



GÖTEBORGS UNIVERSITET
HANDELSHÖGSKOLAN

Slumpvandringar i slumpmässiga miljöer

En simuleringsbaserad undersökning av rekurrens och transiens

Siri Rydén

Kandidatuppsats i Statistik 15 hp

Institutionen för Nationalekonomi med Statistik

vid Göteborgs Universitet

Handledare: Mattias Sundén

Januari 2025

Förord

Jag vill ge min handledare Mattias Sundén ett stort tack för hans vägledning och intressanta perspektiv som gjort studien till det bättre.

Abstract

The term “random walk in random environment” can have several different meanings. In this study, random walks in three different types of environments will be examined: a non-random environment, used as a reference point, and two variations of random environments referred to as a static random environment and a dynamic random environment.

The study investigates random walks in one- and two dimensions. Random walks in $d = 1$ can be described as occurring on an integer line, while in $d = 2$ on an integer grid.

Random walks can be described by their long-term behavior where recurrence refers to how the random walker tends to return to the origin while transience refers to how the random walker moves away from the origin without returning.

Theoretical results for recurrence and transience have been derived in all dimensions for the non-random environment, as well for the static random environment in $d = 1$. However, for random walks in random environments in $d = 2$ general theoretical results for these behaviors have not yet been derived.

This study uses a simulation-based method to investigate how bias affects recurrence and transience in dimensions $d = 1$ and $d = 2$ across different environment types. The results showed that dimension has a great influence on tendencies for these behaviors. Under symmetry, i.e. at bias level 0, random walks in the non-random and dynamic random environment held similar results. In the static random environment certain areas affected how the random walker was able to move. The results also showed that as the level of bias increased, the movement became more directed, and the effect from the bias took over.

Sammanfattning

Uttrycket slumpvandringar i slumpmässiga miljöer kan ha flera olika betydelser. I denna studie undersöks slumpvandringar i tre olika typer av miljöer: en icke-slumpmässig miljö, som används som referenspunkt, samt två varianter av slumpmässiga miljöer som här kallas för en statisk slumpmässig miljö och en dynamisk slumpmässig miljö.

I studien undersöks slumpvandringar i en- och två dimensioner. Slumpvandringarna i $d = 1$ kan beskrivas ske på en heltalslinje och i $d = 2$ på ett heltalsrutnät.

Slumpvandringar kan bland annat beskrivas utifrån sina långsiktiga beteenden där rekurrens beskriver hur slumpvandrarer återkommer till ursprungspunkten och transiens som beskriver hur slumpvandrarer avlägsnar sig och inte återvänder.

Det finns teoretiska resultat för rekurrens och transiens för alla dimensioner i icke-slumpmässiga miljöer samt för statistiska slumpmässiga miljöer i $d = 1$. För slumpmässiga miljöer i $d = 2$ saknas generella teoretiska resultat för dessa beteenden.

I denna studie används en simuleringsbaserad metod för att undersöka hur förskjutning påverkar tendenser för rekurrens och transiens i $d = 1$ och $d = 2$ för de olika miljötyperna. Resultaten visade att dimensionen har en stor påverkan för tendenser till dessa beteenden. Vid symmetri, dvs förskjutningsnivå 0, uppvisade slumpvandringarna i den icke-slumpmässiga miljön och den dynamiska slumpmässiga miljön liknande resultat. I den statistiska slumpmässiga miljön påverkades slumpvandrarerens rörelsemöjligheter av vissa områden i miljön. Resultaten visade också att när förskjutningsnivån ökade blev rörelsen mer riktad, och effekten av förskjutningen tog över.

Innehållsförteckning

1. Introduktion.....	6
1. 1 Bakgrund.....	6
1. 2 Problemformulering.....	8
1. 3 Syfte.....	8
1. 4 Forskningsfrågor.....	9
2. Teori och tidigare studier.....	9
2. 1 Rekurrens och transiens.....	9
2. 2 Pólyas rekurrensteorem.....	12
2. 3 Solomon.....	15
2. 4 Asymptotisk hastighet.....	18
2. 5 Jensens olikhet.....	20
2. 6 Kalikow och Sznitman.....	21
2. 7 Avena.....	22
3. Implementering.....	23
3. 1 Markovkedjor.....	23
3. 2 Slumpvandringar.....	23
3. 3 Icke-slumpmässig miljö.....	24
3. 4 Statisk slumpmässig miljö.....	25
3. 5 Dynamisk slumpmässig miljö.....	26
4. Metod.....	27
4. 1 Slutpositionshastighet.....	27
4. 2 Medelavstånd.....	28
4. 3 Återkomstfrekvens.....	29
4. 4 Metodval.....	30
5. Avgränsningar.....	30
6. Resultat.....	31

6. 1 Presentation av resultat	31
6. 2 Genomsnittliga slumpvandringar.....	35
7. Diskussion.....	37
7. 1 De viktigaste resultaten.....	37
7. 2 Studiens syfte och forskningsfrågor.....	38
7. 3 Kritik	39
7. 4 Andra metoder och förslag till vidare studier	40
Referenser	41

Disposition

I avsnitt 1 ges en introduktion slumpvandringar och vad studien i stort kommer att undersöka. Vidare i avsnitt 2 presenteras teoretiska resultat och relevant forskning på området. I avsnitt 3 ges en mer ingående beskrivning av hur de olika miljötyperna kommer att undersökas. Avsnitt 4 tar upp studiens avgränsningar. I avsnitt 5 beskrivs och motiveras metoden. I avsnitt 6 och 7 presenteras de uppmätta resultaten samt en diskussion som anknyter till studiens syfte och forskningsfrågor. Avslutningsvis förs en kritik kring studien samt förslag på vidare studier.

1. Introduktion

1.1 Bakgrund

En slumpvandring kan beskrivas som en sekvens av steg där riktningen av varje steg bestäms av sannolikheter. I en dimension, $d = 1$, kan en slumpvandrare röra sig ett steg åt höger med sannolikhet $P(X_i = +1) = p$ eller ett steg åt vänster med sannolikhet $P(X_i = -1) = 1 - p = q$, där X_i är oberoende och identiskt fördelade slumpvariabler. Slumpvandringen sker på en heltalslinje och börjar vid ursprungspunkten $S_0 = 0$. Stegen är lika långa och tas mot närmsta granne. Positionen efter n steg, S_n , kan beskrivas som summan av dessa på varandra följande steg:

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n = \sum_{i=1}^n X_i$$

(Bogachev, 2006).

I $d = 1$ kan slumpvandringen även beskrivas med följande diagram:



(Norris, 1997, s. 29).

Slumpvandringar kan ske i olika miljötyper där miljön håller särskilda förutsättningar, villkor eller regler som påverkar slumpvandrarens beteende.

En slumpvandrare i en icke-slumpmässig miljö möter en miljö där sannolikheterna för riktning är förutbestämda och fasta, alltså icke-slumpmässiga. I en slumpmässig miljö kan istället vissa områden eller positioner i miljön ha en större eller mindre sannolikhet för rörelse i vissa riktningar, då beroende på miljöförhållandena. Här kommer slumpvandrarens rörelse även påverkas av den slumpmässiga miljön. Slumpvandringar i slumpmässiga miljöer kan ha flera olika betydelser. I en statisk slumpmässig miljö är miljön initialt slumpmässigt genererad men hålls fast under slumpvandringens gång (Bogachev, 2006).

En dynamisk slumpmässig miljö beskriver en miljö där sannolikheterna inte bara varierar beroende på position utan också kan förändras under slumpvandringens gång. Dessa miljöer kan varieras på många olika sätt där exempelvis sannolikheterna för riktning kan uppdateras vid varje steg, med vissa intervall eller med något annat villkor (Avena, 2010).

Slumpvandringar i icke-slumpmässiga miljöer kan vara fullt symmetriska, vilket innebär att sannolikheten för att slumpvandrararen rör sig i en viss riktning är densamma överallt, där är $P(X_i = +1) = P(X_i = -1) = 0.5$ för alla i .

I slumpmässiga miljöer kan den lokala sannolikheten för ett steg i en viss riktning variera, det vill säga vara lokalt asymmetrisk, beroende på miljöförhållandena. Sannolikheterna för att ta ett steg åt höger $P(x, x + 1, \omega)$ och åt vänster $P(x, x - 1, \omega)$ kan vara olika vid varje position x i miljön ω .

Dock kan en global symmetri uppstå över ett stort antal steg som:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (P(x, x + 1, \omega) - P(x, x - 1, \omega)) = 0$$

Slumpmässiga miljöer innehåller alltid ett visst mått av lokal asymmetri för att kunna anses vara just slumpmässiga (Bogachev, 2006).

Slumpvandringar kan även ske i olika dimensioner. I denna studie kommer det endimensionella och tvådimensionella fallet att undersökas. När $d = 1$ kan slumpvandrararen ses röra sig på en linje av heltalspositioner, där rörelsen sker i två möjliga riktningar: höger eller vänster (Norris, 1997, s. 29). När $d = 2$ kan slumpvandrararen ses röra sig på ett rutnät av heltalspositioner, där rörelsen sker i fyra riktningar: höger, vänster, upp eller ner (Norris, 1997, s. 31).

I denna studie kommer slumpvandringarna i de olika miljötyperna och dimensionerna även att utsättas för olika nivåer av förskjutning. Förskjutningen kan beskrivas som en typ av bias då den innebär att sannolikheten för rörelse i en viss riktning är större än för andra riktningar.

Slumpvandringars långsiktiga beteenden undersöks oftast genom rekurrens och transiens. Rekurrens betyder att slumpvandrararen återkommer till ursprungspunkten och transiens betyder att slumpvandrararen rör sig bort från ursprungspunkten.

Rekurrens och transiens är därav intressant att undersöka för att förstå hur en slumpvandring påverkas av miljötyp, dimension och förskjutningsnivå (Bogachev, 2006).

