GÖTEBORGS UNIVERSITET

En gåtfull siffra

En studie om nollans historia och division med noll

Agnes Hallberg, Isabel Hillestrand och Fatimah Muhsin
Ämneslärarprogrammet årskurs 7-9 med inriktning mot matematik

Examensarbete:	15 hp
Kurs:	L9MA2A
Termin/år:	VT/2025
Handledare:	Carl-Joar Karlsson
Examinator:	Johanna Pejlare

Nyckelord: division med noll, matematikhistoria, nollans historia, svårigheter och missförstånd, undervisning

Sammanfattning

Denna litteraturstudie syftar till att undersöka nollans historiska utveckling samt lärares, lärarstudenters och elevers förståelse av division med noll. Fortsättningsvis behandlas frågan om matematikhistoria kan användas i undervisningen för att gynna elevers förståelse för noll och division med noll. Materialet utgörs av vetenskapliga artiklar, svenska matematikläroböcker för mellan- och högstadiet samt den svenska läroplanen [Lgr22]. Metoden är en kvalitativ litteraturstudie som innefattar historisk granskning, analys av didaktiska studier och en läroboksundersökning. Inledningsvis kartläggs den historiska utvecklingen av nollan, från dess tidiga användning som platsmarkör hos babylonierna och i mayakulturens kalendermatematik till dess erkännande som ett självständigt tal i det hindu-arabiska talsystemet. Vidare fokuserar studiens resultat på att identifiera olika förklaringsmodeller och missförstånd kring division med noll bland lärare, lärarstudenter och elever. Fem olika förklaringsmodeller identifieras för hur division med noll i nämnaren tolkas. Dessa fem är följande: att kvoten blir ett tal, att den blir noll, att den blir oändlig, att operationen är omöjlig, eller att den är odefinierad. Slutligen presenterar resultatet om matematikhistoria kan ge en pedagogisk vinst i undervisningen i matematik. Vidare diskuteras matematikhistoriens potentiella bidrag och risker för förståelsen av noll och division med noll i undervisningen. Diskussionen inkluderar även en analys av hur historiska talsystem, naturliga tal och division med noll presenteras i svenska läroböcker i matematik, i förhållande till läroplanen [Lgr22]. Slutligen föreslås konceptuella undervisningsstrategier som bygger på sambandet mellan multiplikation och division samt gränsvärdesbegreppet för att förklara varför division med noll är odefinierad.

Förord

I vårt arbete har vi strävat efter att kritiskt granska och sammanställa information från olika källor för att skapa en övergripande bild av forskning inom området. Från detta arbete tar vi med oss viktiga insikter i hur vi kan hantera noll och division med noll i vår framtida roll som ämneslärare i matematik. Ett varmt tack riktas till vår handledare Carl-Joar Karlsson vars engagemang, vägledning och konstruktiva återkoppling har varit värdefull under hela processen med detta examensarbete.

Innehållsförteckning

1 Inledning

Talet noll stöter vi på dagligen. Den förekommer i telefonnummer, används vid avrundning och finns på såväl prislappar som tidtabeller. När lärare, lärarstudenter och elever stöter på noll i matematiken kan det ändå bidra till stor förvirring. Att addera eller subtrahera noll i matematiska räkneoperationer känns intuitivt, men vad händer egentligen när vi försöker dividera med noll? Matematiker, fysiker och filosofer har genom historien brottats med nollan som ett tal och operationen *division med noll* [1]. Svårigheter med division med noll kan ha sin grund i förståelsen av nollan som koncept, som har utvecklats genom historien. Från att först vara frånvarande i talsystem har noll kommit att fungera som en utfyllnad, en platsmarkör och en viktig komponent i kalendermatematik. Slutligen har den blivit en integrerad del av vårt talsystem och erkänd som ett självständigt tal som också fört aritmetiken och algebrans utveckling framåt.

I skolvärlden är bråk ett område som kan vara svårt att förstå. Clarke, Roche och Mitchell (2010) diskuterar att bråk är ett utmanande område att såväl undervisa om som att lära sig. Under vår verksamhetsförlagda utbildning, VFU, i lärarutbildningen har vi som författare till denna litteraturstudie observerat elever och lärare som bekräftar svårigheterna med bråk och division. Vid undervisning av division förekommer ofta konkreta argument där man delar upp exempelvis pizzor eller chokladkakor. Vi kom därför att fundera över hur elever skulle hantera division då exempel med noll förekommer, när man inte kan förlita sig på det synliga och konkreta. Där siffran noll blir representant för *ingenting*. Detta är ett fenomen vi inte stött på under våra VFU-perioder då det sällan presenteras i läroböcker. Vidare ville vi undersöka hur eleverna tänker och resonerar vid division med noll. Under våra VFU-perioder på lärarutbildningen har vi sett ett tydligt mönster att elever gärna förhåller sig till formler och regler som skrivs ut i läroböcker eller ges av läraren. Exempelvis kan eleverna när de räknat en uppgift hitta svaret längst bak i läroboken. Har de rätt är de nöjda medan om de har fel ifrågasätter hur de hanterat räkneregeln. Detta väckte för oss en fråga för hur elever tänker vid division med noll i nämnaren eftersom kvoten inte blir ett numeriskt tal utan blir odefinierad. Artiklar som analyseras i denna litteraturstudie presenterar resultat där regelbaserade förklaringar ofta förekommer. Att elever och lärare använder regelbaserade förklaringar samt fysiska modeller för att beskriva bråk blir problematiskt när divisionen innehåller noll i nämnaren. Resultaten av litteraturstudien pekar på att fysiska modeller kan ge en intuitiv förståelse och en överdriven tilltro som kan hindra förståelsen av abstrakta matematiska begrepp som division med noll.

Vi som framtida matematiklärare behöver stor förståelse för division med noll för att kunna förklara det utan konkreta argument eller fysiska modeller så att eleverna utvecklar en större konceptuell förståelse för division med noll. I dessa situationer blir det centralt att koppla undervisningen till kursplanen i matematik där det under det centrala innehållet för årskurs 7 till 9 står "Rimlighetsbedömning vid uppskattningar och beräkningar." (Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet [Lgr22], 2022, s. 57). Eleverna behöver ges utrymme att diskutera och förstå varför vissa operationer inte fungerar med de matematiska regler vi använder idag. Litteraturstudien har identifierat fem olika förklaringsmodeller för hur division med noll i nämnaren tolkas av lärare, lärarstudenter och elever. Dessa fem är följande: att kvoten blir ett tal, att den blir noll, att den blir oändlig, att operationen är omöjlig, eller att den är odefinierad.

[1] I denna studie avses *division med noll* till en division då nollan är i nämnaren om inget annat anges.

Utöver den historiska utvecklingen av noll samt lärare, lärarstudenter och elevers förståelse av division med noll, är en av frågeställningarna som undersöks i denna litteraturstudie huruvida en historisk implementering i undervisningen kan ge en pedagogisk vinst. I svensk undervisning, som härleds av läroplanen (Lgr22, 2022, s. 54), nämns följande:

> Undervisningen ska ge eleverna förutsättningar att utveckla kunskaper om historiska sammanhang där viktiga begrepp och metoder i matematiken har utvecklats. Genom undervisningen ska eleverna även ges möjligheter att reflektera över matematikens betydelse, användning och begränsning i vardagslivet, i andra skolämnen och under historiska skeenden och därigenom kunna se matematikens sammanhang och relevans.

