CHALMERS | GÖTEBORGS UNIVERSITET

Undflyende inom teorin om booleska funktioner

Evasiveness in the theory of Boolean functions

Examensarbete för kandidatexamen i matematik vid Göteborgs universitet

Sebastian Jansson
Sebastian Persson
Samuel Plumeyer
Victor Tisell
Philip Östholm

Institutionen för Matematiska vetenskaper
CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
GÖTEBORGS UNIVERSITET
Göteborg, Sverige 2024

Undflyende inom teorin om booleska funktioner

Examensarbete för kandidatexamen i matematik vid Göteborgs universitet
Sebastian Jansson Victor Tisell

Examensarbete för kandidatexamen i matematik inom Matematikprogrammet vid Göteborgs universitet
Sebastian Persson Samuel Plumeyer Philip Östholm

Handledare: Jeffrey E. Steif

Institutionen för Matematiska vetenskaper
CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
GÖTEBORGS UNIVERSITET
Göteborg, Sverige 2024

Förord

I denna uppsats presenteras grundläggande teori om booleska funktioner och undflyende. Vi vill tacka vår handledare Jeffrey E. Steif för vägledning, tillgänglighet men även förslag av ämne till uppsatsen. Arbetet har utförts som ett gruppprojekt men varje individ har haft huvudsakliga ansvarsområden. Dessa områden presenteras nedan. Dagbok och tidslogg har förts för en mer detaljerad beskrivning av utfört arbete.

- *Sebastian Jansson*: Populärvetenskaplig presentation, Inledning, Avsnitt 2, Avsnitt 5.2, Appendix B
- *Sebastian Persson*: Avsnitt 2, Avsnitt 5.1, Avsnitt 5.2, Avsnitt 5.4, Appendix B, Appendix C
- *Samuel Plumeyer*: Abstract och Sammandrag, Avsnitt 4, Avsnitt 5.2, Appendix A.2, Appendix B
- *Victor Tisell*: Inledning, Avsnitt 2, Avsnitt 3, Avsnitt 4, Avsnitt 5.4, Appendix A.2, Appendix B
- *Philip Östholm*: Populärvetenskaplig presentation, Avsnitt 3, Avsnitt 5.3, Appendix A.1, Appendix B, Appendix C

Populärvetenskaplig presentation

Tänk dig att du sitter på en bar med en besvärlig bartender som heter Stefan. Du har tre vänner vid namn Bengt, Göran och Torsten som du brukar gå ut med. Bartendern serverar endast öl om Bengt är med. Denna situation kan representeras med vad som i matematiken kallas för en boolesk funktion. En boolesk funktion är en funktion som tar in ett antal variabler som antar värdet 1 eller 0 och returnerar 1 eller 0. I fallet ovan kan det till varje person associeras en variabel, där variabeln antar värdet 1 om personen är med i baren och 0 annars. Att funktionen returnerar 1 symboliserar att ditt sällskap blir serverat, det vill säga att variabeln associerad med Bengt är 1.

Om baren är tillräckligt stor och du är tillräckligt social finns det ingen begränsning på hur många vänner du kan ta med dig. Bartenden hade också kunnat ha en annan beslutsregel för när ni blir serverade öl. Genom att ändra på antalet personer och bartenderns beslutsregel hade faktiskt alla booleska funktioner kunnat representeras. Antag nu att du och bartendern spelar ett spel. Du får först reda på bartenderns beslutsregel och bartendern försöker sedan ta reda på om regeln är uppfylld eller inte genom att ställa frågor på formen: "Är person x med?". Efter varje fråga bartendern ställer får du välja om du släpper in personen eller inte. Du vinner om du kan tvinga bartendern till att ställa alla möjliga frågor. Bartendern vinner om han vet om regeln är uppfylld eller inte innan han ställt alla frågor. En boolesk funktion kallas undflyende om det finns en metod som garanterar att du alltid vinner och icke-undflyende om det finns något sätt för bartendern att alltid vinna. Det första exemplet är icke-undflyende ty bartendern behövde endast fråga efter Bengt. Om bartendens regel istället hade varit: "Öl serveras om minst tio personer är med", hade funktionen varit undflyende. Detta följer då du alltid kan svara ja på de första nio frågorna och därefter svara nej på resterande. Därmed tvingas bartendern till att ställa alla frågor.

En fråga man kan ställa sig är om det finns några kriterier som garanterar att en boolesk funktion är undflyende. Arnold Rosenberg föreslog i början av 1970-talet en förmodan som rörde detta men som sedan kom att motbevisas. Efter att flera liknande förmodanden ställts, allteftersom de bevisades eller motbevisades, formulerades den generaliserade Andeera-Karp-Rosenberg förmodan eller GAKR-förmodan förkortat. Denna presenterades för första gången i *A topological approach to evasiveness* av Khan J., Saks M. och Sturtevant D. GAKR-förmodan säger att varje icke-trivial, monoton och transitiv boolesk funktion är undflyende och är fortfarande, drygt 40 år efter att den först publicerats, ett olöst problem.

Där var det mycket matematisk jargong, vad betyder alla de där termerna? Icke-trivial innebär att funktionen inte är konstant. Med andra ord att bartenderns regel inte är att han alltid serverar öl eller att han aldrig serverar öl. Att en funktion är monoton innebär att bartendens regel är sådan att om regeln uppfylls då en viss konstellation av personer är med kommer den forfarande vara uppfylld om du lägger till fler. Fallet ovan då bartendern serverade öl om minst tio personer var med är ett exempel på en monoton funktion. Det spelar ingen roll hur många fler än tio ni är, så länge ni är minst tio så är regeln uppfylld.

Transitivitet är ett lite klurigare koncept och inte helt lätt att förstå för de oinsatta. I lösa termer sägs en boolesk funktion vara transitiv om all indata spelar samma roll. Antag att Bengt och Göran är två personer i din vänkrets. Transitivitet inebär med andra ord att om Bengt är med eller inte skall spela samma roll som att Göran är med eller inte. Ett exempel på en transitiv boolesk funktion är funktionen i förgående stycke ty funktionen berör endast hur många personer det är i sällskapet och inte vilka som är med. I ett sälskap med Göran, men inte nödvändigtvis Bengt, så kan vi byta plats på Göran och Bengt utan att det påverkar beslutsregeln.

Exemplet ovan bildar således en samling av booleska funktioner som uppfyller kraven i GAKR-förmodan och är undflyende. Med andra ord så utgör alla funktioner som representeras av beslutsregeln "Öl serveras om minst tio personer är med", för ett visst antal personer i vänkretsen, en sådan grupp. Med hjälp av olika smarta metoder har matematiker lyckats ta fram andra klasser av funktioner för vilka förmodan stämmer. Rivest och Vuillemin visade till exempel 1978 att om antalet variabler funktionen tar in, antalet personer i din vänkrets, är ett primtal upphöjt till ett

godtyckligt positivt heltal så är funktionen undflyende.

Problemet ovan med sällskapet och bartendern kan generaliseras till problem där vi behöver fastställa om någonting är sant genom att fråga ett antal ja eller nej frågor. Med andra ord säger förmodan att alla problem som uppfyller vissa förutsättningar i värsta fall kräver att varje fråga ställs. Inte minst dyker problem på denna form upp inom datavetenskap. Om förmodan är sann skulle det innebära att för varje funktion som uppfyller villkoren finns det ingen algoritm som alltid kan ta reda på funktionens värde innan den gått genom alla variabler. Att faktiskt verifiera att förmodan är sann kommer med största sannolikhet kräva rätt avancerad matematik, men för att bevisa att den är falsk behöver vi bara hitta ett motexempel. När och vem kommer i sådana fall att hitta detta, kanske kan det bli du?

Sammandrag

Aanderaa-Karp-Rosenberg förmodan är en förmodan angående hur vissa egenskaper hos booleska funktioner relaterar till undflyende. Även om förmodan inte bevisats än har man lyckats visa att förmodan är sann om man antar vissa ytterligare krav på funktionen.

Denna uppsats kommer presentera den relevanta teorin kring förmodan samt simplicial-topologi som ett tillvägagångssätt att angripa problemet. Förkunskaperna arbetet antar av läsaren är de som man lär sig under de första tre åren på matematikprogrammet. Därav förväntas ingen kunskap inom grafteori samt endast grundläggande kunskap inom topologi och därmed kommer dessa ämnen presenteras med detta i åtanke. Efter den relevanta teorin presenterats kommer teorin tillämpas på ett antal booleska funktioner i en resultatdel. Resultaten som presenteras kommer till största del bestå av att visa att en boolesk funktion agerande på en graf är undflyende eller icke-undflyende.

Abstract

The Aanderaa-Karp-Rosenberg conjecture is a conjecture regarding how certain properties of Boolean functions relate to evasiveness. Even though the conjecture has not been proven yet, it has been proven with some added assumptions.

This thesis presents the relevant theory behind the conjecture and simplicial topology as an approach the problem of evasiveness. The reader is assumed to have the mathematical knowledge equivalent to the first three years of the mathematics program. Therefore the reader is not assumed to have any prior knowledge of graph theory as well as only a basic understanding of topology and therefore these topics will be presented with this in mind. After presenting the relevant theory, it will be applied on a number of boolean functions in a result section. These results will for the most part consist of proving that a boolean function on a graph is evasive or non-evasive.

Innehåll

1 Inledning **1**
1.1 Motivering och bakgrund . . . 1
1.2 Problemformulering & Avgränsningar . . . 1
1.3 Uppsatsens struktur . . . 1

2 Allmän teori & bakgrund till booleska funktioner **2**
2.1 Booleska funktioner & undflyende . . . 2
2.2 Bakgrund & Generaliserade Aanderaa-Karp-Rosenberg förmodan . . . 3
2.3 Rivest & Vuillemins sats om Undflyende . . . 5

3 Grafteori **6**
3.1 Introduktion till Grafteori . . . 7
3.2 Grafisomorfier & Grafegenskaper . . . 7

4 Simplicialtopologi inom teorin för Undflyende **8**
4.1 Simplicialkomplex . . . 8
4.2 Simplicialtopologi & Booleska funktioner . . . 10
4.3 Fixpunkter för Simplicialavbildningar & Tillämpningar till undflyende . . . 13

5 Resultat **15**
5.1 Schackbrädesproblemet . . . 15
5.2 ACB-problemet . . . 17
5.3 Undflyende av Närliggande ettor . . . 18
5.4 Diskussion . . . 20

A Appendix 1 – teori **i**
A.1 Olika klasser av grafer . . . i
A.2 Simplicialtopologi . . . iii
A.2.1 Homotopi . . . iii
A.2.2 Fixpunktssatser för simplicialkomplex . . . iii

B Bevis av Satser, Propositioner & Lemmor **iv**
B.1 Bevis från Avsnitt 2 . . . iv
B.2 Bevis från Avsnitt 4 . . . iv
B.3 Bevis från Avsnitt 5 . . . v

C Figurer **viii**

1 Inledning

1.1 Motivering och bakgrund

Denna uppsats utforskar en särskild egenskap hos *booleska funktioner* kallad *undflyende*. En boolesk funktion tar in en sträng av ettor och nollor, kallad *bitsträng* och returnerar ett eller noll. Undflyende karaktäriserar *komplexiteten* hos en boolesk funktion i termer av minimala längden på *beslutsträd*. Informellt innebär undflyende att den mest effektiva algoritmen för att bestämma en boolesk funktions värde i värsta fall måste utvärdera alla bitar.

Booleska funktioner är grundläggande inom beräkningsvetenskap och logik i allmänhet. Logiska grindar kan till exempel betraktas som booleska funktioner. Teorin om undflyende är dock inte enbart intressant utifrån dess praktiska tillämpningsområde utan också från en ren matematisk synvinkel. Till exempel så medför icke-undflyende starka topologiska krav då det kan associeras med ett ändligt topologiskt rum som kan deformeras kontinuerligt till en punkt. Denna koppling belyser samspelet mellan topologiska och kombinatoriska egenskaper och illustrerar djupet bakom teorin om undflyende.

Teorin om undflyende inleddes 1972 när Richard Holt [1] visade att tiden för att bestämma om en *graf* är sammanhängande är proportionell mot kvadraten av antalet vertex i grafen. Detta inspirerade Arnold Rosenberg i [2] att utforska potentiella generaliseringar av Holts resultat. Under kommunikation med Stål Aanderaa föreslog Rosenberg att tiden för att bestämma om en graf uppfyller en så kallad *monoton grafegenskap* också skulle vara proportionell mot kvadraten av antalet vertex. Detta bevisades av Ronald Rivest och Jean Vuillemin i [2]. I samma artikel visade de också att alla monotona och *transitiva* booleska funktioner där antalet variabler är en primtalspotens är undflyende. Därefter introducerade Kahn med flera [3] den topologiska teorin för undflyende, vilken har blivit grundläggande inom detta fortfarande aktiva forskningsområde [4], [5], [6]. Kahn och hans kollegor introducerade även, vad som här i kallas, den *generaliserade Aanderaa-Karp-Rosenberg* förmodan. De bekräftade också att förmodan stämmer för grafegenskaper då antalet vertex är en primtalspotens, men även för sex vertex genom att använda deras topologiska metod.

1.2 Problemformulering & Avgränsningar

Målet med denna uppsats är tudelat. Dels ämnas teorin bakom undflyende funktioner presenteras på ett självständigt och tillgängligt sätt för någon som gått tredje året på matematikprogrammet eller motsvarande. Utöver den grundläggande teorin kommer särskilt fokus läggas på att förklara teorins topologiska kopplingar. Då uppsatsen är tänkt att tjäna som en introduktion till ämnet uppstår vissa naturliga avgränsningar gällande uppsatsens omfattning. Vissa resultat, gällande exempelvis slumpmässig komplexitet och vissa homologiska resultat inom topologin, utelämnas då de anses vara utanför uppsatsens omfattning. Uppsatsens andra mål är att presentera några självständigt utarbetade resultat, vilka till författarnas vetskap inte omfattas av rådande teori.

1.3 Uppsatsens struktur

Avsnitt 2 introducerar läsaren till studiet av undflyende booleska funktioner, där de grundläggande definitionerna, satserna och relevanta förmodanden presenteras. Avsnittet presenterar också det andra beviset från [2] som nämndes i 1.1. En särskild behållning är utläggningen av den ännu olösta generaliserade Aanderaa-Karp-Rosenberg förmodan. En kortare behandling av, för uppsatsen relevant, grafteori ges i Avsnitt 3. Framföralt ger detta läsaren den grafteoretiska bakgrund som krävs för att förstå de resultat som etableras i Avsnitt 5. I Avsnitt 4 introduceras den topologiska teorin som ursprungligen beskrevs i [3]. Avsnitt 5 presenterar specifika icke-triviala exempel på booleska funktioner och undersöker om dessa är undflyende. Notera att dessa exempel, till författarnas vetskap, inte har undersökts. Uppsatsen avslutas med en kort diskussion i Avsnitt 5.4.

2 Allmän teori & bakgrund till booleska funktioner

Detta avsnitt är ägnat åt att ge en självständig introduktion till den grundläggande teorin om booleska funktioner och undflyende, samt en kort historisk bakgrund. I slutet av avsnittet bevisas också Rivest och Vuillemins sats om undflyende. Den teori som här presenteras är framförallt hämtad från [7] och [2].

2.1 Booleska funktioner & undflyende

För att förstå det förestående ämnet måste vi börja med att definiera de begrepp och satser som ligger till grund därtill. Följande delavsnitt är inspirerat av Lovászs utläggning av ämnet i [7, s.5-15]. Vi börjar med att ge en formell definition av en boolesk funktion.

Definition 2.1. En boolesk funktion f är en avbildning $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$.

I datalogiska termer kan detta ses som en funktion som tar in n *bitar* och sedan returnerar sant eller falskt, betecknat som 1 respektive 0.

Beroende på funktionens egenskaper är det inte alltid nödvändigt att ha vetskap om samtliga värden i en given *bitsträng* $x \in \{0,1\}^n$ för att bestämma funktionens värde $f(x)$. Detta illustreras av följande exempel.

Exempel 2.1. Låt $f : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$ vara diktatorfunktionen definierad som

$$f(x_1, x_2) = x_1,$$

där $(x_1, x_2) \in \{0,1\}^2$. Notera då att x_1 fullständigt bestämmer funktionens värde.

Bit x_2 i Exempel 2.1 är vad som kallas *oväsentlig* för att bestämma värdet av $f(x_1, x_2)$, det vill säga att $f(x_1, 0) = f(x_1, 1)$ för varje $x_1 \in \{0,1\}$.

Låt $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ vara en boolesk funktion. Då sägs bit x_j, för $j \leq n$, vara *väsentlig* för f om det existerar ett $x = (x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n) \in \{0,1\}^{n-1}$ sådant att

$$f|_{x_j=0}(x) \neq f|_{x_j=1}(x). \tag{1}$$

Att en boolesk funktion saknar oväsentliga bitar är som vi kommer att se ett nödvändigt villkor för att den ska vara en så kallad undflyende funktion. Undflyende är uppsatsens mest centrala begrepp men för att kunna ge en definition måste vi först betrakta konceptet *beräkningskomplexitet*.

Ett *beslutsträd* är en representation av en algoritm som börjar med att ställa frågan: *Vilket värde har bit x_i?*. Om svaret är 0 går vi vidare och frågar bit x_j och om svaret blir 1 frågar vi bit x_k. Vi forsätter denna process fram tills dess funktionens värde är känt. Vi kallar x_i för beslutsträdets *rot*. På liknande sätt kallas x_j och x_k för rot till det vänstra respektive högra delträdet. Om någon gren i trädet slutar i bit x_l kallas biten för ett *löv*. Längden från roten till ett löv är lövets *djup*. Djupet av det längsta lövet i ett givet träd blir beslutsträdets *maximaldjup*. Vi säger att en boolesk funktions beräkningskomplexitet är det minsta maximaldjupet av alla möjliga beslutsträd och betecknar detta med $D(f)$. Funktionens beräkningskomplexitet är alltså antalet frågor som den mest effektiva algoritmen måste fråga i det värsta fallet för att veta vilket värde f antar. Det är uppenbart att $D(f) \leq n$, då n är antalet bitar funktionen tar in. Vi är nu redo att ge definitionen av undflyende.

Definition 2.2 (Undflyende)**.** En boolesk funktion $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ kallas undflyende om $D(f) = n$. Om $D(f) < n$ kallas f för *icke-undflyende*.

Exempel 2.2. Låt $f : \{0,1\}^3 \to \{0,1\}$, där $f(x) = (x_1 + x_2 + x_3) \mod 2$. Då är f undflyende ty för varje algoritm beror funktionen på den sista biten som tillfrågas. Se Exempel 2.3 för en funktion som är icke-undflyende.

Ett intuitivt sätt att se på undflyende är att betrakta ett spel med två personer där, givet en boolesk funktion f, spelare 1 försöker att lista ut funktionens värde och spelare 2 vill tvinga spelare 1 att fråga så många frågor som möjligt. Spelare 1 kan ställa frågan: *vilket värde har bit*

x_i?. Motparten får svara 1 eller 0. Om spelare 2 kan tvinga spelare 1 att fråga om värdet på alla bitar så är funktionen undflyende. För att se att den här definitionen är ekvivalent med den tidigare, antag att funktionen f, som tar in n bitar, är undflyende. Om spelare 1 frågar om bit x_i så kommer minst en av $f|_{x_i=1}(x)$ och $f|_{x_i=0}(x)$ att vara undflyende, ty annars finnas det minst ett beslutsträd till f, i vilket roten är x_i, med maximaldjup $< n$ vilket är en motsägelse. Men samma argument kan användas för nästa bit som tillfrågas. Det räcker således för spelare 2 att välja 0 eller 1 sådant att den resulterade funktionen fortfarande är undflyende. Då detta alltid kan göras kommer spelare 1 behöva fråga alla bitar innan funktionens värde är givet. Antag å andra sidan att spelare 2 kan tvinga spelare 1 att ställa alla frågor oavsett ordning. För varje beslutsträd finns då minst en gren där lövet har djup n varför funktionen är undflyende. Detta perspektiv på undflyende, som vi hädanefter kallar *motståndare argumentet*, ger omedelbart att väsentlighet, introducerat i Ekvation (1), är ett nödvändigt villkor för undflyende. Vi sammanfattar ovanstående resultat i följande proposition.