1. 2 Problemformulering

Det finns teoretiska resultat gällande rekurrens och transiens för slumpvandringar i symmetriska icke-slumpmässiga miljöer för alla dimensioner (Norris, 1997, s. 29-32) och för genomsnittligt symmetriska statistiska slumpmässiga miljöer i en dimension, $d = 1$ (Bogachev, 2006). Däremot är statistiska slumpmässiga miljöer i högre dimensioner samt dynamiska slumpmässiga miljöer ett mer komplext område där exakta teoretiska resultat för rekurrens och transiens saknas (Avena, 2010).

1. 3 Syfte

Syftet med studien är att med en simuleringsbaserad metod undersöka hur olika nivåer av påförd systematisk förskjutning påverkar slumpvandringarnas beteende för rekurrens och transiens i de olika miljötyperna och dimensionerna, $d = 1$ och $d = 2$. Detta sker genom en jämförelse av en icke-slumpmässig miljö, en statistisk slumpmässiga miljö samt en dynamisk slumpmässig miljö där sannolikheterna för riktning uppdateras i varje steg.

Genom att se till resultat gällande slutpositionshastighet, som är genomsnittet av slutpositionernas avstånd från ursprungspunkten över alla slumpvandringar, medelavståndet som är det genomsnittliga avståndet från ursprungspunkten under hela slumpvandringen samt återkomstfrekvensen till ursprungspunkten (Bogachev, 2006) kan tendenser för rekurrens och transiens undersökas.

1. 4 Forskningsfrågor

- *Hur påverkar dimension tendenser för rekurrens och transiens?*
- *Hur påverkar olika förskjutningsnivåer tendenser för rekurrens och transiens?*
- *Skiljer sig resultaten åt mellan miljötyper?*

2. Teori och tidigare studier

I avsnitt 2.1 ges en definition av begreppen rekurrens och transiens. I avsnitt 2.2 redovisas för teoretiska resultat gällande slumpvandringar i icke-slumpmässiga miljöer och vidare i avsnitt 2.3-2.7 presenteras tidigare studier och ytterligare viktiga resultat på området.

2. 1 Rekurrens och transiens

Noll-ett-lagen säger att sannolikheten för en händelse antingen är 0 eller 1. I sammanhanget kan alltså en slumpvandring vara antingen rekurrent eller transient (Bogachev, 2006).

Rekurrens betyder att slumpvandranden återvänder till ursprungspunkten, och även alla andra positioner, oändligt många gånger. Transiens betyder att slumpvandranden inte återvänder till ursprungspunkten oändligt många gånger. Detta innebär att slumpvandranden så småningom kommer att röra sig bort från ursprungspunkten och inte återvända.

För att undersöka rekurrens och transiens används f_n , som är sannolikheten för att återvända till ursprungspunkten 0 för första gången vid steg n , samt u_n , som är sannolikheten att vara vid ursprungspunkten efter n steg, oavsett om det är första återkomst eller inte.

Summan av alla sannolikheter för första återkomst vid varje steg n är $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$. Av detta följer att sannolikheten för återkomst till ursprungspunkten någon gång under slumpvandringen

är f och sannolikheten för att inte återkomma till ursprungspunkten någon gång under slumpvandringen är $1 - f$.

För slumpvandringar i $d = 1$ och $d = 2$ som sker på en heltalslinje kan återkomst bara ske efter ett jämnt antal steg, alltså är $u_n = 0$ för udda n .

Sannolikheten att vara vid ursprungspunkten efter n steg, u_n , kan beskrivas som:

$$u_1 = f_0 u_1 + f_1 u_0$$

$$u_2 = f_0 u_2 + f_1 u_1 + f_2 u_0$$

$$u_n = f_0 u_n + f_1 u_{n-1} + \dots + f_n u_0$$

Exempelvis u_2 , sannolikheten att vara vid ursprungspunkten efter två steg, beräknas som: $u_2 = f_0 u_2 + f_1 u_1 + f_2 u_0$.

För f_0 gäller att $u_2 = 0$ eftersom $f_0 = 0$. Detta beror på att det inte är möjligt att återvända till ursprungspunkten utan att ta några steg. Vidare är $f_1 u_1 = 0$ eftersom $u_1 = 0$ vilket innebär att det inte är möjligt att återvända till ursprungspunkten efter ett udda antal steg.

$f_2 u_0 = f_2 * 1 = f_2$ eftersom $u_0 = 1$, då slumpvandringen alltid börjar vid ursprungspunkten vilket gör att sannolikheten att vara där vid $n = 0$ är 1. Detta innebär att $u_2 = f_2$ då sannolikheten att vara vid ursprungspunkten efter två steg, u_2 , är lika med sannolikheten att återvända till ursprungspunkten för första gången vid $n = 2$, vilket är f_2 .

Vidare kan sannolikheterna för att vara vid ursprungspunkten efter olika antal steg, u_n , respektive sannolikheterna för första återkomst, f_n , beskrivas som:

$$U(s) = u_0 + u_1 s + u_2 s^2 + \dots + u_n s^n$$

$$F(s) = f_0 + f_1 s + f_2 s^2 + \dots + f_n s^n$$

Här är $U(s)$ den genererande funktionen för u_n . Varje term i $U(s)$ är alltså sannolikheten att vara vid ursprungspunkten efter n steg. $F(s)$ är den genererande funktionen för f_n . Varje term i $F(s)$ är sannolikheten för att återvända till ursprungspunkten för första gången vid steg n . Dessa genererande funktioner används för att sammanfatta sannolikheterna som en enda ekvation. Genom att använda s behålls ordningen på dessa sannolikheter då varje exponent på s^n anger vilket steg sannolikheten gäller för.

Det finns ett samband mellan sannolikheterna att vara vid ursprungspunkten och sannolikheterna för första återkomst som kan uttryckas av produkten av de två genererande funktionerna.

Produkten av $U(s)$ och $F(s)$ ger alla möjliga sätt att vara vid ursprungspunkten efter olika steg som:

$$U(s)F(s) = u_0f_0 + (u_1f_0 + u_0f_1)s + (u_2f_0 + u_1f_1 + u_0f_2)s^2 + \dots$$

Eftersom slumpvandringen alltid börjar vid ursprungspunkten, $u_0 = 1$, gäller:

$$U(s)F(s) = U(s) - 1$$

$$1 = U(s)(1 - F(s))$$

$$U(s) = \frac{1}{1 - F(s)}$$

Detta visar att sannolikheten att vara vid ursprungspunkten efter olika steg, $U(s)$, beror på sannolikheten för första återkomst, $F(s)$.

För att bestämma om en slumpvandring är rekurrent eller transient används följande sats:

Om $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \infty$, är $f = 1$ och slumpvandringen är rekurrent.

Om $\sum_{n=0}^{\infty} u_n < \infty$, är $f < 1$ och slumpvandringen är transient.

Om $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \infty$ är $\lim_{s \rightarrow 1} U(s) = \infty$ så:

$$\lim_{s \rightarrow 1} 1 - F(s) = \lim_{s \rightarrow 1} \frac{1}{U(s)} = 0$$

$$\lim_{s \rightarrow 1} F(s) = 1$$

$$f = 1$$

Om en slumpvandring är rekurrent måste sannolikheten att återvända till ursprungspunkten någon gång under slumpvandringen f vara 1, alltså $f = 1$. Detta är en förutsättning för rekurrens men vidare måste slumpvandranden även återvända till ursprungspunkten oändligt många gånger vilket visas av att summan av sannolikheterna för att vara vid ursprungspunkten vid varje steg är oändlig.

Om $\sum_{n=0}^{\infty} u_n < \infty$ säger det att $\lim_{s \rightarrow 1} U(s) < \infty$ så:

$$\lim_{s \rightarrow 1} 1 - F(s) = \lim_{s \rightarrow 1} \frac{1}{U(s)} > 0$$

$$\lim_{s \rightarrow 1} F(s) < 1$$

$$f < 1$$

Om en slumpvandring är transient är sannolikheten för att återvända någon gång under slumpvandringen mindre än 1, alltså $f < 1$. Summan av sannolikheterna för att vara vid ursprungspunkten vid varje steg är här alltså ändlig (Zhu, 2016).

2. 2 Pólyas rekurrensteorem

Pólyas rekurrensteorem säger att en symmetrisk slumpvandring i en icke-slumpmässig miljö är rekurrent när $d = 1, 2$ och transient när $d \geq 3$ (Zhu, 2016).

För en symmetrisk slumpvandring i $d = 1$ kan sannolikheten för rörelse ett steg åt höger beskrivas som p och sannolikheten för rörelse ett steg åt vänster som $1 - p = q$, där $p = q$. Sannolikheten för rörelse ett steg åt höger är då $p = \frac{1}{2}$ och sannolikheten att rörelse ett steg åt vänster $q = \frac{1}{2}$. Vid varje steg kan alltså slumpvandrararen antingen röra sig åt höger eller vänster där båda riktningarna är lika sannolika. Stegen är lika långa och tas mot närmsta granne.

Vid totalt $2n$ steg är sannolikheten att ta en viss sekvens av steg $\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$. För att komma tillbaka till ursprungspunkten 0 efter $2n$ steg måste slumpvandrararen röra sig lika många steg åt höger som åt vänster, det vill säga n steg åt vardera håll. Antalet möjliga sätt att välja n steg från $2n$ steg ges av binomialkoefficienten som $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$. Det totala antalet möjliga sekvenser av $2n$ steg är då 2^{2n} eftersom varje steg kan vara antingen åt höger eller vänster.

