56 (0.31, 0.81)	0.13	0.47	.000
SA/EK design 1 vs SA/EK design 2	0.39 (-0.40, 1.18)	0.40	0.06	.324
TE/NA design 1 vs TE/NA design 2	1.30 (0.53, 2.07)	0.39	0.20	.001

Tabell 4 visar att designen signifikant påverkade resultatet på eftertestet för elevgrupperna från TE/NA ( $p = .001$ ). Gruppen som deltagit i design 2 presterade ett resultat som var signifikant högre. För eleverna från SA/EK var skillnaden på eftertestet mellan de två grupperna däremot inte signifikant ( $p = .324$ ).

### 4.3 Delarbete III: Artikel 2

How the use of representations during instruction can promote development of conceptual or procedural knowledge: A comparison of two lesson designs concerned with the derivative concept. (*Manuscript*).

Resultatet är baserat på kvalitativa data från studie 2. Åtta elever som deltagit i design 1 och åtta elever som deltagit i design 2 redogjorde under en intervju för vilka strategier de använt då de löst uppgifter på för- och eftertestet om lärandeobjektet (uppgift 5-7, se bilaga 4). I resultatet av delarbete III beskrivs och analyseras vilken typ av kunskap som innehållets behandling i design 1 respektive 2 företrädesvis verkar ha gett eleverna möjlighet att utveckla.

Elevernas sätt att resonera på de olika uppgifterna visade att de som deltagit i design 1 framförallt utvecklat procedurkunskaper. Sju av de åtta intervjuade eleverna hänvisade till strategier som kan beskrivas i termer av denna kunskapsstyp. De två strategier som tillämpades mest frekvent var att: (a) identifiera en graf som ett polynom och därefter via deriveringsregler föreställa sig utseendet på grafen till derivatan/antiderivatan; (b) kontrollera överensstämmelsen mellan vändpunkter (funktionens graf) och skärningspunkter med x-axeln (derivatans graf). Med vilken framgång dessa strategier tillämpades var dock enligt resultatet av intervjuerna beroende av förkunskaper. Några av eleverna hade redan vid förtestets genomförande

urskilt lärandeobjektets kritiska aspekter. Dessa elever uppvisade förmågan att använda procedurkunskaper på ett insiktsfullt sätt vilket ledde till ett avkortat och effektivt resonemang. För de övriga eleverna utgjorde fokuseringen på procedurer en begränsning. Detta visade sig dels genom att de var beroende av vissa typer av grafer för att kunna lösa uppgifterna. Det kunde också visa sig genom att graferna i en uppgift beskrevs som en ”andragradare” och en ”rät linje” utan några ytterligare specifikationer av relationen dem emellan. Flera av eleverna tillämpade dessutom deriveringsreglerna urskillningslöst, exempelvis med motiveringar som att ”grafan ser ut ungefär som en andragradare”.

Enligt intervjuerna var de erfarna lärandeobjekten som genererats i design 1 och 2 distinkt åtskilda. Medan de aspekter av innehållet som eleverna från design 1 urskilde gav upphov till vad som kunde kategoriseras som procedurkunskaper gav de aspekter som eleverna från design 2 urskilde istället upphov till vad som kunde kategoriseras som konceptuella kunskaper. De strategier som eleverna från design 2 använde utgick uteslutande från grafiska aspekter av derivata. Under intervjuerna resonerade flera av eleverna på ett sätt som indikerade att de via interventionen urskilt lärandeobjektets kritiska aspekter. Dessa elever kunde, oberoende av grafernas utseende, på ett utförligt sätt redogöra för relationen dem emellan. Detta både med avseende på grafernas egenskaper i specifika punkter, liksom med avseende på grafernas relation när de betraktades som helheter. På samma sätt som för design 1 var dock utfallet av design 2 beroende av förkunskaper. De elever från design 2 som hade låga resultat på förtesten lyckades inte heller på eftertestet lösa många av uppgifterna och vid intervjutillfället hade de svårigheter med att redogöra för vilka strategier de använt. Deras resonemang utgick förvisso från egenskaper hos de aktuella graferna men intervjuerna visade samtidigt att de inte urskilt lärandeobjektets kritiska aspekter. Att deras svaga förkunskaper utgjorde ett hinder visade sig genom att de, vid upprepade tillfällen, fastnade i sina resonemang på grund av att de ännu inte urskilt några av de mest fundamentala aspekterna av funktioner och derivator.



## Kapitel 5: Diskussion

Syftet med denna avhandling är att studera hur undervisningens design påverkar elevernas lärande. Den övergripande forskningsfrågan består av att identifiera vilka sätt att behandla innehållet som är framgångsrika för att synliggöra kritiska aspekter av relationen mellan grafen till en funktion och grafen till funktionens derivata. Resultatet av avhandlingens två empiriska studier visade att en undervisningsdesign där den grafiska representationsformen var invariant medan typen av grafer varierade erbjöd eleverna möjligheter till ett kvalitativt erfalande av denna relation. Resultatet visade också att omvändningen, det vill säga en varierande representationsform i kombination med en mindre variation av grafer, ledde till ett annat lärande än vad som var avsett. Målet med undervisningen var att eleverna skulle urskilja grafiska aspekter av derivata men förekomsten av andra representationsformer, i kombination med för eleverna bekanta grafer, medförde att många elever riktade sin uppmärksamhet åt ett annat håll. Resultatet av studierna kan betraktas ur flera olika perspektiv men då avhandlingens huvudsakliga syfte är att ge ett ämnesdidaktiskt bidrag diskuteras det företrädesvis ur ett sådant.

### 5.1 Studiernas resultat i ett ämnesdidaktiskt perspektiv

Tidigare ämnesdidaktiska studier om derivata har i stor utsträckning varit inriktade mot att undersöka elevers förståelse och uppfattningar om begreppet samt vilka strategier eleverna använder vid problemlösning. De slutsatser som rapporterats i tidigare studier var en av utgångspunkterna när lärandeobjektets presumtivistiska aspekter formulerades i studie 1. Zandieh's (2000) ramverk som beskriver derivata som ett begrepp bestående av tre lager bidrog till formuleringen av den första aspekten som innebar att eleverna behövde urskilja att derivatan kan betyda både derivatan i en punkt liksom derivatan som en funktion. Zandieh's (2000) beskrivning av processen att i varje punkt på en graf föreställa sig tangentens lutning och därigenom erhålla grafen till derivatan kan i sin tur kopplas till den andra aspekten; relationen mellan lutningen hos grafen till en funktion och värdet på grafen till funktionens

derivata. Att denna aspekt var kritisk att urskilja framkom också i studien av Haciomeroglu et al. (2010) som redogjorde för vilka strategier elever använde för att tolka relationen mellan grafen till en funktion och grafen till funktionens antiderivata. Den tredje presumtvt kritiska aspekten, att grafen till en funktion och grafen till funktionens derivata i regel inte liknar varandra, kan härledas till studien av Nemirovsky och Rubin (1992). Den fjärde aspekten, relationen mellan den ena grafens nollställan och den andra grafens vändpunkter, var resultatet av diskussioner i forskargruppen. Samtidigt var denna aspekt nära kopplad till Habre och Abbouds (2006) studie som visade på elevers svårigheter att inse att utseendet på grafen till derivatan inte påverkas av var grafen till ursprungsfunktionen är placerad i y-led.

### 5.1.1 Kritiska aspekter och missuppfattningar – inte samma sak

Alla tre undervisningsdesigner som genomfördes i studie 1 syftade till att synliggöra de fyra presumtvt kritiska aspekterna. Enligt resultatet föreföll emellertid endast de två första vara kritiska att urskilja för att utveckla den förmåga som beskrevs av det indirekta lärandeobjektet. Observera i detta fall innebörden av begreppet kritisk aspekt. Även om kritiska aspekter ofta kan relateras till elevers missuppfattningar eller svårigheter är det inte samma sak. Medan en missuppfattning eller en svårighet är något som elever *har* är en kritisk aspekt något som elever behöver *urskilja* för att utveckla ett visst kunnande. Vid studiernas förtester var exempelvis en vanligt förekommande uppfattning att grafen till derivatan skulle likna grafen till funktionen. På eftertesten var det i princip inga motiveringar som grundades på detta resonemang. Detta innebar dock inte att denna aspekt kunde betraktas som kritisk. Elevernas motiveringar visade att det inte var grafernas olika utseende som var kritiskt att urskilja. Denna aspekt var istället underordnad aspekt 2 (som innebar att urskilja hur lutningen i varje punkt hos den ena grafen svarade mot värdet i motsvarande punkt hos den andra grafen). Om en elev hade urskilt aspekt 2 hade eleven också urskilt att graferna inte liknade varandra. Omvändningen gällde däremot inte, ett flertal elever hade urskilt att graferna inte liknade varandra utan att för den skull ha utvecklat de förmågor som beskrevs av det indirekta lärandeobjektet. På samma sätt hade de elever som urskilt aspekt 2 också urskilt den fjärde aspekten, relationen mellan den ena grafens vändpunkter och den andra grafens nollställan. Motiveringarna på



eftertesten vittnade däremot om att omvändningen inte heller gällde i detta fall; flera elever konstaterade att nollställen och vändpunkter överensstämde utan att ta hänsyn till grafernas relation i övriga punkter. Att analysera sambandet mellan undervisning och lärande med ett variationsteoretiskt perspektiv innebär som synes något annat än att endast analysera förekommande missuppfattningar, svårigheter och strategier. Dessa är förvisso en viktig utgångspunkt men de svarar samtidigt inte nödvändigtvis mot vad som behöver synliggöras i undervisningen. De presumtivist kritiska aspekterna 3 (missuppfattning) och 4 (strategi) utgör typiska exempel på detta.