Syftet för denna litteraturstudie samt hur artiklar har valts ut presenteras i kapitel 2 respektive kapitel 3. Denna litteraturstudie kommer i avsnitt 4.1, 4.2 och 4.3 att granska den historiska utvecklingen av nollans betydelse inom matematiken. Det innefattar utvecklingen av noll som symbol, som siffra och tal samt den konceptuella förståelsen av talet noll genom historien. Därefter kommer i kapitel 5 resultatet av studier gjorda på lärare, lärarstudenter och elever att undersökas för att ge en bild av förståelsen för division med noll inom skolvärlden. I avsnitt 5.2 redogörs det för fem olika förklaringsmodeller till division med noll från lärare, lärarstudenter och elever. Vidare i avsnitt 5.3 till 5.6 kommer missförstånd, svårigheter samt felaktiga och korrekta förklaringar att presenteras. Kapitel 5 innehåller också resultat från studierna om hur hur längden av lärares yrkeserfarenhet påverkar undervisningen av division med noll i avsnitt 5.7, didaktiska undervisningsstrategier i avsnitt 5.8 samt hur inlärning påverkas av förståelsen av talet noll i avsnitt 5.9. Kapitlet avslutas med en genomgång av hur historiska talsystem, naturliga tal och division med noll representeras i svenska läroböcker från vår läroboksundersökning i avsnitt 5.10. I kapitel 6 kommer implementeringen av matematikhistoria i undervisningen att undersökas och diskuteras mer djupgående i det avslutande kapitlet av denna litteraturstudie.

2 Syfte

Syftet med litteraturstudien är att undersöka begreppet noll och division med noll ur ett historiskt respektive matematikdidaktiskt perspektiv. Litteraturstudien besvarar tre huvudsakliga frågeställningar: en om nollans matematiska utveckling, en didaktisk om förståelse och hantering av division med noll, och en som sammanbinder dem om huruvida historiska inslag kan stödja elevers lärande. Frågeställningarna formuleras enligt nedan:

- Hur har nollans symbol, dess användning som siffra och tal samt den konceptuella förståelsen av noll utvecklats genom historien?
- Vilka förklaringsmodeller finns det för division med noll bland matematiklärare, lärarstudenter och elever samt vilka vanliga svårigheter och missförstånd möter elever i samband med detta?
- Finns det någon pedagogisk vinst med att anlägga ett historiskt perspektiv av noll och division med noll i undervisningen?

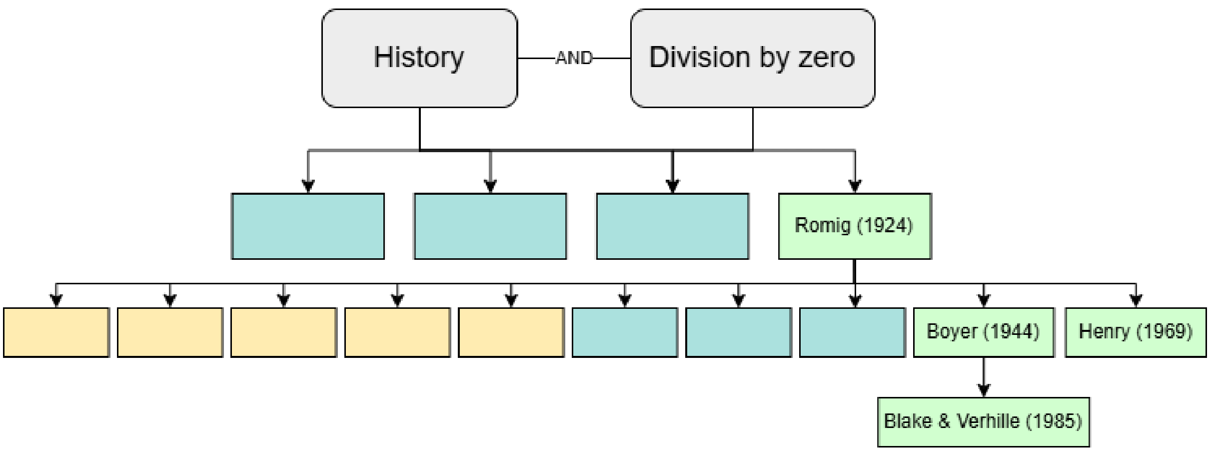
3 Material och metod

Detta kapitel beskriver tillvägagångssättet för litteraturstudien. Studien bygger på en kombination av systematiska databassökningar och snöbollsurval för att identifiera relevanta vetenskapliga artiklar. För att analysera undervisningspraktiker har en genomgång av svenska läroböcker genomförts. Datainsamlingen baseras på källkritiska principer med fokus på äkthet, relevans och vetenskaplig granskning.

3.1 Metod för den historiska frågeställningen om nollans utveckling

Genom instruktionerna till denna litteraturstudie som självständigt arbete hänvisade kursledare Johanna Pejlare till en webbsida som skrev om historien bakom noll, skriven av O'Connor och Robertson (2000a). Denna webbsida innehöll historisk fakta om utvecklingen av noll samt division med noll. O'Connor och Robertson (2000a) hänvisade till en annan av sina texter om den mayanska matematiken (O'Connor och Robertson, 2000b) samt refererade till en bok *The Nothing That is: A Natural History of Zero* skriven av Kaplan (1999) som vi lånade från Göteborgs universitetsbibliotek. Författaren till boken undervisade i matematik på Oxford University. Denna metod av urval, ett så kallat snöbollsurval, innebär att vi har hittat relevanta artiklar i referenslistor till de redan valda artiklarna.

Vi gjorde därefter en sökning i Göteborgs universitets databas supersök. Vi angav sökorden: "history" och "division by zero" i block med AND-funktionen. Sökningen gav fyra träffar där vi läste alla fyra artiklarnas abstract men valde en av dem, Romig (1924), som var peer-rewied enligt supersök. Vid läsning av Romig (1924) från Journal Storage (JSTOR) hänvisade den databasen till tio relaterade artiklar där vi läste abstract av fem och valde två peer-rewied artiklar som var relevanta till vårt studerade område: den historiska utvecklingen av noll och division med noll. Dessa två artiklar var Boyer (1944) och Henry (1969) som analyserades i den didaktiska delen, se tabell 2 och 3. När vi läste Boyer (1944) fann vi en refererad artikel skriven av Blake och Verhille (1985). Flera av dessa artiklar refererar till varandra och på så sätt får de starkare äkthet, som är en av de källkritiska aspekterna. I figur 1 nedan illustreras hur vi hittade artiklarna genom sökningen. De blåa visar antalet abstract som lästes, de gula visar artiklar som inte var relevanta för syftet med denna studie och de gröna rutorna visar de vi valde.



Figur 1. Illustration av kedjan från sökorden i databasen till artiklar som valdes.

3.2 Sökningar i databaser för den didaktiska frågeställningen

För att undersöka litteratur i databaser formade vi en sökning som inkluderade alla typer av böjningar och bindningar av uttrycket *division med noll* för att inkludera så många artiklar som möjligt. Det visade sig snabbt att det inte är ett välutforskat område då artiklar som inkluderar division med noll inte fick många antal träffar, se tabell 1. Det bidrog i sin tur till att många av artiklarna refererade till varandra. Vi begränsade de lästa artiklarna till studier som genomförts på lärare, lärarstudenter och elever i motsvarande mellan- och högstadiet. Se tabell nedan för fullständig redogörelse av databassökningar. Utöver dessa artiklar analyserades Skolverkets läroplan för grundskolan (Lgr22, 2022). Detta gjordes för att undersöka hur begreppet noll och division med noll ska behandlas i matematikundervisning i skolan.