För att få sannolikheten att återvända till ursprungspunkten efter $2n$ steg beräknas sannolikheten för en viss sekvens genom antalet sekvenser som leder tillbaka till ursprungspunkten:

$$u_{2n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} * \binom{2n}{n}$$

För att beräkna $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ används Stirlings approximation av $n!$ när $n \rightarrow \infty$ som, $n! \approx \sqrt{2\pi n} * \left(\frac{n}{e}\right)^n$, där:

$$\frac{(2n)!}{(n!)^2} \approx \frac{\sqrt{2\pi * 2n} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{\left(\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n\right)^2} = \frac{\sqrt{2} * \sqrt{2\pi n} * 2^{2n} * \left(\frac{n}{e}\right)^{2n}}{(\sqrt{2\pi n})^2 * \left(\frac{n}{e}\right)^{2n}} = \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}$$

$$u_{2n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} * \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

$$u_{2n} \approx \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi n}} = \infty$$

(Zhu, 2016).

Eftersom denna summa divergerar innebär det att slumpvandringen är rekurrent enligt ovan definition.

För $d = 2$ finns fyra möjliga riktningar. Sannolikheten för en viss sekvens av $2n$ steg är då $\left(\frac{1}{4}\right)^{2n}$ eftersom varje steg har sannolikheten $\frac{1}{4}$.

För att återvända till ursprungspunkten $0,0$ efter $2n$ steg måste antal steg åt höger vara lika med antal steg åt vänster och antal steg uppåt måste vara lika med antal steg nedåt.

Rörelserna i de fyra riktningarna måste alltså fördelas över totalt $2n$ steg. Antalet sätt att fördela dessa steg beräknas som summan av alla möjliga fördelningar av stegen mellan de olika riktningarna och kan uttryckas som $\sum_{i=0}^n \frac{(2n)!}{i!i!(n-i)!(n-i)!}$. $(2n)!$ är alla möjliga sätt att fördela $2n$ steg på, utan att ta hänsyn till riktningarna. Om i är antal steg åt höger och $(n - i)$ steg åt vänster räknar $i!$ alla möjliga sätt att fördela de i stegen åt höger och $(n - i)!$ räknar alla möjliga sätt att fördela de $(n - i)$ stegen åt vänster. Detta görs sedan på samma sätt för antal steg uppåt och nedåt. Det handlar alltså om att räkna alla möjliga sätt att fördela stegen i varje riktning.

Sannolikheten att återvända till ursprungspunkten efter $2n$ steg är:

$$u_{2n} = \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} \sum_{i=0}^n \frac{(2n)!}{i!i!(n-i)!(n-i)!} = \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} \binom{2n}{n} \sum_{i=0}^n \binom{2n}{i} \binom{2n}{n-i} = \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} \binom{2n}{n}^2$$

Genom att använda den kombinatoriska identiteten att summan av produkten av binomialkoefficienter uppfyller $\sum_{i=0}^n \binom{2n}{i} \binom{2n}{n-i} = \binom{2n}{n}^2$ kan uttrycket förenklas.

Med Stirlings approximation blir detta:

$$\binom{2n}{n}^2 \approx \frac{4^{2n}}{\pi n}$$

$$u_{2n} \approx \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} * \frac{4^{2n}}{\pi n} = \frac{1}{4^{2n}} * \frac{4^{2n}}{\pi n} = \frac{1}{\pi n}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_{2n} \approx \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\pi n} = \infty$$

Även denna summa divergerar vilket betyder att slumpvandringen är rekurrent i $d = 2$ (Kempton, 2018). För vidare förklaring till varför summorna divergerar hänvisas till (Månsson, 2011, s. 322).

Varför sannolikheten för återkomst minskar som $\frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ i $d = 1$ och snabbare, som $\frac{1}{\pi n}$ i $d = 2$, skulle även kunna förklaras av den centrala gränsvärdesatsen. Dessa resultat är viktiga men kommer inte att redogöras för i denna studie (Bogachev, 2006).

När $d \geq 3$ kommer denna summa att konvergera vilket innebär att slumpvandringen blir transient (Norris, 1997, s. 32).

I en symmetrisk icke-slumpmässig miljö avgör alltså dimensionen om slumpvandringen är rekurrent eller transient. I en slumpmässig miljö, där sannolikheterna även varierar beroende på position, fungerar inte dessa metoder eftersom sannolikheten även kommer att bero på miljöförhållandena. Här används istället Solomons teorem som analyserar den globala asymmetrin i miljön för att avgöra rekurrens och transiens (Bogachev, 2006).

2.3 Solomon

Solomons teorem används för att beskriva när en slumpvandring i $d = 1$ i statistiska slumpmässiga miljöer är rekurrenta eller transienta.

Den slumpmässiga miljön representeras av ω , som är en uppsättning sannolikheter för varje position. Miljön är initialt slumpmässigt genererad men förblir fast under hela slumpvandringen. Stegen är lika långa och tas mot närmsta granne

Sannolikheten att slumpvandrararen rör sig från position x till position y i ett steg givet sannolikheterna för rörelse i den specifika miljön ω ges av:

$$p(x, y, \omega) = P^\omega(S_{n+1} = y | S_n = x)$$

Sannolikheten $p(x, y, \omega)$ beror alltså både på position och miljön ω . Den betingade sannolikheten $P^\omega(S_{n+1} = y | S_n = x)$ är sannolikheten att slumpvandrararen befinner sig i position y vid steg $n + 1$ givet att den är i position x vid steg n i miljön ω .

Sannolikheterna för rörelse ett steg åt höger p_x och ett steg åt vänster q_x vid position x i $d = 1$ kan beskrivas som:

$$p_x = P^\omega(S_{n+1} = x + 1 | S_n = x), \quad q_x = 1 - p_x$$

p_x är alltså sannolikheten att slumpvandrararen rör sig ett steg åt höger, från position x till $x + 1$ givet miljön ω . q_x är sannolikheten att slumpvandrararen rör sig ett steg åt vänster, från position x till $x - 1$ givet miljön ω . Det finns alltså två möjliga riktningar, höger p_x och vänster $q_x = 1 - p_x$.

För att analysera asymmetrin i miljön används kvoten ρ_x som beskriver förhållandet mellan sannolikheterna för rörelse åt vänster $q_x = 1 - p_x$ och åt höger p_x :

$$\rho_x = \frac{q_x}{p_x}$$

För att sedan undersöka asymmetrin i miljön globalt sett används väntevärdet av logaritmen av ρ_x :

$$\eta = E(\ln \rho_x) = \sum_x p(x) \ln \rho_x$$

Summan tas över alla möjliga positioner x i miljön där $p(x)$ är sannolikheten att befinna sig vid position x och $\ln \rho_x$ beskriver förhållandet mellan sannolikheterna för rörelse åt vänster eller åt höger vid position x . Väntevärdet av logaritmen $E(\ln \rho_x)$ sammanfattar alltså asymmetrin över hela miljön och fungerar som ett mått på dess globala fördelning. Därmed ger

η en uppfattning kring hur asymmetrin i miljön påverkar slumpvandringen och om den är rekurrent eller transient (Solomon, 1975).

Om miljön är slumpmässig måste det alltså finnas en viss lokal asymmetri. Sannolikheterna för rörelse åt höger eller vänster varierar då från position till position. Om det inte fanns någon lokal asymmetri skulle miljön vara förutsägbar vilket skulle göra den icke-slumpmässig.

Trots denna lokala asymmetri kan miljön som helhet vara globalt symmetrisk. Detta innebär att på lång sikt kan den totala sannolikheten för rörelse åt höger eller vänster jämnas ut sig. Enligt Solomons teorem är alltså slumpvandringar i symmetriska statistiska slumpmässiga miljöer rekurrenta (Bogachev, 2006).

För att uppskatta osäkerheten i en slumpmässig process kan även informationsteori och där i särskilt entropi användas. För en diskret slumpvariabel X med möjliga utfall $x_1, x_2 \dots x_n$ och en sannolikhetsmassfunktion $p(x)$ där $p(x_i)$ är sannolikheten för utfallet x_i , definieras entropin $H(X)$ som:

$$H(X) = - \sum_{i=1}^n p(x_i) \log_2 p(x_i)$$

Där \log_2 är logaritmen med basen 2.

För en symmetrisk slumpvandring i en icke-slumpmässig miljö där sannolikheten för rörelse ett steg åt höger är lika stor som sannolikheten för rörelse ett steg åt vänster skulle entropin $H(X)$ beräknas som:

$$H(X) = -(0.5 \log_2 0.5 + 0.5 \log_2 0.5)$$

Då $\log_2 0.5 = -1$ eftersom $2^{-1} = 0.5$:

$$H(X) = -(0.5 * (-1) + 0.5 * (-1)) = 1 \text{ bit}$$

Entropi mäts i "bitar" och detta resultat innebär att varje steg ger 1 bit av information, vilket är det största möjliga värdet av entropi för två möjliga utfall (Cover och Thomas, 2006, s. 14).

Användningen av logaritmen för att beskriva den genomsnittliga asymmetrin i miljön liknar användningen av logaritmen i beräkningen av entropi. Båda måtten säger något om osäkerhet, och den genomsnittliga asymmetrin i miljön kan alltså tänkas på som osäkerheten kring riktningen i slumpvandringen.

För en slumpvandring i en slumpmässig miljö kan alltså entropi användas för att beskriva hur osäkerheten kring riktningen ökar. Eftersom sannolikheterna varierar på ett slumpmässigt sätt ger $\eta = E(\ln \rho_x)$ ett mått på den genomsnittliga osäkerheten i miljön. Ju större variation i sannolikheterna för att rörelse åt höger eller vänster, desto högre blir entropin, vilket innebär att osäkerheten kring riktningen ökar.