Proposition 2.1. *Låt $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ vara en undflyende boolesk funktion. Då är varje x_j för $j \leq n$ väsentlig för f.*

Villkoret är dock inte tillräckligt, vilket kan ses i följande exempel.

Exempel 2.3. Låt $f : \{0,1\}^4 \to \{0,1\}$ bestämmas av

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{om } x_1x_2 = 1 \text{ eller } x_2x_3 = 1 \text{ eller } x_3x_4 = 1 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}.$$

Det lämnas som en övning åt läsaren att visa att alla bitar är väsentliga och att funktionen är icke-undflyende.

Motståndare argumentet kan även användas för att visa ett tillräckligt villkor för undflyende, vilket ses i beviset till Sats 2.2 i Appendix B.1.

Sats 2.2. *Låt $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ vara en boolesk funktion och $A = \{x \in \{0,1\}^n | f(x) = 1\}$. Om $|A|$ är udda, då är f undflyende.*

2.2 Bakgrund & Generaliserade Aanderaa-Karp-Rosenberg förmodan

En av de mest naturliga frågeställningarna är vilka allmänna egenskaper som en boolesk funktion måste besitta för att garantera undflyende. *Grafteori* ger ett verktyg för att konstruera många booleska funktioner i allmänhet och beskriva deras symmetriegenskaper i synnerhet. Häri kommer det ges en minimal introduktion till grafteori nödvändigt för att beskriva den *generaliserade-Aanderaa-Rosenberg förmodan* och den allmänna *Aanderaa-Karp-Rosenberg* förmodan. Grafteori beskrivs mer detaljerat i Avsnitt 3. Först presenteras dock algebran nödvändig för att beskriva symmetriegenskaper hos booleska funktioner.

Låt $S_n = \mathrm{Sym}\{1, \ldots, n\}$ vara den symmetriska gruppen av ordning n. *Stabilisatorn* av en boolesk funktion f är mängden av permutationer $\sigma \in S_n$, sådana att de lämnar f invariant under verkan på positionerna av dess variabler. Rivest och Vuillemin ger i [2] en formell definiton och detta förtydligas med ett exempel.

Definition 2.3 (Stabilisator)**.** Låt $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ vara en boolesk funktion och beteckna stabilisatorn av f som $\Gamma(f)$. Vi definierar stabilisatorn som

$$\Gamma(f) := \{\sigma \in S_n \mid f(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}),\ \forall x \in \{0,1\}^n\}.$$

Exempel 2.4. Låt $f : \{0,1\}^3 \to \{0,1\}$ vara diktatorfunktionen sådan att $f(x_1, x_2, x_3) = x_1$. Då är stabilisatorn av f, $\Gamma(f)$, mängden av alla permutationer $\sigma \in S_3$ sådan att $x_1 = x_{\sigma(1)}$. Det vill säga alla permutationer som under verkan lämnar x_1 invariant. I detta fall blir $\Gamma(f) = \{id, (23)\}$.

Definition 2.4 (Transitivitet)**.** Låt $G \subseteq S_n$ verka på mängden $\{1, \ldots, n\}$. G sägs vara *transitiv* om det för alla par $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ existerar en permutation $\sigma \in G$ sådan att $\sigma(i) = j$.

Anmärkning 2.1. Vi kommer vidare att kalla funktionen f transitiv om dess stabilisator är transitiv.

Notera att om $\Gamma(f)$ är transitiv innebär detta att för en given algoritm (beslutsträd), som testar olika bitar x_i $i \in \{1, \ldots, n\}$, finns det ingen specifik bit som algoritmen föredrar att börja med. Detta eftersom om algoritmen exempelvis skulle börja med bit x_i så existerar det för alla $j \in \{1, \ldots, n\}$ en permutation $\sigma \in \Gamma(f)$ sådan att $x_i = x_{\sigma(j)}$.

Definition 2.5 (Enkel riktad graf)**.** En (ändlig) *enkel riktad graf* $G = (V, E)$ utgörs av två ändliga mängder, där V är en *vertexmängd* och $E \subseteq V^2$ är en *kantmängd.* Mängden V^2 är en samling av alla ordnade par (v_i, v_j) och E är sådan att om $(v_i, v_j) \in E$ så är $i \neq j$.

Fixera en enkel riktad graf G. Vi kan då koda huruvida ett godtyckligt $e \in V^2$, ligger i E genom att tillsätta 1 eller 0 för att indikera tillhörighet respektive avsaknad i E. Antag att $|V| = v$, vi kan då betrakta en boolesk funktion $f : \{0,1\}^{v^2-v} \to \{0,1\}$ som en funktion på alla möjliga kanter $e \in E$, för ett givet V.

Låt $V = \{1, \ldots, v\}$ och $G \subseteq S_v$ vara en grupp av permutationer av V. Då induceras en naturlig grupp G^2 av permutationer på E genom att för varje $\sigma \in G$ låta $\sigma' \in G^2$ vara en permutation av kanterna sådan att $\sigma'((x, y)) = (\sigma(x), \sigma(y))$ för alla $x, y \in V$.

Låt S_v^2 vara ovan konstruerade permutationsgrupp då $G = S_v$. En boolesk funktion $f : \{0,1\}^{v^2-v} \to \{0,1\}$ kallas då för en *grafegenskap* om $S_v^2 \subseteq \Gamma(f)$. Notera särskilt att då f är en grafegenskap så är f också transitiv. Vi har nu presenterat det nödvändiga teoretiska ramverket för att introducera den ursprungliga förmodan av Rosenberg [8] inom teorin för undflyende.

Förmodan 1 (Rosenberg)**.** *Det existerar en konstant $C > 0$ sådant att komplexiteten för varje icke-trivial grafegenskap på v vertex är åtminstone Cv^2.*

I samma artikel presenterade Rosenberg även ett motexempel till Förmodan 1 som resultat av privat korrespondens med Aanderaa. Notera att detta motexempel också innebär att det existerar icke-triviala grafegenskaper som inte är undflyende. Detta motexempel är inte *monotont*, det vill säga växande under den partiella ordningen $\leq$ på $\{0,1\}^n$ där $x \leq y$ om och endast om $x_i \leq y_i$ för alla $i \leq n$. Likaså uppfyller inte Exempel 2.2 heller denna egenskap. För framtida användning samlas detta i en definition.

Definition 2.6 (Monotonicitet)**.** Låt $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ vara en boolesk funktion. Vi säger att f är monoton om, för alla $x, y \in \{0,1\}^n$, $x \leq y$ medför att $f(x) \leq f(y)$, där $x \leq y$ definieras genom $x_i \leq y_i$ för alla $i \leq n$.

Notera att diktatorfunktionen i Exempel 2.1 är monoton.

För att komma runt motexemplet till Förmodan 1 föreslog Aanderaa att begränsa förmodans omfattning till monotona grafegenskaper. Även detta presenterades i [8].

Förmodan 2 (Aanderaa-Rosenberg)**.** *Det existerar en konstant $C > 0$ sådant att komplexiteten för varje icke-trivial och monoton grafegenskap på v vertex är åtminstone Cv^2.*

Förmodan 2 har sedermera bevisats av Ronald Rivest och Jean Vuillemin i [2] Sats 6. Där visade de att det åtminstone gäller för $C = 1/16$ och skattningen har därefter förbättrats till $C = 1/9$ i [9]. I [2] introducerade Rivest och Vuillemin också vad de kom att kalla den *generaliserade Aanderaa-Rosenberg förmodan.*

Förmodan 3 (Generaliserade Aanderaa-Rosenberg)**.** *Varje boolesk funktion $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ sådant att $\Gamma(f)$ är transitiv och $f(0) \neq f(1)$ är undflyende.*

Motbevis till denna förmodan gavs av Norbert Illies i [10]. Inspirerade av Förmodan 3 samt av den så kallade *Anderaa-Karp-Rosenberg förmodan* [8], som säger att varje icke-trivial och monoton grafegenskap är undflyende, presenterade Khan, Saks och Sturtevant i [3, s.298] den *Generaliserade Aanderaa-Karp-Rosenberg förmodan.* Denna har ännu varken bevisats eller motbevisats.

Förmodan 4 (Generaliserade Aanderaa-Karp-Rosenberg)**.** *Om $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ är monoton, icke-trivial och $\Gamma(f)$ transitiv så är f undflyende.*

2.3 Rivest & Vuillemins sats om Undflyende

Även om Förmodan 3 motbevisades av Illies visade [2] att specialfallet då n är en primtalspotens stämmer.

Sats 2.3 (Rivest & Vuillemins sats om undflyende)**.** *För en boolesk funktion $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ gäller det att om $\Gamma(f)$ är transitiv, n är en primtalspotens och $f(0) \neq f(1)$, så är f undflyende.*

Notera att om vi ersätter kravet att $f(0) \neq f(1)$ med det starkare kravet att f är monoton och icke-trivial så gäller satsen fortfarande.

Beviset av Sats 2.3 kräver en del förarbete. Vi börjar med att definiera *banan* av en vektor $x \in \{0,1\}^n$.

Definition 2.7 (Bana)**.** Låt permutationsgruppen $G \subseteq S_n$ verka på mängden $\{0,1\}^n$ och låt $x \in \{0,1\}^n$. Vi betecknar banan av x med avseende på G som Gx och definierar den som:

$$Gx := \{\sigma(x) | \sigma \in G\}.$$

Vidare definierar vi *vikten* av en vektor $x \in \{0,1\}^n$ som antalet ettor i x och betecknar detta med $w(x)$.

Anmärkning 2.2. Notera att om $y \in \Gamma(f)x$ så är $f(y) = f(x)$ och $w(y) = w(x)$.

Vi definierar nu *viktpolynomet* som introduceras i [2].

Definition 2.8 (Viktpolynom)**.** Låt $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ vara en boolesk funktion och låt $f^1(z)$ beteckna viktpolynomet av f. Vi definierar viktpolynomet som

$$f^1(z) := \sum_{0 \leq i \leq n} w_i(f) \cdot z^i$$

där $z \in \mathbb{R}$ och $w_i(f) := |\{x | (f(x) = 1) \wedge (w(x) = i)\}|$ vilket är antalet vektorer x av vikten i sådan att $f(x) = 1$.

Från Definiton 2.8 fås det att ett löv L som ger värdet 1 på f och nås på djupet k måste bidra med en term $z^j(1+z)^{n-k}$ till viktpolynomet $f^1(z)$ om j av de k bitarna som tillfrågats på vägen till L gav värdet 1. Detta följer av att om ett löv nås på djupet k så finns det resterande $n-k$ bitar som kan anta värden utan att ändra värdet på f. Värdet på dessa resterande bitar kan alla väljas att vara antingen 0 eller 1. Vi får en binomialfördelning där m representerar antalet av de resterande bitarna som antar värdet 1. Vi får således att varje löv som nås på djupet $n-k$ bidrar med en term

$$z^j \sum_{m=0}^{n-k} \binom{n-k}{m} z^m = z^j(1+z)^{n-k}$$

till viktpolynomet $f^1(z)$. Detta ger oss följande sats.

Sats 2.4 ([2])**.** *Om $D(f) \leq k$, då är $(1+z)^{n-k}$ en delare till $f^1(z)$.*

Bevis. För det optimala beslutsträdet, den bästa algoritmen, till f så kommer varje löv som ger värdet 1 på f att nås som mest på djupet k, vilket medför att alla dessa bidrar med en multipel av $(1+z)^{n-k}$ till $f^1(z)$. □

Anmärkning 2.3. Från Sats 2.4 får vi en intressant observation. Om vi låter $k = n-1$ och $z = 1$ i Sats 2.4 fås $f^1(1) = |\{x \in \{0,1\}^n | f(x) = 1\}|$ och då säger satsen att om f är icke-undflyende är $f^1(1)$ jämn. Detta resultat ger ytterligare ett bevis för Sats 2.2.

Notera att för en icke-undflyende funktion f gäller det att alla löv nås på mindre än n frågor, varför vi kan sätta $k = n-1$ i Sats 2.4, vilket medför att viktpolynomet av f måste delas av $(1+z)$. Då -1 är ett nollställe till $(1+z)$ och $(1+z)$ delar viktpolynomet $f^1(z)$, ger detta att -1 även är ett nollställe till viktpolynomet. Alltså, om f är icke-undflyende så gäller det att $f^1(-1) = 0$. Det kontrapositiva resultatet beskrivs i följande korollarium.

Korollarium 2.5. *Låt $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ vara en boolesk funktion och $f^1(z)$ dess viktpolynom. Då gäller att*

$$f^1(-1) \neq 0 \implies f \text{ undflyende.}$$

Följande lemma ges i [2].

Lemma 2.6. *Låt $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ vara en boolesk funktion där stabilisatorn $\Gamma(f)$ till f är transitiv. Då gäller det för varje $x \in \{0,1\}^n$ att*

$$w(x) \cdot |\Gamma(f)x| = n \cdot b(x) \tag{2}$$

där $b(x) = |\{y \in \Gamma(f)x | y_1 = 1\}|$, $w(x)$ är vikten av x och $|\Gamma(f)x|$ är mängden element i banan till x med avseende på permutationsgruppen $\Gamma(f)$.

Se Appendix B.1 för bevis av Lemma 2.6. I [2] konstateras följande korollarium vilket här bevisas.

Korollarium 2.7. *Låt $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$. Om $n = p^\alpha$ för något primtal p och heltal α, $\Gamma(f)$ är transitiv, och $x \in \{0,1\}^n$ sådan att $x \neq 0$, $x \neq 1$, då kommer p att dela $|\Gamma(f)x|$.*

Bevis. Från Lemma 2.6 får vi att $n = p^\alpha$ är en delare till $w(x) \cdot |\Gamma(f)x|$. Eftersom $x \neq 1$ medför detta att $w(x) \leq p^\alpha - 1$. Detta ger oss i sin tur att primtalsfaktoriseringen av $w(x)$ som mest kan innehålla en faktor $p^{\alpha-1}$. Därav måste p vara en delare till $|\Gamma(f)x|$ i alla övriga fall då $x \neq 0$. □

Nu har vi alla verktyg som krävs för att bevisa Sats 2.3.

Bevis av Sats 2.3. Vi börjar med att beräkna viktpolynomet $f^1(-1) \mod p$ och får då

$$\begin{aligned} f^1(-1) \mod p &= \sum_{0 \leq i \leq n} w_i(f) \cdot (-1)^i \mod p \\ &= w_0(f) + \sum_{1 \leq i \leq n-1} w_i(f) \cdot (-1)^i + w_n(f) \cdot (-1)^n \mod p. \end{aligned}$$

Vi tittar nu närmre $w_i(f)$ för $1 \leq i \leq n-1$. Från Definition 2.8 vet vi att $w_i(f) = |\{x | (f(x) = 1) \wedge (w(x) = i)\}|$. Läsaren påminns om Anmärkning 2.2 som säger att för varje $y \in \Gamma(f)x$ gäller det att $f(x) = f(y)$ och att $w(x) = w(y)$. Därav kan vi dela upp mängden $\{x | (f(x) = 1) \wedge (w(x) = i)\}$ i en partition av distinkta banor. Vi får således att $\{x | (f(x) = 1) \wedge (w(x) = i)\} = \bigcup_t \Gamma(f)x_t$ där varje x_t är en representant för varje distinkt bana. Detta ger att

$$w_i(f) = |\{x | (f(x) = 1) \wedge (w(x) = i)\}| = \left| \bigcup_t \Gamma(f)x_t \right| = \sum_t |\Gamma(f)x_t|.$$

Från Korollarium 2.7 får vi att p delar $|\Gamma(f)x|$ vilket medför att $w_i(f) \equiv 0 \mod p$ för alla $1 \leq i \leq n-1$. Därav får vi att $f^1(-1) \equiv w_0(f) + w_n(f) \cdot (-1)^n \mod p$. Vi får nu tre möjliga fall.

(i) I fallet $f(0) = 1$, $f(1) = 0$ gäller det att $f^1(-1) \equiv 1 \mod p$ för alla primtal p.

(ii) I fallet $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ och $p = 2$ gäller det att $f^1(-1) \equiv 1 \cdot (-1)^{2^\alpha} \mod 2 = 1 \mod 2$.

(iii) I fallet $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ men $p \neq 2$, det vill säga p är ett udda primtal, gäller det att $f^1(-1) \equiv 1 \cdot (-1)^{p^\alpha} \mod p = -1 \mod p$. Detta eftersom om p är udda medför det att p^α också är udda.

Vi noterar att om $f^1(-1) \not\equiv 0 \mod p$ medför detta att $f^1(-1) \neq 0$. Vi får således att $f^1(-1) \neq 0$ i alla möjliga fall och drar därmed slutsatsen, med hjälp av Korollarium 2.5, att f måste vara undflyende. □

3 Grafteori

Vi såg i avsnitt 2 hur riktade grafer kan användas för att konstruera booleska funktioner. I detta avsnitt kommer vi att betrakta grafer utan riktning, vilka kommer spela en central roll i de resultat som etableras i avsnitt 5. Vi kommer dessutom se att begreppet grafegenskap också kan appliceras på grafer utan riktning. Majoriteten av materialet är hämtat från första kapitlet i boken *Graph Theory* av Reinhard Diestel [11] då det inkluderar de vanliga definitionerna i grafteori.

3.1 Introduktion till Grafteori

En graf utan riktning, ofta bara kallad graf, skiljer sig från en riktad graf i det att paren i kantmängden inte är ordnade. Vi ger här en formell definition.

Definition 3.1 (Graf)**.** En graf $G = (V, E)$ består av en vertexmängd V samt en kantmängd E som är en delmängd av alla 2-element delmängder av V.

Vertex- och kantmängden till en graf G betecknas $V(G)$ respektive $E(G)$ men förkortas ofta som V och E. Antalet vertex i G, betecknat $|V|$, kallas för *ordningen* av G och antalet kanter i G betecknas $|E|$. Ett exempel på en graf ges i Figur C.1 i Appendix C.

Beskrivningen av grafers egenskaper underlättas genom att introducera följande terminologi.

Definition 3.2 (Incident)**.** Ett vertex $v \in V$ sägs vara *incident* med en kant $e \in E$ om $v \in e$. Ett vertex incident med en kant kallas också för en *ände* till kanten.

Ändarna till en kant i en graf G kallas för *grannar* medan två kanter kallas för *grannar* om de har en ände gemensamt. Antalet grannar till ett vertex v kallas för *graden* av v och betecknas $d(v)$. I fallet då $d(v) = 0$ kallas v för ett *isolerat* vertex och om $d(v) = k$ för alla vertex v kallas grafen för *k-reguljär*. Följande definition är användbar i fallet då två vertex kan antas ligga i separata delar av en partition av V.

Definition 3.3. Låt $G = (V, E)$ och $X, Y \subseteq V, X \cap Y = \emptyset$. En kant $\{x, y\}$ kallas för en X-Y kant om $x \in X$ och $y \in Y$.

3.2 Grafisomorfier & Grafegenskaper

I avsnitt 2 definierade vi grafegenskaper på riktade grafer i termer av booleska funktioner. På samma sätt går det att definiera grafegenskaper på grafer utan riktning. Därmed kan de förmodanden som presenterades i 2 också appliceras på dessa grafer. Då grafegenskaper hädanefter diskuteras är det just grafegenskaper på oriktade grafer som avses.