### 5.1.2 Om innehållets behandling i design 1

Vid sidan om att fungera som en vägledning i forskargruppens diskussion om vilka aspekter som var presumtivist kritiska påverkade tidigare forskningsresultat även innehållets behandling på en mer generell nivå. Ett resultat som återkommande rapporterats i tidigare studier är att derivata för många elever är synonymt med att manipulera algebraiska funktionsuttryck (Berry & Nyman, 2003; Jukić & Dahl, 2012). Samma uppfattning fanns hos de lärare som deltog i studie 1 och därav valet att inrikta studien mot derivata i den grafiska representationsformen. I de diskussioner som föregick den första undervisningsdesignen (design 1) var det närmast en självklarhet att flera representationsformer skulle utnyttjas för att synliggöra lärandeobjektet. Detta dels på grund av att lärarna och forskaren av erfarenhet ansåg det vara lämpligt men också på grund av att betydelsen av flera representationsformer påpekats i ett stort antal tidigare forskningsstudier. Det senare både vad gäller matematikundervisning i allmänhet (t.ex. Duval, 2006) liksom specifikt inom derivata (t.ex. Haciomeroglu et al., 2010; Koirala, 1997). Beträffande den symboliska representationsformen användes den av två anledningar. Dels för att kunna representera och generalisera lärandeobjektet och dess presumtivist kritiska aspekter via en annan representationsform, dels för att utgå från elevernas förkunskaper. Enligt såväl lärarerfarenhet, förbedömningar (elevintervjuer) och tidigare forskningsresultat var algebraiska funktionsuttryck det som elever främst förknippade med derivata. Att generalisera grafiska aspekter/resonemang med hjälp av något eleverna kände igen och var bekanta med (d.v.s. algebra) ansågs därmed bidra till att synliggöra lärandeobjektet. Beträffande den fysiska representationsformen utnyttjades den, på samma sätt som algebra, i syfte att synliggöra lärandeobjektet genom att representera och

generalisera det i ytterligare en representationsform. Att i detta fall använda exempel som byggde på acceleration, hastighet och sträcka var grundat i att forskargruppen gjorde bedömningen att dessa begrepp var välkända för alla elever, en bedömning som även stöddes av tidigare forskning (Hähkiöniemi, 2006; Zandieh, 2000).

I enlighet med frågan om representationsformer rädde det i forskargruppen också konsensus kring att i design 1 begränsa variationen av grafer. Argumentet för att designen endast innehöll grafer till polynomfunktioner av grad 0-3 var att lärandeobjektet ansågs vara avancerat, något som även i detta fall var grundad på kombinationen av lärarnas erfarenheter och tidigare forskningsresultat (t.ex. Aspinwall et al., 1997; Berry & Nyman, 2003). Polynomfunktioner hade eleverna ägnat mycket tid åt i den pågående kursen liksom i kursen innan. Intentionen var att typen av grafer dels skulle begränsa lärandeobjektets svårighetsgrad, dels medföra att undervisningen tog sin utgångspunkt i elevernas förkunskaper.

### **5.1.3 Innehållets behandling påverkar det erfarna lärandeobjektet**

På förhand var uppfattningen att de generaliseringar som skapades med hjälp av olika representationsformer skulle öka elevernas möjligheter att urskilja grafiska aspekter av derivata. En uppfattning som enligt ovan var grundad i såväl de deltagande lärarnas erfarenheter liksom i tidigare forskning. Resultatet av både studie 1 och 2, att design 1 ledde till ett erfaret lärandeobjekt som innebar att eleverna fokuserade på algebraiska aspekter och utvecklade procedurkunskaper kan därför i en mening beskrivas som oväntat. Det är dock värt att notera att liknande resultat, att elever inte sällan föredrar att resonera algebraiskt på uppgifter givna i en grafisk kontext, har rapporterats även i några tidigare studier (Asiala et al., 1997; Haciomeroglu et al., 2010).

Resultatet kan betraktas i ett variationsteoretiskt perspektiv. I design 1 utgick samtliga undervisningsmoment från grafer och merparten av undervisningstiden ägnades åt att behandla grafiska aspekter av derivata. Samtidigt erbjöds emellertid eleverna även möjligheten att resonera algebraiskt. Återkommande jämförelser med algebraiska funktionsuttryck synliggjorde den strategi som innebar att identifiera en graf som ett polynom och därefter bestämma huvuddragen hos grafen till funktionens derivata (eller antiderivata) med hjälp av deriveringsregler. Den begränsade variationen av

grafer inom de olika exemplen innebar dessutom att denna strategi aldrig blev otillräcklig. I design 2 var förhållandena omvända och resultatet av såväl studie 1 som 2 visade att dessa två övergripande revideringar, en minskad variation av representationsformer och en ökad variation av grafer, förbättrade möjligheterna att urskilja de grafiska aspekter som undervisningen avsåg att synliggöra. Betydelsen av de båda revideringarna i kombination bör poängteras. Innehållets behandling kan å ena sidan beskrivas i termer av vilka aspekter läraren fokuserar på i undervisningen. Å andra sidan kan det också beskrivas i termer av vilka aspekter av innehållet som synliggörs via de exempel som används i undervisningen. Att elevernas fokus riktas mot de aspekter som utgör det avsedda lärandeobjektet är därmed beroende av både lärarens agerande och exemplens innehåll. Resultatet av design 2 kan därmed hänföras både till lärarens fokus på den grafiska representationsformen liksom till variationen av grafer. I designen förekom flera uppgifter som utgick från en graf vars utseende var obekant för eleverna. Dessa uppgifter var visserligen utmanande men de bidrog samtidigt till att rikta elevernas uppmärksamhet mot de aspekter av innehållet som var kritiska att urskilja.

De erfarna lärandeobjekten i design 1 och 2 kan beskrivas i form av det som Haciomeroglu et al. (2010) och Aspinwall och Shaw (2002) benämner som analytiskt respektive visuellt tänkande. Båda dessa studier undersökte vilka strategier studenter använde när de, med utgångspunkt i grafen till en funktion, skissade grafen till funktionens derivata eller antiderivata. Haciomeroglu et al. (2010) och Aspinwall och Shaw (2002) klassificerar studenternas strategier som antingen analytiska eller visuella. En analytisk strategi innebär att först översätta grafen till ett algebraiskt funktionsuttryck (exakt eller approximativt). Detta deriveras eller integreras och det nya uttrycket används därefter för att skissa grafen till derivatan/antiderivatan. En visuell strategi innebär att enbart fokusera på grafiska aspekter. Värdet hos grafen till funktionen bestäms för olika  $x$  och dessa värden används därefter för att bestämma lutningen hos grafen till antiderivatan i motsvarande punkter (omvänt resonemang för att skissa derivatans graf). Haciomeroglu et al. (2010) menar att de två strategierna fungerar som komplement till varandra och att de studenter som är framgångsrika har förmågan att kombinera de två sätten att tänka. Enligt Haciomeroglu et al. (2010) bör därför den analytiska och den visuella strategin introduceras parallellt i undervisningen. Detta kan ses i förhållande till resultatet av avhandlingens två studier. I design 1 användes den analytiska strategin som en generalisering för att ge eleverna bättre möjligheter

att urskilja grafiska aspekter (den visuella strategin). Följden blev emellertid att en majoritet av eleverna endast fokuserade på denna ”stödande” analytiska strategi utan att samtidigt urskilja de grafiska aspekter som utgjorde målet för undervisningen. Design 2 fokuserade enbart på den visuella strategin och resultatet visade att detta sätt att behandla innehållet var mer ändamålsenligt för att synliggöra de avsedda aspekterna. Observera att detta inte ska tolkas som att den analytiska strategin är oviktig. Det visar dock att även om slutmålet är att eleverna ska ha förmågan att kombinera ett analytiskt och ett visuellt tänkande är det inte nödvändigtvis fördelaktigt att inledningsvis behandla dem parallellt i undervisningen. Haciomeroglu et al. (2010) menar att undervisningen ska designas så att den utmanar elevers sätt att tänka och de representationsformer de föredra att använda. Avhandlingens studier var grundade i en överblick av algebraiska resonemang hos eleverna. I efterhand kan det konstateras att utmana elevernas algebraiska resonemang var precis vad design 2 genom sin begränsning till den grafiska representationsformen förmådde göra.