2. 4 Asymptotisk hastighet

Den asymptotiska hastigheten kan beskrivas som den långsiktiga genomsnittliga hastigheten för en slumpvandring och definieras som:

$$v = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n}$$

Där S_n är slumpvandrarens position vid steg n . Detta gränsvärde existerar med sannolikhet 1:

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = v\right) = 1$$

I en icke-slumpmässig miljö kan den asymptotiska hastigheten v beräknas som:

$$v = p - q$$

Där p är sannolikheten för rörelse ett steg åt höger och q är sannolikheten för rörelse ett steg åt vänster. Denna formel beskriver inte bara den asymptotiska hastigheten utan även driften. I en icke-slumpmässig miljö är drift och asymptotisk hastighet samma sak eftersom sannolikheterna

är fasta. Den asymptotiska hastigheten v konvergerar alltså mot $p - q$ när $n \rightarrow \infty$ med sannolikhet 1.

Likheten visar alltså att slumpvandranden rör sig med en asymptotisk hastighet som $p - q$. Om $p - q \neq 0$ kommer slumpvandringen att driva mot oändligheten, mot $+\infty$ om $p - q > 0$ och mot $-\infty$ om $p - q < 0$. Om $p = q = 0.5$ är slumpvandringen symmetrisk och den asymptotiska hastigheten blir då $v = 0$.

För statistiska slumpmässiga miljöer ser beräkningen av den asymptotiska hastigheten annorlunda ut. Istället för att baseras på fasta sannolikheter används väntevärdena $E(\rho_x)$ och $E(\rho_x^{-1})$.

I denna miljö varierar sannolikheterna p_x och q_x med positionen x . För att beskriva den lokala asymmetrin används $\rho_x = \frac{q_x}{p_x}$ och $\rho_x^{-1} = \frac{p_x}{q_x}$. Vidare beskriver väntevärdena $E(\rho_x)$ och $E(\rho_x^{-1})$ den globala asymmetrin över alla positioner x i miljön.

I en statistisk slumpmässig miljö beräknas den asymptotiska hastigheten v som:

$$v = \begin{cases} \frac{1 - E\rho_x}{1 + E\rho_x} & \text{om } E\rho_x < 1, \\ -\frac{1 - E\rho_x^{-1}}{1 + E\rho_x^{-1}} & \text{om } E\rho_x^{-1} < 1, \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

Det finns alltså tre möjliga fall, om $E\rho_x < 1$, om $E\rho_x^{-1} < 1$ eller om inget av dessa villkor är uppfyllda vilket leder till att $v = 0$. Som exempel, för varje position beräknas ρ_x och dess väntevärde $E\rho_x$. Om $E\rho_x < 1$ ges hastigheten av formeln $v = \frac{1 - E\rho_x}{1 + E\rho_x}$.

Som beskrivs ovan är den asymptotiska hastigheten i en icke-slumpmässig miljö lika med driften. I en slumpmässig miljö leder däremot variationen i p_x och q_x till en lägre hastighet. Detta diskuteras vidare i följande avsnitt om Jensens olikhet.

Den asymptotiska hastigheten kan alltså påverkas av den slumpmässiga miljön. I den slumpmässiga miljön kan det uppstå områden som gör det lättare eller svårare för slumpvandranden att röra sig. Exempelvis kan så kallade fällor uppstå som är lokala områden där

asymmetrin i miljön gör det svårt för slumpvandrararen att lämna området. Dessa fällor kan sänka hastigheten, men behöver inte nödvändigtvis göra så att drift försvinner helt.

Rekurrenta slumpvandringar i statiska slumpmässiga miljöer i $d = 1$ kan även drabbas av Sinai-lokalisering. Sinai-lokalisering innebär att slumpvandringen, trots att den är rekurrent, rör sig med en extremt låg hastighet och blir "lokaliserad" vid en slumpmässig position som bestäms av de rådande miljöförhållandena. Dessa förhållanden kan alltså leda till att fällor uppstår som får slumpvandrararen att fastna vid vissa positioner, vilket i sin tur påverkar hastigheten (Bogachev, 2006).

2. 5 Jensens olikhet

Jensens olikhet kan användas för att förklara varför den asymptotiska hastigheten är lägre än driften.

En funktion f är konvex över intervallet I om alla $x, y \in I$ och $0 \leq \lambda \leq 1$:

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

Den räta linjen mellan de två positionerna x och y på grafen av funktionen f kommer alltid att ligga ovanför eller på grafen mellan dessa två positioner. Funktionen böjer alltså uppåt och varje position mellan x och y är lägre än eller lika med linjen som förbinder dessa två positioner. Om funktionen f har en positiv andraderivata över intervallet I kan sägas att funktionen är strikt konvex. För en konkav funktion gäller omvänd olikhet (Cover och Thomas, 2006, s. 25-27).

Med Jensens olikhet jämförs väntevärden för funktioner av slumpvariabler. Om f är en konvex funktion och X är en slumpvariabel gäller enligt Jensens olikhet:

$$f(E(X)) \leq E(f(X))$$

Om f är konkav gäller omvänd olikhet:

$$f(E(X)) \geq E(f(X))$$

Eftersom $\ln \rho_x$ är en konkav funktion (Cover och Thomas, 2006, s. 25) blir Jensens olikhet:

$$E(\ln \rho_x) \leq \ln(E(\rho_x))$$

Detta innebär att den väntevärdet av logaritmen av ρ_x är mindre än eller lika med logaritmen av väntevärdet av ρ_x . Skillnaden mellan dessa visar på effekten av variationen i ρ_x . Denna variation leder till att rörelsen blir långsammare jämfört med fallet där endast genomsnittet $E(\rho_x)$ används. Därför blir den asymptotiska hastigheten lägre än den genomsnittliga driften (Bogachev, 2006).

Vidare bevis för Jensens olikhet kan återfinnas i (Cover och Thomas, 2006, s. 27).

2. 6 Kalikow och Sznitman

Tidigare forskning har visat att en slumpvandring i en symmetrisk icke-slumpmässig miljö uppvisar diffusion. Detta innebär att rörelsen sprider ut sig slumpmässigt under slumpvandringens gång. I symmetriska statiska slumpmässiga miljöer i $d = 1$ kan exempelvis sannolikheten för rörelse åt höger vara något större än åt vänster vid vissa positioner. Detta kan leda till en gradvis drift bort från ursprungspunkten, vilket kallas för sub-diffusion. Sub-diffusion innebär att spridningen sker långsammare än i vanlig diffusion. De specifika miljöförhållandena kan alltså begränsa slumpvandrarens rörelser.

Om slumpvandrare har en tydlig tendens att röra sig i en viss riktning kan detta resultera i ett ballistiskt beteende. Ballistiskt beteende beskriver en slumpvandring som visar en asymptotisk hastighet tydligt skild från noll. Detta innebär att slumpvandrare har en rörelse i en viss riktning snarare än att förbli nära ursprungspunkten eller sprida ut sig slumpmässigt som i diffusion (Bogachev, 2006).

Kalikow visade att för slumpvandringar i statiska slumpmässiga miljöer i $d = 1$ finns ett villkor för att bevisa ballistiskt beteende. Villkoret är baserat på att driften måste övervinna effekten av eventuella fällor i den slumpmässiga miljön. Detta innebär att om en slumpvandring i en statisk slumpmässig miljö har en förskjutning i en viss riktning, till exempel $p_x > q_x$ globalt sett, så kommer slumpvandrare röra sig bort från ursprungspunkten och bli transient. Om det däremot

inte finns någon förskjutning och $p_x = q_x$ kommer slumpvandrandaren alltid att återvända till ursprungspunkten i $d = 1$, vilket är en följd av rekurrensen (Kalikow, 1981).

Sznitman utvecklade senare ett mer generellt kriterium för ballistiskt beteende i högre dimensioner, $d \geq 2$ (Sznitman, 2002).

2. 7 Avena

Dynamiska slumpmässiga miljöer är mindre utforskade än statiska slumpmässiga miljöer. Det finns olika varianter på dynamiska slumpmässiga miljöer men generellt kan sägas att miljön tillåts förändras dynamiskt på något sätt under slumpvandringens gång, vilket ökar komplexiteten.

För en dynamisk slumpmässig miljö i $d = 1$ kan sannolikheterna för riktning beskrivas som:

$$p_x(\omega_n) = P^\omega(S_{n+1} = x + 1 | S_n = x, \omega_n), \quad q_x(\omega_n) = 1 - p_x(\omega_n)$$

Där $p_x(\omega_n)$ och $q_x(\omega_n)$ är sannolikheterna för rörelse ett steg åt höger respektive vänster från position x , beroende på den dynamiska miljön ω_n . Miljön ω_n kan exempelvis förändras globalt vid varje steg n , vilket innebär att sannolikheterna för rörelse i en viss riktning, p_x och q_x , beror både på positionen x och på miljön ω_n .

I en dynamisk slumpmässig miljö kan slumpvandringen uppvisa varierande hastigheter som svar på förändringarna i miljön. Detta gör att hastigheten kan bli mer komplex att analysera (Avena, 2010).

3. Implementering

3.1 Markovkedjor

Markovkedjor besitter Markovegenskapen som innebär att nästa tillstånd endast beror på det nuvarande tillståndet och då är oberoende av tidigare tillstånd (Kalos och Whitlock, 2008, s. 107).

En Markovkedja definieras av sin övergångsmatrix $P = [p_{xy}]$ där p_{xy} är sannolikheten för rörelse från x till y i ett steg. För alla x, y gäller att $p_{xy} \geq 0$, alltså att alla övergångssannolikheter är icke-negativa, samt att $\sum_{y=1}^n p_{xy} = 1$, $x = 1, 2, \dots, n$ (Kalos och Whitlock, 2008, s. 108).

Utifrån detta kan sägas en slumpvandring i en icke-slumpmässig miljö är en klassisk Markovkedja eftersom övergångssannolikheterna är fasta under hela slumpvandringen och sannolikheten för rörelse bara beror på den nuvarande positionen.

Vidare kan slumpvandringar studeras under quenched och annealed lagen. Om miljön hålls fast under slumpvandringarna används quenched lagen då denna metod ser till en enskild realisation av miljön. Om miljön varierar mellan eller under slumpvandringarna används annealed lagen som genomsnittsberäknar över alla möjliga realisationer av miljöer. I den icke-slumpmässiga miljön sammanfaller quenched och annealed lagen eftersom miljön inte varierar.