Grafegenskaper kan betraktas i grafteoretiska termer utan att referera till booleska funktioner. För att kunna göra detta måste vi först definiera ekvivalensrelationer mellan grafer.

Definition 3.4. En *grafhomomorfi* mellan två grafer $G = (V, E)$ och $G' = (V', E')$ är en avbildning $\varphi : V \to V'$ sådan att $\{\varphi(x), \varphi(y)\} \in E'$ då $\{x, y\} \in E$. Ifall φ är bijektiv och inversen φ^{-1} också är en homomorfi kallas avbildningen för en *grafisomorfi*. I specialfallet då G och G' är samma graf kallas isomorfin för en *grafautomorfi*.

Anmärkning 3.1. Låt G och G' vara grafer, som vanligt anses G och G' vara isomorfa förutsatt att det finns en isomorfi emellan dem.

En homomorfi bevarar därmed kanterna mellan vertex men behöver inte avbilda på en graf med samma antal vertex och kanter. Ta till exempel G till att vara en 4-cykel och G' som är samma 4-cykel men vi lägger till en isolerad vertex. Vi har därmed en homomorfi φ som skickar vertexen i G till samma vertex i G'. Det här är *inte* en isomorfi eftersom antalet vertex inte är samma för båda graferna. Detta ger följande proposition som är enkel att visa.

Proposition 3.1. *En isomorfi bevarar antalet kanter och antalet vertex samt att* $d(v) = d(\varphi(v))$, $\forall v \in V$.

Låt G och G' vara isomorfa grafer med n antal vertex. Antalet möjliga kanter i G och G' är $m = \binom{n}{2}$. Vidare låt $f : \{0, 1\}^m \to \{0, 1\}$ vara en boolesk funktion sådant att $S_n^2 \subset \Gamma(f)$ där S_n^2 är symmetrigruppen inducerad av punktvis verkan av S_n på alla vertex i G och $\Gamma(f)$ är stabilisatorn till f, se Definition 2.3. Tolka varje bit x_i sådant att $x_i = 1$ om det i:te paret $\{x, y\} \in V^2$ ligger i E. Låt $\{x, y\}$ vara en kant till G. Då G och G' är isomorfa existerar en isomorfi $\varphi : V \to V'$ sådant att $\{\varphi(x), \varphi(y)\} \in E'$ för varje $\{x, y\} \in E$. Det följer alltså att $\varphi \in S_n^2$ och därav är f invariant under φ. Således följer det att för ett godtyckligt $x \in \{0, 1\}^n$ att $f(x) = f(x_{\varphi(1)}, \ldots, x_{\varphi(m)})$ och då φ är en isomorfi kan samtliga kanter i E' uttryckas på ovan form. Således följer alltså att med tolkningen av varje bit som indikation på förekomst av en kant i en graf, så medför $S_n^2 \subseteq \Gamma(f)$ att f är invariant under grafisomorfier. Detta leder naturligt till den grafteoretiska definitionen av en *grafegenskap*.

Definition 3.5 (Grafegenskap)**.** En klass av grafer som är slutna under isomorfier kallas för en *grafegenskap.*

Notera att ovan diskussion visar att definitionen av grafegenskap i Avsnitt 2 medför den grafteoretiska versionen i Definition 3.5. Omvända implikationen kan också visas [2, s. 7] varefter de introducerade definitionerna för grafegenskap är ekvivalenta. Specifika exempel på klasser av grafer med en grafegenskap ges i Appendix A.1.

Exempel 3.1. Ett enkelt exempel på en grafegenskap är att en graf på tre vertex har minst en kant. Det är enkelt att se att det är slutet under isomorfier eftersom dem bevarar antalet kanter enligt Proposition 3.1. Vi observerar här att $\Gamma(f) = S_3^2$ för den associerade funktionen. Observera att bitsträngarna som ger värde 1 är totala antalet bitsträngar minus lösningen med bara nollor, det vill säga $2^3 - 1 = 7$. Men det följer då från Sats 2.2 att funktionen är undflyende.

Grafer uppkommer som 1-dimensionella *simplicialkomplex*, vilka har en naturlig association till booleska funktioner och utgör grunden för den topologiska teorin om undflyende, vilket presenteras i nästkommande avsnitt.

4 Simplicialtopologi inom teorin för Undflyende

Kahn m.fl. [3] illustrerade kopplingen mellan undflyende av booleska funktioner och topologi. De bevisade att varje icke-undflyende monoton boolesk funktion medför så kallat *kollapsbarhet* av ett särskilt topologiskt rum, bestämt av positionen på ettorna i bitsträngarna som avbildas på noll. Dessa rum, som kallas *simplicialkomplex*, ger ett sätt att beskriva ett topologiskt rum endast genom kombinatorisk data och unikt bestämmer funktionen. Detta angripssätt har gett upphov till många resultat inom teorin för undflyende av booleska funktioner. Många av de grundläggande resultaten relaterar symmetriegenskaper av monotona booleska funktioner till undflyende [12], [4], [5]. Kahn m.fl. [3], använder även den topologiska teorin för att bevisa Förmodan 4 i specialfallet på grafegenskaper där antalet vertex är en primtalspotens, likt Sats 2.3.

Detta avsnitt är ägnat till att introducera den nödvändiga topologin som krävs för att beskriva de grundläggande resultaten inom den topologiska teorin för undflyende. Avsnittet förutsätter således viss familjäritet med grundläggande topologi. Läsare utan grundläggande bakgrund inom topologi rekommenderas att läsa standardtexter så som exempelvis [13]. Trots detta finns flera resultat av den topologiska metoden som enkelt kan beskrivas utan någon bakgrund inom topologi, se Avsnitt 4.3.

4.1 Simplicialkomplex

Låt $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ vara en boolesk funktion och $x \in \{0,1\}^n$. Som tidigare anmärkt, se Definition 2.2, definieras undflyende hos f av att dess deterministiska komplexitet är n, det vill säga att det minsta maximaldjupet av alla associerade beslutsträd är n. Låt $x \in \{0,1\}^n$, sätt $\sigma_x = \{j \in \{1,\dots,n\} \mid x_j = 1\}$. Det vill säga σ_x betecknar positionen på bitarna i x som är ett. Exempelvis om $x = (1,0,1,0,\dots,0)$ så är $\sigma_x = \{1,3\}$. Notera att σ_x entydigt bestämmer x och omvänt att x entydigt bestämmer σ_x förutsatt att längden på bitsträngen är känd. Låt Δ beteckna samlingen av alla σ_x för vilket den associerade bitsträngen x, avbildas på noll av f. Då bestämmer Δ entydigt f.

Vi kan även karaktärisera undflyende i termer av dessa Δ. Låt $\sigma \subseteq \{1,\dots,n\}$ vara en okänd mängd, med Δ känt och antag att vi vill bestämma huruvida $\sigma \in \Delta$ genom att ställa frågor på formen "är $j \in \sigma$?", och erhålla ja/nej svar av ett orakel. Då kallas Δ *undflyende* om det för alla utfrågningsstrategier krävs n frågor för att bestämma huruvida $\sigma \in \Delta$ i värsta fall. Detta leder oss till följande proposition.

Proposition 4.1. *Låt $\Delta \subseteq \mathcal{P}(\{1,\dots,n\})$ vara komplexet definierat ovan och $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ dess inducerade booleska funktion. Då är Δ undflyende om och endast om f är undflyende.*

Vi kan även karaktärisera egenskaper så som *monotonicitet* (se Definition 2.6) av en given boolesk funktion f i termer av samlingen Δ.

Proposition 4.2. *Låt $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$. Då är f monoton om och endast om Δ är sluten under delmängder, det vill säga att för alla $\sigma \in \Delta$ så gäller att $\delta \subseteq \sigma$ medför att $\delta \in \Delta$.*

För bevis av Proposition 4.2 se Appendix B.2. Sådana samlingar Δ som är slutna under delmängder kallas *simplicialkomplex* och är ett användbart verktyg inom topologi i allmänhet, se exempelvis [14]. Dessa utgör grunden för den topologiska teorin för undflyende ursprungligen beskrivet i [3]. Vi samlar detta i en definition.

Definition 4.1 (Simplicialkomplex, [15])**.** Ett ändligt (abstrakt) *simplicialkomplex* är en ändlig mängd A med en samling $\Delta \subseteq \mathcal{P}(A)$ sådant att om $\sigma \in \Delta$ och $\tau \subseteq \sigma$ då är $\tau \in \Delta$.

Anmärkning 4.1. Man brukar kalla Δ för ett simplicialkomplex istället för att referera till (A, Δ) som ett simplicialkomplex där A är underförstått. Hädanefter behandlas oftast fallet då A är en ändlig delmängd av $\mathbb{Z}$.

Givet ett simplicialkomplex Δ och ett element $v \in A$ sådant att $\{v\} \in \Delta$ så kallas v ett *vertex* till Δ. Mängden av alla vertex till Δ betecknas $V(\Delta)$. Om $\Sigma \subseteq \Delta$ uppfyller Definition 4.1 kallas Σ för ett *delkomplex* till Δ. När $\Delta = \mathcal{P}(A)$ kallas Δ ett *simplex* till A. Ett element $\delta \in \Delta$ kallas också för ett simplex till Δ. Kozlov i [15, s.8] anser att anledningen till att termen används för att både beteckna ett särkilt simplicialkomplex och element i ett simplicialkomplex är att alla $\delta \in \Delta$ ger upphov till ett delkomplex Δ^δ av Δ genom att ta $\Delta^\delta = \mathcal{P}(\delta)$.

Då $\sigma \in \Delta$, så definieras *dimensionen* av σ som $\dim(\sigma) = \mathrm{card}(\sigma) - 1$ och vi kallar σ för ett *n-simplex* om $\dim(\sigma) = n$. Om det högsta dimensionella simplexet i Δ är av dimension n sägs Δ vara ett n-dimensionellt simplicialkomplex.

Från Definition 4.1 ser vi att Proposition 4.2 kan omformuleras till att säga att ett komplex Δ på $\{1, \ldots, n\}$ är ett simplicialkomplex om och endast om dess inducerade booleska funktion f är monoton. f och Δ relateras genom

$$\Delta_f := \{\sigma \subseteq \{1, \ldots, n\} \mid f(x^\sigma) = 0\},$$

där $x_j^\sigma = 1$ då $j \in \sigma$ och $x_j^\sigma = 0$ om $j \notin \sigma$. Vi noterar följande konsekvens av Sats 2.2.

Proposition 4.3. *Låt Δ vara ett simplicialkomplex på $\{1, \ldots, n\}$ för något n. Om card(Δ) är udda så är Δ undflyende.*

Bevis. Låt $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ vara den inducerade booleska funktionen. Om $f(x) = 0$ för ett udda antal x, så är $f(x) = 1$ för ett udda antal x ty det existerar 2^n antal bitsträngar av längd n, varefter f är 1 på ett udda antal bitar då summan av ett jämnt tal och ett udda tal är udda. Sats 2.2 ger då att f är undflyende och Proposition 4.1 ger att Δ undflyende. □

Låt f vara en monoton boolesk funktion på $\{0,1\}^n$ och låt $j \in V(\Delta_f)$. Betrakta då de monotona booleska funktionerna $g_0 : \{0,1\}^{n-1} \to \{0,1\}$ och $g_1 : \{0,1\}^{n-1} \to \{0,1\}$ där $g_0 = f_{|x_j=0}$ och $g_1 = f_{|x_j=1}$. Då f är monoton så är $\Delta_{g_i} \subseteq \Delta_f$ ett delkomplex för varje i. I synnerhet så erhålls Δ_{g_0} genom att radera alla simplex σ från Δ_f som innehåller j medans Δ_{g_1} ges av alla simplex $\sigma \in \Delta_f$ som inte innehåller j men $\sigma \cup \{j\} \in \Delta_f$ [7].

Dessa delkomplex uppkommer i synnerhet inom teorin för undflyende men även på många ställen inom simplicialkomplex i allmänhet. Vi samlar dessa inom en definition för allmänna simplicialkomplex. Följande definition är hämtad ur [15, s.10-11]

Definition 4.2 (Radering & länk)**.** Låt Δ vara ett simplicialkomplex och τ ett simplex av Δ. Då är

(i) *raderingen* av τ från Δ är delkomplexet betecknat $\mathrm{dl}_\Delta(\tau)$ och definieras som

$$\mathrm{dl}_\Delta(\tau) := \{\sigma \in \Delta \mid \tau \nsubseteq \sigma\}$$

och

(ii) *länken* av τ i Δ betecknat $\mathrm{lk}_\Delta(\tau)$ och definieras som

$$\mathrm{lk}_\Delta(\tau) := \{\sigma \in \Delta \mid \sigma \cap \tau = \emptyset,\ \sigma \cup \tau \in \Delta\}.$$

Definition 4.2 kan användas för att som tidigare karaktärisera de simplicialkomplex som uppstår när man ansätter att en given samling bitar ska vara ett eller noll. Detta är i synnerhet användbart när en boolesk funktion f uppvisar vissa egenskaper, så som att varje bit är *väsentlig*, introducerat i Avsnitt 2. Ekvivalent till Ekvation (1) så är varje bit $x_j \in \{0,1\}$ väsentlig för $f : \{0,1\}^n$ förutsatt restriktionen tillfredsställer $f|_{x_j=0} \neq f|_{x_j=1}$. Om f är monoton och alla bitar väsentliga så följer det att för varje $j \leq n$ existerar ett $x = (x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n) \in \{0,1\}^{n-1}$ sådant att $f|_{x_j=0}(x) = 0$ och $f|_{x_j=1}(x) = 1$. Man kan då omformulera denna egenskap i termer av raderingen och länken. För varje $j \leq n$ existerar ett $\sigma \in \Delta_f$ sådant att $\sigma \in \Delta_{f|_{x_j=0}}$ och $\sigma \notin \Delta_{f|_{x_j=1}}$. Men $\Delta_{f|_{x_j=0}} = \mathrm{dl}_\Delta(j)$ och $\Delta_{f|_{x_j=1}} = \mathrm{lk}_\Delta(j)$, se [7, s.18].

Detta gör det lämpligt att kalla ett simplicialkomplex Δ på $\{1, \ldots, n\}$ för väsentligt förutsatt att för varje $j \leq n$, existerar ett $\sigma \in \Delta$ sådant att $\sigma \in \mathrm{dl}_\Delta(j)$ och $\sigma \notin \mathrm{lk}_\Delta(j)$. Det vill säga det existerar ett $\sigma \in \mathrm{dl}_\Delta(j)$ sådant att $\sigma \cup \{j\} \notin \Delta$. Om $j \notin V(\Delta)$ är detta trivialt ty $\mathrm{dl}_\Delta(j) = \Delta$. Antag därför att $j \in V(\Delta)$. Då j inte är väsentlig, gäller att för alla $\sigma \in \mathrm{dl}_\Delta(j)$, $\sigma \cup \{j\} \in \Delta$. Detta villkor innebär då att $\mathrm{dl}_\Delta(j) = \mathrm{lk}_\Delta(j)$. Enligt tidigare diskussion är detta ekvivalent med att $\Delta_{f|_{x_j=0}} = \Delta_{f|_{x_j=1}}$.

Från Proposition 2.1 är väsentlighet ett nödvändigt villkor på den kombinatoriska strukturen på undflyende simplicialkomplex.

Givet två simplicialkomplex Δ_1 och Δ_2 kallas de relevanta morfierna $\varphi : V(\Delta_1) \to V(\Delta_2)$ för *simplicialavbildningar*.

Definition 4.3 (Simplicialavbildning)**.** Låt Δ_1 och Δ_2 vara simplicialkomplex. Då kallas $\varphi : V(\Delta_1) \to V(\Delta_2)$ för en *simplicialavbildning* om för varje simplex $\sigma \in \Delta_1$, så är bildmängden $\varphi(\sigma)$ ett simplex i Δ_2.

Låt Δ_1 och Δ_2 vara simplicialkomplex och $\varphi : V(\Delta_1) \to V(\Delta_2)$ en bijektiv simplicialavbildning. Då är φ en *isomorfi* mellan simplicialkomplex förutsatt att $\varphi^{-1} : V(\Delta_2) \to V(\Delta_1)$ också är en simplicialavbildning. Om $\Delta_1 = \Delta_2$ kallas φ ovan för en *automorfi* och mängden av alla automorfier betecknas med $\mathrm{Aut}(\Delta)$. Vidare kallas Δ_1 och Δ_2 för *isomorfa* simplicialkomplex om det existerar en isomorfi mellan dem.

Anmärkning 4.2. Låt $\varphi \in \mathrm{Aut}(\Delta)$. Då är φ en permutation av $V(\Delta)$ genom Definition 4.3. Å andra sidan så gäller att om φ är en godtycklig permutation av $V(\Delta)$ sådant att för den naturliga verkan på ett simplex $\sigma \in \Delta$, $\varphi \cdot \sigma = \{\varphi(v) \mid v \in \sigma\}$ är ett simplex i Δ så är det en automorfi på Δ. Således ges gruppen $\mathrm{Aut}(\Delta)$ av permutationer verkande på $V(\Delta)$ som är simplicialavbildningar. Notera även att om f är den associerade booleska funktionen så följer att $\mathrm{Aut}(\Delta) \subseteq \Gamma(f)$ där $\Gamma(f)$ är stabilisatorn av f, se Definition 2.3.

4.2 Simplicialtopologi & Booleska funktioner

Det finns ett naturligt sätt att generera ett topologiskt rum från ett abstrakt simplicialkomplex, genom en så kallad *geometrisk realisation*. Läsare som saknar bakgrund i grundläggande topologi rekommenderas att läsa exempelvis [13] för en introduktion till ämnet.

Konstruktionen av en geometrisk realisation kräver några definitioner, vilka läsaren här påminns om. Det *affina höljet* av ett ändligt $S \subseteq \mathbb{R}^n$ är definierat som

$$\mathrm{aff}(S) := \left\{ \sum_{v \in S} \alpha_v v \;\middle|\; \sum_{v \in S} \alpha_v = 1,\ \alpha_v \in \mathbb{R} \right\},$$

och $S \subseteq \mathbb{R}^n$ kallas *affint oberoende* om varje $v \in S$ medför att $v \notin \mathrm{aff}(S')$ för varje $S' \subseteq S \setminus \{v\}$. Vidare är det *konvexa höljet* av S, som betecknas $\mathrm{conv}(S)$, den minsta konvexa mängden innehållande S. Två topologiska rum kallas för *homeomorfa* om det existerar en homeomorfi, en kontinuerlig bijektion med kontinuerlig invers, mellan dem. Detta leder till följande definition taget från [7].

Definition 4.4 (Geometrisk realisering)**.** Låt Δ vara ett simplicialkomplex med vertex $V(\Delta)$ och låt $|\cdot| : V(\Delta) \to \mathbb{R}^{\mathrm{card}(V(\Delta))}$ vara en avbildning sådant att $|V(\Delta)|$ är en affint oberoende samling av $\mathrm{card}(V(\Delta))$ antal vektorer. Då ges den geometriska realiseringen av Δ, betecknat $|\Delta|$, genom

$$|\Delta| = \bigcup_{\sigma \in \Delta} |\sigma|, \tag{3}$$

där $|\sigma| = \mathrm{conv}\left(\{|v| \mid v \in \sigma\}\right)$. Om $|V(\Delta)|$ är standardbasen på $\mathbb{R}^{\mathrm{card}(V(\Delta))}$ så kallas $|\Delta|$ för *standard* geometriska realiseringen av Δ.