#### **5.1.4 Effekten av en specifik undervisningsdesign beror på elevernas förkunskaper**

Analysen av kvantitativa data i studie 2 visade att de elever som deltagit i design 2 presterade ett signifikant högre resultat på eftertestet. Ytterligare analyser visade emellertid också att effekten av design 2 var starkare i gruppen med elever från TE/NA än i gruppen med elever från SA/EK. Samma resultat, om än mer tentativt, kunde även ses i studie 1 där en tydligare fokusering på grafer inte verkade gynna SA-eleverna i samma utsträckning som NA-eleverna. De intervjuer som genomfördes med 16 elever i studie 2 bekräftade detta resultat ytterligare. Under intervjuerna ombads eleverna redogöra för hur de resonerat på några av uppgifterna på eftertestet. Dessa redogörelser analyserades därefter i syfte att beskriva vilka aspekter av innehållet eleverna urskilt. Medan innehållets behandling i design 2 föreföll ha lett till att en stor andel av eleverna från TE/NA urskilt lärandeobjektets kritiska aspekter var situationen annorlunda gällande eleverna från SA/EK. I båda grupperna fanns emellertid undantag och en jämförelse mellan förtest och eftertest på individnivå visade att effekten av design 2 verkade vara beroende av elevernas förkunskaper. Framförallt indikerade jämförelsen att elevernas resultat på förtestet om funktioner var en påverkansfaktor. Att

elevernas kunskaper om detta begrepp föreföll ha spelat en avgörande roll för huruvida de fullt ut kunde tillgodogöra sig innehållets behandling i design 2 kan ses i relation till tidigare ämnesdidaktiska studier. Exempelvis menar Koirala (1997) att en förståelse för funktioner är avgörande för att förstå begreppet derivata och samma sak betonas med eftertryck av Asiala et al. (1997). Liknande resultat som de i design 2 har tidigare rapporterats av Habre och Abboud (2006). Även i deras intervention låg betoningen på grafer och enligt Habre och Abboud (2006) gav denna ansats eleverna möjlighet att utveckla konceptuella kunskaper om derivata. På samma sätt som inom avhandlingens studier var dock effekten beroende av elevernas förkunskaper.

Såväl eftertester som intervjuerna i studie 2 indikerade att innehållets behandling i design 1 verkade ha riktat elevernas uppmärksamhet mot aspekter som kan beskrivas svara mot procedurkunskaper. Som konstaterades ovan ska detta inte tolkas som att den analytiska strategin som förekom i design 1 är överflödigt eller oviktig. Precis som beskrivs av ett stort antal tidigare studier utgör förmågan att kunna tolka innebörden av derivata i flera olika representationer en bärande del av förståelsen (t.e.x. Berry & Nyman, 2003; Haciomeroglu et al., 2010; Koirala, 1997; Orton, 1983; Zandieh, 2000; Zandieh & Knapp, 2006). Undervisningens roll är att erbjuda eleverna möjligheter att utveckla denna förmåga och det är i detta perspektiv resultatet av avhandlingens studier ska tolkas. Eleverna som deltog i interventionerna var i ett tidigt skede i sitt lärande av derivata och de flesta av dem hade vid studiens genomförande endast urskilt ett fåtal av begreppets olika aspekter. För dessa elever innebar en varierande representationsform inte optimala förutsättningar att utveckla den förmåga som beskrevs av det avsedda lärandeobjektet.

De intervjuer som genomfördes i samband med studie 2 indikerade dock att en varierande representationsform är lämplig i ett senare steg. Några av de elever som intervjuades hade redan innan interventionen urskilt lärandeobjektets kritiska aspekter och de behärskade därmed också den visuella strategin. En av dessa elever deltog i design 2 och det blev under intervjun tydligt att interventionen inte erbjudit honom några möjligheter till utveckling då han redan vid start bemästrade lärandeobjektet. För de elever som deltagit i design 1 var situationen annorlunda. En av dem menade exempelvis att deltagandet i interventionen bidragit till att stärka hans förståelse. En annan av dessa elever beskrev i sin tur entusiastiskt hur den analytiska strategin (med andra ordval) inneburit en för honom ny insikt.

Sammantaget indikerade intervjuerna att innehållets behandling i design 1, med tillägget att undervisningen också bör innehålla grafer till mer avancerade funktioner, förefaller lämpligt för elever vars förkunskaper innebär att de urskilt aspekter av derivata i flera olika representationsformer.

## 5.2 Studiernas resultat i ett variationsteoretiskt perspektiv

Det faktum att en variation av grafer i kombination med en invariant representationsform synliggjorde lärandeobjektets kritiska aspekter kan ses i ljuset av variationsteori. Enligt denna bör de aspekter som är kritiska först separeras och behandlas var för sig i undervisningen. Först därefter bör de behandlas simultant (Marton, 2015; Marton et al., 2004). Som konstaterades i avsnittet ovan är dock vad som är kritiskt att urskilja beroende av de aktuella elevernas förkunskaper. Skillnaderna i det erfarna lärandeobjektet i design 1 respektive 2 kan diskuteras med utgångspunkt i detta resonemang.

Som beskrivs av Zandieh (2000) är derivata ett mångfacetterat begrepp som kan representeras på olika sätt. En komplett förståelse innefattar enligt Zandieh (2000) att kunna tolka begreppets innebörd i olika representationer och dessutom inse hur dessa olika tolkningar kan relateras till varandra. Denna beskrivning är inte unik för derivata utan kan sägas gälla för matematiska begrepp i allmänhet. Beskrivningen avser emellertid målet för elevernas lärande. Den säger ingenting om hur undervisningen bör designas. Att olika representationer ska förekomma i undervisningen är naturligtvis självklart men frågan som behöver besvaras är på vilket sätt och i vilken ordning. Den typ av matematikundervisning som ofta förespråkas och som, bitvis, användes inom design 1 i avhandlingens studier innebär att aspekter av ett begrepp synliggörs genom att de förekommer i olika representationsformer (Duval, 2006; Hallet, 2000, 2006). I ett variationsteoretiskt perspektiv innebär denna typ av undervisning att de olika representationsformerna används för att skapa kontraster och/eller generaliseringar. Varje representationsform innehåller dock flera aspekter i sig själv och en annan väg, vilken uteslutande användes inom design 2, är att skapa kontraster och generaliseringar inom en och samma representationsform. Resultatet av avhandlingens studier visade att med utgångspunkt i det aktuella lärandeobjektet var denna design mer framgångsrik för att synliggöra de kritiska aspekterna. Dessa innebar dels att urskilja hur värdet hos en av graferna svarade mot lutningen hos den andra

grafen, dels att urskilja att derivatan svarar mot såväl lutningen i en punkt liksom mot en funktion (graf) i sig. Det variationsmönster som användes mest frekvent innebar att utgå från grafen till en funktion och i punkt för punkt estimeras dess lutning (eller värde). Värdet på lutningen (alternativt funktionsvärdet) användes i sin tur för att successivt konstruera grafen till funktionens derivata (alternativt antiderivata). I detta variationsmönster separerades och studerades en aspekt hos grafen i olika punkter. Inga andra innehållsliga aspekter berördes av läraren. I samband med själva konstruktionen av grafen synliggjordes därmed relationen mellan lutning och värde. Resultatet av konstruktionen synliggjorde i sin tur hur derivatan kunde tolkas både som lutningen/värdet i en punkt liksom en funktion i sig. Noterbart är att detta variationsmönster förekom frekvent i både design 1 och 2. Det som däremot skiljde designerna åt var hur de kritiska aspekterna generaliserades. Design 1 innehöll visserligen några olika typer av grafer. Samtliga var dock kända för eleverna till utseendet och de kritiska aspekterna generaliserades framförallt via olika representationsformer. Observationer och eftertest visade att många av eleverna inte uppfattade detta variationsmönster som en generalisering utan som en kontrast. Istället för att synliggöra de kritiska aspekterna synliggjordes hur det gick att lösa uppgifterna med en annan strategi (vilken inte krävde att de kritiska aspekterna hade urskilts). Generaliseringen fick därmed en rakt motsatt effekt jämfört med vad som var avsett. I design 2 genomfördes generaliseringen istället genom att variera typen av grafer och resultatet visade att detta sätt att behandla innehållet synliggjorde de kritiska aspekterna. I efterhand kan konstateras att de två olika sätten att skapa generaliseringar gav upphov till två distinkt skilda lärandeobjekt.

### 5.3 Studiernas resultat i ett metodologiskt perspektiv

I den första av avhandlingens två studier användes learning study, en forskningsansats som ofta beskrivs som näraliggande ett design experiment (Marton & Pang, 2003). Enligt Jaworski (2004) är den kritik som kan riktas mot dessa två metoder av liknande karaktär. Inom en learning study görs anspråk på att förklara elevernas lärande mot bakgrund av innehållets behandling i undervisningen. Eftersom ansatsen innebär att studera relationen mellan undervisning och lärande i naturliga klassrumsmiljöer är det dock

många variabler som är okontrollerade. Det kan därmed vara svårt att belägga huruvida det faktiskt är innehållets behandling och inte någon annan variabel som påverkat elevernas lärande.

Utgångspunkten för uppläggnen av avhandlingens andra studie var att den skulle utgöra ett komplement till learning studyn och pröva dess resultat via en mer experimentell ansats. Resultatet från learning studyn togs som utgångspunkt och två olika sätt att behandla innehållet ställdes mot varandra. Den experimentella ansatsen innebar att i möjligaste mån försöka isolera variabeln ”innehållets behandling” genom att kontrollera för så många andra variabler som möjligt. Randomisering av eleverna och ett utökad antal frågor i för- och eftertest var två betydande förändringar. Det samtidiga genomförandet av designerna och individuella, utförliga, instruktioner till lärarna var två andra.