I denna studie undersöks de slumpmässiga miljöerna under annealed lagen. Om miljön förändras mellan eller under slumpvandringarna gäller därav inte Markovegenskapen eftersom nästa rörelse då både beror på den nuvarande positionen och på den specifika miljön som gäller vid varje tillfälle (Bogachev, 2006).

3.2 Slumpvandringar

För alla slumpvandringar i studien dras ett tal mellan 0 och 1 för att bestämma rörelseriktningen. För $d = 1$, om talet är större än 0.5 väljs riktningen höger och om det är mindre än 0.5 väljs riktningen vänster. Slumpvandringarna sker på en heltalslinje och stegen är lika långa och tas mot närmsta granne.

För alla tre miljötyper påförs olika nivåer av förskjutning i övergångssannolikheterna. Med en förskjutning kommer sannolikheten för rörelse åt ena hållet att skilja sig från sannolikheten för rörelse åt motsatt håll. Detta innebär att själva slumpvandringen inte längre är symmetrisk utan att det finns en systematisk förskjutning i rörelseriktningarna, vilket gör att slumpvandraren tenderar att röra sig mer åt ena hållet än det andra. Denna systematiska förskjutning kan också ses som "hinder" då möjlighet för rörelse i en viss riktning begränsas. De olika förskjutningsnivåerna $[0, 0.25, 0.5, 0.75, 1]$ förändrar beräkningen av sannolikheterna för rörelseriktning och deras påförande i övergångssannolikheterna beskrivs nedan.

3. 3 Icke-slumpmässig miljö

För modellering av den icke-slumpmässiga miljön i $d = 1$ har varje position en fast sannolikhet för rörelse i en viss riktning.

Vid varje förskjutningsnivå justeras sannolikheterna för rörelse. Beräkningen för ett steg åt höger är $0.5 + \frac{\text{förskjutningsnivå}}{2}$. Därefter används komplementet för att beräkna sannolikheten åt vänster.

Exempel på övergångssannolikheter för förskjutningsnivå 0:

$$P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

Vid steg 1: Sannolikheten att röra sig åt höger är 0.5, vänster är 0.5.

Vid steg 2: Sannolikheten att röra sig åt höger är 0.5, vänster är 0.5.

Och så vidare...

Detta resulterar i en symmetrisk slumpvandring.

Vid förskjutningsnivå 1 blir sannolikheten för rörelse åt höger 1 och åt vänster 0 som:

Vid steg 1: Sannolikheten att röra sig åt höger är 1, vänster är 0.

Vid steg 2: Sannolikheten att röra sig åt höger är 1, vänster är 0.

Och så vidare...

I detta fall kan alltså slumpvandraren bara röra sig åt höger.

3. 4 Statisk slumpmässig miljö

I den statiska slumpmässiga miljön i $d = 1$ genereras en uppsättning sannolikheter för rörelseriktningar en gång i början av varje slumpvandring. Genom att dra sannolikheterna för riktning slumpmässigt från en uniform fördelning inom intervallet $[0.5 - 0.1, 0.5 + 0.1] = [0.40, 0.60]$ skapas en slumpmässig miljö med en liten variation på ± 0.1 kring 0.5. Sannolikheten för rörelse ett steg åt höger beräknas som $0.5 + \frac{\text{förskjutningsnivå}}{2} + \text{slumpmässig variation}$. Därefter används komplementet för att beräkna sannolikheten åt vänster.

Sannolikheterna för varje position förblir fasta under hela slumpvandringen vilket innebär att om slumpvandraren besöker samma position flera gånger möter den samma sannolikheter i den specifika positionen.

Exempel på övergångssannolikheter för förskjutningsnivå 0:

$$P = \begin{bmatrix} 0.54 & 0.46 \\ 0.42 & 0.58 \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

Vid steg 1: Sannolikheten att röra sig åt höger i en viss position är 0.54, vänster är 0.46.

Vid steg 2: Sannolikheten att röra sig åt höger i en viss position är 0.42, vänster är 0.58.

Och så vidare...

Denna slumpvandring är alltså genomsnittligt symmetrisk eftersom sannolikheterna för rörelse åt höger och vänster i genomsnitt är lika. Därmed kommer slumpvandranden inte att tendera att röra sig i någon specifik riktning under slumpvandringen.

Vid exempelvis förskjutningsnivå 1 blir sannolikheten för rörelse åt höger nästan alltid 1 men med små slumpmässiga variationer inom intervallet $[0.9, 1.0]$, eftersom sannolikheten begränsas till $[0, 1]$ för att förhindra ogiltiga sannolikheter. På samma sätt blir sannolikheten för rörelse åt vänster nära 0 med variationer inom intervallet $[0.0, 0.1]$.

3. 5 Dynamisk slumpmässig miljö

Den dynamiska slumpmässiga miljön i $d = 1$ förändras miljön globalt och det genereras nya sannolikheter för rörelse åt höger och vänster vid varje steg under slumpvandringen. Detta innebär att miljön är i ständig förändring.

Även här varierar sannolikheterna för rörelse åt höger eller vänster slumpmässigt runt 0.5, justerat med variationen ± 0.1 , precis som i den statiska slumpmässiga miljön. Skillnaden är att sannolikheterna uppdateras vid varje steg istället för att vara fasta. Inflytandet av de olika förskjutningsnivåerna är implementerade på samma sätt som i den statiska slumpmässiga miljön.

Exempel på övergångssannolikheter för förskjutningsnivå 0:

Vid steg $n = 1$:

$$P_{n=1} = \begin{bmatrix} 0.52 & 0.48 \\ 0.50 & 0.50 \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

Vid steg $n = 2$:

$$P_{n=2} = \begin{bmatrix} 0.43 & 0.57 \\ 0.49 & 0.51 \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

I den dynamiska slumpmässiga miljön som modelleras i studien uppdateras alltså dessa i varje steg. Om slumpvandraren skulle återvända till en tidigare position kan sannolikheterna för rörelse åt höger eller vänster ha ändrats. Denna ständiga förändring innebär att slumpvandraren inte kan förvänta sig samma sannolikheter för riktning även om den skulle komma tillbaka till samma position.

Denna variant av en dynamisk slumpmässig miljö kan alltså ge resultat kring hur frekventa miljöuppdateringar påverkar tendenser för rekurrens och transiens.

När $d = 2$

När $d = 2$ finns istället fyra riktningar: höger, vänster, upp och ner. För att slumpvandringarna här ska återspegla att det finns fler riktningar kommer förskjutningsnivåerna fördelas över riktningarna höger och upp medan riktningarna vänster och ner blir mindre sannolika. Detta leder till att förskjutningen blir mer utspridd än i $d = 1$.

Genom att fördela förskjutningen över två riktningar behålls den tvådimensionella komplexiteten samtidigt som den ger en tydlig effekt.

4. Metod

Med utgångspunkt i definitionerna av rekurrens och transiens samt teoriavsnittet redovisas här för vad den simuleringsbaserade undersökningen kommer att mäta samt hur resultaten kan användas för att besvara syftet och forskningsfrågorna.

4.1 Slutpositions hastighet

För att uppskatta den asymptotiska hastigheten beräknas slutpositions hastigheten för varje förskjutningsnivå som genomsnittet av slutpositionens avstånd från ursprungspunkten över alla slumpvandringar. Slutpositions hastigheten definieras som:

$$V = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{|S_A^{(i)}|}{A}$$

Där N är antal slumpvandringar, A är antal steg i varje slumpvandring och $|S_A^{(i)}|$ är absolutvärdet av slutpositionen. Absolutvärdet av slutpositionerna används här för att förhindra att positiva och negativa slutpositioner tar ut varandra och ger därmed ett mått på hur långt slumpvandraren faktiskt har rört sig från ursprungspunkten.

I en symmetrisk slumpvandring kommer slumpvandraren i genomsnitt att hålla sig kring ursprungspunkten och hastigheten kommer att vara nära noll. Då denna hastighet är nära noll tyder det på att slumpvandringen är rekurrent.

När sannolikheterna för rörelse är förskjutna kommer slumpvandraren röra sig mer i en viss riktning. Till exempel, om sannolikheten för rörelse åt höger är betydligt större än åt vänster, uppstår en tydlig tendens för rörelse åt höger. Denna riktade rörelse resulterar i en hastighet som är större än noll.

Hur hög hastigheten är beror på förskjutningsnivån, eftersom varje steg i genomsnitt bidrar med en rörelse som är proportionell mot denna nivå. Om denna förskjutning är tydligt skild från noll finns en hastighet vilket i sin tur tyder på att slumpvandraren tenderar att röra sig bort från ursprungspunkten.

4. 2 Medelavstånd

Medelavståndet beräknas för varje förskjutningsnivå som det genomsnittliga avståndet från ursprungspunkten vid varje steg över alla slumpvandringar. Medelavståndet säger alltså något om hur långt slumpvandraren typiskt befinner sig från ursprungspunkten vid varje steg. Medelavståndet definieras som:

$$M = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{A} \sum_{a=1}^A |S_a^{(i)}|$$

Där N är antal slumpvandringar, A är antal steg per slumpvandring och $|S_a^{(i)}|$ är absolutvärdet av positionen vid steg a .

Vid högre förskjutningsnivåer blir rörelsen mer tydligt riktad, vilket resulterar i att medelavståndet från ursprungspunkten ökar. Denna ökning blir alltmer påtaglig i takt med att förskjutningsnivån ökar.

Skillnaden mellan medelavståndet och slutpositionshastigheten är alltså att slutpositionshastigheten påverkas direkt av förskjutningsnivån, vilket tydligt kommer visas i resultaten, medan medelavståndet mer beskriver den genomsnittliga spridningen från ursprungspunkten.