Tabell 1

Tabellen beskriver vilken databas och sökord som användes samt hur många träffar sökningen fick. Tabellen visar också hur många av träffarna vars abstract lästes, hur många av artiklarna som granskats översiktligt och till sist vilka artiklar som valdes.

Tabell över sökningar med valda artiklar					
Databas	**Sökord**	**Antal träffar**	**Antal lästa abstract**	**Antal översiktligt granskade publikationer**	**Antal utvalda publikationer**
ERIC	"division by zero" OR "dividing by zero" OR "divisions by zero" OR "division by zero's" OR "divisions by zero's" OR "divide by zero" OR "dividing with zero"	26	25	10	5 (Karakus & Aydin, 2019; Crespo & Nicol, 2006; Quinn m.fl., 2008; Tsamir & Sheffer, 2000; Juter, 2022)
Supersök	"division by zero" OR "dividing by zero" OR "divisions by zero" OR "division by zero's" OR "divisions by zero's" OR "divide by zero" OR "dividing with zero" AND "education"	20 (varav 4 redan valda)	16	4	2 (Lajoie & Mura, 1998; Juter, 2019)
ERIC	"concrete representations" OR "concrete representation" AND "division"	10	3	0	0
Scopus	"divide by zero" OR "division by zero" AND "education"	8 (varav 2 redan valda)	1	0	0
ERIC	"natural numbers" AND "zero"	9	3	1	0

3.2.1 Snöbollsurval som metod för den didaktiska frågeställningen

Likt metoden för att söka artiklar till frågeställningen om historian bakom noll använde vi oss delvis av ett snöbollsurval. I Karakus och Aydins (2019) studie hänvisas det till två relevanta artiklar som vi inkluderade i denna litteraturstudie. Dessa två var Ball (1990) och Wheeler och Feghali (1983). Vid läsning av Wheeler och Feghali (1983) fann vi Grouws och Reys (1975b) studie och i referenslistan till Tsamir och Sheffers (2000) artikel fann vi Grouws och Reys (1975a) som också genomförde en studie på elever, likt Tsamir och Sheffer (2000). Artiklarna kompletterade tidigare valda artiklarna, se tabell 1.

Till den didaktiska frågeställningen, *vilka förklaringsmodeller finns det för division med noll bland matematiklärare, lärarstudenter och elever samt vilka vanliga svårigheter och missförstånd möter elever i samband med detta?*, var nästan alla artiklar som studerades i denna litteraturstudie peer-reviewed. Grouws och Reys (1975a) och Grouws och Reys (1975b) var inte peer-reviewed, men de har citerats 17 respektive 42 gånger enligt Google Scholar (2025-03-31) samt refererades till i Tsamir och Sheffer (2000) respektive Wheeler och Feghali (1983) och är därför inkluderade i litteraturstudien.

3.3 Metod för frågeställningen om historisk implementering i undervisningen

För att undersöka hur samarbetet med den historiska utvecklingen av noll och förståelsen för division med noll i undervisningen kan fungera eller inte användes Bråting och Pejlare (2015) studie. Det var i början av denna litteraturstudie som Johanna Pejlare (personlig kommunikation, 21 februari, 2025) beskrev studien som diskuterar hur implementeringen av matematikhistoriska inslag i undervisningen kan bidra till att eleverna skapar en större förståelse för ämnet eller inte. Denna beskrivning skapade nyfikenhet hos oss där vi ville undersöka specifikt om historia om noll kan vara fördelaktigt för elever vid undervisning om division med noll. Historia om noll i undervisning är även något som Blake och Verhille (1985) diskuterar med fokus på hur ordet, siffran och talet blandas i vardagligt språk och vardagliga sammanhang samt hur det kan bidra till svårigheter för elever i matematikundervisningen.

3.4 Läroboksundersökning

Nationellt centrum för matematikutbildning, NCM, har ett bibliotek med bland annat ett stort urval av svenska läroböcker inom matematik. Vi gjorde ett besök där för att undersöka hur läroböckerna i mellan- och högstadiet tar upp och behandlar: historiska talsystem med noll, definition av naturliga tal samt division med noll i täljaren eller nämnaren, se tabell 4. Undersökningen av hur läroböcker behandlar och presenterar naturliga tal är relevant för litteraturstudien då det centrala innehållet i kursplanen i matematik för årskurs 4 till 6, säger att eleverna ska utveckla kunskaper om "De fyra räknesätten och regler för deras användning vid beräkningar med naturliga tal" samt "Metoder för beräkningar med naturliga tal och enkla tal i bråk- och decimalform vid överslagsräkning, huvudräkning och skriftlig beräkning" (Lgr22, 2022, s. 57). Detta var relevant för att undersöka om läroböckerna inkluderade talet noll som ett naturligt tal eller inte.

4 Historisk utveckling av noll

I detta kapitel utforskas den historiska utvecklingen av noll och dess roll i matematikens värld. Kapitlet inleds med noll som symbol och siffra först användes som platsmarkör och funktion inom kalendermatematik. Vidare redogörs det för den historiska utvecklingen av noll från siffra till ett tal och dess värde. Slutligen presenteras den konceptuella förståelsen av talet noll och de många matematiska utmaningarna som har uppstått genom historien, särskilt när det gäller operationer som involverar division med noll.

4.1 Nollans representativa symbol genom historien

Följande avsnitt utforskar nollans utveckling som symbol genom olika kulturer och historiska perioder. Det belyser hur nollans symbol har förändrats till att få den cirkulära form som vi använder idag.

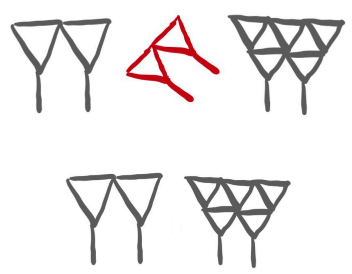
4.1.1 Babyloniernas användning av noll som platsmarkör

Från tidig användning som platsmarkör till den fullständiga utvecklingen av noll som ett tal i matematiken, har nollans symbol genomgått betydande förändringar i olika kulturer och kontexter genom historien (O'Connor & Robertson, 2000a). En av de tidigaste civilisationerna, babylonierna, hade omkring år 1700 f.Kr. ingen särskild symbol för att markera tomma positioner i sitt sexagesimala talsystem med bas 60. Istället förlitade de sig på kontexten för att korrekt tolka talen. Trots avsaknaden av en symbol ledde detta inte till några större missförstånd. Exempel på tal som utan en notation för noll skulle se likadana ut är talen 125 och 7205. I det sexagesimala talsystemet skulle det skrivas som följande:

$$7205_{10} = 205_{60} = 2 \cdot 60^2 + 0 \cdot 60^1 + 5 \cdot 60^0$$

$$125_{10} = 25_{60} = 2 \cdot 60^1 + 5 \cdot 60^0$$

Det som skiljer är alltså en term med en multiplikation innehållande noll. Utan att skriva ut den termen skulle talen skrivas exakt likadant. Men eftersom sammanhanget gav tillräcklig information kunde de förstås korrekt utan förvirring. Det var inte förrän omkring år 400 f.Kr. som babylonierna började använda särskilda symboler för att markera tomma positioner. Dessa var i form av två sneda kilformade symboler, se figur 2.