Resultatet av studie 2 visade sig vara kompatibelt med resultatet i learning studyn. De båda studierna genomfördes med olika typer av metoder och resultaten baserades på olika typer av data. I studie 1 utgjordes det empiriska underlaget av lektionsobservationer och elevmotiveringar på testfrågor. I studie 2 utgjordes det av testresultat och elevintervjuer. Den höga samstämmigheten hos resultaten i de två studierna bidrar till att underbygga trovärdigheten i avhandlingens slutsatser. Vid sidan om detta är den höga samstämmigheten också relevant i relation till forskningsansatsen learning study och dess kunskapsanspråk. Som beskrevs ovan går den kritik som Jaworski (2004) menar kan riktas mot learning study huvudsakligen ut på att det på grund av ansatsens komplexitet är svårt att hävda att elevernas lärande beror på innehållets behandling. Resultatet av studie 2 innebar att slutsatserna från en learning study verifierades även när de prövades i ytterligare en studie som genomfördes under mer experimentella betingelser. Utifrån de kunskapsanspråk som görs i en learning study utgör samstämmigheten mellan studierna ett viktigt resultat ur metodologisk synvinkel.

## 5.4 Slutsatser och implikationer

Studiernas viktigaste kunskapsbidrag, tillika viktigaste implikationer, rör relationen mellan undervisning och lärande inom derivata. I förening visar resultatet av studierna att för att erfara relationen mellan grafen till en funktion och grafen till funktionens derivata på ett kvalitativt sätt är två aspekter kritiska att urskilja: derivatan kan vara både en funktion och



lutningen i en punkt; lutningen hos grafen till en funktion svarar mot värdet på grafen till funktionens derivata.

Dessa resultat implicerar att undervisningen om derivata med fördel innehåller moment där möjligheterna att urskilja dessa kritiska aspekter är goda. Lektionernas design inom avhandlingens studier pekar konkret på hur detta kan åstadkommas: Undervisning som begränsas till den grafiska representationsformen och innehåller en variation av grafer synliggör de kritiska aspekterna och placerar grafiska aspekter av derivata i förgrunden.

Studiernas resultat visar också att undervisning i vilken representationsformen varierar, i detta sammanhang, inte synliggör de kritiska aspekterna i samma utsträckning som undervisning där variationen sker inom en representationsform. Den synliggör däremot hur strategier som bygger på ett symboliskt algebraiskt resonemang kan användas för att lösa uppgifter givna i en grafisk kontext. Om syftet är att eleverna ska urskilja grafiska aspekter av derivata bör därför flera representationsformer förekomma i undervisningen först efter att de kritiska aspekterna urskilts.

Detta implicerar att studiernas design 1 också kan vara lämplig i undervisning om derivata, men först efter att undervisning i linje med design 2 genomförts.

Med avseende på både design 1 och 2 verkar dock gälla att elevernas möjligheter att urskilja aspekter av derivata i hög grad påverkas av deras förkunskaper. Resultatet av studierna indikerar att kunskaper om funktioner är avgörande för att på ett meningsfullt sätt närma sig kunskap om derivata som en funktion. Att urskilja aspekter av derivata i olika representationsformer var för sig förefaller i sin tur vara en viktig förkunskap för att utveckla förmågan att urskilja derivata i olika representationsformer samtidigt.

Betydelsen av förkunskaper har implikationer både för undervisningens upplägg i termer av progression liksom för vilken information om elevernas (för)kunskaper som lärare behöver försäkra sig om.

Avslutningsvis visar kombinationen av de två olika forskningsansatser som använts inom avhandlingen att resultat som genererats i en learning study i detta fall är stabila när de testas i en mer experimentell design.

Detta implicerar dels att resultaten i andra learning studies kan tänkas ha liknande stabilitet. Kombinationen av forskningsansatser visar också på en möjlig väg för andra studier inom learning study-traditionen. Detta för att kunna göra starkare anspråk om betydelsen och hållbarheten av god undervisningsdesign.



# Summary

This thesis investigates in what way the design of instruction may influence students' learning. The thesis involves two empirical studies conducted in mathematics in a Swedish upper secondary school. Both studies involved several groups of students, all of whom participated in a 120-min lesson design that aimed at offering opportunities to discern graphical aspects of the concept of derivative. The content of the lessons, the relationship between a graph and its derivative graph, was the same in all student groups. However, the content was handled differently and the thesis investigates how this affected which aspects of the derivative were made visible to the students.

## Introduction

Over the last few decades, educational research has repeatedly reported that the teacher is the most important factor for students' learning (Hanushek, 2011; Hattie, 2009). However, less is known about what makes teaching good or effective (Ball & Rowan, 2004) and several researchers pinpoint and discuss difficulties involved when measuring the effect of instruction (e.g. Hiebert & Grouws, 2007; Nuthall, 2004).

Within the field of mathematics education, questions regarding teaching methods and the mathematical content taught in school have been discussed for centuries (Kilpatrick, 1992). At the same time, the number of research studies concerned with the relationship between teaching and learning are still relatively few (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2015; Niss, 2001). Charalambous and Pitta-Pantazi (2015) argue that while research in mathematics education about teaching and learning has been extensive for decades, this does not apply to the relationship between them:

We initiated this chapter by pointing out that, after almost four decades of significant scholarly work, we have by now accumulated sufficient empirical evidence suggesting that teachers make a difference in student learning. However, questions regarding the interactions among teacher knowledge, teaching quality, and student learning – as well as the particular ways in which these interactions are manifested – remain open (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2015, p.44).

Charalambous and Pitta-Pantazi (2015) emphasize that the effect of teaching is difficult to measure. Furthermore, they claim there is a lack of theoretical frameworks about the relation between teaching and learning. This is in line with Hiebert and Grouws (2007), who argue that theories in mathematics education are concerned with learning rather than teaching.

Regarding the derivative concept, the field of research is facing a similar situation to research in mathematics education in general. For a long period, most studies have focused on students' understandings, strategies and misconceptions (e.g. Aspinwall, Shaw & Presmeg, 1997; Borgen & Manu, 2002; Jones & Watson, 2018; Orton, 1983; Park, 2013). Fewer studies have investigated the effect of teaching or the relationship between teaching and learning.

### **Aim and research question**

The aim of the thesis is to investigate how the design of instruction influences students' learning of the derivative concept. More specifically, the thesis explores how different ways of handling the content during instruction influence which aspects of the content are made visible to the students. The handling of the content refers to which examples are used within a design and how they are sequenced. It also refers to the variation and invariance of the content that are created through the examples. Furthermore, it refers to which aspects of the content are brought to the foreground by means of being focused on by the teacher. The thesis addresses the following overarching research question:

What ways of handling the content can be identified as efficient in making critical aspects of the relationship between a graph and its derivative graph visible to the students?

Through different perspectives, different types of data and different methods of analysis, the question is answered in a licentiate thesis and two articles included in the thesis.

### **Theoretical background**

The motive for investigating how the handling of the content influences students' learning of the derivative is based on both practice and previous

research. The thesis reports on two empirical studies. In the first study, three teachers and a researcher collaborated in designing, implementing and analyzing the outcome of a 120-min lesson plan. The content of the lesson was derived from the teachers' experience and was something they considered to be difficult to teach as well as to learn.

The teachers had been teaching the derivative for several years and their experiences were similar. Although the concept is central in several courses in Swedish upper secondary school, a majority of students show limited understanding and use what Lithner (2008) refers to as algorithmic reasoning. When solving tasks, this type of "reasoning" means deciding which algorithm to use; the rest is performed as a routine. With regard to the derivative, the teachers' view was that many students are only able to solve standard tasks containing algebraic expressions.

The teachers' view was supported by previous research wherein students' knowledge about the derivative is often described as procedural and directed towards symbolic representation (e.g. Asiala, Cottrill, Dubinsky & Schwingendorf, 1997; Bentley, 2009; Bergqvist, Lithner & Sumpster, 2008; Borgen & Manu, 2002; Jukić & Dahl, 2012). Even though procedures constitute an important part of calculus, several studies have shown their insufficiency if not complemented by conceptual knowledge (e.g. Bergqvist et al., 2008; Borgen & Manu, 2002).

The fact that many students mainly demonstrate procedural knowledge is something that has been highlighted for a long time and several researchers have argued that instruction should involve representations other than the symbolic (Berry & Nyman, 2003; Goerdt, 2007; Orton, 1983; Tall, 2008). This can be seen in relation to the work of Zandieh (2000) who developed a framework for investigating students' understanding of the derivative. According to Zandieh (2000), a complete understanding of the derivative involves the ability to interpret the concept in different representations as well as the ability to transfer an interpretation from one representation to another.

The calls for multiple representations, in combination with the teachers' experience, pinpointed the graphical representation of the derivative as a relevant area of investigation. After discussions between the researcher and the teachers, it was decided to focus on the relationship between a graph and its derivative graph. This specific content was considered to have the potential to develop students' knowledge of the graphical representation of the

derivative. It was also considered to have potential to develop students' conceptual knowledge of the derivative.

## Theoretical framework

Variation theory (Marton, 2015; Marton et al., 2004) has been used as a point of departure in the thesis, both when designing the research lessons and when analyzing the relationship between the implemented instructions and students' learning. According to variation theory, learning concerns foremost discerning new aspects of a phenomenon (e.g. the derivative). The role of teaching is to make this discernment possible and when designing instruction, the theory works as a guiding principle.

Variation theory denotes what to be learned as the *object of learning*. This corresponds to a capability, e.g. interpreting the relationship between a graph and its derivative graph. The object of learning is defined by its *critical aspects*, which are those aspects that it is necessary to discern in order to develop the capability that is targeted. The opportunities to discern the critical aspects are, in turn, a function of the patterns of variation and invariance that are created during instruction (Marton, 2015; Marton et al., 2004). Variation theory states that in order to discern an aspect of a phenomenon, this aspect should vary against an invariant background. This pattern of variation, *contrast*, is the most fundamental idea of the theory. According to Marton (2015), it is the opposite of the classic way to teach, where the aspect to be discerned is kept invariant while other aspects vary. The latter is, indeed, also a pattern of variation, *generalization* (Marton et al., 2004). However, if following variation theory, generalization takes place after the contrast.