4.3 Återkomstfrekvens

Återkomstfrekvensen beräknas som andelen slumpvandringar där slumpvandranden återvänder till ursprungspunkten för första gången efter att ha lämnat den. Endast den första återkomsten räknas, medan eventuella efterföljande återkomster under samma slumpvandring inte räknas med.

Om slumpvandranden kommer tillbaka till ursprungspunkten en gång visar det på en tendens att återkomma. Om å andra sidan ingen första återkomst sker tyder det på att slumpvandranden inte befinner sig kring ursprungspunkten.

Eftersom de teoretiska resultaten relevanta i denna studie kring rekurrens gäller för symmetriska slumpvandringar i icke-slumpmässiga miljöer i $d = 1, 2$ och för symmetriska statistiska slumpmässiga miljöer i $d = 1$ kommer återkomstfrekvensen i dessa fall användas som en referenspunkt. För resterande fall kan den användas för att förstå om eller i vilka fall en återkomst sker.

Detta mått kan alltså ge tendenser för rekurrens eller transiens men viktigt att poängtera är att enligt definition kan en slumpvandring vara transient även om återkomst till ursprungspunkten sker.

4. 4 Metodval

Syftet med studien är att undersöka det genomsnittliga beteendet hos slumpvandringar och jämföra resultaten mellan olika miljötyper. Därför kommer de uppmätta resultaten från slumpvandringarna i de olika miljötyperna att genomsnittsbäknas.

För att undersöka forskningsfrågorna genomfördes simuleringarna i Python med hjälp av Monte Carlo-metoden. Monte Carlo-simuleringar är lämpliga för att analysera slumpvandringar eftersom de möjliggör för modellering av slumpmässiga processer med ett stort antal upprepade försök. Metoden kan användas när teoretiska resultat blir svårhanterade (Kalos och Whitlock, 2008, s. 2), i detta fall för slumpvandringar i slumpmässiga miljöer.

För att säkerställa tillförlitliga simuleringsbaserade resultat kommer 10.000 slumpvandringar om 100.000 steg att simuleras (Bogachev, 2006).

En begränsning med metoden är dock att simuleringarna aldrig kan utföra ett oändligt antal steg för slumpvandringarna vilket innebär att resultaten endast kan troliggöra eller påvisa tendenser för rekurrens och transiens. Till exempel kan en symmetrisk slumpvandring i $d = 1$, där teoretiska resultat för rekurrens finns, aldrig med full säkerhet visa rekurrens för alla positioner eftersom metoden håller dessa begränsningar.

Resultaten kan därmed visa på tendenser för rekurrens och transiens i de olika miljötyperna vilket gör det möjligt att undersöka studiens forskningsfrågor.

5. Avgränsningar

Gällande miljötyp skulle andra typer av slumpmässiga miljöer kunna undersökas men studien avgränsar sig till den en typ av statisk slumpmässig miljö och en typ av dynamisk slumpmässig miljö.

Studien ser till de fem förskjutningsnivåerna $[0, 0.25, 0.5, 0.75, 1]$ och till de tre måtten slutpositionshastighet, medelavstånd och återkomstfrekvens för att analysera tendenser för rekurrens och transiens.

Slumpvandringarna sker i $d = 1$ och $d = 2$. Högre dimensioner, $d > 2$, undersöks inte.

Det finns även viktiga teoretiska resultat kring den centrala gränsvärdessatsen och lagen om stora tal (Bogachev, 2006) men dessa berörs endast översiktligt. Matematiska härledningar av dessa teorier genomgås inte då denna studie håller sig till en simuleringsbaserad analys snarare än en teoretisk.

6. Resultat

I detta avsnitt presenteras studiens resultat för samtliga miljötyper med implementeringsmetoden som beskrevs i avsnitt 3.2-3.5.

6.1 Presentation av resultat

Icke-slumpmässig miljö, $d = 1$:

Förskjutningsnivå: 0.00	Slutpositionshastighet: 0.00	Medelavstånd: 164.23	Återkomstfrekvens: 1.00
Förskjutningsnivå: 0.25	Slutpositionshastighet: 0.26	Medelavstånd: 12 812.12	Återkomstfrekvens: 0.75
Förskjutningsnivå: 0.50	Slutpositionshastighet: 0.50	Medelavstånd: 24 732.66	Återkomstfrekvens: 0.57
Förskjutningsnivå: 0.75	Slutpositionshastighet: 0.74	Medelavstånd: 38 382.05	Återkomstfrekvens: 0.24
Förskjutningsnivå: 1.00	Slutpositionshastighet: 0.99	Medelavstånd: 49 950.00	Återkomstfrekvens: 0.00

En symmetrisk slumpvandring i en icke-slumpmässig miljö i $d = 1$ är rekurrent enligt Pólyas rekurrensteorem. Resultaten för förskjutningsnivå 0 stämmer överens med teoremet då slutpositionshastighet är 0, medelavståndet lågt och återkomstfrekvensen 1.

När förskjutningen ökar blir slumpvandringen mer riktad och återkomstfrekvensen minskar. Vid förskjutningsnivå 1 är återkomstfrekvensen 0 eftersom det endast tillåts rörelse i en riktning.

Som förväntat visar resultaten att slutpositionshastigheten beror på förskjutningsnivån.

Även medelavståndet ökar med förskjutningsnivåerna och slumpvandraren befinner sig i genomsnitt längre och längre bort från ursprungspunkten.

Statisk slumpmässig miljö, $d = 1$:

Förskjutningsnivå: 0.00	Slutpositionshastighet: 0.00	Medelavstånd: 193.87	Återkomstfrekvens: 0.93
Förskjutningsnivå: 0.25	Slutpositionshastighet: 0.24	Medelavstånd: 12 012.67	Återkomstfrekvens: 0.79
Förskjutningsnivå: 0.50	Slutpositionshastighet: 0.49	Medelavstånd: 24 427.33	Återkomstfrekvens: 0.55
Förskjutningsnivå: 0.75	Slutpositionshastighet: 0.74	Medelavstånd: 37 126.19	Återkomstfrekvens: 0.20
Förskjutningsnivå: 1.00	Slutpositionshastighet: 0.95	Medelavstånd: 47 334.87	Återkomstfrekvens: 0.03

Den statistiska slumpmässiga miljön vid förskjutningsnivå 0 är rekurrent enligt Solomons teorem. Slutpositionshastigheten är 0 och även här liknar respektive förskjutningsnivå slutpositionshastigheten medan medelavståndet ökar och återkomstfrekvensen minskar.

Dynamisk slumpmässig miljö, $d = 1$:

Förskjutningsnivå: 0.00	Slutpositionshastighet: 0.00	Medelavstånd: 168.51	Återkomstfrekvens: 0.96
Förskjutningsnivå: 0.25	Slutpositionshastighet: 0.25	Medelavstånd: 12 433.69	Återkomstfrekvens: 0.78
Förskjutningsnivå: 0.50	Slutpositionshastighet: 0.50	Medelavstånd: 24 905.94	Återkomstfrekvens: 0.52
Förskjutningsnivå: 0.75	Slutpositionshastighet: 0.75	Medelavstånd: 37 330.81	Återkomstfrekvens: 0.20
Förskjutningsnivå: 1.00	Slutpositionshastighet: 0.96	Medelavstånd: 47 401.38	Återkomstfrekvens: 0.05

För den dynamiska slumpmässiga miljön i $d = 1$ finns inga teoretiska resultat gällande rekurrens.

Vid jämförelse av resultaten för den icke-slumpmässiga miljön, statistiska slumpmässiga miljön och den dynamiska slumpmässiga miljön vid förskjutningsnivå 0 är medelavståndet lägst för den icke-slumpmässiga miljön. Detta beror på att vid förskjutningsnivå 0 förstärker de slumpmässiga miljöerna denna spridning.

Vid högre förskjutningsnivåer är medelavståndet och slutpositionshastigheten för den icke-slumpmässiga miljön något högre jämfört med de slumpmässiga miljöerna. Detta beror på att förskjutningen blir starkare i den icke-slumpmässiga miljön medan det i slumpmässiga miljöer kan finnas lokala asymmetrier.

Medelavståndet är som högst för den statiska slumpmässiga miljön vilket kan förklaras av att slumpvandrararen kan ha mött områden som är svåra att ta sig ur. Då uppdateringen i den dynamiska slumpmässiga miljön sker så pass frekvent kan eventuella fällor kanske uppstå och försvinna vilket gör att slumpvandrararen inte blir lika påverkad av detta.

Både slutpositionshastigheten och medelavståndet ökar med högre förskjutningsnivåer i $d = 1$. Detta är som förväntat då en ökad förskjutning generellt leder till en snabbare och större spridning eftersom slumpvandrararen har en tydlig riktning att röra sig i. Trots liknande resultat vid högre förskjutningsnivåer för de slumpmässiga miljöerna tenderar den dynamiska slumpmässiga miljön att ge en något högre slutpositionshastighet och medelavstånd.

Icke-slumpmässig miljö, $d = 2$:

Förskjutningsnivå: 0.00	Slutpositionshastighet: 0.00	Medelavstånd: 184.14	Återkomstfrekvens: 0.78
Förskjutningsnivå: 0.25	Slutpositionshastighet: 0.17	Medelavstånd: 8 838.23	Återkomstfrekvens: 0.44
Förskjutningsnivå: 0.50	Slutpositionshastighet: 0.35	Medelavstånd: 17 680.53	Återkomstfrekvens: 0.26
Förskjutningsnivå: 0.75	Slutpositionshastighet: 0.53	Medelavstånd: 26 517.00	Återkomstfrekvens: 0.11
Förskjutningsnivå: 1.00	Slutpositionshastighet: 0.70	Medelavstånd: 35 356.05	Återkomstfrekvens: 0.00

En symmetrisk slumpvandring, alltså vid förskjutningsnivå 0, i en icke-slumpmässig miljö i $d = 2$ är även den rekurrent enligt Pólyas rekurrensteorem.