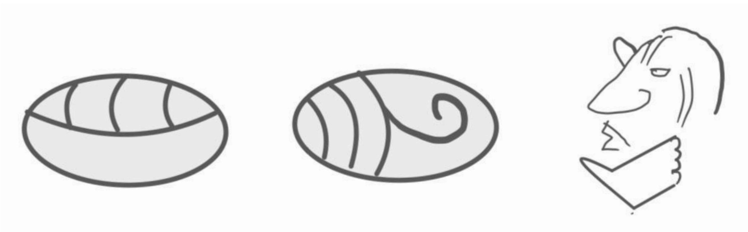


Figur 2. Figuren visar två tal där det översta talet 7205 i babyloniernas motsvarighet, 205_{60}. Den tomma positionen representeras av två sneda kilformade symboler, markerade i rött. Talet har basen 60 och är beräknat enligt följande: $2 \cdot 60^2 + 0 \cdot 60^1 + 5 \cdot 60^0$. Det nedre talet $125 = 25_{60}$ beskriver hur det ser ut utan den tomma positionen och beräknas enligt: $2 \cdot 60^1 + 5 \cdot 60^0$. Båda talen skrevs ut som det nedre talet innan de började använda en symbol för att markera en tom position.

Senare användes tre sneda kilformade symboler på en lertavla från Kish, en forntida mesopotamisk stad, medan andra tavlor från samma period visade en enda sned kilformad symbol. Ett gemensamt drag för dessa symboler var att de aldrig placerades i slutet av ett tal utan endast mellan två siffror, vilket antyder att babylonierna fortfarande förlitade sig på kontexten för att förstå det exakta värdet av större tal (O'Connor & Robertson, 2000a). Exempelvis hade talen i vårt tiobassystem 1 080 000 och 5 skrivits precis likadant, med endast fem stycken kilar, $5 \cdot 60^3$ och $5 \cdot 60^0$. Babylonierna kunde ändå med hjälp av kontexten förstå vilket av talen som det syftades på.

4.1.2 Nollans roll i mayakulturens kalendermatematik

I en annan del av världen, i den forntida mayacivilisationen cirka år 400 e.Kr., utvecklades också en symbol för noll i deras vigesimala talsystem med bas 20. Det var dock i en helt annan form än de babyloniska tecknen. Kaplan (1999) beskriver hur mayafolkets nollsymbol skiljde sig från det tidigare exempel genom sin tydliga form och återkommande användning. Symbolen var ofta cirkelformad, men kunde också förekomma i andra stiliserade former, såsom ansikten eller snäckskal, se figur 3. Symbolerna var avgörande för deras kalendermatematik och möjliggjorde exakta astronomiska och kronologiska beräkningar (Boyer, 1944).

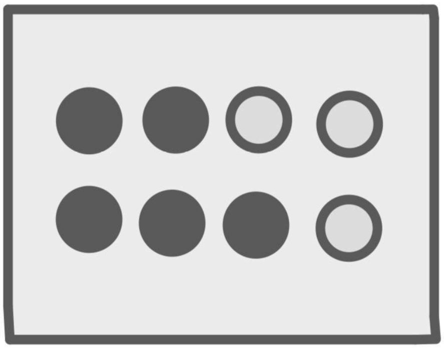


Figur 3. I figuren visas tre exempel på symbolen för noll enligt mayakulturen. Figuren är inspirerad av Kaplan (1999, s. 82).

Istället för att antyda ett tomt värde enbart genom kontext, som babylonierna ofta gjorde, markerade mayafolket det explicit med sina unika symboler. Symbolerna var särskilt viktiga i deras kalender, där de noggrant räknade tid genom att ange exakta tidsavstånd från en fast nollpunkt. Både Boyer (1944) och Kaplan (1999) lyfter fram att dessa symboler hade en djupare betydelse utöver sin matematiska kalenderfunktion. Den användes till och med för att markera den första dagen i varje månad, vilket antyder att mayafolket inte bara såg noll som en tom plats utan som en aktiv del av tidens gång.

4.1.3 Ursprung och utveckling av den cirkulära symbolen

Enligt Kaplan (1999) är den vanligaste teorin att ursprunget för den cirkulära symbolen för noll kommer från antikens Grekland. Grekerna fick enligt teorin inspiration av ordet *οὐδέν*, som betyder *ingenting*. Dock skriver Kaplan (1999) att den teorin avslås av en person, vars titel Kaplan (1999) beskriver som *leading authority on greek astronomical texts*, att den symbolen användes till omikron som hade värdet 70 för grekerna. Kaplan (1999) beskriver däremot att cirkeln som symbol för noll troligen har sitt ursprung i den så kallade *sandlåde-teorin*. Enligt denna teori använde indiska matematiker, cirka 500 e.Kr., stenar på räknebrädor placerade i sand. När en sten lyftes bort lämnade den ett cirkulärt avtryck, vilket så småningom blev en representation för en tom mängd. Rent bildligt talat är symbolen precis som när man lämnar en tom plats efter att ha lyft bort stenen, se figur 4. Denna cirkulära form utvecklades senare till en symbol för noll i det indiska talsystemet.



Figur 4. Figuren ska representera en sandlåda där det, enligt sandlåde-teorin, bildades en cirkulär symbol när en sten lyftes upp och lämnade en tom plats. Symbolen som uppstod var en tidig representation för noll i det indiska talsystemet.

I senare tid, när den arabiska kulturen tog efter det indiska talsystemet, liknade den cirkulära nollan arabiskans symbol för siffran fem, ○. För att undvika förväxling fick nollan istället en prick som symbol (Blake & Verhille, 1985). I TV-programmet *Den nödvändiga nollan* av Sveriges Television (2023) och i Boyers (1944) artikel nämns det att när de arabiska siffrorna introducerades i Europa av den italienske matematikern Fibonacci på 1200-talet, mötte noll till en början motstånd. Motståndet berodde på att det romerska talsystemet som då var aktuellt i Europa inte hade någon symbolisk motsvarighet för noll. Det dröjde innan noll accepterades som en integrerad del av matematiken i Europa och fick sin egen symbol, vilken används än idag (Boyer, 1944).

4.2 Historiska utvecklingen av noll från siffra till tal

Följande avsnitt redogör för hur historiska civilisationer har hanterat noll som siffra och hur utvecklingen av noll gått från att vara en symbol som representerar en tom plats, till att bli ett etablerat tal med ett specifikt numeriskt värde.

4.2.1 Nollans roll i positionssystem

De symboler som nämnts i tidigare avsnitt förekom först för att representera tomma platser i tal. Boyer (1944) förklarar att babylonierna och dess kilformade symboler i deras sexagesimala talsystem var det första exemplet på ett positionssystem som införde det efter många år utan. De hade i tidigare fall inte haft något behov av en symbol, då så kallade *tomma platser* i ett system med basen 60 väldigt sällan förekom. Runt år 400 f.Kr. kom detta att ändras och symbolen lades till, vilket skulle kunna tolkas som den första användningen av noll. Med tanke på syftet med symbolen, att den representerar just en *tom plats*, behöver den finna sig mellan två tal för att kunna tydas (Boyer, 1944). Exempelvis skulle babylonierna skriva talet $18\ 023_{10}$ som:

$$5 \cdot 60^2 + 0 \cdot 60^1 + 23 \cdot 60^0$$

där $0 \cdot 60^1$ representeras av så kallade sneda kilformade symboler. Detta kan liknas med dagens talsystem där nollan i $18\ 023$ motsvarar att det är *tomt* på hundratals-positionen.