Anmärkning 4.3. Definition 4.4 ger oss ett sätt att till varje simplicialkomplex associera ett topologiskt rum. Därför refereras det ofta till topologiska egenskaper av ett simplicialkomplex, när det som faktiskt menas är topologiska egenskaper av dess associerade geometriska realisering.

Varje simplicialavbildning ger upphov till en kontinuerlig avbildning mellan de geometriska realiseringarna:

Proposition 4.4 ([15])**.** *Låt Δ_1 och Δ_2 vara simplicialkomplex och $\varphi : V(\Delta_1) \to V(\Delta_2)$ en simplicialavbildning. Då existerar en kontinuerlig avbildning $|\varphi| : |\Delta_1| \to |\Delta_2|$.*

Bevis. För varje $\sigma \in \Delta_1$ så gäller att $|\sigma| = \mathrm{conv}(\{|v| \mid v \in \sigma\})$. Således följer att för varje $x \in |\sigma|$,

$$x = \sum_{v_i \in \sigma} t_i |v_i|,$$

där $\sum_{v_i \in \sigma} t_i = 1$ och $t_i \geq 0$. Sätt

$$\sum_{v_i \in \sigma} t_i |v_i| \xmapsto{|\varphi|} \sum_{v_i \in \sigma} t_i |\varphi(v_i)|. \tag{4}$$

Då φ är en simplicialavbildning är $\varphi(\sigma)$ ett simplex i Δ_2 och således är $|\varphi(|\sigma|)|$ ett geometriskt simplex, ty $|\varphi(|\sigma|)| = \mathrm{conv}(\varphi(\sigma))$. Fixera $\sigma \in \Delta_1$ och låt $x, y \in |\sigma|$. Då följer att $tx + (1-t)y \in |\sigma|$ varefter Ekvation (4) ger att $|\varphi|(tx + (1-t)y) = t|\varphi|(x) + (1-t)|\varphi|(y)$ så $|\varphi|$ är styckvist linjär på varje linjesegment i $|\sigma|$ och således kontinuerlig på varje $|\sigma| \in |\Delta|$. Varefter $|\varphi|$ är kontinuerlig på $|\Delta|$. □

Notera att från Ekvation (3) följer att $|\varphi \circ \psi| = |\varphi| \circ |\psi|$ och $|\varphi|^{-1} = |\varphi^{-1}|$ om $\varphi, \psi \in \mathrm{Aut}(\Delta)$. Det gäller även att om två simplicialkomplex är isomorfa så är deras geometriska realiseringar homeomorfa. Det bör därmed noteras att vi kan använda topologiska invarianter för att skilja mellan simplicialkomplex upp till isomorfi.

Som tidigare nämnt visar det grundläggande arbetet av Kahn m.fl. [3] att undflyende hos ett simplicialkomplex har vissa topologiska konsekvenser. Detta är ett aktivt forskningsområde och många resultat har etablerats, se exempelvis [4]. Här presenteras bakgrunden till den teori som krävs för att beskriva resultaten i [3], dess omedelbara konsekvenser och även vissa övriga resultat som är av intresse. Återigen förutsätts viss familjäritet med topologi i allmänhet, i synnerhet *homotopi*, då det inte är inom ramverket för denna tes att introducera den nödvändiga bakgrunden. Därför rekommenderas läsare utan bakgrund i topologi att läsa exempelvis [13] och [14].

Låt Δ vara ett simplicialkomplex och låt $\sigma, \tau \in \Delta$ vara simplex. Då kallas τ för en *fasett* av σ om $\tau \subseteq \sigma$ och σ kallas för en *maximal fasett* om för varje $\delta \in \Delta$, $\sigma \nsubseteq \delta$. En *fri fasett* av Δ är ett simplex $\tau \in \Delta$ sådant att det existerar en *unik* maximal fasett σ för vilket $\tau \subset \sigma$. Låt τ vara en fri fasett och σ den associerade maximala fasetten. En *kollaps* av Δ med avseende på τ är avlägsningen av alla $\delta \in \Delta$ sådant att $\tau \subseteq \delta \subset \sigma$ och kallas för en *elementär kollaps* om $\dim(\tau) = \dim(\sigma) - 1$ [15, s.94]. Vi säger att Δ *kollapsar* till ett delkomplex Σ om det existerar en följd av elementära kollapser från Δ till Σ [3]. Detta leder till följande definition

Definition 4.5 (Kollapsbarhet)**.** Låt Δ vara ett simplicialkomplex. Då kallas Δ för kollapsbart om det kollapsar till ett vertex.

Definition 4.5 utgör en grundläggande definition för följande byggsten inom den topologiska teorin för undflyende introducerat i [3]:

Sats 4.5 (Kahn-Saks-Sturtevant)**.** *Varje icke-undflyende och icke-trivialt simplicialkomplex är kollapsbart.*

För att bevisa 4.5 behövs följande lemma.

Lemma 4.6 ([3])**.** *Låt (X, Δ) vara ett icke-trivialt och icke-undflyende simplicialkomplex. Då existerar ett $x \in X$ sådant att $lk_\Delta(x)$ och $dl_\Delta(x)$ är icke-undflyende.*

Se Appendix B.2 för bevis av Lemma 4.6 och Sats 4.5.

I allmänhet kan kollapsbarhet vara svårt att arbeta med, medans följande svagare villkor, kallat *sammandragbarhet*, är ofta enklare. Se Appendix A.2.1 för en mer detaljerad beskrivning av sammandragbarhet.

Definition 4.6 (Sammandragbarhet)**.** Ett topologiskt rum X är *sammandragbart* om det finns en kontinuerlig avbildning $\Phi : X \times [0, 1] \to X$ sådant att för alla $x \in X$ finns ett $y \in X$ för vilket $\Phi(x, 0) = x$ och $\Phi(x, 1) = y$.

Länken mellan sammandragbarhet och kollapsbarhet ges av följande standard sats.

Proposition 4.7 ([15])**.** *Varje kollapsbart simplicialkomplex är sammandragbart.*

Notera att varje simplex är sammandragbart ty varje simplex realiseras som en konvex delmängd $\mathcal{C}$ av $\mathbb{R}^n$ vilka är sammandragbara ty, för varje $x_0 \in \mathcal{C}$ är $F(x, t) = tx_0 + (1 - t)x$ en homotopi, se Appendix A.2.1 för detaljer, mellan identiteten på $\mathcal{C}$ och konstanta avbildningen $g(x) = x_0$ för varje $x \in \mathcal{C}$. Sammandragbarhet i allmänhet medför enkelt sammanhängande och därmed att varje sammandragbart simplicialkomplex är sammanhängande [13].

En av anledningarna att det är enklare att hantera sammandragbarhet inom simplicialtopologi är att det finns ett enkelt nödvändigt villkor för sammandragbarhet, baserat på följande kombinatorisk konstruktion kallat *Eulerkaraktäristiken.*

Definition 4.7. Låt Δ vara ett simplicialkomplex och låt k_n beteckna antalet n-simplex i Δ. Då är *Eulerkaraktäristiken* av Δ, $\chi(\Delta)$, den alternerande summan

$$\chi(\Delta) = k_1 - k_2 + k_3 + \cdots + (-1)^{n-1} k_n + \cdots .$$

Notera att Eulerkaraktäristiken för simplicialkomplex endast är definierad i termer av kombinatorisk data, varför Eulerkaraktäristiken i allmänhet är enkel att beräkna för ändliga topologiska rum. Exempelvis har simplicialkomplexet $\{\emptyset, a\}$ Eulerkaraktäristik 1. Från Appendix A.2.1 och i synnerhet Lemma A.1 vet vi att Eulerkaraktäristiken är invariant under homotopiekvivalens. Då ett sammandragbart rum är homotopiekvivalent med en punkt erhålls följande proposition.

Proposition 4.8. *Varje sammandragbart simplicialkomplex har Eulerkaraktäristik* 1.

Notera att från Proposition 4.8, erhålls att varje icke-undflyende simplicialkomplex har Eulerkaraktäristik 1. Då Δ är ett 1-dimensionellt, icke-undflyende simplicialkomplex, det vill säga en icke-undflyende graf, så innebär detta att det måste ha ett fler vertex än kanter. Således måste grafen vara acyklisk (se Definition A.6), ty varje sammandragbart rum är sammanhängande. Vi konstaterar därför följande korollarium.

Korollarium 4.9. *Varje cyklisk graf är ett undflyende simplicialkomplex.*

Anmärkning 4.4. Om Δ_f är en cyklisk graf innebär det att den associerade booleska funktionen f avbildar lika många bitsträngar med två ettor som bitsträngar med en etta på 0.

Låt X vara ett topologiskt rum, då sägs X ha *fixpunktsegenskapen* om varje kontinuerlig avbildning $f : X \to X$ har en fixpunkt.

Sats 4.10 (Brouwers fixpunktssats)**.** *Den slutna enhetsbollen $B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ i $\mathbb{R}^n$ har fixpunktsegenskapen.*

Se Appendix A.2.2 för en mer ingående behandling av konsekvenserna av Sats 4.10 i termer av simplicialtopologi.

Vad som kallas i [7] för *Lefschetz fixpunktssats* är en generalisering av Korollarium A.3 och utgör länken mellan fixpunkter för simplicialavbildningar och sammandragbarhet.

Sats 4.11 (Lefschetz fixpunktssats)**.** *Varje sammandragbart simplicialkomplex har fixpunktsegenskapen.*

I synnerhet följer av Sats 4.11 i kombination med Sats 4.5 samt Proposition 4.7 att varje simplicialavbildning på ett icke-undflyende simplicialkomplex har en fixpunkt. Låt f vara en boolesk funktion och låt $\varphi \in \Gamma(f)$, där $\mathrm{Aut}(\Delta_f) = \Gamma(f)$ är stabilisatorn till f, se Definition 2.3, och $|\varphi|$ den geometriska realiseringen av φ (se Proposition 4.4). Då följer att φ har en fixpunkt. Denna konstruktion ger existensen av fixpunkter för symmetrier av en boolesk funktion, beskrivningen och tillämpningen av vilka är ämnet för nästkommande delavsnitt.

4.3 Fixpunkter för Simplicialavbildningar & Tillämpningar till undflyende

Låt Δ vara ett simplicialkomplex och $\varphi \in \mathrm{Aut}(\Delta)$ en simplicialavbildning. Låt $|\varphi|$ vara dess geometriska realisering beskrivet genom Ekvation (4). Det följer att då $v \in V(\Delta)$ är en fixpunkt till φ, så är $|v|$ en fixpunkt för $|\varphi|$. Således är alla fixpunkter till en simplicialavbildning fixpunkter till dess geometriska realisering. Låt $\langle\varphi\rangle \subseteq \mathrm{Aut}(\Delta)$ beteckna gruppen genererad av φ. Med den naturliga punktvist definierade gruppverkan blir då även varje bana av $\langle\varphi\rangle$ en fixpunkt för $|\varphi|$, förutsatt att banan ligger i Δ. Låt $\{v_k\}$ vara representanterna för banorna av $\langle\varphi\rangle$ och låt $\{\langle\varphi\rangle v_{k_j}\}$ beteckna de banor av φ som ligger i Δ. Definiera *masscentrum* av simplexet $\langle\varphi\rangle v_{k_j}$ att vara

$$\omega_j = \frac{1}{\mathrm{card}(\langle\varphi\rangle v_{k_j})} \sum_{u \in \langle\varphi\rangle v_{k_j}} |u|. \tag{5}$$

Då $u \in \langle\varphi\rangle v_{k_j}$ om och endast om $u = \varphi^m v_{k_j}$ för något m följer att $\varphi(u) = \varphi^{m+1} v_{k_j} \in \langle\varphi\rangle v_{k_j}$. Därav följer av Ekvation (5) att $|\varphi|(\omega_j) = \omega_j$. Varefter masscentrum för banorna av φ i Δ är en fixpunkt för $|\varphi|$. Genom att återigen konsultera Ekvation (4), ser vi att konvexa kombinationer av dessa masscentrum ω_j är fixpunkter för $|\varphi|$ [7]. Det omvända gäller även varefter följande proposition erhålls. Se Exempel A.3.

Proposition 4.12 ([7])**.** *Låt Δ vara ett simplicialkomplex och $\varphi \in Aut(\Delta)$. Då är fixpunkterna för $|\varphi|$ konvexa kombinationer av masscentrum för de banor av $\langle\varphi\rangle$ som ligger i Δ.*

Se Appendix B.2 för bevis av Proposition 4.12.

Låt ω_j, $j \leq n$ beteckna masscentrum för banorna $\{\Omega_j\}$ av φ som ligger i Δ och låt $S \subseteq \{\omega_j\}$ vara en godtycklig delsamling. Då är varje konvex kombination x av S en konvex kombination av samlingen $\{\omega_j\}$. Proposition 4.12 ger att x är en fixpunkt till $|\varphi|$, förutsatt att $x \in |\Delta|$, vilket endast är fallet om $\cup_{\Omega \in S}\Omega \in \Delta$ enligt [7]. Sätt

$$\Delta^{[\varphi]} = \left\{ S \subseteq \{1, \ldots, m\} \;\middle|\; \bigcup_{j \in S} \Omega_j \in \Delta \right\}. \tag{6}$$

Då är $\Delta^{[\varphi]}$ ett simplicialkomplex över $\{1, \ldots, m\}$ sådant att $|\Delta^{[\varphi]}|$ innehåller fixpunkterna för $|\varphi|$. För $\sigma \in \Delta^{[\varphi]}$ låt $\sigma \overset{\iota}{\mapsto} \cup_{j \in \sigma}\Omega_j \in \Delta$ och låt $\Delta^{\varphi} = \{\sigma \in \Delta \mid \varphi(\sigma) = \sigma\}$. Då följer att ι är en en-till-en inklusionsbevarande avbildning med den huvudsakliga skillnaden att $\Delta^{[\varphi]}$ är ett simplicialkomplex medans Δ^{φ} inte nödvändigtvis är det [16].

Ovan karaktärisering av fixpunkter för automorfier generaliserar naturligt till grupper av automorfier. Följande mer allmänna icke-abelska fixpunktssats bevisat i [17] ger möjligheten att karaktärisera när delgrupper av automorfierna över ett simplicialkomplex har fixpunkter.

Sats 4.13 (R.Oliver, [17]). *Låt Δ vara ett kollapsbart simplicialkomplex och $\Gamma \subseteq Aut(\Delta)$ en grupp sådant att det existerar en normal p-delgrupp Γ_1 för vilket Γ/Γ_1 är cyklisk. Då följer att*

$$\chi(\Delta^{[\Gamma]}) = 1$$

och i synnerhet $\Delta^{[\Gamma]} \neq \emptyset$.

Följande Korollarium av Sats 4.13 etableras i [16].

Korollarium 4.14. *Låt Δ vara ett sammandragbart simplicialkomplex och $\varphi \in Aut(\Delta)$. Då följer att $\chi(\Delta^{[\varphi]}) = 1$.*

Vi har introducerat tillräckligt omfattande metodik för att bevisa undflyende av allmänna klasser på booleska funktioner, genom att analysera bankomplexet $\Delta^{[\Gamma]}$.

Sats 4.15 ([7]). *Låt $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ vara en icke-trivial, monoton boolesk funktion som är invariant under cykliska permutationer. Då är f undflyende.*

Bevis. Antag med anledning av motsägelse att det existerar en icke-undflyende, icke-trivial och monoton boolesk funktion som är invariant under en cyklisk grupp. Då ger Proposition 4.7 att Δ_f är sammandragbart och enligt Lefschetz fixpunktssats 4.11 har Δ_f fixpunktsegenskapen. Antag utan förlust av generalitet att f är invariant under permutationen $\varphi(i) = i + 1 \mod n$. Det ger oss att $\{\langle\varphi\rangle v_{k_j}\} = \{\emptyset, \{1, \ldots, n\}\} \subset \Delta_f$, men då Δ_f är ett simplicialkomplex så följer att $\Delta_f = \mathcal{P}(\{1, \ldots, n\})$ varefter f måste vara trivial, vilket är en motsägelse. □

Låt $(X \cup Y, E)$ vara en bipartit graf, se Definition A.2, med kantmängd E och låt $\varphi \in \mathrm{Sym}(X)$ vara en permutation på vertex mängden X. Sätt $\sigma = (\varphi, \mathrm{id}_Y)$, verkande naturligt på $X \times Y$ och låt $\langle\sigma\rangle$ vara permutationsgruppen genererad av σ. Notera då att bipartita grafen är $\langle\sigma\rangle-$invariant förutsatt att $\langle\sigma\rangle E = E$. Då φ är en cyklisk permutation på X följer att $\langle\varphi\rangle X = X$ varifrån villkoret $\langle\sigma\rangle E = E$ är ekvivalent med att det existerar en delmängd $S \subseteq Y$ sådant att $E = \{(x, y) \mid x \in X,\ y \in S\}$. Beskrivningen av hur en allmän monoton grafegenskap f verkar på sådana $\langle\sigma\rangle-$invarianta bipartita grafer är att det existerar något $k \leq \mathrm{card}(Y)$ sådant att $(X \cup Y, E)$ har egenskapen f om och endast om $k < \mathrm{card}(S)$, det vill säga att mängden S är tillräckligt stor. Ty om vi raderar kanter från kantmängden kan vi endast avlägsna grafegenskapen, då denna är monoton. Denna karaktärisering av bipartita grafegenskaper är central i beviset för följande.

Sats 4.16 (Yao, [12]). *Varje icke-trivial, monoton, bipartit grafegenskap är undflyende.*

Bevis. Detta bevis följer [16, Sats 5.3], anpassat till vår notation och kontext. Antag med anledning av motsägelse att det existerar en monoton icke-undflyende bipartit grafegenskap f och låt $(X \cup Y, E)$ vara en bipartit graf. Då f är en grafegenskap så är i synnerhet f invariant under kant permutationen $\sigma = (\varphi, \mathrm{id}_Y)$ där φ är som ovan en cyklisk permutation av vertexmängden X och låt $G \subseteq \mathrm{Aut}(\Delta_f)$ beteckna permutationsgruppen genererad av σ. Låt $\Delta^{[G]}$ vara givet av Ekvation (6). Då följer av Korollarium 4.14 att $\Delta^{[G]} \neq \emptyset$ och att $\chi(\Delta^{[G]}) = 1$. Notera att banorna av σ är $H_y = \{(x, y) \mid x \in X\}$, således har Δ $\mathrm{card}(Y)$ antal vertex. Varefter $\Delta^{[G]}$ är på formen

$$\Delta^{[G]} = \left\{ A \subseteq Y \;\middle|\; \bigcup_{y \in A} H_y \in \Delta \right\},$$

det vill säga att fixpunkterna av $|G|$ består av alla banor vars union inte har egenskapen f. Således, genom tidigare anmärkning, är detta ekvivalent med att det existerar ett $k \leq \mathrm{card}(Y) = n$ sådant att $\Delta^{[G]}$ är samtliga delmängder av Y med som mest k element. Det följer att vi kan beräkna Eulerkaraktäristiken explicit,

$$\chi(\Delta^{[G]}) = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \binom{n}{j+1} = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \left(\binom{n}{j} + \binom{n-1}{j} \right) = 1 + (-1)^{k-1} \binom{n-1}{k}$$

vilket endast är möjligt om $k = n$, så $Y \in \Delta^{[G]}$ varefter $X \times Y \in \Delta$. Så f måste vara trivial. □

Vi kan även ansätta att $\mathrm{Aut}(\Delta) = G$, där G är gruppen genererad av $\mathrm{Sym}\{1, \ldots, n\}$ verkande på $V(\Delta)$. Då erhålls att Δ inducerar en monoton och icke-trivial grafegenskap, se Definition 3.5. Ty automorfigruppen verkar trivialt transitivt på $\{1, \ldots, n\}$.