When designing instruction, the critical aspects that are taken into consideration constitute the *intended* object of learning. However, other aspects will also inevitably vary during a lesson. Thus, the intended object of learning may not be the same as the *lived* object of learning. The latter describes which aspects were discerned by the students, i.e. what they actually learned. In the best case, the intended and the lived object of learning are close to each other but they can also be very different (Marton et al., 2004).

## Research design

The empirical studies included in the thesis were conducted in 2013 and 2016. Since the latter study aimed at testing the results of the former, they had

several features in common. Both were intervention studies, conducted in the same Swedish upper secondary school located in a small municipality in the south-west of Sweden. Each study involved approximately 70 students enrolled in four of the higher education preparatory programs: Economics (EK), Social Science (SA), Natural Science (NA) and Technology (TE). Both studies investigated how different ways of handling the content during instruction influenced students' learning of the derivative. However, in order to complement each other, the studies used different research approaches.

## **Study 1**

The first study was a learning study (Lo, 2012; Marton, 2015) involving three teachers and a researcher who collaborated in designing, implementing and analyzing the outcome of a 120-min lesson design. The design dealt with the relationship between a graph and its derivative graph and was implemented in three student groups in succession. Between each implementation, the handling of the content was revised and the study aimed at investigating how the revisions influenced the resemblance between the intended and the lived object of learning.

The results of the learning study suggested that the different ways of handling the content generated different lived objects of learning. However, the study was conducted in natural settings where the participating teachers taught their ordinary students in their ordinary groups. Furthermore, the results were based mainly on qualitative data in the form of lesson observations and students' ways of explaining their answers on three posttest tasks. Thus, validation of the results was desirable, and in the second study, two of the lesson designs that were generated in the learning study were conducted in more controlled experimental conditions.

## **Study 2**

In the second study, the research approach was an "alternative-treatments design with pretest" (Shadish et al., 2002, p.261). This meant several changes regarding the method. First, instead of keeping the regular groups intact, the students were randomly assigned to one of the two lesson designs. Second, the students were not instructed by their regular teacher. Third, the validity and the reliability of the tests were increased by increasing the number of tasks.

Ten days before the intervention, the students completed two tests. One of these was a content-specific test that contained 14 tasks concerned with the graphical representation of the derivative. The other test contained 25 multiple-choice items concerned with the function concept. Right after the intervention, the students once again completed the content-specific test. The test results were analyzed through multiple linear regressions (Field, 2013). When running the regressions, the pretests and the lesson design were the independent variables and the posttest was the dependent variable.

The tests in Study 2 contained almost exclusively multiple-choice items or questions that not required an explanation. In order to enable an analysis of students' ways of reasoning in Study 2, eight students from each design were interviewed. During the interviews, the students were asked to explain which strategies they had used when solving some of the tasks in the content-specific test.

## Results and analyses

The results are presented and analyzed in a licentiate thesis and two articles included in the thesis. The licentiate thesis is based on data from Study 1. The first article is based on data from Studies 1 and 2. The second article is based on data from Study 2.

### Licentiate thesis

*The significance of variation for students' learning – The relationship between a graph and its derivative graph.* Gothenburg: University of Gothenburg.

The results of the licentiate thesis consist of three different lesson designs with appurtenant analyses and descriptions of: (a) which aspects of the content were critical for the students to discern; (b) how the different ways of handling the content influenced students' learning.

The initial design contained seven distinct sections involving patterns of variation created by graphs. One of two overarching features of the design was that the variation of graphs was limited. This meant that only graphs of polynomial functions of degree 0-3 were present during instruction. The other overarching feature was that the form of representation varied. Several of the graphs were described in terms of algebraic expressions and two of the sections started with situations from real life.



The second design involved the same seven sections but the handling of the content was revised. The algebraic representation was removed while the variation of graphs was increased. Besides graphs of polynomial functions, Design 2 also contained graphs that could not be translated into algebraic expressions. The third design was a hybrid of the other two, involving similar graphs to Design 1 but no algebraic expressions.

The results of Study 1 suggested that in order to experience the relationship between a graph and its derivative graph in accordance with the intended object of learning, two aspects were necessary to discern: (1) The derivative can be both a point-specific object and a function. (2) For each point, the slope of a function graph corresponds to the value of the derivative graph.

Lesson observations and students' ways of explaining their answers on the posttest suggested that most of the students from Design 1 did not discern these aspects. Instead, they focused on the process of translating between graphic and algebraic representation. When solving tasks, many students identified the current graph as a polynomial of a certain degree and used the power rule to imagine the shape of the derivative graph. Sometimes, this strategy led to the correct answer. However, several of the students used it indiscriminately.

Lesson observations and students' ways of explaining their answers on the posttest suggested that Design 2 generated a lived object of learning that was close to the intended one. On the posttest, a vast majority of the students referred to graphical aspects and several students examined the properties of the graphs at different points and intervals. Furthermore, lesson observations suggested that when discussing and solving tasks, several of the students discerned the relation between the derivative as a point-specific object and the derivative as a function.

In Design 3, the variation of graphs was reduced once again. According to the results, this decreased students' opportunities to discern the critical aspects. Although the students' strategies were based on graphical reasoning, their explanations were not as profound as those offered by the students from Design 2. Thus, if summarized, the results of Study 1 suggested that instruction involving a variation of graphs but no algebraic expressions led to greatest resemblance between the intended and the lived object of learning.

## Article 1

Generating different lesson designs and analyzing their effects: The impact of representations when discerning aspects of the derivative. *Journal of Mathematical Behavior*, 2018, Vol.51, 1-14.

The article begins by presenting and analyzing the results of Study 1. These results are then taken as the point of departure for Study 2, in which Designs 1 and 2 from Study 1 were compared in more controlled experimental conditions. However, in Study 2, the connections to real life were removed from Design 2. By doing this revision, Study 2 compared a design in which the form of representation varied (Design 1) with a design in which the type of graphs varied (Design 2).

In the article, the results from Study 2 consist of students' test results, which are compared through multiple linear regressions. When running the regressions, the pretests and the design were the independent variables and the posttest was the dependent variable. The effect of the pretests and the design are presented in Table 5.

Table 5. Linear model of predictors of the content-specific posttest score. 95% confidence intervals reported in parentheses.

	<b>b</b>	<b>SE b</b>	<b><math>\beta</math></b>	<b>p</b>
Pretest functions	0.34 (0.17, 0.52)	0.09	0.41	.000
Pretest content-specific	0.56 (0.31, 0.82)	0.13	0.47	.000
Design	1.72 (0.59, 2.85)	0.57	0.19	.003

Table 5 shows that both of the pretests, as well as the design, significantly predicted the result on the posttest. The students who participated in Design 2 scored significantly higher ( $p=.003$ ).

With the aim of comparing the groups from Social Science/Economics and the groups from Natural Science/Technology, another regression was conducted. The result is presented in Table 6.

Table 6. The effect of the design with respect to program. SA/EK=Social Science and Economic students. NA/TE=Natural Science and Technology students.

	<b>b</b>	<b>SE b</b>	<b><math>\beta</math></b>	<b>p</b>
SA/EK Design 1 vs SA/EK Design 2	0.39 (-0.40, 1.18)	0.40	0.06	.324
NA/TE Design 1 vs NA/TE Design 2	1.30 (0.53, 2.07)	0.39	0.20	.001

Table 6 shows that in the groups from NA/TE, the design significantly predicted the result on the posttest. The students who participated in Design 2 scored significantly higher ( $p=.001$ ). Table 6 also reveals that in the groups from SA/EK, the design was not a significant predictor ( $p=.324$ ). The result in Table 6 can be seen in the light of the pretests where the students from NA/TE scored considerably higher. Thus, the result of the multiple regressions indicated that the effect of Design 2 was dependent on students' prior knowledge.

## Article 2

How the use of representations during instruction can promote development of conceptual or procedural knowledge: A comparison of two lesson designs concerned with the derivative concept. (*Manuscript*).

The results are based on qualitative data from Study 2. One week after the intervention, eight students who participated in Design 1 and eight students who participated in Design 2 were interviewed. During the interview, the students were asked to describe which strategies they had used when solving some of the tasks in the content-specific pre- and posttests. The result section of the article consists of descriptions and analyses of what type of knowledge were generated in Designs 1 and 2 respectively.

Students' ways of reasoning during the interviews suggested that Design 1 primarily offered opportunities to develop procedural knowledge. Seven of the eight interviewees referred to strategies concerned with this type of knowledge. Two kinds of strategies were used frequently: (a) identifying a graph as a polynomial of a certain degree and then using the power rule to imagine the shape of the derivative/antiderivative graph; (b) checking the correspondence between turning points (function graph) and intersections with the  $x$ -axis (derivative graph). The results of the interviews suggested that students' prior knowledge determined whether these strategies were successful. Some of the interviewees had already discerned the object of learning and its critical aspects before the intervention. These students demonstrated insight when using procedural knowledge, leading to effective ways of reasoning. On the contrary, for the interviewees with less prior knowledge, the focus on procedures was a limitation. The process of

translating from graphical to algebraic representation meant they were dependent on certain types of graphs. If the shape of the graph was unfamiliar, they showed no signs of using relevant strategies.