Mayakulturens vigesimala talsystem, baserat på talet 20, utmärkte sig genom användningen av flera olika symboler för att markera tomma positioner snarare än en enhetlig symbol för noll. Trots variationen i symbolernas utseende fyllde de alla samma funktion: att indikera frånvaron av ett värde i en viss position (Boyer, 1944). Talsystemets variationer och bristande regelbundenhet kan till stor del förstås i relation till den specifika kalenderlogik som mayafolket tillämpade. Som O'Connor och Robertson (2000b) förklarar räknade mayakalendern dagar från 0 till 19, vilket bidrog till att nollan fick en specifik och framträdande roll i just kalendersammanhang.

Grekerna hade inte ett talsystem likt babylonierna eller mayafolket men kom att ta inspiration av det sexagesimala talsystemet när det kom till bråkdelar inom astronomin (Boyer, 1944). Med detta kom också systemet med en symbol för tomma platser. För grekerna blev detta symbolen o.

Det var i Indien som det talsystem vi använder idag med såväl positionssystem som funktionen av noll som tal växt fram (Blake & Verhille, 1985). Först med den indiska matematikens utveckling omkring 500 e.Kr. kom en verklig förståelse av noll som ett självständigt numeriskt värde, vilket lade grunden för det moderna talsystemet, med basen 10 (SVT, 2023). Senare under medeltiden kom araberna att sprida dem till Europa (Boyer, 1944). Det var dock inte förrän på 1800-talet som tiobassystemet blev normen runtom i Europa (Blake & Verhille, 1985). O'Connor och Robertson (2000a) beskriver att det finns flertalet källor som pekar på att även Kina tog del av positionssystemet, med basen 10. Talsystemet härstammar egentligen från Indien, men det spreds till Europa genom religionen Islam. Eftersom Islams officiella språk är arabiska, blev det känt som det arabiska talsystemet. Ursprunget är dock från Indien och idag beskrivs det som det hindu-arabiska talsystemet (SVT, 2023).

4.2.2 Från symbol och siffra till tal

Blake och Verhille (1985) redogör att med det hindu-arabiska systemet kom det fler möjligheter för aritmetik inom matematiken. Nollans funktion utvecklades från en enbart numerisk platsmarkör till en fundamental komponent inom matematiska operationer, vilket möjliggjorde abstrakta beräkningar bortom konkret uppräkning och etablerade grunden för algebraiska metoder.

Till en början har nollans roll, precis som hos babylonierna eller mayafolket, varit för att positionellt markera en tom plats. Detta har man kommit fram till då man vid uppräkning placerar nollan efter siffran nio, alltså som den tionde siffran i ordningen, istället för framför ettan, som den första siffran i ordningen (Boyer, 1944). Enligt O'Connor och Robertson (2000a) är den tidigaste säkra källan som använder noll som ett tal från år 876 e.Kr. Det är en lertavla som föreställer en uträkning för antalet blommor på en äng som kan skänkas till det lokala templet. Tal som 50 och 270 framkommer på lertavlan och där skrivs alltså nollorna ut även om de är i slutet av talen. Al-Khawarizmi, en persisk matematiker som levde på 800-talet e.Kr., beskrev det hindu-arabiska talsystemet och erkände samtliga siffror: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 och 0 (O'Connor & Robertson, 2000a).

Att nollan så länge undgick grekerna hade att göra med deras uppfattning om den matematiska världen (Blake & Verhille, 1985). Grekerna hade svårt för det abstrakta och valde att hålla sig till det konkreta. Deras matematik grundades i geometri (O'Connor & Robertson, 2000a). Endast tal som gick att representera med hjälp av geometri och linjer var av värde. Därav ansågs inte noll och negativa tal ha någon mening. Boyer (1944) påpekar att grekerna förstod både konceptet och symbolen för noll, men ansåg ändå att det var utan mening att betrakta noll som ett självständigt tal.

Till följd av hindu-arabiska talsystemets spridning var det flera historiska matematiker som började utföra aritmetiska beräkningar med talet noll. Många av beräkningarna och antaganden var korrekta men det fanns flera svårigheter med hanteringen av noll. Brahmagupta, en indisk matematiker från 600-talet e.Kr., var en av de första att systematiskt beskriva användningen av noll i matematiska beräkningar, särskilt med addition, subtraktion och multiplikation. Han fann dock svårigheter med beräkningar av division som involverade noll, något som vi får anledning att återkomma till i kapitel 5 (SVT, 2023; O'Connor & Robertson, 2000a). Brahmagupta beskrev även nollan som ett tal på tallinjen mellan de negativa och positiva talen. Detta var avgörande för utvecklingen av det hindu-arabiska talsystemet (SVT, 2023). I Europa spelade Fibonacci en stor roll i att införa nollan som en symbol. Han hade svårt att acceptera noll som en av de andra siffrorna och beskrev noll som ett tecken istället för ett tal. O'Connor och Robertson (2000a) förklarar hur det bidrog till att han inte kunde nå samma resultat eller förklaringar i sina beräkningar. Detta skilde honom från de indiska och arabiska matematikerna som behandlar noll likt de andra talen.

Idag betraktas nollan som ett tal med ett värde. När den dyker upp mitt i tal representerar den inte bara en *tom plats* vilket man ansåg förr. Den har också funktionen som ersättare eller utfyllnad för tal vi inte har något exakt värde för. Henry (1969) ger ett exempel på hur utfyllnad för tal används när vi avrundar till miljontal. Om talet är 93 000 000 skulle det utan nollor endast skrivas som 93 miljoner. Här fungerar alltså nollorna som utfyllnad, vid avrundningar ersätter nollorna de ursprungliga siffrorna som exempelvis kan vara 93 127 904. I detta exemplet från Henry (1969) visar han tydligt hur nollorna bidrar till en förståelse för om talet tolkas som ett miljontal och inte som till exempel ett tusental. Nollan är alltså inte heller, i vår tid, entydig till sin funktion även om det skiljer sig från den historiska användningen. I det icke avrundade exemplet ovan finns även noll med inuti talet som visar att talet inte har något tiotal.

4.2.3 Ursprung av ordet *noll*

Det vi idag språkligt kallar noll har växt fram med tiden. Från 300-400 e.Kr. finns det indiska skrifter som visar på användandet av ordet för tomhet, *sunya*, samt ordet för punkt, *bindu*. Tillsammans bildade de uttrycket *sunya-bindu* som kan översättas till *en punkt som markerar en tom plats* (Blake & Verhille, 1985). Araberna, som anammade indiernas system såväl för position som för användningen av noll, översatte ordet till *as-sifr* eller *sifr* som för dem betyder *tomhet*. När araberna spred kunskapen om noll i Europa översättattes det på latin till *zephirum* eller *sephyrum*. Detta kom med åren att förändras och leda upp till det som används idag inom engelskan, *zero* (Blake & Verhille, 1985). Latinet hade också ett annat ord som stod för *ingenting*, *null'us*. Det är därifrån *noll* fick sitt namn i svenskan som använts sedan år 1716 (Svenska Akademiens Ordböcker, 2021).