Vi påminner läsaren om att Förmodan 4 medför att samtliga monotona grafegenskaper är undflyende. Som illustrerat i Sats 2.3 existerar specialfall av detta resultat. Kahn m.fl. [3], visar även att varje monoton, icke-trivial grafegenskap på 6 vertex är undflyende. Liknande resultat har etablerats i fallet då antalet vertex är 10 och 12 [15, s.230]. Vi illustrerar nedan hur den topologiska metoden kan användas för att bevisa specialfallet gällande primtalspotens antal vertex.

Sats 4.17 (Kahn-Saks-Sturtevant, [16])**.** *Låt f vara en monoton icke-trivial grafegenskap på en graf med p^k antal vertex, där p är ett primtal. Då är f undflyende.*

Bevis. Antag att f är en icke-undflyende monoton grafegenskap och låt (V, E) vara en godtycklig graf med p^k antal vertex. Då är det associerade simplicialkomplexet Δ kollapsbart. Vi kan utan förlust av generalitet identifiera V med den ändliga kroppen $\mathbb{F}_{p^k}$ bestående av p^k antal element. Fixera $a, b \in \mathbb{F}_{p^k}$ med $a \neq 0$. Låt

$$x \overset{\varphi}{\mapsto} ax + b$$

vara en affin avbildning på $\mathbb{F}_{p^k}$ och låt $\Gamma = \langle \varphi \rangle \subseteq \mathrm{Sym}(V)$ vara den multiplikativa gruppen generad av φ. Betrakta därefter delgruppen Γ_1 genererad av avbildningarna $x \mapsto x + \mathbb{F}_{p^k}$, varifrån $\mathrm{card}(\Gamma_1) = p^k$. Vi noterar att Γ_1 är en abelsk grupp ty $(x + \mathbb{F}_{p^k}) \circ (x + \mathbb{F}_{p^k}) = x + \mathbb{F}_{p^k} + \mathbb{F}_{p^k} = x + \mathbb{F}_p^k$ och är isomorf till den additiva gruppen över $\mathbb{F}_{p^k}$. Vidare är Γ_1 en normal delgrupp ty $(ax+b) \circ (x+\mathbb{F}_{p^k}) = ax+\mathbb{F}_{p^k}$ och $(x+\mathbb{F}_{p^k}) \circ (ax+b) = ax+\mathbb{F}_{p^k}$. Genom [18, Sats IV.1.9] är Γ/Γ_1 isomorf till multiplikativa gruppen över $\mathbb{F}_{p^k}$, vilket är cyklisk. Notera även att Γ verkar transitivt på kanterna E, ty då $(x, x'), (y, y') \in E$ där $x \neq x'$ och $y \neq y'$ har ekvationssystemet

$$\begin{aligned} y &= ax + b \\ y' &= ax' + b, \end{aligned}$$

där $ax + b \in \Gamma$ en lösning. Detta ger alltså att $(y, y') = a(x, x') + b$ för något $ax + b \in \Gamma$.

Därav följer av Sats 4.13 att $\Delta^{[\Gamma]} \neq \emptyset$. Varefter det existerar en kant $e \in \Delta^{[\Gamma]}$ och då Γ är transitiv på kanterna med $\Gamma \subseteq \mathrm{Aut}(\Delta)$, följer att $E \subseteq \Delta$, varefter f måste vara trivial. □

5 Resultat

I detta avsnitt framförs olika exempel på undflyende och icke-undflyende booleska funktioner.

5.1 Schackbrädesproblemet

Exempel 5.1. Låt oss ha ett vanligt schackbräde av storlek 8×8. Antag sedan att varje ruta representerar värdet 1 eller 0, där 1 ger färgen svart, 0 ger färgen vit. Är den booleska funktionen f: "Det finns en väg för ett torn att ta sig från botten till toppen av brädet genom att endast åka över svarta rutor" undflyende?

Svaret är ja och detta visas nu. Först presenteras två konfigurationer av brädet som skulle ge värdet 1 respektive 0 på f. En konfiguration som ger värdet 1 på f måste innehålla en sammanhängande väg, från toppen till botten av brädet, bestående av svarta rutor som är kopplade i vertikalt eller horisontalt läge. En konfiguration som ger värdet 0 på f får trivialt inte innehålla en sådan väg. Se Figur C.4 respektive C.5 för en visuell representation av sådana konfigurationer.

Vi kan skriva vår booleska funktion som $f : \{0, 1\}^{64} \to \{0, 1\}$ där varje $x \in \{0, 1\}^{64}$ är en konfiguration av brädet och $f(x) = 1$ för alla x sådan att det existerar en väg över brädet för tornet. Vi säger att en konfiguration som innehåller en väg är en *lösning* till brädet. Om vi kan bevisa att mängden lösningar till brädet, det vill säga $|\{x \mid f(x) = 1\}|$, är udda säger Sats 2.2 att f måste vara undflyende.

Vi betecknar mängden av alla lösningar till 8×8-brädet som $X_{8\times 8} := \{x \mid f(x) = 1\}$. Vi noterar att brädet är symmetriskt kring mitten och med hjälp av denna symmetri kan vi skapa en partition av $X_{8\times 8}$ i form av två mängder innehållande alla *asymmetriska lösningar* respektive alla

symmetriska lösningar. För vårt 8×8-bräde betecknar vi mängden av alla asymmetriska lösningar som $A_{8\times 8}$ och mängden av alla symmetriska lösningar som $S_{8\times 8}$.

Definition 5.1. En symmetrisk lösning är en lösning som är invariant under spegling kring mittlinjen som symmetrilinjen medan en asymmetrisk lösning är en lösning som ger upphov till en annan lösning under spegling.

Eftersom en lösning alltid måste vara antingen symmetrisk eller asymmetrisk får vi att $A_{8\times 8} \cap S_{8\times 8} = \emptyset$ och $A_{8\times 8} \cup S_{8\times 8} = X_{8\times 8}$. Vi noterar även att för varje asymmetrisk lösning $x \in A_{8\times 8}$ existerar det exakt en annan lösning $y \in A_{8\times 8}$ som är den speglade versionen av x med avseende på mittlinjen, se Figur C.6 och C.7 för exempel på två sådana lösningar.

Vi noterar här är att varje asymmetrisk lösning $x \in A_{8\times 8}$ kommer i ett par med en speglad version $y \in A_{8\times 8}$. Alltså måste det finnas ett jämt antal asymmetriska lösningar i $X_{8\times 8}$ vilket medför att $|A_{8\times 8}|$ är jämn.

Anmärkning 5.1. Argumentet att asymmetriska lösningar kommer i par av två med avseende på spegling genom mittlinjen på brädet gäller för generella $m \times n$-bräden där $m, n \in \mathbb{Z}_+$. Detta innebär att $|A_{m\times n}|$ är jämn för alla $m, n \in \mathbb{Z}_+$.

Vi sätter nu $S_{8\times 8}$ i fokus och noterar, genom att endast kolla på halva brädet (vänster sida), att varje symmetrisk lösning till 8×8-brädet innehåller exakt en lösning till det mindre 8×4-brädet, se Figur C.8 och C.9. Eftersom andra halvan av 8×8-brädet (höger sida) är en direkt spegling av vänster sida med avseende på symmetrilinjen medför detta att det existerar en bijektion mellan mängden av alla symmetriska lösningar $S_{8\times 8}$ till 8×8-brädet och mängden av alla lösningar $X_{8\times 4}$ till det mindre 8×4-brädet.

Detta ger oss således att $|X_{8\times 8}| = |S_{8\times 8} \cup A_{8\times 8}| = |S_{8\times 8}| + |A_{8\times 8}| = |X_{8\times 4}| + |A_{8\times 8}|$. På samma sätt kan vi dela upp $X_{8\times 4}$ i en partition av symmetriska och asymmetriska lösningar med en ny symmetrilinje för 8×4-brädet vilket ger $X_{8\times 4} = A_{8\times 4} \cup S_{8\times 4}$. Återigen finns det en bijektion mellan alla symmetriska lösningar $S_{8\times 4}$ för 8×4-brädet och alla lösningar $X_{8\times 2}$ för 8×2-brädet. Vi får $|X_{8\times 4}| = |S_{8\times 4} \cup A_{8\times 4}| = |S_{8\times 4}| + |A_{8\times 4}| = |X_{8\times 2}| + |A_{8\times 4}|$. Genom att iterera en sista gång får vi att $|X_{8\times 2}| = |S_{8\times 2} \cup A_{8\times 2}| = |S_{8\times 2}| + |A_{8\times 2}| = |X_{8\times 1}| + |A_{8\times 2}|$, där $X_{8\times 1}$ är mängden av alla lösningar till 8×1-brädet. Detta 8×1-bräde har endast den triviala lösningen, det vill säga $|X_{8\times 1}| = 1$. Vi konstaterar nu att kardinaliteten av mängden av alla lösningar till 8×8-brädet kan skrivas som $|X_{8\times 8}| = |A_{8\times 8}| + |A_{8\times 4}| + |A_{8\times 2}| + 1$. Enligt Anmärkning 5.1 är 2 en delare till $|A_{8\times 8}|, |A_{8\times 4}|$ och $|A_{8\times 2}|$ vilket medför att $|A_{8\times 8}| + |A_{8\times 4}| + |A_{8\times 2}| = 2C$ för något $C \in \mathbb{Z}_+$. Detta ger oss att $|X_{8\times 8}| = 2 \cdot C + 1$. Enligt Sats 2.2 får vi att den booleska funktionen f måste vara undflyende.

Anmärkning 5.2. Brädet i ovanstående exempel kan ersättas med en graf där varje ruta representeras av en vertex, se Figur C.10. Vi använder oss dock vidare av brädet för enkelhetens skull.

Man kan generalisera ovanstående resultat till ett bräde av storlek $m \times n$ där $m, n \in \mathbb{Z}_+$. Innan vi visar detta behöver vi först förstå hur fallet då n är ett udda heltal hanteras. Vi börjar med ett exempel.

Exempel 5.2. Låt oss ha ett 4×3-bräde med en symmetrilinje i mitten av brädet, se Figur C.11. Varje symmetrisk lösning till detta bräde innehåller, i halva brädet (vänster sida) inklusive kolumnen i mitten, en lösning till det mindre 4×2-brädet, se Figur C.12. Detta eftersom kolumn 3 är en direkt kopia av kolumn 1 och kolumn 2 lämnas invarint under spegling. I sin tur medför detta att varje symmetrisk lösning till 4×3-brädet har exakt en representant i mängden av alla lösningar till 4×2-brädet.

Antag nu vi har ett godtyckligt $m \times n$-bräde där $m, n \in \mathbb{Z}_+$. Vi betecknar mängden av alla lösningar till brädet som $X_{m\times n}$ och använder mittlinjen genom brädet som vår symmetrilinje. Mängden symmetriska lösningar betecknas som $S_{m\times n}$. Med samma resonemang som används i Exempel 5.1 och 5.2 får vi att för varje symmetrisk lösning $x \in S_{m\times n}$ till $m \times n$-brädet existerar det exakt en representant i mängden $X_{m\times n^*}$ av alla lösningar till det mindre $m \times n^*$-brädet där $n^* = \lceil \frac{n}{2} \rceil$. Detta innebär i sin tur att det existerar en bijektion mellan mängderna $S_{m\times n}$ och $X_{m\times n^*}$ vilket medför att $|S_{m\times n}| = |X_{m\times n^*}|$. Vi sammanfattar ovanstående slutsats i ett lemma och presenterar därefter Sats 5.2.

Lemma 5.1. *För varje $m \times n$-bräde och $m \times n^*$-bräde där $m, n \in \mathbb{Z}_+$ och $n^* = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ gäller det att $|S_{m\times n}| = |X_{m\times n^*}|$.*

Sats 5.2. *En boolesk funktion $f : \{0,1\}^{mn} \to \{0,1\}$ där funktionen är: "Det finns en väg från botten till toppen av en rektangulär $m \times n$ graf" är undflyende för alla $m, n \in \mathbb{Z}_+$.*

Bevis. Vi använder oss av stark induktion över n för att bevisa att varje $m \times n$-bräde ger ett udda antal lösningar till en boolesk funktion f definerad som ovan, det vill säga att $|X_{m\times n}|$ är udda. Vi fixerar ett godtyckligt $m \in \mathbb{Z}_+$ och ansätter

$$P(n) : |X_{m\times n}| \text{ är udda.}$$

Basfall: Vi visar att påståendet gäller för $n = 1$ och får $m \times 1$-brädet som endast har den triviala lösningen vilket implikerar $|X_{m\times 1}| = 1$, $P(1)$ stämmer.
Vi vill nu visa att $(P(1) \wedge P(2) \wedge \ldots \wedge P(k)) \implies P(k+1)$, för $k \geq 1$.
Induktionssteg: Låt $k \in \mathbb{Z}_+$ och antag $P(i)$ är sant för alla $1 \leq i \leq k$. Vi skapar en partition av $X_{m\times(k+1)}$ med avseende på mittlinjen som symmetrilinje och får att $X_{m\times(k+1)} = S_{m\times(k+1)} \cup A_{m\times(k+1)}$. Detta ger oss att $|X_{m\times(k+1)}| = |S_{m\times(k+1)}| + |A_{m\times(k+1)}|$. Enligt Lemma 5.1 har vi att $|S_{m\times(k+1)}| = |X_{m\times(k+1)^*}|$ där $1 \leq (k+1)^* \leq k$ vilket innebär att $|X_{m\times(k+1)^*}|$ är udda enligt vårt antagande. Vi får att $|X_{m\times(k+1)}| = |A_{m\times(k+1)}| + |X_{m\times(k+1)^*}|$ där $|A_{m\times(k+1)}|$ är ett jämnt heltal enligt Anmärkning 5.1. Detta ger oss således att $|X_{m\times(k+1)}|$ är ett udda heltal och enligt induktion får vi att $|X_{m\times n}|$ är udda för alla $n \in \mathbb{Z}_+$. Eftersom $m \in \mathbb{Z}_+$ valdes godtyckligt innebär det att $|X_{m\times n}|$ är udda för alla $m, n \in \mathbb{Z}_+$ och vi får vårt önskade resultat enligt Sats 2.2. □

Om vi istället för ett bräde i $\mathbb{R}^2$ har ett rätblock i $\mathbb{R}^3$ så kan vi med ett liknande resonemang visa att den booleska funktionen f: "Det finns en väg från botten till toppen av en rektangulär $m \times n \times k$ graf" är undflyende.

Vi börjar med att skapa en partition av $X_{m\times n\times k}$ till mängderna av symmetriska och asymmetriska lösningar med avseende på ett plan som delar blocket vertikalt i mitten. På detta vis kan vi iterativt reducera ner ett block i $\mathbb{R}^3$ till ett bräde i $\mathbb{R}^2$ genom samma metod som användes i Exempel 5.1 fast istället använda oss av ett symmetriplan. Vi får att $|X_{m\times n\times k}|$ är ett jämnt antal asymmetriska lösningar plus antalet lösningar till $X_{m\times n\times 1}$ som bara är mängden av lösningarna till ett bräde av storlek $m \times n$. Detta bräde vet vi har ett udda antal lösningar enligt beviset till Sats 5.2 vilket medför att $|X_{m\times n\times k}| = 2C + |X_{m\times n}|$ är ett udda heltal där $C \in \mathbb{Z}_+$. Enligt Sats 2.2 ger detta oss att f är undflyende även för ett rätblock i $\mathbb{R}^3$. Vi sammanfattar ovanstående resultat i ett korollarium.

Korollarium 5.3. *En boolesk funktion $f : \{0,1\}^{mnk} \to \{0,1\}$ där funktionen är, "Det finns en väg från botten till toppen genom en graf i form av ett rätblock av storlek $m \times n \times k$" är undflyende för alla $m, n, k \in \mathbb{Z}_+$.*

Anmärkning 5.3. Sats 5.2 och Korollarium 5.3 gäller även om man tillåter diagonala steg, såsom om en dam skulle användas istället för ett torn. I detta fall blir den underliggande grafen som i Figur C.13.

5.2 ACB-problemet

En generalisering av ovanstående resultat är att låta funktionen agera på en mer generell graf än ett schackbräde. Generaliseringen vi kommer att undersöka är grafer där varje bit är väsentlig och där vertexmängden delas upp i tre disjunkta delmängder A, B och C. Funktionen är 1 om det existerar en delgraf som är en väg från A till B genom C och 0 annars, se Appendix A.1 för definition av delgraf. Huruvida alla sådana funktioner är undflyende kommer att kallas *ACB-problemet*. Det finns två olika sätt funktionen kan agera på grafen, antingen på dess vertexmängd eller dess kantmängd.

Ett exempel på när funktionen är icke-undflyende, då den agerar på vertexmängden, är då den agerar på grafen i Figur C.14. Funktionen på denna graf är icke-undflyende enligt följande algoritm:

1. Fråga a och b, som måste vara 1 (annars är vi klara).
2. Fråga c_2, som måste vara 1 (annars behöver vi inte fråga c_4).
3. Fråga c_3, om c_3 är 1 är vi klara och om c_3 är 0 behöver vi inte fråga c_1.

Ett ytterligare motexempel till ACB-problemet är funktionen agerande på vertexen i grafen till Figur C.15 som vi kallar den *modifierade schackbrädes-funktionen.* Notera att hörnen av Figur C.15 har grafen i Figur C.14 som delgraf. Efter lite test av möjliga algoritmer som använder liknande taktik som algoritmen ovan kan vi konstatera följande.

Proposition 5.4. *Den modifierade schackbrädes-funktionen av storlek* 4×4 *är icke-undflyende.*

Bevis. Låt grafens vertex vara namngivna enligt Figur C.15. Funktionen är icke-undflyende enligt följande algoritm:

1. Fråga bit a och b, som måste vara 1 (annars är vi klara).
2. Fråga bit c_3, c_{10}, c_5 och c_{12}, som måste vara 1 (annars behöver vi inte fråga bit c_6 och c_9).
3. Fråga bit c_1 och c_2 som också måste vara 1 (annars behöver vi inte fråga bit c_6 och c_9).

Efter dessa frågor är vi klara, eftersom att c_1, c_2, c_3 och c_5 är 1 medför att vi inte behöva veta värdet på c_4. □

Användning av samma algoritm ger även att vi kan tvinga fram 1:or på vertexen längs de övre sidorna av ett 5×5 schackbräde, vilket ger följande resultat.

Korollarium 5.5. *Den modifierade schackbrädes-funktionen av storlek* 5×5 *är icke-undflyende.*

Algoritmen kommer inte fungera på ett schackbräde av storlek 6×6 eftersom algoritmen bygger på att tvinga fram ettor längs övre kanterna, vilket inte går att göra på ett schackbräde av storlek större än 5×5. Ingen algoritm har ännu hittats för att visa om funktionen är undflyende eller icke-undflyende.

Inga liknande motexempel har hittats då funktionen agerar på kantmängden i ACB-problemet, vilket leder oss till följande förmodan.

Förmodan 5. *En boolesk funktion* $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ *agerande på kantmängden till en graf där funktionen är "Det finns en väg från A till B genom C" är undflyende för alla grafer där varje bit är väsentlig samt A, B och C är disjunkta vertexmängder.*

Proposition 5.6. *Det existerar minst en graf sådan att den booleska funktionen* f*, såsom presenterad i Förmodan 5, är undflyende men* $|\{x \mid f(x) = 1\}|$ *är jämnt.*

Se Appendix B.3 för ett bevis av Proposition 5.6.

Ett naturligt sätt att försöka bevisa Förmodan 5 skulle vara att använda Sats 2.2, såsom det gjordes i beviset av Sats 5.2. Detta visar sig dock inte fungera för generella grafer då det enligt Proposition 5.6 existerar minst en graf sådan att när f agerar på denna är f undflyende men antalet lösningar är jämnt, se Figur C.16 för ett exempel på en sådan graf.