Slutpositionshastigheten och medelavståndet ökar med förskjutningsnivåerna medan återkomstfrekvensen minskar.

Statisk slumpmässig miljö, $d = 2$:

Förskjutningsnivå: 0.00	Slutpositionshastighet: 0.00	Medelavstånd: 265.65	Återkomstfrekvens: 0.64
Förskjutningsnivå: 0.25	Slutpositionshastighet: 0.17	Medelavstånd: 8 737.60	Återkomstfrekvens: 0.43
Förskjutningsnivå: 0.50	Slutpositionshastighet: 0.35	Medelavstånd: 17 194.60	Återkomstfrekvens: 0.18
Förskjutningsnivå: 0.75	Slutpositionshastighet: 0.52	Medelavstånd: 26 008.29	Återkomstfrekvens: 0.19
Förskjutningsnivå: 1.00	Slutpositionshastighet: 0.63	Medelavstånd: 31 657.35	Återkomstfrekvens: 0.06

I $d = 2$ finns inga teoretiska resultat gällande rekurrens men som observerats i tidigare resultat ökar slutpositionshastigheten och medelavståndet med förskjutningsnivåerna medan återkomstfrekvensen minskar.

Dynamisk slumpmässig miljö, $d = 2$:

Förskjutningsnivå: 0.00	Slutpositionshastighet: 0.00	Medelavstånd: 187.75	Återkomstfrekvens: 0.75
Förskjutningsnivå: 0.25	Slutpositionshastighet: 0.17	Medelavstånd: 8 654.78	Återkomstfrekvens: 0.45
Förskjutningsnivå: 0.50	Slutpositionshastighet: 0.35	Medelavstånd: 17 351.75	Återkomstfrekvens: 0.32
Förskjutningsnivå: 0.75	Slutpositionshastighet: 0.52	Medelavstånd: 26 127.82	Återkomstfrekvens: 0.18
Förskjutningsnivå: 1.00	Slutpositionshastighet: 0.64	Medelavstånd: 32 628.49	Återkomstfrekvens: 0.03

Även för den dynamiska slumpmässiga miljön i $d = 2$ saknas teoretiska resultat men de observerade resultaten är konsekventa med en ökande slutpositionshastighet och medelavstånd samt en minskande återkomstfrekvens.

Jämförelse mellan $d = 1$ och $d = 2$

Vid förskjutningsnivå 0 tenderar medelavståndet för $d = 2$ vara större än i $d = 1$. Detta beror på att slumpvandrararen i $d = 2$ har fler möjliga riktningar att röra sig i vid varje steg. Detta ökar sannolikheten för rörelse längre bort från ursprungspunkten vilket resulterar i en större spridning.

För högre förskjutningsnivåer fördelas förskjutningen i $d = 2$ över fler riktningar än i $d = 1$ vilket gör att effekten sprider sig över ett större antal riktningar vilket minskar medelavståndet och slutpositionshastigheten i en viss riktning.

När dimensionen ökar från $d = 1$ till $d = 2$ visar samtliga miljötyper att återkomstfrekvensen tydligt minskar. Detta tyder på att slumpvandrararen inte återkommer lika ofta till ursprungspunkten i $d = 2$ som i $d = 1$.

Något som sticker ut i resultaten är medelavståndet i den statiska slumpmässiga miljön vid förskjutningsnivå 0 för både $d = 1$ och $d = 2$. Detta beror troligtvis på slumpvandrararen i denna miljötyp kan ha fastnat i vissa områden. Om området ligger långt från ursprungspunkten kan alltså medelavståndet få ett utstickande resultat.

De uppmätta resultaten för den icke-slumpmässiga miljön och den dynamiska slumpmässiga miljön vid förskjutningsnivå 0 är liknande.

Vid förskjutningsnivå 1 är återkomstfrekvensen är inte heller exakt 0 i de slumpmässiga miljöerna på grund av just slumpmässigheten som nu finns i miljön. Detta påvisar en av de grundläggande skillnaderna mellan den icke-slumpmässiga miljön och de slumpmässiga miljöerna.

Mellan alla förskjutningsnivåerna sker en ökning i medelavståndet och effekten av förskjutningen ser vidare ut att ta över.

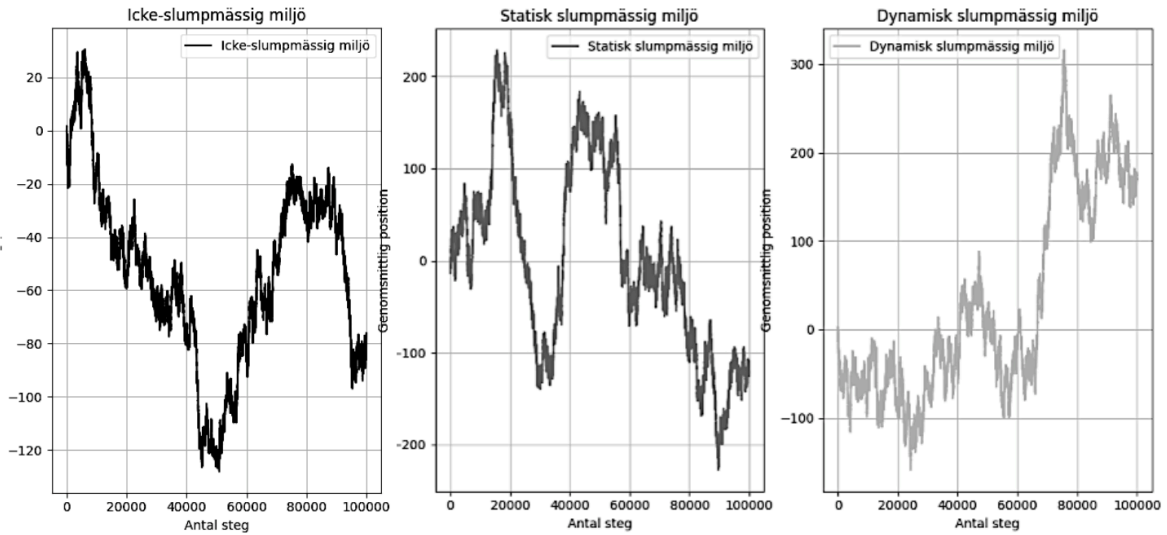
Diffusion och ballistiskt beteende

I teoriavsnittet beskrevs att en slumpvandring uppvisar diffusion när slutpositionshastigheten är noll. Detta innebär att slumpvandranden inte rör sig i någon bestämd riktning utan snarare sprider sig slumpmässigt, vilket är typiskt för diffusion. När slutpositionshastigheten är nära noll befinner sig slumpvandranden vid ursprungspunkten och detta kan ses som tendenser för rekurrens.

När slutpositionshastigheten däremot är betydligt större än noll innebär det att slumpvandranden har en hastighet i en bestämd riktning. Detta tyder på ett ballistiskt beteende och uppstår när förskjutningen är tillräckligt stark för att en tydlig drift ska uppstå och övervinna eventuella fällor i en slumpmässig miljö. När hastigheten är större än noll tenderar slumpvandranden att förflytta sig längre bort från ursprungspunkten. Detta kan i sin tur ses som tendenser för transiens.

6. 2 Genomsnittliga slumpvandringar

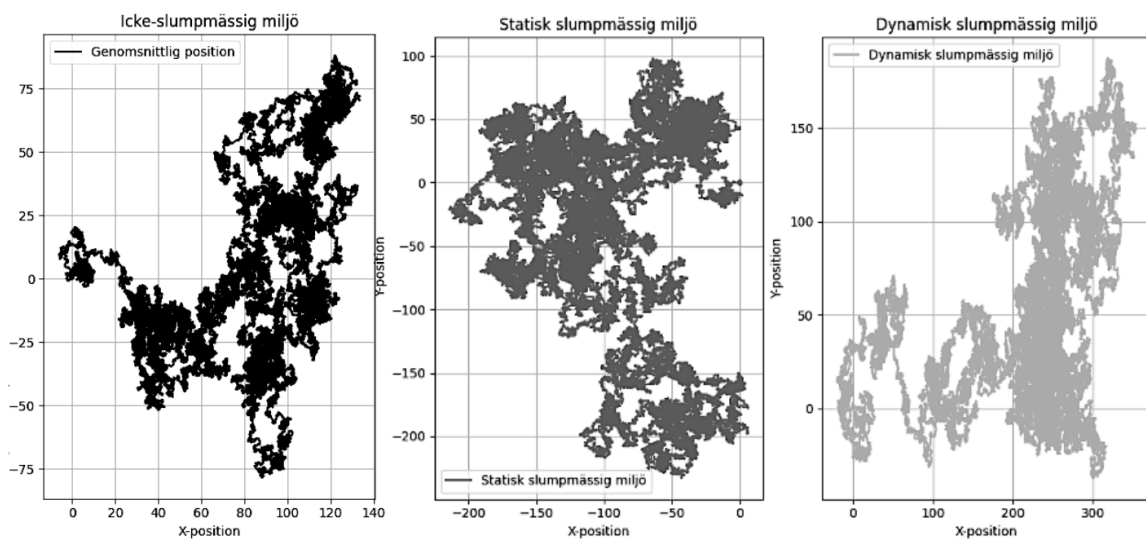
För att visa hur olika miljötyper påverkar symmetriska slumpvandringars riktning och spridning beräknas vid varje steg medelpositionen. Dessa medelpositioner utgör tillsammans en genomsnittlig slumpvandring i respektive miljötyp.



Genomsnittliga slumpvandringar, $d = 1$

I den icke-slumpmässiga miljön håller sig den genomsnittliga slumpvandringen närmare ursprungspunkten. I de slumpmässiga miljöerna visar de genomsnittliga slumpvandringarna på en något större spridning vilket beror på just slumpmässigheten i miljön.