4.3 Den historiska konceptuella förståelsen av noll

Den historiska utvecklingen av symbolen och siffran samt talet noll ligger till grund för förståelsen av dess användning (Boyer, 1944). Som tidigare presenterats i kapitlet kan nollan användas som utfyllnad och som positionsmarkör (Henry, 1969). Nollans unika egenskaper har gett upphov till matematiska utmaningar, särskilt när det gäller division, där dess roll blir långt mer problematisk än i andra räkneoperationer.

Den historiska utvecklingen av division med noll menar Romig (1924) startar med den indiske matematikern Brahmagupta år 628 e.Kr. Enligt Romig (1924) kom Brahmagupta inte fram till något resultat vid sina försök att definiera division med noll. O'Connor och Robertson (2000a) beskriver dock att Brahmagupta gav ett resultat till att noll dividerat med noll ger kvoten noll. O'Connor och Robertson (2000a) redogör också för hur en annan indisk matematiker, Mahavira år 830 e.Kr., försöker sig på att definiera division med noll. Mahavira kommer fram till att talet som divideras med noll förblir oförändrat. Vidare i Romigs (1924) artikel konstaterar Bháskara, som likt Mahavira och Brahmagupta var en indisk matematiker, på 1100-talet e.Kr att kvoten till en division med noll är oändlig. Romig (1924) beskriver att det är först i mitten av 1600-talet som matematikern Wallis introducerar symbolen ∞, för oändligheten, och anger den som kvoten av en division med talet ett i täljaren och noll i nämnaren, det vill säga $1 \div 0 = \infty$ (Romig, 1924). Samtidigt som Wallis ger ovanstående förklaring till divisionen med noll påpekar han också att noll inte är ett tal. Han får medhåll av matematikerna Berkley och Landen som dessutom kallar nollan för *absolut ingenting.* Det var först i Berlin år 1828 som fysikern och matematikern Ohm helt och hållet utesluter möjligheten att använda noll som nämnare i en division (Romig, 1924). Ohm definierar division med noll genom att definiera noll som $\alpha - \alpha = 0$ och att kvoten av $a \div b$ multiplicerat med b ger a. Vidare citeras Ohm i Romigs artikel (1924, s. 388):

> "If *a* is not zero, but *b* is zero, then the quotient *a/b* has no meaning" for the quotient "multiplied by zero gives only zero and not *a*, as long as *a* is not zero"

Romig (1924) beskriver vidare att matematikern Farkas Bolyai, år 1832, presenterar att division med noll är en omöjlig operation och ger en förklaring till Wallis uttryck att $1 \div 0 = \infty$. Farkas Bolyai förklarar att kvoten blir oändlig om nämnaren närmar sig 0, det vill säga att om z går mot noll så kommer $1 \div z$ gå mot oändligheten, ∞. Däremot är operationen omöjlig då nämnaren är noll. Denna slutsats utgår från att han definierade 0 enligt $1 - 1 = 0$.

Boyer (1944) presenterar den troligtvis första referensen till det vi idag definierar division med noll som från lagar om rörelse skriven av den grekiska filosofen Aristoteles. Aristoteles beskriver att det inte finns något förhållande mellan noll och andra tal. Han refererar noll till vakuum och att det inte finns ett förhållande så att vakuumet överträffas av en kropp eller en massa. Boyer (1943) beskriver att Aristoteles, trots att han inte använde en symbol för noll utan istället skrev ordet *οὐδεν*, tänkte på den aritmetiska nollan utan att faktiskt definiera den. Aristoteles visar förståelse för att divisionen är omöjlig flera hundra år innan den indiske matematikern Bháskara beskriver den som oändlig (Boyer, 1944).

5 Didaktiska perspektiv på division med noll

Följande kapitel redogör för granskade studier och för division med noll i undervisningen. Olika förklaringsmodeller som lärare, lärarstudenter och elever använder sig av för att förklara olika svar till divisioner med noll i nämnaren beskrivs. Det redogörs vidare om vanliga missförstånd och didaktiska utmaningar med att undervisa om division med noll.

5.1 Redogörelse av granskade studier

Artiklar som har granskats i denna litteraturstudie presenteras i tabell 2 och tabell 3. Tabell 2 beskriver kort om vilket land artikelns studie är genomförd i, hur många lärare, lärarstudenter eller elever som deltog i studien samt beskrivning av grupperna. Tabell 3 beskriver hur många tillfällen då data har samlats in samt hur studien har genomförts, med skrivtester eller intervjuer.

Tabell 2

Nedanstående tabell beskriver länder, populationer och deltagare i de inkluderade studierna.

Tabell över artiklarnas land, population och deltagare			
Artikel	**Land**	**Population**	**Deltagare**
Juter (2019)	Sverige	**137**	Första gruppen: 105 blivande lärare mot låg- och mellanstadiet med grundläggande matematikbakgrund (Matematik B[2]). Andra gruppen: 32 studenter med bredare matematikbakgrund (Matematik D[2]), varav 24 från en teknisk utbildning och 4 från ämneslärarutbildningen.
Juter (2022)	Sverige	**78**	Blivande lärare för grundskolans mellanstadium, årskurs 4-6
Crespo och Nicol (2006)	USA och Kanada	**32**	Från kurs A: 18 lärarstudenter och från kurs B: 14 lärarstudenter.
Ball (1990)	USA	**19**	10 lärarstudenter med inriktning mot elementary school[3] och 9 lärarstudenter med inriktning mot secondary school[3]
Wheeler & Feghali (1983)	USA	**52**	52 lärarstudenter med inriktning mot elementary school
Tsamir & Sheffer (2000)	Israel	**153**	39 elever i årskurs 9, 58 elever i årskurs 10, 56 elever i årskurs 11
Karakus & Aydin (2019)	Turkiet	**82**	82 lärare med varierande lång yrkeserfarenhet
Quinn m.fl. (2008)	USA	**35**	35 lärare i elementary school
Grouws & Reys (1975a)	USA	**672**	Elever från årskurs 4, 6 och 8. Studien bestod av två lektionsupplägg. Första gruppen gick först igenom division och sedan den inversa multiplikationen, andra gruppen tvärtom.
Grouws & Reys (1975b)	USA	**~ 60**	Se raden för Grouws och Reys (1975a).
Lajoie & Mura (1998)	Kanada	**49**	Lärarstudenterna var inskrivna i kandidatprogrammet i förskole- och grundskolepedagogik.

[2] Matematik A-E, där matematik A är den första matematikkursen på gymnasienivå.
[3] Elementary school och secondary school används här eftersom en exakt motsvarighet i svenska skolan saknas.

Tabell 3
Nedanstående tabell sammanfattar metoderna som använts i de analyserade studierna.