5.3 Undflyende av Närliggande ettor

Följande funktion är hämtad från opublicerade anteckningar av Steif J. E. och Kahn J. [19]. Vi betraktar även fallet då grafen G inte är vertextransitiv, se Appendix A.1 för definition av vertextransitiv.

Exempel 5.3. Låt $G = (V, E)$ vara en graf med n vertex betecknade $1, 2, 3, \ldots, n$. Låt $f : \{0,1\}^n \longrightarrow \{0,1\}$ vara en boolesk funktion på vertexen i G där:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1 \text{ om } \exists k, l \in \{1, 2, \ldots, n\} : x_k = x_l = 1 \text{ där } \{x_k, x_l\} \in E \\ 0 \text{ annars} \end{cases} .$$

Ta exempelvis funktionen på en väg av längd ett. Då har vi två vertex och en kant mellan dessa så funktionen är endast 1 om all indata är 1. Därmed är funktionen undflyende enligt Sats 2.3.

Steif och Kahn visar följande sats i [19].

Sats 5.7. *Den booleska funktionen i Exempel 5.3 är undflyende då G är en cykel (se Appendix A.1 för definition av cykel).*

Beviset av Sats 5.7 bygger på följande lemma, introducerat i [19], och proposition. Funktionen i propositionen kallas för en *eller-sats* mellan olika funktioner.

Lemma 5.8. *Låt G vara en väg med n vertex (se Appendix A.1 för definition av väg). Då är funktionen i exempel 5.3 icke-undflyende om och endast om $n \equiv 1$ mod 3.*

Proposition 5.9. *Låt $f = f_1 \vee f_2 \vee \ldots \vee f_n, n \in \mathbb{Z}_+$, där funktionen antar värde 1 om någon av f_i antar värdet 1. Antag att varje f_i tar in olika indata. Då är f undflyende om och endast om f_i är undflyende $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.*

Bevis av Proposition 5.9. Antag f undflyende och det $\exists j : f_j$ är icke-undflyende. Därmed kan motståndaren fråga indatan i f_j sådana att de inte behöver fråga all indata. Detta leder till en motsägelse ty varje f_i tar in olika indata. Det återstår att visa andra riktningen. Antag f_i är undflyende $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Eftersom funktionerna är undflyende kan vi svara på ett sådant sätt att sista frågan bestämmer om funktionen antar värdet 1 eller 0. Vi låter f_i anta värdet 0 efter sista frågan för varje i, vilket medför att f är undflyende ty varje f_i tar in olika indata. □

Anmärkning 5.4. Notera att ovan proposition också håller för *och-satser*, det vill säga då alla f_i måste vara 1 för att f skall vara 1. Det visas enkelt med faktumet att för varje undflyende funktion kan vi under motståndare argumentet välja funktionens värde med sista frågan.

För att bevisa Lemma 5.8 behövs ett annat resultat, introducerat i [19].

Lemma 5.10. *Antag $n \not\equiv 1$ mod 3 och $a + b = n - 1$ där $a, b \in \mathbb{N}$. Om $a \equiv 1$ mod 3 så är $b - 1 \not\equiv 1$ mod 3.*

Bevis av Lemma 5.10. Låt $n \not\equiv 1 \bmod 3$ och $a + b = n - 1$ där $a, b \in \mathbb{N}$ samt att $a \equiv 1 \bmod 3$. Eftersom $a + b = n - 1 \Leftrightarrow b - 1 = n - a - 2 \equiv n - 3 \bmod 3 \not\equiv -2 \bmod 3 \Leftrightarrow b - 1 \not\equiv 1 \bmod 3$. □

Med hjälp av Lemma 5.10 kan Lemma 5.8 bevisas, se Appendix B.3 för beviset. Vi kan nu använda Lemma 5.8 för att bevisa Sats 5.7.

Bevis av Sats 5.7. Låt G vara en cykel med n vertex och antag att motståndaren först frågar vertex i. Om $n - 1 \not\equiv 1 \bmod 3$ så är $f|_{x_i=0}$ undflyende enligt Lemma 5.8. Om $n - 1 \equiv 1 \bmod 3$ så kan $f|_{x_i=1}$ ses som en eller-sats mellan två diktatorfunktioner och en funktion som uppfyller negationen av Lemma 5.8 ty vi svarar alltid 0 om x_{i-1} eller x_{i+1} frågas. Därmed är funktionen undflyende. □

Vi visar nu flera resultat gällande funktionen i Exempel 5.3.

Proposition 5.11. *Låt f vara funktionen i Exempel 5.3 där grafen är Petersen grafen (se Figur A.3). Funktionen är i detta fall undflyende.*

Bevis. Vi visar att f är undflyende med motståndare argumentet. Eftersom grafen är vertex transitiv så spelar det ingen roll vart motståndaren börjar fråga. Vi kan därmed anta att motståndaren först frågar ett vertex kallad x_1. Vi svarar 1 och får att $f_{|x_1=1}$ kan ses som en eller-sats mellan 3 diktatorfunktioner och f på en 6-cykel eftersom vi alltid svarar 0 då grannar till x_1 frågas efteråt. Men detta är undflyende enligt Sats 5.7. Därmed är funktionen undflyende. □

Proposition 5.12. *Låt f vara funktionen givet i 5.3 där G består av två cyklar C^k och C^l samt exakt en $C^k - C^l$ kant (se Appendix A.1 för definition av cyklar). Om $k \equiv 2$ mod 3 och $l \equiv 2$ mod 3 så är funktionen icke-undflyende. (Se Figur C.2 för illustration.)*

Bevis. Vi använder motståndare argumentet. Fråga vertexet i C^k som har en granne i C^l och kalla vertexet för i. Enligt 5.9 måste vertexet anta värdet 1 eftersom $f|_{x_i=0}$ är en eller-sats som innehåller fallet i Lemma 5.8. Fråga nu grannen i C^l. Om de svarar 1 är vi färdiga. Om de svarar 0 får vi en eller-sats som inkluderar fallet i Lemma 5.8. Därmed blir funktionen icke-undflyende. □

Proposition 5.13. *Funktionen given i Exempel 5.3 är undflyende då $G = K^n$ (se Appendix A.1 för definition av K^n) där $n \geq 2$.*

Bevis. Antag att motståndaren först frågar en vertex vi kallar x_1. Vi svarar 1 på första frågan. Då kan $f|_{x_1=1}$ ses som en eller sats mellan $n-1$ diktatorfunktioner vilket är undflyende enligt 5.9. □

Proposition 5.14. *Funktionen i Exempel 5.3 är undflyende då G är en av följande:*

1. *$K_{1,n}$ (se Appendix A.1 för definition av $K_{n,m}$) där $n \geq 3$.*
2. *$G(l_1, l_2)$ vilket består av K_{1,l_1} och K_{1,l_2}, där $l_1, l_2 \geq 3$, som delar exakt ett vertex som inte är center i någon stjärna.*

Beviset av Proposition 5.14 ges i Appendix B.3.

Proposition 5.15. *Låt f vara som i Exempel 5.3 där G är grafen i Figur C.3. Då är funktionen undflyende.*

Bevis. Svara 1 på första frågan vilket inducerar en ny boolesk funktion. Eftersom vi kommer svara 0 på vertexen bredvid vertexet vi tilldelade värdet 1 kan funktionen ses som en eller-sats mellan 2 diktatorfunktioner och f på $K_{1,3}$. Men detta är undflyende enligt 5.14 punkt 1.

□

5.4 Diskussion

ACB-problemet, som diskuteras i Avsnitt 5.2, och i synnerhet Förmodan 5, förtjänar vidare utforskning. Om det skulle visa sig att Förmodan 5 är korrekt illustrerar ACB-problemet en intressant situation där en boolesk funktion f är undflyende för alla grafer då den agerar på kantmängden, men icke-undflyende för vissa grafer där den agerar på vertexmängden. Detta är av intresse då det till varje graf $G = (V, E)$ existerar en så kallad *linjegraf* $L(G) = (V', E')$ i vilken kanterna i G är representerade som vertex i $L(G)$. Till varje funktion f, definerad som i Förmodan 5, agerande på kantmängden till G kan det således associeras en funktion f' som agerar på vertexmängden till $L(G)$. Detta genom att partitionera vertexen för en linjegraf $L(G)$ sådan att alla kanter till G som är incident med en vertex tillhörande $A \subset V$ (respektive $B \subset V$) representeras som ett vertex tillhörande $A' \subset V'$ (respektive $B' \subset V'$). Resterande kanter låter vi representeras som vertex tillhörande C'. För att garantera att en sådan partition kan skapas krävs det dock att det inte existerar en kant mellan vertexmängderna A och B i grafen G. En uppdelning av vertex på detta sätt skulle möjligtvis kunna medföra att klassen av linjegrafer $L(G)$, till alla grafer G som uppfyller kraven i Förmodan 5 med det ytterligare kravet att det inte existerar en kant $\{u, v\} \in E$ där $u \in A$ och $v \in B$, är undflyende under f'.

Vi spekulerar att Förmodan 5 är sann och föreslår en preliminär idé för en algoritm:

1. Tillfråga en godtycklig kant i grafen. Tilldela värdet 0 om en *kantsammandragning* medför att det skapas en eller flera oväsentliga kanter, annars tilldela värdet 1 och utför en kantsammandragning.
2. Upprepa steg 1 på den nya grafen.

Notera att efter en kantsammandragning kan det uppstå en *multigraf* även om den ursprungliga grafen var en simpel graf. Se [20, s.7 och s.93] för formella definitioner av multigraf, kantsammandrag och linjegraf.

En relevant frågeställning som uppstår från Sats 4.15 och 4.16 är möjligheten att specificera $\mathrm{Aut}(\Delta)$ som en specifik delgrupp av den symmetriska gruppen för att därigenom identifiera en klass av undflyende simplicialkomplex. Specifikt, med anledning av Sats 5.2, uppstår frågan om alla monotona reflektionssymmetriska booleska funktioner är undflyende. Figur C.14 presenterar ett motexempel som visar att detta inte alltid är fallet. Det är viktigt att observera att alla variabler i detta motexempel är väsentliga. Varefter motexemplet inte trivialt kan uteslutas genom att begränsa omfattningen till endast väsentliga simplicialkomplex.

Sats 4.13 och Korollarium 4.14 tillåter att relatera symmetriegenskaper av en boolesk funktion till topologiska egenskaper hos det associerade simplicialkomplexet. I synnerhet kan motsägelser härledas genom att fastställa att fixpunktskomplexet i Ekvation (6) är tomt, vilket skulle strida mot Sats 4.11. Det är fortfarande okänt under vilka svagare symmetriegenskaper och potentiella andra förutsättningar denna metod kan vara effektiv.

Referenser

[1] Holt RC, Reingold EM. On the time required to detect cycles and connectivity in graphs. Mathematical systems theory. 1972;6(1):103-6.

[2] Rivest RL, Vuillemin J. A generalization and proof of the Aanderaa-Rosenberg conjecture. In: Seventh Annual ACM Symposium on Theory of Computing (Albuquerque, N.M., 1975). Association for Computing Machinery, New York; 1975. p. 6-11.

[3] Kahn J, Saks M, Sturtevant D. A topological approach to evasiveness. Combinatorica. 1984;4(4):297-306. Available from: https://doi.org/10.1007/BF02579140.

[4] Jonsson J. Simplicial complexes of graphs. vol. 1928 of Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin; 2008. Available from: https://doi.org/10.1007/978-3-540-75859-4.

[5] Chakrabarti A, Khot S, Shi Y. Evasiveness of Subgraph Containment and Related Properties. In: Ferreira A, Reichel H, editors. STACS 2001. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg; 2001. p. 110-20.

[6] Scheidweiler R, Triesch E. A Lower Bound for the Complexity of Monotone Graph Properties. SIAM Journal on Discrete Mathematics. 2013;27(1):257-65. Available from: https://doi.org/10.1137/120888703.

[7] Lovasz L, Young NE. Lecture Notes on Evasiveness of Graph Properties; 2002.

[8] Rosenberg AL. On the time required to recognize properties of graphs: A problem. ACM SIGACT News. 1973;5(4):15-6.

[9] Kleitman DJ, Kwiatkowski DJ. Further results on the Aanderaa-Rosenberg conjecture. J Combin Theory Ser B. 1980;28(1):85-95. Available from: https://doi.org/10.1016/0095-8956(80)90057-X.

[10] Illies N. A counterexample to the generalized Aanderaa-Rosenberg conjecture. Information Processing Lett. 1978;7(3):154-5. Available from: https://doi.org/10.1016/0020-0190(78)90081-9.

[11] Diestel R. Graph theory. vol. 173 of Graduate Texts in Mathematics. 5th ed. Springer, Berlin; 2017. Available from: https://doi.org/10.1007/978-3-662-53622-3.

[12] Yao ACC. Monotone bipartite graph properties are evasive. SIAM J Comput. 1988;17(3):517-20. Available from: https://doi.org/10.1137/0217031.

[13] Munkres JR. Topology. 2nd ed. Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ; 2000.

[14] Hatcher A. Algebraic topology. Cambridge University Press, Cambridge; 2002.

[15] Kozlov D. Combinatorial algebraic topology. vol. 21 of Algorithms and Computation in Mathematics. Springer, Berlin; 2008. Available from: https://doi.org/10.1007/978-3-540-71962-5.

[16] Miller CA. Evasiveness of graph properties and topological fixed-point theorems. Found Trends Theor Comput Sci. 2011;7(4):337-415. Available from: https://doi.org/10.1561/0400000055.

[17] Oliver R. Fixed-point sets of group actions on finite acyclic complexes. Comment Math Helv. 1975;50:155-77. Available from: https://doi.org/10.1007/BF02565743.

[18] Lang S. Algebra. vol. 211 of Graduate Texts in Mathematics. 3rd ed. Springer-Verlag, New York; 2002. Available from: https://doi.org/10.1007/978-1-4613-0041-0.

[19] Kahn J, Steif JE. Evasiveness for containing an edge on the cycle; 2022. Opublicerat.

[20] Bollobás B. In: Fundamentals. New York, NY: Springer New York; 1998. p. 1-37. Available from: https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0619-4_1.

[21] May JP. A concise course in algebraic topology. Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, IL; 1999.

[22] Einsiedler M, Ward T. Functional analysis, spectral theory, and applications. vol. 276 of Graduate Texts in Mathematics. Springer, Cham; 2017.

A Appendix 1 – teori

Detta appendix kompletterar den huvudsakliga texten genom att tillhandahålla ytterligare teoretiskt stöd till de ämnen som diskuteras i varje avsnitt. Det innehåller detaljerade resultat och framställningar som erbjuder en fördjupad förståelse av specifika aspekter av den behandlade teorin. Inom bilagan finns bland annat bevis för vissa sekundära resultat som är väsentliga för att erhålla en mer omfattande förståelse av det studerade ämnet.

I Appendix A.1 presenteras specifika grafteoretiska koncept som bland annat utnyttjas i avsnitt 5, kompletterat med relevanta exempel. Vidare tillhandahåller Appendix A.2 en utförlig bakgrund till vissa av teoretiska begrepp som introduceras i avsnitt 4, i synnerhet homotopiska definitionen av sammandragbarhet och fixpunktsegenskaper för simplicialkomplex.

Appendix B innehåller detaljerade bevis för vissa av de satser och propositioner som framförs i avsnitt 2, 4 och 5. Slutligen inkluderar Appendix C illustrationer av grafer som refereras till i texten.

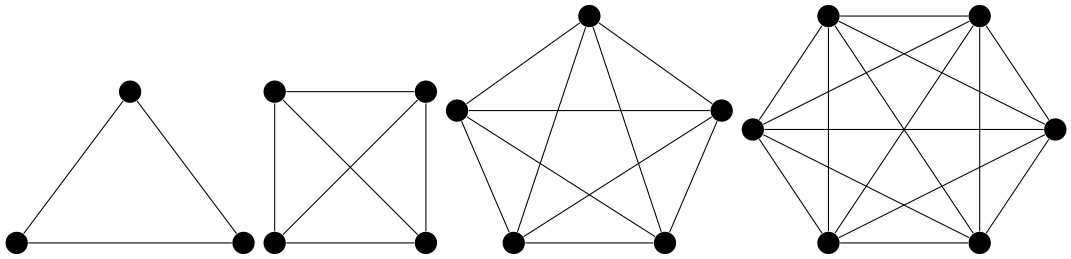
A.1 Olika klasser av grafer

Som illustrerat i 3.2 ger varje grafegenskap upphov till en boolesk funktion som har starka symmetriegenskaper. I detta avsnitt introduceras några exempel på grafegenskaper och vanligt förekommande klasser av grafer. Syftet med detta avsnitt är således att introducera flera av de grafteoretiska verktygen som används i avsnitt 5 för att konstruera exempel på booleska funktioner. Majoriteten av definitionerna är hämtade från boken *Graph Theory* av Diestel [11].

En av de mest naturliga exemplet på en sådan klass av grafer är så kallade *fullständiga grafer*.

Definition A.1 (Fullständighet)**.** En graf G sägs vara fullständig om varje vertex i G är granne till alla andra vertex i G. En fullständig graf på n vertex betecknas K^n.

Exempel på några fullständiga grafer ges i Figur A.1. Notera att ekvivalensklassen under isomorfi av en fullständig graf är trivial, varefter booleska funktionen som indikerar huruvida en graf är fullständig är trivialt en grafegenskap.

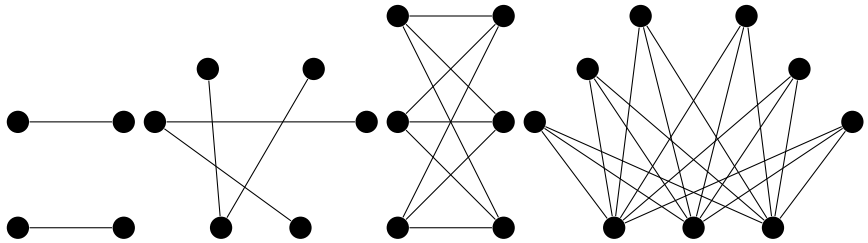


Figur A.1: Graferna K^3, K^4, K^5 samt K^6.

Nästa klass av grafer som kommer betraktas är *r-partita* grafer. Dessa är av särskilt intresse då de utger en av dem grundläggande klasserna av undflyende booleska funktioner, se Sats 4.16.

Definition A.2 (r-Partit graf)**.** En graf $G = (V, E)$ sägs vara r-partit om det existerar en partition av V i r separata mängder sådana att varje kant har sina ändar i två separata mängder i partitionen. En r-partit graf kallas *fullständig* om varje vertex är granne till alla punkter i de andra mängderna i partitionen. Fullständiga r-partita grafer betecknas $K_{n_1,\ldots,n_r}$ vart varje $n_i, i = 1, 2, \ldots, r$ står för antalet vertex i en av mängderna. I fallet då $n_i = s$, $\forall i = 1, 2, \ldots, r$ betecknas grafen som K^r_s vart varje del av partitionen har exakt s vertex.

En 2-partit graf kallas också för *bipartit*. $K_{1,n}$ där $n \geq 3$ kallas för *stjärnor* vart vertexet med grad n kallas för *center* till stjärnan. Booleska funktioner konstruerade med hjälp av stjärnor betraktas i avsnitt 5. Se Figur A.2 för exempel på r-partita grafer och fullständiga r-partita grafer.



Figur A.2: En bipartit graf, 3-partit graf, K_3^2, K_3^3.

En annan typ av graf är så kallade *vägar*, se avsnitt 5 för exempel på booleska funktioner konstruerade med vägar. Vägar är viktiga för att definiera *sammanhängande* grafer.