According to the interviews, the lived object of learning in Design 2 was different compared to Design 1. When explaining their answers on the posttest, the interviewees from Design 2 referred solely to graphical aspects. Furthermore, while the aspects discerned by the students from Design 1 gave rise to procedural knowledge, the interviews suggested that Design 2 had offered opportunities to develop conceptual knowledge. Several of the students from Design 2 offered profound descriptions about the relationship between the graphs, both with regard to specific points and different intervals. However, similarly to Design 1, the outcome of Design 2 was dependent on prior knowledge. The interviewees from Design 2 who scored low on the pretest also found the posttest to be challenging and they experienced difficulties with explaining their strategies. The difficulties were sometimes related to the actual tasks but they also arose from their struggles with more fundamental concepts.

## Discussion and conclusion

The aim of this thesis was to investigate how the design of instruction influences students' learning of the derivative concept. The overarching research question concerned what ways of handling the content are efficient in making critical aspects of the relationship between a graph and its derivative graph visible to the students.

The results suggested that in order to discern the relationship between a graph and its derivative graph in a qualitative way, two aspects are critical to discern: (1) the derivative can be interpreted both as a point-specific object and as a function; (2) the slope of a graph corresponds to the value of its derivative graph. Both of these aspects have been highlighted in previous research. Park (2013) reported on students' difficulties in interpreting the relation between the derivative as a point-specific object and the derivative as a function. Zandieh (2000) also emphasized the twofold nature of the derivative and described the connection between point-specific object and function as the notion of running through every point on the original curve and extracting the instantaneous slope value. Zandieh's (2000) description

involves both of the critical aspects; to be able to interpret the derivative as a function, students need to discern the relation between slope and value.

The most important contribution of this thesis is concerned with how different ways of handling the content influence students' opportunities to discern the critical aspects. In line with suggestions from previous research (e.g. Duval, 2006; Hallet, 2000, 2006), the initial design involved multiple representations. However, the results showed that instead of focusing on and discerning the intended graphical aspects, a majority of the students turned their attention to algebraic aspects. In Design 2, there was no algebra but a greater variation of graphs was present. According to the results, this offered better opportunities to discern the critical aspects.

At a first glance, the results seem to be in contrast with previous research. Haciomeroglu et al. (2010) emphasized that to interpret derivative graphs, it is important that students are able to switch between analytic (algebraic) and visual (graphical) thinking. However, while the study by Haciomeroglu et al. (2010) analyzed students' existing strategies, the studies in this thesis aimed at design instruction that offered opportunities to develop these strategies. The participating students in this thesis were at an early stage in their learning of the derivative, and the lesson dealt with a limited content. In this particular context, focusing on the graphical representation was beneficial.

The argument that the content was limited also holds in relation to researchers who claim that concepts should be taught using multiple representations (Duval, 2006; Hallet, 2000, 2006). The ability to interpret the derivative in multiple representations is, indeed, the goal from a long-term perspective. Nevertheless, the results of the current studies suggest that multiple representations are not necessarily preferable from a short-term perspective. Every representation of the derivative contains several aspects in itself. In order to be able to transfer between representations, students first need to discern the relevant aspects within each representation.



## Referenser

- Artigue, M., Batanero, C., & Kent, P. (2007). Mathematics thinking and learning at post-secondary level. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, 1011-1049. Charlotte, N.C.: Information Age Publishing.
- Asiala, M., Cottrill, J., Dubinsky, E., & Schwingendorf, K. (1997). The development of students' graphical understanding of the derivative. *Journal of Mathematical Behavior*, 16(4), 399-431.
- Aspinwall, L. & Shaw, K.L. (2002). Representations in calculus: Two contrasting cases. *The mathematics teacher*, Reston 95:6, (Sep 2002), 434-439.
- Aspinwall, L., Shaw, K. L., & Presmeg, N. C. (1997). Uncontrollable mental imagery: Graphical connections between a function and its derivative. *Educational Studies in Mathematics* 33, 301-317.
- Ball, D., & Rowan, B. (2004). Introduction: Measuring Instruction. *The Elementary School Journal*, 105(1), 3-10.
- Baumert, J., Kunter, M., Blum, W., Brunner, M., Voss, T., Jordan, A., Klusmann, U., Krauss, S., Neubrand, M., & Tsai, Y. (2010). Teachers' Mathematical Knowledge, Cognitive Activation in the Classroom, and Student Progress. *American Educational Research Journal*, Vol. 47, No. 1, 133-180.
- Bentley, P-O. (2009). *Svenska elevers kunskaper i TIMSS Advanced 2008 och 1995 – En djupanalys av hur eleverna i gymnasieskolan förstår centrala begrepp inom matematiken*. Skolverket: Analysrapport till 336, 2009.
- Bergqvist, T., Lithner, J., & Sumpter, L. (2008). Upper secondary students' task reasoning. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 39:1, 1-12.
- Berry, J., & Nyman, M. (2003). Promoting students' graphical understanding of the calculus. *Journal of Mathematical Behavior*, 22, 481-497.
- Björkqvist, O. (1993). Social konstruktivism som grund för matematikundervisning. *Nordisk matematikdidaktik*, vol. 1, nr 1, 8-17.
- Boesen, J., Helenius, O., Bergqvist, E., Bergqvist, T., Lithner, J., Palm, T., & Palmberg, B. (2014). Developing mathematical competence: From the intended to the enacted curriculum. *Journal of Mathematical Behavior*, 33, 72-87.

- Borgen, K.L., & Manu, S.S. (2002). What do students really understand? *Journal of Mathematical Behavior*, 21, 151–165.
- Brown, A. (1992). Design experiments: Theoretical and methodological challenges in creating complex interventions in classroom settings. *Journal of the Learning Sciences*, 2, 141-178.
- Carlgren, I. (2017). Forskning som utvecklar undervisningen. I I. Carlgren (Red.), *Undervisningsutvecklande forskning – exemplet Learning study*, 175-189. Malmö: Gleerups.
- Carlgren, I. (2012). The Learning Study as an approach for ‘clinical’ subject matter didactic research. *International Journal for Lesson and Learning Studies*, 1:2, 1-18.
- Carlgren, I. (2018). Pedagogiken och lärarna. *Pedagogisk forskning i Sverige*, Vol. 23, Nr 5, 268-283.
- Carlson, M., Oehrtman, M., & Engelke, N. (2010). The Precalculus Concept Assessment: A Tool for Assessing Students’ Reasoning Abilities and Understandings, *Cognition and Instruction*, 28:2, 113-145.
- Çetin, N. (2009). The Ability of Students to Comprehend the Function-Derivative Relationship with Regard to Problems from Their Real Life. *PRIMUS: Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies*, 19:3, 232-244.
- Charalambous, C.Y., & Pitta-Pantazi, D. (2015). Perspectives on priority mathematics education: Unpacking and understanding a complex relationship linking teacher knowledge, teaching and learning. In L.D. English & D. Kirshner (Eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (Third ed., 100 Cases 0), 19-59. Routledge Ltd - M.U.A.
- Clements, M.A. (2013). Past, present and future dimensions of mathematics education: Introduction to the third international handbook of mathematics education. In M.A. Clements, A.J. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick & F.K.S. Leung (Eds.), *Third International Handbook of Mathematics Education* (Vol. 27, Springer International Handbooks of Education). v-xi. New York: Springer New York.
- Cobb, P. (2007). Putting philosophy to work: Coping with multiple theoretical perspectives. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, 3-38. Charlotte, N.C.: Information Age Publishing.
- Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher*, 32(1), 9-13.



- Collins, A., Joseph, D., & Bielaczyc, K. (2004). Design Research: Theoretical and methodological Issues. *The Journal of the Learning Sciences*, 13(1), 15-42.
- Dubinsky, E., & McDonald, M. A. (2001). APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. In D. Holton (Ed), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study*. New ICMI Study Series, Vol. 7 273-280. Dordrecht: Kluwer.
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics* 61, 103-131.
- Elliott, J. (2012). Developing a science of teaching through lesson study. *International Journal of Lesson and Learning Studies*, 1(2), 108-125.
- Field, A. (2013). *Discovering Statistics Using IBM SPSS Statistics* (4<sup>th</sup> ed.). London: SAGE Publications Ltd.
- García, M., Llinares, S., & Sánchez-Matamoros, G. (2010). Characterizing thematized derivative schema by the underlying emergent structures. *International Journal of Science and Mathematics Education 2010 Vol. 9*, No. 5, 1023-1045.
- Goerd, S.L. (2007). *The effect of emphasizing multiple representations on calculus students' understanding of the derivative concept* (Doctoral thesis, UMI 3277946). University of Minnesota.
- Goldin, G. (2000). A scientific perspective on structured task-based interviews in mathematics education research. In A. Kelly & R. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education*, 517- 545. Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Habre, S., & Abboud, M. (2006). Students' conceptual understanding of a function and its derivative in an experimental calculus course. *Journal of Mathematical Behavior* 25, 57–72.
- Haciomeroglu, E.S., Aspinwall, L., & Presmeg, N.C. (2010). Contrasting Cases of Calculus Students' Understanding of Derivative Graphs. *Mathematical Thinking and Learning*, 12(2), 152-176.
- Hallett, D.H. (2000). Calculus at the Start of the New Millennium. *Proceedings of the International Conference on Technology in Mathematics Education*. Beirut, Lebanon (2000).
- Hallett, D.H. (2006). What have we learned from calculus reform? The road to conceptual understanding. In *A Fresh Start for Collegiate Mathematics: Rethinking the Courses Below Calculus*, 43-45. Mathematical Association of America.