Dessa grafer över de genomsnittliga slumpvandringarna i de olika miljötyperna i $d = 1$ visar alltså att ingen tydlig riktning uppstår och att de håller sig kring ursprungspunkten. Samtidigt blir det tydligt att de faktiska rörelsemönstren skiljer sig åt.



Genomsnittliga slumpvandringar, $d = 2$

De genomsnittliga slumpvandringarna i $d = 2$ visar att det inte heller här uppstår någon tydlig riktning.

Dessa genomsnittliga slumpvandringar är baserade på annealed lagen men kan samtidigt ses som ett mellanting mellan annealed och quenched lagen. Graferna fångar det övergripande rörelsemönstret hos slumpvandringarna i varje miljötyp enligt annealed lagen. Samtidigt visas effekterna av lokala och tillfälliga variationer i miljöerna vilket påminner om resultat som quenched lagen skulle gett. På så sätt ger dessa grafer en förståelse för både det genomsnittliga beteendet och hur variationer i miljön kan påverka de faktiska rörelserna.

7. Diskussion

I detta avsnitt hålls en avslutande diskussion kring resultaten i studien. I avsnitt 7.1 presenteras de viktigaste resultaten för att sedan i avsnitt 7.2 besvara studiens syfte och forskningsfrågor. I avsnitt 7.3-7.4 hålls en kritisk diskussion kring studien samt förslag på vidare studier.

7.1 De viktigaste resultaten

Noll-ett-lagen säger att en slumpvandring antingen är rekurrent eller transient. Resultaten ovan visade att en ökad förskjutningsnivå påverkade slumpvandringarnas tendenser för rekurrens och transiens, där tendenser för transiens ökade med förskjutningsnivåerna.

För icke-slumpmässiga miljöer visade Pólyas rekurrensteorem att symmetriska slumpvandringar i $d = 1$ och $d = 2$ är rekurrenta. Detta redovisades i avsnitt 2.2 men kan också antydans i de simuleringsbaserade resultaten.

Enligt Solomons teorem kan slumpvandringar i $d = 1$ i statiska slumpmässiga miljöer förbli rekurrenta vid små förskjutningar, men blir transienta vid tillräckligt hög förskjutning. För statiska slumpmässiga miljöer i $d = 2$ finns inga teoretiska resultat gällande rekurrens. Som en konsekvens av förskjutning i övergångssannolikheterna kan drift uppstå men detta leder alltså inte nödvändigtvis till en drift som gör att slumpvandringen blir transient.

För dynamiska slumpmässiga miljöer blir rekurrens och transiens mer komplext. I denna studie undersöktes en variant av dynamisk slumpmässig miljö där sannolikheterna för riktning uppdaterades i varje steg. Detta gav, vid förskjutningsnivå 0, simuleringsbaserade resultat liknande den icke-slumpmässiga miljön. I graferna över genomsnittliga slumpvandringar i respektive miljötyp visades dock att de faktiska rörelsemönstren skiljde sig åt.

Jensens olikhet framträdde också i resultaten då slutpositionshastigheten var lägre än förskjutningsnivån för de slumpmässiga miljöerna. Enligt teorin bör dock den icke-slumpmässiga miljön visa att slutpositionshastigheten är lika med förskjutningsnivån men de beräkningsmässiga begränsningarna i den simuleringsbaserade metoden leder till att resultaten inte exakt kan stämma överens med de teoretiska.

Resultaten visade även att dimensionen har en stor påverkan gällande tendenser för rekurrens och transiens. Som förväntat tenderar slumpvandringen att bli transient i högre dimensioner, då det finns fler riktningar och ett större område, vilket minskar återkomstfrekvensen. Däremot, eftersom förskjutningen fördelades över fler riktningar i $d = 2$ dämpades effekten av förskjutningen i en specifik riktning samtidigt som tendensen för transiens ökade sett till återkomstfrekvensen.

Fortsatt sett till återkomstfrekvensen kan antydans att transiens sker tidigare i icke-slumpmässiga miljöer jämfört med i de slumpmässiga miljöerna.

Studien visar även på för- och nackdelar med genomsnittsberäkningar. I detta fall kan skillnaderna mellan miljötyperna genomsnittsbildas ut och blir mindre tydliga.

7. 2 Studiens syfte och forskningsfrågor

Syftet med studien var att med en simuleringsbaserad metod undersöka genomsnittliga beteenden hos slumpvandringar i olika miljötyper och analysera hur olika dimensioner och förskjutningsnivåer påverkar tendenser för rekurrens och transiens.

Forskningsfrågorna *Hur påverkar dimension tendenser för rekurrens och transiens?*, *Hur påverkar olika förskjutningsnivåer tendenser för rekurrens och transiens?* och *Skiljer sig resultaten åt mellan miljötyper?* besvaras på följande sätt:

De teoretiska resultaten från Pólyas rekurrensteorem visade att symmetriska slumpvandringar i icke-slumpmässiga miljöer i $d = 1$ och $d = 2$ är rekurrenta. För slumpvandringar i symmetriska statiska slumpmässiga miljöer i $d = 1$ beskrevs resultat för rekurrens enligt Solomons teorem. De simuleringsbaserade resultaten visade att dimensionen har en stor påverkan på tendenser gällande rekurrens och transiens. Resultaten för de olika förskjutningsnivåerna visade att det i $d = 1$ krävs en lägre förskjutningsnivå jämfört med $d = 2$ gällande tendenser till transiens. Trots att effekten av förskjutning spred sig över fler riktningar i $d = 2$ visade återkomstfrekvensen att slumpvandranden är mindre benägen för återkomst vid högre förskjutningsnivåer.

De uppmätta resultaten i studien genomsnittsberäknades vilket ledde till att resultaten blev likande för de olika miljötyperna. Dock framträdde slumpmässigheten i de slumpmässiga miljöerna i de simuleringsbaserade resultaten. Detta visades genom att den icke-slumpmässiga miljön påverkades mer av förskjutning än de slumpmässiga miljöerna. Mellan den statiska slumpmässiga miljön och den dynamiska slumpmässiga miljön kunde det antydast att slumpvandranden i den statiska slumpmässiga miljön fastnade i vissa områden medan slumpvandranden i den dynamiska slumpmässiga miljön inte utsattes för detta i samma utsträckning, troligen på grund av att sannolikheterna uppdaterades så pass frekvent.

7.3 Kritik

Resultaten genererades med 10.000 slumpvandringar om 100.000 steg. Detta ger tillförlitliga resultat för syftet med studien men för mer detaljerade analyser kan fler slumpvandringar och fler steg behövas.

Det finns även en diskussion kring hur väl Monte Carlo simuleringar faktiskt kan efterlikna verkligt slumpmässiga processer. Monte Carlo metoder använder algoritmer som baseras på slumpmässighet och dessa implementeras genom simuleringar (Gobet, 2016, s. 3). Tanken kring dessa grundar sig i användningen av slump men eftersom datorer är deterministiska

maskiner som följer fasta regler använder de sig av så kallade pseudoslumftal. Dessa pseudoslumftal är oftast tillräckligt komplexa för att framstå som slumpmässiga men om algoritmen bakom dem är känd är de alltså förutsägbara (Gobet, 2016, s. 31). Därmed uppstår frågan om hur slumpmässig denna pseudoslumpmässighet egentligen är.

7. 4 Andra metoder och förslag till vidare studier

Ett komplement till studien skulle kunna vara att analysera resultaten för de slumpmässiga miljöerna under quenched lagen, vilket gör att tillfälliga och specifika variationer i miljöerna tydligare kan framträda. Samtidigt blir analysen mer komplex och resultaten mindre generaliserbara (Avena, 2010), dessutom blir det svårare att jämföra resultaten mellan olika miljötyper på grund av de stora variationerna som kan uppstå mellan olika realisationer.

De slumpmässiga miljöerna kan varieras på många olika sätt. Ett intressant område att undersöka skulle vara slumpmässiga miljöer med lokala beroenden. Detta innebär att sannolikheten för rörelse vid en viss position kan förändras beroende på tillstånden i de närliggande positionerna. Därmed kan vissa områden bli lättare eller svårare att röra sig igenom beroende på de närliggande områdenas tillstånd.

I vidare studier skulle även förskjutningsnivåerna kunna ligga inom tätare intervall, särskilt kring 0.00 och 0.25, och därav ge mer detaljerade resultat kring tendenser för rekurrens och transiens.

Referenser

Avena, L., 2010, *Random walks in dynamic random environments*.

Bogachev, L.V., 2006, *Random Walks in Random Environments*, Encyclopedia of Mathematical Physics, Vol. 4., 353–371. Elsevier, Oxford.

Cover, T. M., och Thomas, J. A., 2006, *Elements of information theory*, second edition, Wiley-Interscience.

Gobet, E., 2016, *Monte-Carlo Methods and Stochastic Processes*, CRC Press, Taylor & Francis Group.

Kalikow, S.A., 1981, *Generalized random walk in random environment*, The Annals of Probability, Vol. 9, No. 5., 753-768.

Kalos, M. H., och Whitlock, P. A., 2008, *Monte Carlo Methods*, Springer, New York.

Kempton, M., 2018, *A non-backtracking Pólya's theorem*, Journal of Combinatorics, Vol. 9, No. 2., 327–343.

Månsson, J., Nordbeck, P., 2011, *Endimensionell analys*, Studentlitteratur, Lund.

Norris, J. R., 1997, *Markov Chains*, Cambridge University Press, Cambridge, UK.

Solomon, F., 1975, *Random walks in a random environment*, The Annals of Probability, Vol. 3, No. 1., 1-31.

Sznitman, A. S., 2002, *An effective criterion for ballistic behavior of random walks in random environment*, Probability Theory Related Fields 122, 509–544, Springer-Verlag.

Zhu, T., 2016, *Polya's Recurrence Theorem*, Stanford University.