Definition A.3. En graf $P = (V, E)$ kallas för en *väg* av längd k om $V = \{x_0, x_1, \ldots, x_k\}$ och $E = \{\{x_0, x_1\}, \{x_1, x_2\}, \{x_2, x_3\}, \ldots, \{x_{k-1}, x_k\}\}$. x_0 och x_k kallas för vägens *ändar*, medan de andra punkterna kallas *inre punkter*.

För att definiera sammanhängande grafer behövs också definitionen av *delgraf*.

Definition A.4 (Delgraf)**.** Låt $G = (V, E)$ och $G' = (V', E')$. Grafen G' sägs vara en delgraf till G om $V' \subseteq V$ och $E' \subseteq E$.

Definition A.5 (Sammanhängande graf)**.** En graf $G = (V, E)$ sägs vara sammanhängande om det $\forall x, y \in V$ existerar en delgraf som är en väg mellan x och y.

Notera att till exempel fullständiga grafer, vägar och stjärnor är alla sammanhängande grafer. En annan typ av graf som är sammanhängande är så kallade *cyklar*.

Definition A.6 (Cykel)**.** En graf $C = (V, E)$ sägs vara en cykel av längd k om $C = P \cup \{\{x_{k-1}, x_0\}\}$, vart P är en väg av längd $k \geq 3$ från x_0 till x_{k-1}. En cykel av längd k kallas för en *k-cykel* och betecknas C^k.

Definitionen av cyklar ger upphov till följande definition.

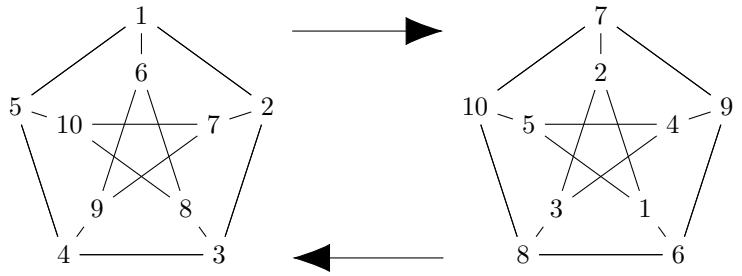
Definition A.7 (Skogsgraf)**.** En graf G som saknar cyklar kallas för en *skog*. Ifall G är sammanhängande kallas den för ett *träd*. Vertex som endast är incident med exakt en kant kallas för ett *löv* och andra punkter kallas för *inre punkter*.

Exempel på en klass av grafer som definieras med hjälp av grafens automorfier är *vertextransitiva* grafer.

Definition A.8 (vertextransitiv graf)**.** En graf $G = (V, E)$ sägs vara *vertextransitiv* om det för varje $v, w \in V$ existerar en automorfi som avbildar v på w.

Observera att om det finns $v, w \in V$ sådant att $d(v) \neq d(w)$ så kan grafen inte vara vertextransitiv eftersom det inte existerar en automorfi som avbildar v på w enligt Proposition 3.1. Notera att om alla vertex i en graf har samma grad, så är inte nödvändigtvis grafen vertextransitiv. Ta till exempel en graf som består av en 4-cykel och en 3-cykel. Vi kan inte avbilda ett vertex från 4 cykeln till ett vertex i 3-cykeln med en automorfi. För att se det, låt φ vara en automorfi på grafen som skickar ett vertex från 4-cykeln till 3-cykeln. Benämn vertexen i 4-cykeln till $1, 2, 3$ och 4 kopplade i ordning, och på samma sätt vertexen i 3-cykeln till $5, 6$ och 7. Antag $\varphi(1) = 5$, andra fall följer analogt. Enligt definitionen av isomorfi måste antingen $\varphi(2) = 6$ och $\varphi(4) = 7$, eller $\varphi(2) = 7$ och $\varphi(4) = 6$. Per definition av isomorfi måste vi få att $\varphi(3) = 5$ vilket är en motsägelse.

Exempel A.1. Ett exempel på en vertextransitiv graf är Petersen grafen, se Figur A.3. Petersen grafen är vertextransitiv ty vi kan rotera grafen och byta den inre cykeln och den yttre cykeln med permutationen (1748)(2936)(510).



Figur A.3: Byte av inre och yttre cykel i Petersen grafen.

A.2 Simplicialtopologi

Denna bilaga täcker vissa detaljer refererade till i Avsnitt 4. I synnerhet täcks den *homotopiska* definitionen av sammandragbarhet och detaljer gällande de relevanta fixpunktssatserna för den topologiska teorin för undflyende.

A.2.1 Homotopi

Låt X vara ett topologiskt rum och f och g vara kontinuerliga avbildningar på X. Vi säger då att f och g är *homotopiska*, om det existerar en kontinuerlig avbildning $F : X \times [0,1] \to X$ sådant att $F(\cdot, 0) = f$ och $F(\cdot, 1) = g$ och vi skriver $f \simeq g$. Man kan enkelt se att $\simeq$ är en ekvivalensrelation på de kontinuerliga avbildningarna på X, se exempelvis [13] eller [14] för detaljer. Från Definition 4.6, ser vi att en definition karaktärisering av sammandragbarhet är att identitetsavbildningen är homotopisk till en konstant avbildning.

Låt X och Y vara topologiska rum. Då kallas ett par (f, g) för en *homotopiekvivalens* mellan X och Y om $f : X \to Y$ och $g : Y \to X$ samt $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ och $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$ där id betecknar identitetsavbildningen. Låt X vara sammandragbart, då existerar ett $x_0 \in X$ sådant att $\mathrm{id}_X \simeq f$ där $f(x) = x_0$ för alla $x \in X$. Sätt $Y = \{x_0\}$ och låt $g : Y \to X$, $g(x) = x_0$. Då följer att (id_X, g) är en homotopiekvivalens mellan X och x_0. Därav är ett sammandragbart rum homotopiekvivalent med en punkt. Omvända implikationen kan också visas [13, s.362]. Således är sammandragbara rum, de rum som är homotopiekvivalenta med en punkt. Intuitivt innebär detta att X kan krympas kontinuerligt till en punkt i X.

Exempel A.2. Låt Δ_3 vara ett tre dimensionellt simplex. Då är randen $\partial\Delta_3$ inte sammandragbart [7]. $\mathrm{dl}_{\Delta_3}(1)$ är sammandragbart och $\mathrm{lk}_{\Delta}(1)$ är inte sammandragbart.

Med definitionen av homotopiekvivalens kan vi formulera följande standard lemma gällande Eulerkaraktäristikens homotopiinvarians [21, s.82].

Lemma A.1. *Om X och Y är två homotopiekvivalenta rum så är $\chi(X) = \chi(Y)$.*

A.2.2 Fixpunktssatser för simplicialkomplex

Från Brouwers fixpunktssats 4.10 följer även att alla topologiska rum homeomorfa till den slutna enhetsbollen i $\mathbb{R}^n$ har fixpunktsegenskapen. Ty då X är homeomorft med den slutna enhetsbollen B och $\varphi : X \to B$ är en homeomorfi och vi låter $f : X \to X$ vara en godtycklig kontinuerlig avbildning. Då är $\varphi \circ f \circ \varphi^{-1} : B \to B$ en kontinuerlig avbildning och har därmed en fixpunkt $x_0 \in B$. Då följer att $\varphi^{-1}(x_0) = (f \circ \varphi^{-1})(x_0)$ så $\varphi^{-1}(x_0) \in X$ är en fixpunkt för f.

Låt Δ vara ett simplicialkomplex och $\sigma \in \Delta$ ett simplex. Då är standard geometriska realisationen $|\sigma|$ det konvexa höljet av vektorerna associerade med vertexen $v \in \sigma$ (se Definition 4.4). För varje $x \in |\sigma|$ existerar unika $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0$ sådant att $\sum_{i \leq n} \lambda_i \leq 1$ och $x = \sum_{i \leq n} \lambda_i |v_i|$. Vi ser då att $\|x\| \leq 1$ förutsatt att $\|v_i\| \leq 1$ för alla i. Således erhålles att $|\sigma| \subseteq B$ där B är den slutna enhetsbollen i $\mathbb{R}^n$. Bland annat följer att varje simplex i ett simplicialkomplex är kompakt och att ett (ändligt) simplicialkomplex är kompakt. Följande standard lemma hjälper att konstruera

en simpel projektionsavbildning till konvexa delmängder i $\mathbb{R}^n$ med standardnormen och bevis kan finnas i [22, Sats 3.13].

Lemma A.2. *Låt $C \subseteq \mathbb{R}^n$ vara en sluten konvex delmängd. Låt $d(\cdot, C) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ där*

$$d(x, C) := \inf_{y \in C} \|x - y\|.$$

Då är $d(\cdot, C)$ en kontinuerlig funktion sådant att det för varje $x \in \mathbb{R}^n$ existerar ett unikt $y \in C$ för vilket $\|x - y\| = d(x, C)$.

Låt $B \subseteq \mathbb{R}^n$ vara den slutna enhetsbollen och $\sigma \in \Delta$ ett simplex. Sätt $r : B \to |\sigma|$ där $r(x) = y$ för $y \in |\sigma|$ valt enligt Lemma A.2. Då är r en väldefinierad kontinuerlig avbildning ty $|\sigma|$ är en konvex och sluten delmängd. Vidare följer att för varje $x \in |\sigma|$, $r(x) = x$ ty $d(x, |\sigma|) = 0$. Därav erhålles att om $\iota : |\sigma| \hookrightarrow B$ är inklusionsavbildningen, så är $r \circ \iota = \mathrm{id}_{|\sigma|}$. Notera då att genom Brouwers fixpunktssats 4.10 så har varje kontinuerlig avbildning på B en fixpunkt. Låt $f : |\sigma| \to |\sigma|$ vara en kontinuerlig funktion, då är $\iota \circ f \circ r : B \to B$ en kontinuerlig funktion från B till säg själv, vilket genom Sats 4.10 har en fixpunkt. Således existerar ett $x_0 \in B$ sådant att $(\iota \circ f \circ r)(x_0) = x_0$ varefter $r(x_0) = (\iota \circ f)(r(x_0))$, men $f(r(x_0)) \in |\sigma|$ så $(\iota \circ f)(r(x_0)) = f(r(x_0))$ och således är $r(x_0)$ en fixpunkt till f. Vi kan således konstatera följande korollarium.

Korollarium A.3. *Varje geometrisk realisation av ett simplex $\sigma \in \Delta$ har fixpunktsegenskapen.*

Exempel A.3. Ett illustrativt exempel till innehållet av Proposition 4.12 är permutationen $\varphi = (123) \in \mathrm{Aut}(\Delta^{\{1,2,3\}})$. $|\varphi|$ verkande på $|\Delta^{\{1,2,3\}}|$. φ roterar alltså triangeln som skapas av linjerna mellan basvektorerna i $\mathbb{R}^3$, så fixpunkten av $|\varphi|$ borde vara $x_0 = \frac{1}{3}(e_1, e_2, e_3)$. Om vi nu kollar på banorna till $\langle\varphi\rangle$ ser vi att den ända banan $\langle\varphi\rangle$ har är $\{\langle\varphi\rangle v_{k_j}\} = \{\emptyset, \{1, 2, 3\}\}$, vars masscentrum är $\frac{1}{3}(e_1, e_2, e_3)$.

B Bevis av Satser, Propositioner & Lemmor

Här presenteras vissa bevis för resultat etablerat i vardera avsnitt som har valts att utelämnas.

B.1 Bevis från Avsnitt 2

Bevis av Sats 2.2. Notera att då $f : \{0, 1\}^n \to \{0, 1\}$ så är antalet bitsträngar $m = 2^n$. Antag att spelare 1 frågar om värdet på x_i. Låt $A_{x_i=1} = \{x|_{x_i=1} \mid f(x) = 1\}$ och definiera $A_{x_i=0}$ på motsvarande sätt. Då $|A|$ är summan av antalet element i ovanstående mängder och $|A|$ är udda, måste antingen $|A_{x_i=1}|$ eller $|A_{x_i=0}|$ vara udda. Spelare 2 kan alltså välja att svara så att antalet bitsträngar som returnerar 1 fortfarande är udda. Antalet möjliga bitsträngar givet $x_i = 1$, eller $x_i = 0$, är dock alltid jämnt så det måste finnas någon sträng för vilken f returnerar 0. Funktionens värde är därmed inte känt. Spelare 2 kan fortsätta att svara på detta vis tills dess att alla variabler har frågats, så funktionen måste därmed vara undflyende, se [7, s.9]. □

Bevis av Lemma 2.6. Fixera ett $x \in \{0, 1\}^n$ och låt M vara en matris där raderna i M är vektorerna i $\Gamma(f)x$. På vänster sida i Ekvation (2) beräknar vi antalet ettor i M genom raderna och på höger sida beräknar vi antalet ettor i M genom kolumnerna. På grund av att $\Gamma(f)$ är transitiv innehåller varje kolumn i M $b(x)$ ettor. Detta eftersom en permutation av kolumnerna i M av ett element $\sigma \in \Gamma(f)$ är ekvivalent med en permutation av raderna i M. □

B.2 Bevis från Avsnitt 4

Bevis av Proposition 4.2. Antag att f är monoton och $\delta \subseteq \sigma \in \Delta$. Låt $x^\delta, x^\sigma \in \{0, 1\}^n$ beteckna de associerade bitsträngarna. Då $\delta \subseteq \sigma$ följer att om $x^\delta_j = 1$ så är $x^\sigma_j = 1$. Ifall $\delta = \sigma \in \Delta$ finns inget att bevisa. Antag därför att det existerar ett $j \in \sigma$ sådant att $j \notin \delta$. Då följer det att $x^\delta = (x^\delta_1, \ldots, x^\delta_j, \ldots, x^\delta_n)$, där $x^\delta_j = 0$ annars är $x^\delta_j = x^\sigma_j$. Då f är monoton följer att $f(x^\delta) = f(x^\sigma) = 0$, så $\delta \in \Delta$. Antag omvänt att Δ är sluten under delmängder. Låt $x^\sigma \in \{0, 1\}^n$ vara godtyckligt och $\sigma \in \Delta$ vara dess associerade mängd. Då Δ är sluten under delmängder följer att varje $\delta \subseteq \sigma$ ligger

i Δ, så $f(x^\delta) = 0$ för varje x^δ som kan erhållas från x^σ genom att vända ettor till nollor. Detta innebär att $f(x^\delta)$ inte kan förändras till ett genom att vända ettorna i x^σ till noll, det vill säga f är monoton. $\square$

Bevis av Lemma 4.6. Då Δ är icke-undflyende, existerar ett $x \in X$ sådant att "*är x i σ ?*dd- är $\sigma \subseteq X$ är en bra första gissning, det vill säga att det existerar en algoritm som bestämmer huruvida $\sigma \in \Delta$ på färre än n frågor. Ifall svaret $x \notin \sigma$ erhålls så är $\sigma \in \Delta$ om och endast om $x \in \mathrm{dl}_\Delta(x)$. Ifall svaret är $x \in \sigma$ så är $\sigma \in \Delta$ om och endast om $\sigma \setminus \{x\} \in \mathrm{lk}_\Delta(x)$. I båda fallen erhålls en strategi vilket bestämmer medlemskap i $\mathrm{dl}_\Delta(x)$ eller $\mathrm{lk}_\Delta(x)$ på färre än $n-1$ frågor. Varefter $\mathrm{dl}_\Delta(x)$ och $\mathrm{lk}_\Delta(x)$ måste vara icke-undflyende. $\square$

Bevis av Sats 4.5. Givet 4.6 följer resultatet av induktion på $|X|$. Ifall $|X| = \{x\}$ är $\Delta = \{\emptyset, x\}$ vilket är trivialt kollapsbart. För induktionssteget, välj $x \in X$ sådant att både $\mathrm{dl}_\Delta(x)$ och $\mathrm{lk}_\Delta(x)$ är icke-undflyende och antag att båda är kollapsbara varefter det existerar en följd $\sigma_1, \ldots \sigma_k$ av fria fasetter vilket kollapsar $\mathrm{dl}_\Delta(x)$. Då är $\sigma_j \cup \{x\}$ en följd av fria fasetter vilket kollapsar Δ till $\mathrm{lk}_\Delta(x)$ vilket är kollapsbart varefter Δ måste vara kollapsbart. $\square$

Bevis av Proposition 4.12. Låt x vara en fixpunkt för $|\varphi|$. Då följer av Ekvation (4) att

$$x = \sum_{v \in V(\Delta)} \lambda_v v = \sum_{v \in V(\Delta)} \lambda_{\varphi(v)} |\varphi(v)|,$$

där $0 \leq \lambda_v$ och $\sum \lambda_v = 1$. Notera att båda representationerna är unika, varefter det följer att för alla $v \in V(\Delta)$, $\lambda_v = \lambda_{\varphi(v)}$. Låt $\{\langle\varphi\rangle v_{k_j}\}_{j \leq n}$ vara banorna av φ som ligger i Δ. Då är $\{\langle\varphi\rangle v_{k_j}\}_{j \leq n}$ en partition av $V(\Delta)$. Vidare så har vi att för varje $v \in \langle\varphi\rangle v_{k_j}$, $\varphi(v) \in \langle\varphi\rangle v_{k_j}$, så koefficienterna λ_v är konstanta över varje bana, med $\sum_{v \in \langle\varphi\rangle v_{k_j}} \lambda_v = \lambda_j \mathrm{card}(\langle\varphi\rangle v_{k_j})$ för något λ_j. Det följer att

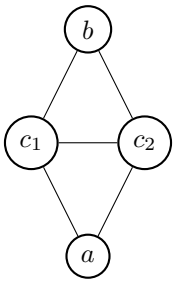
$$x = \sum_{v \in V(\Delta)} \lambda_v |v| = \sum_{j \leq n} \sum_{v \in \langle\varphi\rangle v_{k_j}} \lambda_v |v| = \sum_{j \leq n} \lambda_j \mathrm{card}(\langle\varphi\rangle v_{k_j}) \omega_j,$$

där ω_j är masscentrum av $\langle\varphi\rangle v_{k_j}$ och $\sum_{j \leq n} \lambda_j \mathrm{card}(\langle\varphi\rangle v_{k_j}) = \sum_{v \in V(\Delta)} \lambda_v = 1$. Därav är x en konvex kombination av masscentrum för banorna av φ som ligger i Δ. $\square$

B.3 Bevis från Avsnitt 5

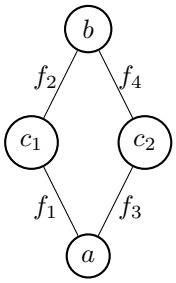
Detta avsnitt är ägnat åt bevis av några resultat som nämns i Avsnitt 5.

Bevis av Proposition 5.6. Beviset utförs med *D-grafen*, se Figur B.1, som den underliggande grafen och delas upp i två delar.

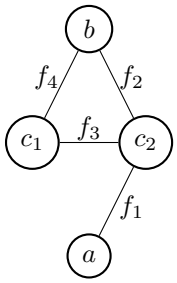


Figur B.1: D-grafen.

Första delen visar, med en algoritm, att f är undflyende då D-grafen är den underliggande grafen. Andra delen visar att antalet konfigurationer av D-grafen som ger värdet 1 på f är jämnt.



Figur B.2: D-grafen utan kant $\{c_1, c_2\}$.



Figur B.3: D-grafen utan kant $\{a, c_1\}$.