- Hanushek, E. (2011). The economic value of higher teacher quality. *Economics of Education Review*, 30(3), 466-479.
- Hattie, J. (2009). *Visible Learning – a synthesis of over 800 meta-analyses relating to achievement*. New York: Routledge.
- Hiebert, J., Gallimore, R., & Stigler, J. (2002). A knowledge base for the teaching profession: what would it look like and how can we get one? *Educational Researcher*, 31(5), 2-15.
- Hiebert, J., & Grouws, D. A. (2007). The effects of classroom mathematics teaching on students' learning. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, 371-404. Charlotte, N.C.: Information Age Publishing.
- Hiebert, J., & Morris, A. (2012). Teaching, Rather Than Teachers, As a Path Toward Improving Classroom Instruction. *Journal of Teacher Education*, 63(2), 92-102.
- Holmqvist, M. (2010). Teachers' learning in a Learning study. *Instructional Science*, 39(4), 497-511.
- Hopkins, D., & Stern, D. (1996). Quality teachers, quality schools: International perspectives and policy implications. *Teaching and Teacher Education*, 12(5), 501-517.
- Hähkiöniemi, M. (2006). *The role of representations in learning the derivative*. Report 104. Jyväskylä: Department of mathematics and statistics.
- Jablonka, E., Wagner, D., & Walshaw, M. (2013). Theories for studying social, political and cultural dimensions of mathematics education. In M.A. Clements, A.J. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick & F.K.S. Leung (Eds.), *Third International Handbook of Mathematics Education* (Vol. 27, Springer International Handbooks of Education). 41-68. New York: Springer New York.
- Jaworski, B. (2004). Insiders and outsiders in mathematics teaching development: The design and study of classroom activity. *Research in Mathematics Education*, 6(1), 3-22.
- Jones, S., & Watson, R. (2018). Recommendations for a “Target Understanding” of the Derivative Concept for First-Semester Calculus Teaching and Learning. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 4(2), 199-227.

- Jukić, L., & Dahl, B. (2012). University students' retention of derivative concepts 14 months after the course: influence of 'met-befores' and 'met-afters'. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 43:6, 749-764.
- Juter, K. (2006). *Limits of functions: University students' concept development* (Doctoral thesis / Luleå University of Technology, 2006:08). Luleå: Luleå University of Technology.
- Kennedy, M. M. (1999). A test of some common contentions about educational research. *American Educational Research Journal*, 36(3), 511-541.
- Kilpatrick, J. (1992). A History of Research in Mathematics Education. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. 3-40. New York: Macmillan.
- Koirala, H. P. (1997). Teaching of calculus for students' conceptual understanding. *The Mathematics Educator*, 2(1), 52-62.
- Kullberg, A. (2010). *What is taught and what is learned - Professional insights gained and shared by teachers of mathematics*. Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.
- Lauten, D.A., Graham, K., & Ferrini-Mundy, J. (1994). Student understanding of basic calculus concepts: Interaction with the graphics calculator. *Journal of Mathematical Behavior*, 13(2), 225-237.
- Lerman, S. (2000). The social turn in mathematics education research. In Boaler, J. (Ed.), *Multiple perspectives on mathematics teaching and learning*, 19-44. London: Ablex publishing.
- Lewis, C. (2000). Lesson Study: The Core of Japanese Professional Development. *American Educational Research Association Meetings*. New Orleans: lessonresearcher.net.
- Lewis, C., Perry, R., & Murata, A. (2006). How should research contribute to instructional improvement? The case of Lesson study. *Educational Researcher*, 35(3), 3-14.
- Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 67(3), 255-276.
- Lo, M.L. (2012). *Variation Theory and the Improvement of Teaching and Learning*. Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.
- Lo, M.L., Marton, F., Pang, M.F., & Pong, W.Y. (2004). Toward a Pedagogy of Learning. In F. Marton & A.B.M. Tsui (Eds.), *Classroom discourse and the space of learning*, 189-225. Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.
- Marton, F. (2015). *Necessary conditions of learning*. New York: Routledge.

- Marton, F. (1981). Phenomenography – Describing conceptions of the world around us. *Instructional Science* 10 (1981), 177-200.
- Marton, F., & Booth, S. (1997). *Learning and awareness*. Mahwah, N.J.: Erlbaum.
- Marton, F., & Pang, M. F. (2003). Beyond 'lesson study': Comparing two ways of facilitating the grasp of economic concepts. *Instructional Science*, 31(3), 175-194.
- Marton, F., & Pang, M.F. (2006). On some necessary conditions of learning. *Journal of the learning sciences* 15(2), 193-220.
- Marton, F., Runesson, U., & Tsui, A.B.M. (2004). The Space of Learning. In F. Marton & A.B.M. Tsui (Eds.), *Classroom discourse and the space of learning*, 3-40. Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.
- Nemirovsky, R., & Rubin A. (1992). Students' tendency to assume resemblances between a function and its derivative. *TERC Working Paper 2-92*. Cambridge, MA: TERC Communications.
- Niss, M. (2001). Den matematikdidaktiska forskningsens karaktär och status. I B. Grevholm (Red.), *Matematikdidaktik - ett nordiskt perspektiv*, 21-47. Lund: Studentlitteratur.
- Noffke, S., & Somekh, B. (2009). *The SAGE Handbook of Educational Action Research*. London: SAGE Publications.
- Nuthall, G. (2004). Relating classroom teaching to student learning: A critical analysis of why research has failed to bridge the theory-practice gap. *Harvard Educational Review*, 74(3), 273-306.
- Orton, A. (1983). Students' understanding of differentiation. *Educational Studies in Mathematics* 14, 235-250.
- Pang, M. F. (2003). Two Faces of Variation: on continuity in the phenomenographic movement. *Scandinavian Journal of Educational Research*, 47(2), 145-156.
- Pang, M., & Ki, W. (2016). Revisiting the Idea of "Critical Aspects". *Scandinavian Journal of Educational Research*, 60(3), 1-14.
- Park, J. (2013). Is the derivative a function? If so, how do students talk about it? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 44(5), 624-640.
- Park, J. (2015). Is the derivative a function? If so, how do we teach it? *Educational Studies in Mathematics* 89, 233-250.
- Runesson, U. (2017). Variationsteori som redskap för att analysera lärande och designa undervisning. I I. Carlgren (Red.), *Undervisningsutvecklande forskning – exemplet Learning study*, 45- 60. Malmö: Gleerups.

- Ryberg, U. (2018). Generating different lesson designs and analyzing their effects: The impact of representations when discerning aspects of the derivative. *Journal Of Mathematical Behavior*, Vol. 51, 1-14.
- Ryberg, U. (Manuscript). How the use of representations during instruction can promote development of conceptual or procedural knowledge: A comparison of two lesson designs concerned with the derivative concept.
- Ryberg, U. (2014). *Variationens betydelse för elevernas lärande. Relationen mellan en funktions graf och grafen till funktionens derivata*. Göteborg: Göteborgs Universitet. <http://hdl.handle.net/2077/37569>
- Schoenfeld, A. H. (1995). A Brief Biography of Calculus Reform. *UME Trends*, 6(6), 3–5.
- Schoenfeld, A. H. (2007). Method. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, 69-107. Charlotte, N.C.: Information Age Publishing.
- Selden, J., Selden, A., & Mason, A. (1994). Even good calculus students can't solve nonroutine problems. In J. Kaput & E. Dubinsky (Eds.), *Research issues in undergraduate mathematics learning. MAA notes 33*, 31-45. Washington, DC: Mathematical Association of America.
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.
- Sfard, A. (1992). Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification - The case of function. In G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy*. (MAA notes, Vol. 25. pp. 59-84). Washington, DC: Mathematical Association of America.
- Shadish, W.R., Cook, T.D., & Campbell, D.T. (2002). *Experimental and quasi-experimental designs for generalized casual inference*. New York: Houghton Mifflin Company.
- Shavelson, R. J., Phillips. D.C. Towne, L., & Feuer, M.T. (2003). On the science of education design studies. *Educational Researcher*, 32 (1), 25-28.
- Skolverket (2010). *Rustad att möta framtiden? PISA 2009 om 15-åringars läsförståelse och kunskaper i matematik och naturvetenskap*. Rapport 352. Stockholm: Fritzes.
- Skolverket (2009). *TIMSS advanced 2008. Svenska gymnasieelevers kunskaper i avancerad matematik och fysik i ett internationellt perspektiv*. Rapport 336. Stockholm: Fritzes.