Tabell över studiernas metod			
Artikel	**Datapunkter**	**Skrivtest**	**Intervju**
Juter (2019)	Ett tillfälle	14 påståenden varav tre är relaterade till division med noll, 4-6 i ordningen med svarsalternativen: agree, do not know eller disagree	
Juter (2022)	Två datainsamlings-perioder	Två tester. Första, Q1, efterfrågade lösning och förklaringsmodell till division med noll. Andra, Q2, en enkät med samma 14 påståenden som Juters tidigare studie från 2019.	Individuella kompletterande intervjuer med åtta studenter vid första tillfället och sex vid andra. De två som saknades vid andra intervjutillfället lämnade utbildningen.
Crespo och Nicol (2006)	Två olika tillfällen för de olika kurserna.	Skriftliga individuella svar på lösningsförslag och förklaring till en division med noll samt från kurs B samlades studenternas matematikjournaler in.	Inspelade gruppdiskussioner. Kurs A fick se en video och därefter individuellt, i grupp och i helklass analysera och diskutera. Kurs B fick individuellt, i grupp och i helklass analysera och diskutera samt fortsätta undersöka och skriva ner tankar i matematikjournaler.
Ball (1990)	Ett tillfälle.		Spelades in och transkriberades. Tre frågor med fokus på förklaring inom området division.
Wheeler & Feghali (1983)	Två tillfällen, ett för skrivtestet och ett för intervjun.	Använder samma divisionstest som Grouws och Reys (1975a) samt tre extra resonemangsfrågor.	Bestod av fyra kategorier med fokus på noll: 1: Nominal användning av noll, 2: matematisk användning av noll, 3: klassificiering och 4: fördelning.
Tsamir & Sheffer (2000)	Två tillfällen.	Tvådelad individuell skrivtest; 20 multiplikation och divisionsuppgifter där nollan är inkluderad, samt fem matematiska textpåståenden med division med noll	
Karakus & Aydin (2019)	Ett tillfälle.	Individuella skrivtest bestående av två frågor; vad är 7/0 respektive 0/0, och hur skulle du förklara det för dina elever?	
Quinn m.fl. (2008)	Ett tillfälle.	Individuell skrivtest med enbart en fråga: Hur hade du besvarat en elev som frågar vad 7 dividerat med noll är?	
Grouws & Reys (1975a)	Fyra tillfällen för alla elever: Ett förtest, en lektion, ett eftertest och ett uppsamlingstest. Direkt efter eftertestet intervjuades fyra elever per klass.	Tre tester med samma upplägg: 18 divisionsoperationer. Sex av dem utan noll, sex stycken med noll i täljaren och sex stycken med noll i nämnaren.	

Grouws & Reys (1975b)	Se raden för Grouws och Reys (1975a)		Fyra divisionsoperationer lästes upp av intervjuaren i bestämd ordning. Intervjuaren ställde följdfrågor för att få en tydlig bild av elevens förståelse. Frågorna liknade de som eleverna fått se under lektionen.
Lajoie & Mura (1998)	Två tillfällen	47 studenter skulle utvärdera två elevsvar och beskriva hur de skulle pedagogiskt vägleda utefter elevernas förklaringar	En videoinspelad intervju med ytterligare två blivande grundskollärare.

5.2 Fem olika förklaringsmodeller

I den didaktiska fördjupningen ligger fokus i denna litteraturstudie på huruvida operationen division med noll kan förklaras. Artiklar som inkluderas i denna litteraturstudie har kategoriserats till fem olika förklaringsmodeller till operationer av division med noll i nämnaren. Följande avsnitt analyserar studier på hur lärare, lärarstudenter och elever använder följande fem förklaringsmodeller för att förklara att division med noll blir: ett tal, noll, oändligt, är omöjligt eller odefinierat.

5.2.1 Division med noll blir *ett tal*

Det kan finnas en intuitiv föreställning om att alla matematiska operationer ska resultera i ett numeriskt tal. Detta leder till potentiella utmaningar för förståelsen att division med noll är odefinierad och inte ett tal.

Juters (2019) studie visade på stora skillnader mellan två grupper av lärarstudenter med olika förkunskaper och antagningskrav för utbildningarna. I den första gruppen med förkunskapskrav matematik B var det 69% som höll med om att division med noll blir ett tal medan i den andra gruppen med högre förkunskapskrav var det 28%. Det var 27% i den första gruppen som inte höll med om att division med noll blir ett tal och 66% i den andra gruppen. För ett av de 14 påståenden i studien, "Two divided by zero is a number" (Juter, 2019, s. 74), var det 5. 1% som inte visste om division med noll blir ett tal eller inte av alla 137 studenter. I Juters (2022) andra studie vid den första datainsamlingen, var det 50% som initialt gav svar som antydde att resultatet var ett tal, inklusive noll som ett specifikt tal i vissa resonemang inledningsvis. Till den andra datainsamlingen, var det två av de åtta lärarstudenter som stod fast vid att svaret på divisionen blev ett tal. Båda svarade 2, då det var det tal som stod i täljaren i påståendet. Att svaret till en division med noll i nämnaren besvaras med det tal som står i täljaren visar också studien av Crespo och Nicol (2006). Där svaret att divisionen $5 \div 0$ var lika med 5, ett tal, givits av 9. 4% av lärarstudenterna.

5.2.2 Division med noll blir *noll*

I många av studiernas resultat kategoriseras svaren med ett tal som alla tal inklusive noll. Juters (2019) studie är ett exempel på detta där det inte redovisas några exakta andelar för om deltagarna svarar att division med noll blir noll. Påståendet "Two divided by zero is a number" (Juter, 2019, s. 74) är dock en kombination av två vanliga svar på division med noll, ett tal och just noll. Därav kan föregående avsnitt 5.2.1 om hur deltagarna i studien ställer sig till division med noll blir ett tal *eller* noll representeras. I Juters (2022) andra studie visades det under den första perioden att det var två lärarstudenter som svarade att division med noll blir noll. De ändrade sig under den andra perioden till att det inte går att svara alls på divisionen. Under andra perioden var det tre lärarstudenter som ändrade åsikt åt andra hållet. Två hade tidigare svarat att det inte går att besvara divisionen och en att kvoten blir ett tal. De svarade nu istället att svaret blir noll (Juter, 2022). I studien av Crespo och Nicol (2006) var andelen som svarade att divisionen $5 \div 0$ var lika med noll större än i Juters (2022), 43.8% respektive 37.5%. Balls (1990) studie på lärarstudenter har också visat att en andel, 26.3%, svarade att division med noll blir noll.

Quinn, m.fl., (2008) undersökte, till skillnad från Juters studier (2019; 2022) samt Crespo och Nicols (2006) studie, om hur lärare svarar på operationen $7 \div 0$. Där besvarade 40% av dem att kvoten blir noll. Studiens deltagare visade ingen förståelse för operationen, och ansåg därför att eftersom nämnaren är noll så bör kvoten också bli noll (Quinn, m.fl., 2008).

5.2.3 Division med noll blir *oändligt*

Som tidigare beskrivits i avsnitt 4.3 konstaterade den indiske matematikern Bháskara att kvoten till en division med noll blir oändlig. Wallis förklarar att detta stämmer endast om nämnaren närmar sig noll, och inte då den är noll (Romig, 1924). Att kvoten är oändlig till operationen division med noll var vanligt förekommande även i studierna som denna litteraturstudie behandlar.

Påståendet "Two divided by zero is equal to infinity" i Juters studie (2019, s. 74) visar att en större andel av gruppen med högre matematikutbildning trodde att division med noll resulterar i oändlighet jämfört med gruppen som har grundläggande erfarenhet, 41% respektive 7.6%. En fjärdedel, 25%, svarade att de inte visste och 1.5% svarade inte alls. Det ger en indikation på att lärarstudenterna inte är säkra på förhållandet mellan oändlighet och division.