Del 1: Den första kanten som tillfrågas ges alltid värdet 0. Därefter kan det uppstå två fall:

Fall 1: Kanten $\{c_1, c_2\}$ tillfrågades först i vilket fall vi tar bort denna kant, se Figur B.2. Nu får vi alltså en graf som har två möjliga vägar från a till b. Den resulterande grafen inducerar den booleska funktionen $f_* = (f_1 \wedge f_2) \vee (f_3 \wedge f_4)$ där f_1 representerar kant $\{a, c_1\}$, f_2 representerar kant $\{c_1, b\}$, f_3 representerar kant $\{a, c_2\}$ och f_4 representerar kant $\{c_2, b\}$. Notera att varje f_i, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, är diktatorfunktionen för en variabel, det vill säga $f_i(x_1) = x_1$, som är trivialt undflyende. Enligt Anmärkning 5.4 är $f_1 \wedge f_2$ och $f_3 \wedge f_4$ undflyende. Vi får således att $f_* = (f_1 \wedge f_2) \vee (f_3 \wedge f_4)$ är undflyende enligt Proposition 5.9 vilket innebär att i fallet kant $\{c_1, c_2\}$ tillfrågades först är f undflyende.

Fall 2: Någon av de andra fyra kanterna tillfrågades först. Alla dessa fyra fall behandlas på ett ekvivalent sätt med den enda skillnaden i namngivningen av vertex varpå endast ett av fallen presenteras här och de resterande tre lämnas som en övning åt läsaren. Låt kanten $\{c_1, a\}$ vara den kanten som tillfrågades först. Vi tar bort denna kant och får en graf som i Figur B.3. Den resulterande grafen inducerar den booleska funktionen $f_* = (f_1 \wedge f_2) \vee (f_1 \wedge f_3 \wedge f_4)$ där f_1 representerar kant $\{a, c_2\}$, f_2 representerar kant $\{c_2, b\}$, f_3 representerar kant $\{c_2, c_1\}$ och f_4 representerar kant $\{c_1, b\}$. Notera att varje f_i, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, är diktatorfunktionen $f_i(x_1) = x_1$ som är undflyende. Vi får nu några olika delfall beroende på vilken den andra kanten som tillfrågas är:
Delfall 1: Om f_1 tillfrågades tilldelas denna värdet 1 och vi får $f_{*1} = f_2 \vee (f_3 \wedge f_4)$ där $(f_3 \wedge f_4)$ är undflyende enligt Anmärkning 5.4. Vi får således att $f_2 \vee (f_3 \wedge f_4)$ är undflyende enligt Proposition 5.9 och vi är klara.
Delfall 2: Om f_2 tillfrågades tilldelas denna värdet 0 och vi får $f_{*2} = f_1 \wedge f_3 \wedge f_4$ som är undflyende enligt Anmärkning 5.4 och vi är klara.
Delfall 3: Om f_3 (eller f_4) tillfrågades tilldelas denna värdet 1 och vi får $f_{*3} = (f_1 \wedge f_2) \vee (f_1 \wedge f_4)$ (eller $f_{*3} = (f_1 \wedge f_2) \vee (f_1 \wedge f_3)$). Vi får ytterligare tre fall beroende på vilken den tredje kanten som tillfrågades är:
3a: Om f_1 tillfrågades tilldelas denna värdet 1 och vi får $f_{*3a} = f_2 \vee f_4$ (eller $f_{*3a} = f_2 \vee f_3$) som är undflyende enligt Proposition 5.9 och vi är klara
3b: Om f_2 tillfrågades tilldelas denna värdet 0 och vi får $f_{*3b} = f_1 \wedge f_4$ (eller $f_{*3b} = f_1 \wedge f_3$) som är undflyende enligt Anmärkning 5.4 och vi är klara.
3c: Om f_4 (eller f_3) tillfrågades tilldelas denna värdet 0 och vi får $f_{*3c} = f_1 \wedge f_2$ som är undflyende enligt Anmärkning 5.4 och vi är klara.

Med denna algoritm fås att den booleska funktionen f, som ges i Förmodan 5, är undflyende då D-grafen är den underliggande grafen. Detta eftersom varje kant måste tillfrågas för att avgöra ifall det finns en väg mellan a och b eller inte.

Del 2: För att visa att antalet konfigurationer av D-grafen som ger värdet 1 på f är jämnt använder vi oss av *inklusion-exklusions principen*. Vi börjar med att identifiera alla möjliga *vägar* mellan a och b i den ursprungliga D-grafen. Vi får fyra olika möjligheter till vägar mellan a och b, dessa är följande: **Väg 1** som går igenom kanterna $\{\{a, c_1\}, \{c_1, b\}\}$, **Väg 2** som går igenom kanterna $\{\{a, c_2\}, \{c_2, b\}\}$, **Väg 3** som går igenom kanterna $\{\{a, c_2\}, \{c_2, c_1\}, \{c_1, b\}\}$ och **Väg 4** som går igenom kanterna $\{\{a, c_1\}, \{c_1, c_2\}, \{c_2, b\}\}$.

Vi betecknar mängden av alla konfigurationer av D-grafen som innehåller **Väg i** som X_i för $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. För att f ska anta värdet 1 måste minst en av **Väg 1,2,3** och **4** vara en del av konfigurationen. Med hjälp av inklusion-exklusions principen kan kardinaliteten av $X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup X_4$ beräknas, vilket är antalet konfigurationer av D-grafen som innehåller minst en av vägarna.

Vi börjar med att beräkna kardinaliteten av X_1. Antalet kanter med obestämt värde i D-grafen då **Väg 1** innehålls är 3, vilket innebär att $|X_1| = 2^3 = 8$ eftersom det inte spelar någon roll vilket värde dessa tre resterande kanter antar. På samma sätt fås att $|X_2| = 8$ och $|X_3| = |X_4| = 2^2 = 4$. Nu beräknas kardinaliteten av $X_i \cap X_j$ där $i \neq j \in \{1, 2, 3, 4\}$, det vill säga antalet konfigurationer som innehåller både **Väg i** och **Väg j**. Dessa kardinaliteter verifieras enkelt och fås till $|X_1 \cap X_2| = 2$, $|X_1 \cap X_3| = 2$, $|X_1 \cap X_4| = 2$, $|X_2 \cap X_3| = 2$, $|X_2 \cap X_4| = 2$ och $|X_3 \cap X_4| = 1$. På samma sätt för antalet konfigurationer som innehåller tre respektive fyra av vägarna fås: $|X_1 \cap X_2 \cap X_3| = 1$, $|X_1 \cap X_2 \cap X_4| = 1$, $|X_1 \cap X_3 \cap X_4| = 1$, $|X_2 \cap X_3 \cap X_4| = 1$ och $|X_1 \cap X_2 \cap X_3 \cap X_4| = 1$.
Vi får således enligt inklusion-exklusions principen att

$$|X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup X_4| = 8 + 8 + 4 + 4 - 2 - 2 - 2 - 2 - 2 - 1 + 1 + 1 + 1 + 1 - 1 = 16.$$

Alltså är f undflyende på den underliggande D-grafen, enligt vår framtagna algoritm, fast $|\{x \mid f(x) = 1\}|$ är jämn.

□

Bevis av Lemma 5.8 . Vi använder motståndare argumentet och börjar med att visa *om* riktningen med induktion med basfallet $n = 4$. Antag utan förlust av allmängiltighet att vertexen i vägen är kopplade i nummerordning. Fråga x_2 vilket måste vara 1 eftersom vi annars inte behövt fråga x_1. Fråga nu x_3. Om $x_3 = 0$ behöver vi aldrig fråga x_4 medan om $x_3 = 1$ så blir funktionens värde 1. Därmed är f inte undflyende på en väg med 4 vertex. Antag att det är sant för upp till och med $n - 3$ vertex. Fråga x_2 vilket måste bli 1 ty annars behövs inte x_1 frågas. Fråga därefter x_1 och x_3 vilka måste bli 0. Men nu har vi kvar en väg med $n - 3$ vertex. Därmed blir f icke-undflyende enligt induktionsantagandet och Proposition 5.9.

Det återstår att visa *endast om* riktningen. Vi visar att $n \not\equiv 1 \bmod 3$ implicerar att funktionen är undflyende med induktion. Vi visade fall $n = 2$ i Exempel 5.3. Då $n = 3$ är $f|_{x_2=1}$ en eller-sats mellan diktatorfunktioner för x_1 och x_3. Vi har också att $f|_{x_1=0}$ och $f|_{x_3=0}$ är samma som f på en väg med två vertex. Det följer från Proposition 5.9 att f är undflyende då $n = 3$. Antag det håller $\forall k < n$. Om x_1 eller x_n frågas först svarar vi 0 om $n - 1 \not\equiv 1 \bmod 3$ ty vi får kvar en väg på $n - 1$ vertex. Om $n - 1 \equiv 1 \bmod 3$ svarar vi 1 på x_1 eller x_n. Eftersom vi inte vill få två ettor bredvid varandra får vi att $f|_{x_1=1}$ samt $f|_{x_n=1}$ kan betraktas som eller-satser mellan en diktatorfunktion och en väg på $n - 2$ vertex. Men det är undflyende enligt antagandet och Proposition 5.9. Om x_2 eller x_{n-1} frågas först svarar vi 1. Likt ovan kan $f|_{x_2}$ och $f|_{x_{n-1}}$ betraktas som eller-satser mellan två diktatorfunktioner och funktionen på en väg med $n-3$ vertex vilket är undflyende enligt antagandet och Proposition 5.9.

Vi visar nu fallet om en inre punkt förutom x_2 och x_{n-1} frågas först. Låt $a, b \in \mathbb{N}$ sådana att $a + b = n - 1$ och $n - 3 \geq a \geq 2$. Vi har följande fall:

$$\text{Fall 1: } a \equiv 1 \bmod 3 \text{ eller } b \equiv 1 \bmod 3$$
$$\text{Fall 2: } a \not\equiv 1 \bmod 3 \text{ och } b \not\equiv 1 \bmod 3.$$

Vi observerar att i fall 2 är $f|_{x_{a+1}=0}$ en eller-sats mellan f på två vägar som är undflyende enligt antagandet och Proposition 5.9. Utan förlust av allmängiltighet kan vi anta $a \equiv 1 \bmod 3$ i fall 1. Då kan $f|_{x_{a+1}=1}$ i fall 1 på samma sätt som ovan ses som en eller-sats mellan två diktatorfunktioner och f på två vägar med antal vertex $a-1$ respektive $b-1$. Men från Lemma 5.10, induktionsantagande och Proposition 5.9 får vi att $f|_{x_{a+1}=1}$ är undflyende. Vi har därmed från induktion att $n \not\equiv 1 \bmod 3$ implicerar att funktionen är undflyende. □

Bevis av Proposition 5.14. Vi använder motståndar tillvägagångsättet där motståndaren först frågar vertex i. Vi visar först 1. Om i är stjärnans center kan $f|_{x_i=1}$ betraktas som en eller-sats mellan

$n-1$ diktatorfunktioner, vilket är undflyende enligt Proposition 5.9. I fallet då i inte är center och $n = 3$ är $f|_{x_i=0}$ samma som f på en väg på tre vertex vilket är undflyende enligt 5.8. I fallet då $n \geq 4$ får vi att $f|_{x_i=0}$ är samma som f på $K_{1,n-1}$ vilket är undflyende enligt induktion.

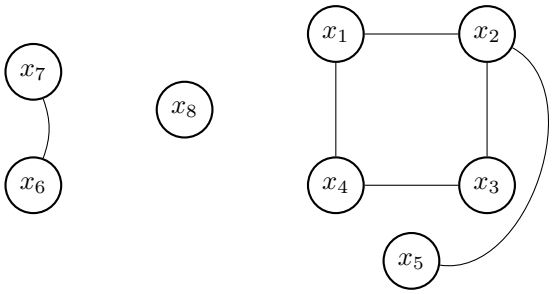
Vi visar nu punkt 2. Antag att motståndaren först frågar vertexet vi kallar i. I fallet då i är ett center får vi att $f|_{x_i=1}$ kan betraktas som en eller-sats mellan l_1 eller l_2 diktatorfunktioner och f på en stjärna eller en väg på 3 vertex. Men det är undflyende enligt resultatet ovan, Lemma 5.8 och Proposition 5.9. Om i är det sammankopplade vertexet får vi följande fall: $l_1 \geq 4$ och $l_2 \geq 4$, $l_1 = 3$ och $l_2 \geq 4$ samt $l_1 = 3$ och $l_2 = 3$. I fall 1 är $f|_{x_i=0}$ en eller sats mellan f på två stjärnor. Fall 2 ger att $f|_{x_i=0}$ är en eller sats mellan en väg av längd 2 och en stjärna. I fall 3 är $f|_{x_i=0}$ en eller sats mellan f på två vägar av längd 2. De tre fallen blir alla undflyende likt det tidigare fallet då ett center frågades.

I fallet då i är ett löv svarar vi 0. Vi får nu följande fall: $l_1 \geq 4$ och $l_2 \geq 4$, $l_1 = 3$ och $l_2 \geq 4$, $l_2 = 3$ och $l_1 \geq 4$, $l_2 = 3$ och $l_1 = 3$. I alla fall får vi att $f|_{x_i=0}$ är samma som f med grafen $G(l_1 - 1, l_2)$ eller $G(l_1, l_2 - 1)$. Det räcker att visa att för $G(l_1 - 1, l_2)$ är funktionen undflyende. Fall 1 och 3 är samma som det vi vill visa och följer av induktion.

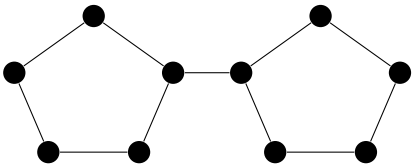
I fall 2 svarar vi likt då grafen är $G(l_1, l_2)$ men där vi svarar 1 då det sista lövet som endast är kopplat till center i $K_{1,2}$ frågas först. Detta fallet blir en eller-sats mellan en diktatorfunktion och f på K_{1,l_2}, vilket är undflyende enligt Proposition 5.9 och resultatet ovan. Notera att då ett annat löv frågas först måste vi svara 0, vilket gör att vi antingen är i samma fall eller i fall 4. Men fall 4 är en väg på 5 vertex vilket ger att både fall 2 och 4 är undflyende enligt Lemma 5.8. Resultatet följer nu.

□

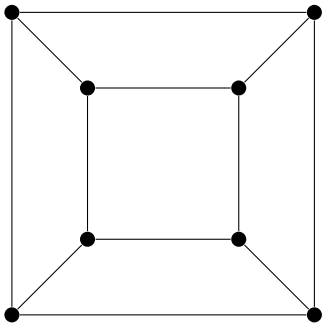
C Figurer



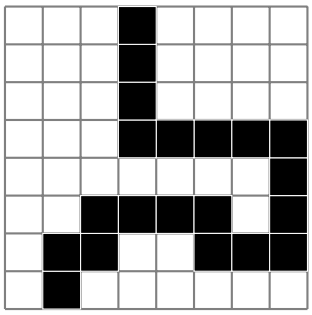
Figur C.1: Exempel på en graf med 8 vertex och 6 kanter.



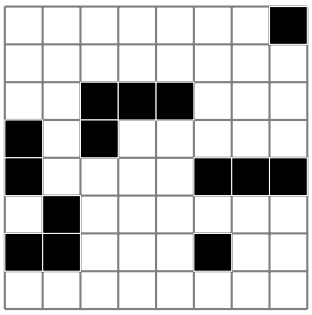
Figur C.2: Exempel på graf vart Proposition 5.12 är tillämpbar. Här är $k = l = 5$.



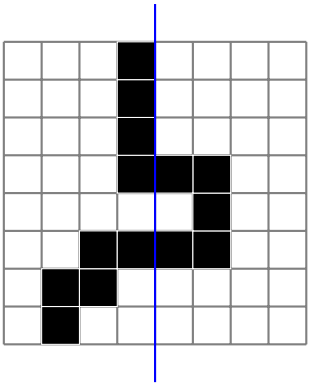
Figur C.3: Grafen i Proposition 5.15.



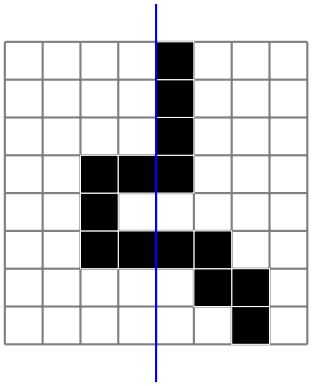
Figur C.4: En konfiguration som ger värdet 1 på den booleska funktionen f som beskrivs i Exempel 5.1.



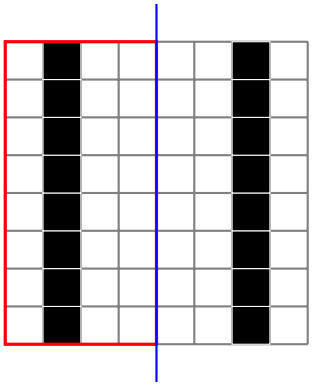
Figur C.5: En konfiguration som ger värdet 0 på den booleska funktionen f som beskrivs i Exempel 5.1.



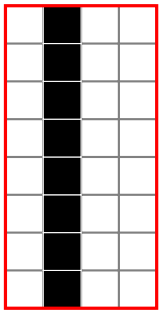
Figur C.6: En asymmetrisk lösning som är en speglad version av lösningen i Figur C.7.



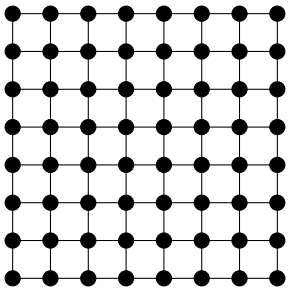
Figur C.7: En asymmetrisk lösning som är en speglad version av lösningen i Figur C.6.



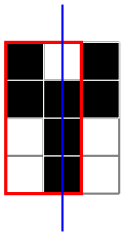
Figur C.8: En symmetrisk lösning för ett 8×8-bräde.



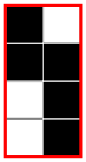
Figur C.9: En lösning för ett 8×4-bräde (vänster sida av ett 8×8-bräde).



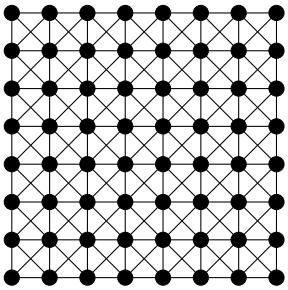
Figur C.10: Schackbräde representerat som graf.



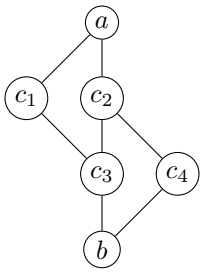
Figur C.11: En symmetrisk lösning för ett 4×3-bräde.



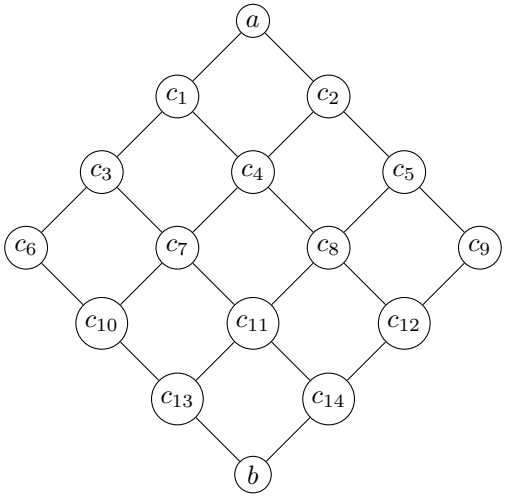
Figur C.12: En lösning för ett 4×2-bräde (vänster sida av ett 4×3-bräde inklusive mittkolumn).



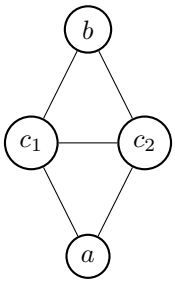
Figur C.13: Schackbräde representerat som graf med diagonala steg.



Figur C.14: Första motexemplet på ACB-problemet på vertex.



Figur C.15: Underliggande graf till modifierade schackbrädes-funktionen.



Figur C.16: D-grafen.