- Sriraman, B., & Nardi, E. (2013). Theories in mathematics education: Some developments and ways forward. In M.A. Clements, A.J. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick & F.K.S. Leung (Eds.), *Third International Handbook of Mathematics Education* (Vol. 27, Springer International Handbooks of Education), 303-326. New York: Springer New York.
- Stigler, J.W., & Hiebert, W. (1999). *The teaching gap – Best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom*. New York: Free Press.
- Svensson, L. (2016). Towards an integration of research on teaching and learning. *Scandinavian Journal of Educational Research*, 60, 272-285.
- Tall, D. (1996). Functions and Calculus. In A. J. Bishop et al. (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education*, 289-325. Dordrecht: Kluwer.
- Tall, D. (2008). The transition to formal thinking in mathematics. *Mathematics Education Research Journal*, Vol. 20 (2), 5-24.
- Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169.
- Thorsten, A. (2018). *Berättelseskivande i skolan: Att studera, beskriva och utveckla ett kunnande*. Linköpings universitet. Institutionen för beteendevetenskap och lärande. (Linköping Studies in Behavioural Science, 208).
- Torgerson, C. J., & Torgerson, D. J. (2001). The Need for Randomised Controlled Trials in Educational Research. *British Journal of Educational Studies*, 49(3), 316-328.
- Ubuz, B. (2007). Interpreting a graph and constructing its derivative graph: stability and change in students' conceptions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, Vol. 38, No. 5, 609-637.
- Vetenskapsrådet (2011). *God forskningsred.* Vetenskapsrådets rapportserie 1:2011. Stockholm: Vetenskapsrådet.
- Zandieh, M. J. (2000). A Theoretical Framework for Analyzing Student Understanding of the Concept of Derivative. In E. Dubinsky, A.H. Schoenfeld & J. Kaput (Eds.), *Research in collegiate mathematics education IV*, 103-127. Providence, RI: American Mathematical Society.
- Zandieh, M. J., & Knapp, J. (2006). Exploring the role of metonymy in mathematical understanding and reasoning: The concept of derivative as an example. *Journal of Mathematical Behavior*, 25(1), 1-17.



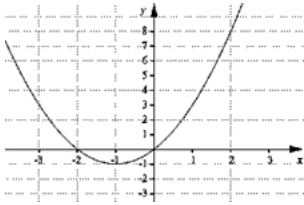




## Bilaga 1

Intervjufrågor som i studie 1 användes vid undersökningen av elevernas, före studien, uttryckta uppfattningar om funktioner och derivata.

1. Du har arbetat med funktioner inom matematiken. Kan du försöka beskriva vad en funktion är?
2. Kan du ge något exempel på en funktion?
3. Är det här en funktion?



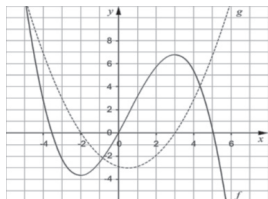
4. Beskriv vad begreppet derivata innebär för dig.
5. Hur kan man bestämma derivatan?
6. Kan du säga något om derivatan hos denna funktion? (se grafen i fråga 3)
7. Kan du i grova drag försöka skissa en graf som visar din längd från det att du föddes fram till idag? Vad innebär derivatan i detta fall?

## Bilaga 2

Beskrivning av uppgifter på förtest, eftertest och fördröjt eftertest i studie 1.

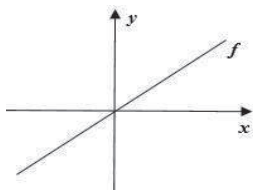
Förtest:

1.



Figuren visar graferna till funktionerna  $f$  och  $g$ . Är  $g$  derivata till  $f$ ? Motivera ditt svar.

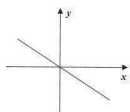
2.



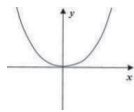
a) Figuren visar grafen till funktionen  $f$ . Skissa grafen till derivatan av  $f$ . Motivera din skiss.

b) Vilket av alternativen a - f nedan visar grafen till en funktion som är antiderivata till  $f$ ? Motivera ditt val.

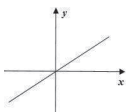
a)



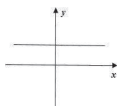
b)



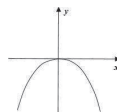
c)



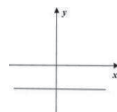
d)



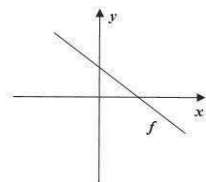
e)



f)



På eftertestet och det fördröjda eftertestet var uppgift 1 densamma som på förtestet. På eftertesten innehöll uppgift 2 samma frågeställningar som förtestet men uppgiften utgick från grafen nedan.





Några frågor om dig. Svara på frågorna genom att **ringa in ett** av kryssen på varje fråga.

19. Hur mycket tid ägnar du dig, under en normal vecka, åt **skolarbete** utanför lektionstid?

0-1 timme.	1-3 timmar.	3-6 timmar.	6-10 timmar.	Mer än 10 timmar.
X	X	X	X	X

20. Hur mycket tid ägnar du dig, under en normal vecka, åt **arbete med matematik** utanför lektionstid?

Ingen tid.	0-1 timme.	1-2 timmar.	2-4 timmar.	Mer än 4 timmar.
X	X	X	X	X

21. Ungefär hur många böcker finns det hemma hos dig? Räkna inte med tidningar, tidskrifter eller dina skolböcker.

Inga eller mycket få böcker. (0-10 böcker)	Tillräckligt för att fylla ett hyllplan. (11-25 böcker)	Tillräckligt för att fylla en bokhylla. (26-100 böcker)	Tillräckligt för att fylla två bokhyllor. (101-200 böcker)	Tillräckligt för att fylla tre bokhyllor eller mer. (mer än 200 böcker)
X	X	X	X	X

22. Hur ofta läser du längre sammanhängande boktexter? (Ett antal sidor i: skönlitteratur, faktaböcker, skolböcker, e-böcker eller motsvarande.)

Varje dag.	Några gånger i veckan.	Någon gång i veckan.	Någon gång i månaden.	Aldrig eller nästan aldrig.
X	X	X	X	X

23. Hur långt förväntar du dig att komma i din utbildning?

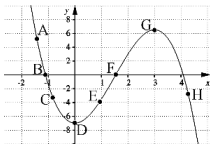
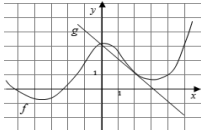
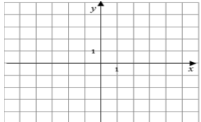
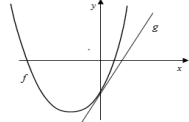
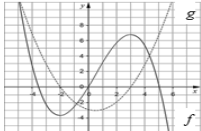
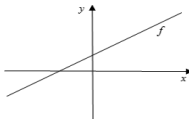
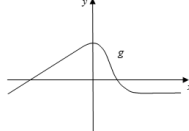
Gymnasie-utbildning	Eftergymnasial utbildning, ej högskola.	Högskoleutbildning i upp till tre år.	Högskoleutbildning i mer än tre år.	Vet inte.
X	X	X	X	X

24. Vilken är den högsta utbildning som din mamma eller pappa (eller vårdnadshavare) slutfört?

Grundskola	Gymnasie-utbildning	Eftergymnasial utbildning, ej högskola.	Högskole-utbildning i upp till tre år.	Högskole-utbildning i mer än tre år.	Vet inte.
X	X	X	X	X	X

# Bilaga 4

Beskrivning av eftertestet i studie 2. Skillnader på förtestet beskrivna nedanför tabellen.

Uppgift	Deluppgifter	Poäng	Sammanfattande beskrivning av uppgift/deluppgifter.
1	4	4	 <p>a) I vilken eller vilka av punkterna är funktionens värde negativt? b) I vilken eller vilka av punkterna är derivatans värde negativt? c) I vilken eller vilka av punkterna är <math>f'(x) = 0</math>? d) I vilken eller vilka av punkterna gäller att både <math>f(x) &lt; 0</math> och <math>f'(x) &lt; 0</math>?</p>
2	2	2	 <p><math>g</math> är tangent till <math>f</math> i punkten <math>(2, 1)</math></p> <p>a) Bestäm <math>f(2)</math> b) Bestäm <math>f'(2)</math>.</p>
3	1	2	 <p>Skissa grafen till en funktion som uppfyller följande villkor: <math>f(3)</math> negativt, <math>f'(3)</math> negativt, <math>f(-2)</math> positivt, <math>f'(-2)</math> negativt.</p>
4	1	1	 <p><math>g</math> är tangent till <math>f</math> i punkten där <math>x = 0</math>. <math>g(x) = 2x - 2</math>. Vad är korrekt (flervalsuppgift)? a) <math>f'(x) = 2x - 2</math> b) <math>f'(0) = 2x - 2</math> c) <math>f'(x) = 2</math> d) <math>f'(0) = 2</math> e) <math>f'(x) = 2x</math></p>
5	1	2	 <p>Sant eller falskt : <math>g</math> är derivata till <math>f</math>. Motivera ditt svar.</p>
6	2	3	 <p>a) Grafen till derivatan av <math>f</math>? (flervalsuppgift med fem rätta linjer som alt.) b) Skissa grafen till antiderivatan av <math>f</math>.</p>
7	3	5	 <p>a) Skissa grafen till derivatan av <math>g</math>. b) Grafen till antiderivatan av <math>g</math>? (flervalsuppgift med fem alternativ) c) Välj ett av alternativen i fråga b och förklara kort varför <math>g</math> inte kan vara dess derivata.</p>

14

19

Skillnader på förtestet: I uppgift 1 stod det positivt istället för negativt etc.; uppgift 2 innehöll en annan graf med en tangent i  $(1, -1)$ ; i uppgift 3 stod det positivt istället för negativt etc.; i uppgift 4 var alternativen givna i en annan ordning; i uppgift 6 var grafen en rät linje med negativ lutning; i uppgift 7 hade grafen samma form men var placerad ovanför x-axeln.