Lärare med varierande lång yrkeserfarenhet fick frågan om om vad $7 \div 0$ blir i Karakus och Aydins (2019) studie. En av lärarna som hade mellan 11 till 15 års yrkeserfarenhet angav att "7/0 = ∞, I express this is a rule." (Karakus & Aydins, 2019, s. 32). Denna förklaring reflekterar en uppfattning där division med noll ses som oändlig, och att detta är en etablerad regel, se mer i avsnitt 5.3.1. I studien presenteras att 9% av deltagarna förklarade att division med noll är oändligt (Karakus & Aydins, 2019).

I Tsamir och Sheffers (2000) studie med elever i årskurs 9, 10 och 11 som motsvarar Sveriges årskurs 9 och första respektive andra året på gymnasiet, argumenterade några av deltagarna för att division med noll är kopplad till oändlighet. En andel av eleverna (13% i årskurs 9, 10% i årskurs 10 och 16% i årskurs 11) menade att "division by zero is undefined because it is infinity, and infinity is undefined" (Tsamir & Sheffers, 2000, s. 99). En av eleverna i årskurs 10 utvecklade resonemanget genom att beskriva hur kvoten växer mot oändligheten när en täljare divideras med allt mindre tal, och ansåg därför att division med noll borde ge oändlighet som resultat. Utöver detta svarade 12% av alla eleverna i studien helt enkelt *oändlighet* utan att ge en motivering. Det antyder en misstanke om att eleverna såg oändligheten som ett faktiskt tal, då instruktionen i uppgiften var att endast motivera om resultatet inte var ett tal.

5.2.4 Division med noll är *omöjlig*

Att division med noll är omöjlig undersöktes i bland annat Juters (2019) studie genom enkäten och påståendet "You cannot calculate two divided by zero" (Juter, 2019, s. 74). I den första gruppen var det en majoritet, 71%, som inte höll med om påståendet och alltså tyckte att det går att räkna ut en division med noll i nämnaren. Nästan lika stor majoritet av den andra gruppen, 78%, svarade istället att de håller med om påståendet, att det inte går att räkna ut en division med noll i nämnaren (Juter, 2019). Detta tyder på att lärarstudenter med djupare förkunskaper inom matematik i högre grad förstod att division med noll inte är en operation som kan beräknas i jämförelse med gruppen med lägre förkunskaper. Att divisionen med noll inte går att svara på drog även 50% av lärarstudenterna i Juters (2022) andra studie som slutsats efter den andra perioden av datainsamlingen. Vissa lärarstudenters svar och resonemang i Juters (2022) studie utvecklades mer under intervjuerna. Kategoriseringen av den studien är baserad på deras huvudsakliga slutsats vid respektive datainsamlingstillfälle. Det fanns fall av osäkerhet och motstridiga tankar under intervjuerna. Över tid verkade det ske en viss utveckling mot en större insikt om att division med noll inte är möjlig, men missuppfattningar kvarstod hos många även vid den andra datainsamlingen (Juter, 2022).

I Crespo och Nicols (2006) studie var det 46.9% som angav att division med noll är omöjlig att beräkna varav 31.3% svarade att den var odefinerad för att den inte går att beräkna. Likt Crespo och Nicols (2006) studie visar också resultatet för Balls (1990) studie på exempel där både svaret omöjlig och odefinierad läggs i samma kategori. I Balls (1990) studie är det 63.2% som svarat att det är odefinierat eller omöjligt. Studien presenterar inte alla lärarstudenters svar utan enbart exempel. Det presenteras inte exakt hur många som svarat att det är omöjligt respektive odefinierat. Under denna kategori är det alltså mellan 5.3% - 36.8% av lärarstudenterna som kan svarat att operationen är omöjlig.

I Karakus och Aydin (2019) studie, där lärare med varierande lång yrkeserfarenhet undersöktes, ställdes frågan om vad $7 \div 0$ blir. Vissa lärare gav förklaringen att division med noll är omöjlig. Till exempel beskrev en av lärarna, som har mellan 11 till 15 års yrkeserfarenhet, en berättelse där en mor försöker dela 7 äpplen mellan 0 barn och därmed förklarar att divisionen inte går att genomföra. Med exemplet indikerar läraren att det är omöjligt att dela något med noll.

Med hjälp av en konkret delningsprocess tolkade en elev från Tsamir och Sheffers (2000) studie division med noll. Eleven argumenterar för att det är omöjligt att fördela ett antal objekt mellan noll mottagare. Eleven uttryckte detta genom: "12 ÷ 0 means sharing 12 cookies in equal parts among no kids. It is impossible to share 12 cookies among no kids, and therefore 12 ÷ 0 is practically meaningless" (Tsamir & Sheffer, 2000, s. 100).

5.2.5 Division med noll blir *odefinierat*

Syftet med samtliga artiklar har varit att undersöka huruvida lärare, lärarstudenter och elever har en förståelse för den mest matematiskt korrekta förklaringsmodellen, att division med noll är odefinierad. Svar som division med noll är odefinerad kan visa på en djupare matematisk förståelse jämfört med att svara att operationen är omöjlig. Att svara att operationen är omöjlig eller motsvarande *inte går att beräkna* kan grunda sig i användandet av exempelvis konkreta modeller, vilket återkommer i avsnitt 5.4.1.

Juters (2019) studie använde inte specifikt termen odefinierat i sina påståenden. Däremot är påståendet "You cannot calculate two divided by zero" (Juter, 2019, s. 74) nära besläktat med idén att division med noll är odefinierad. Som nämnts i tidigare avsnitt, instämde en större andel av den andra gruppen, med djupare förkunskaper inom matematik, i detta påstående jämfört med den första gruppen. Detta antyder att de med mer matematisk bakgrund i högre grad förstod att division med noll inte leder till ett definierat numeriskt svar.

Som nämnts i tidigare avsnitt, var det 15.6% i Crespo och Nicol (2006) studie som svarade med en korrekt resonerad förklaring, där de använde logiskt resonemang till varför det är odefinierat, utan att använda regler. Motsvarande andel som svarade att division med noll är odefinierad och använder en matematisk förklaring från Balls (1990) studie var 26.3%.

I Karakus och Aydins (2019) studie var den vanligaste förklaringen bland lärare att division med noll är odefinierad. Ett exempel från studien när en av deltagarna, en lärare med 1 till 5 års yrkeserfarenhet, förklarade matematiskt att uttrycket $7 = 0 \cdot a$ inte har någon lösning, och därmed är divisionen med noll odefinierad. En annan lärare, som har mellan 11 till 15 års yrkeserfarenhet, använde en gränsvärdesförklaring och uttryckte att eftersom kvoten växer mot oändligheten när nämnaren går mot noll är $7 \div 0$ odefinierat. Vidare angav $29\ \%$ av lärarna att division med noll är odefinierad med förklaringen "because this is a rule in mathematics" (Karakus & Aydin, 2019, s. 31).

Det var 74% av eleverna i Tsamir och Sheffers (2000) studie som ansåg att division med noll är odefinierad. Dessutom visade studien att elever i de högre årskurserna i större utsträckning kopplade division till dess inversa operation, multiplikation. De argumenterade för att division med noll leder till en motsägelse och kan därför inte vara definierad.

5.3 Missförstånd med regelbaserade förklaringar inom division

Följande avsnitt presenterar hur undervisning av matematiska regelbaserade förklaringar kan påverka elevers förståelse och tillämpning av kunskap om division med noll. Vidare redogörs för hur regelbaserade och konceptuella förklaringar används i undervisningen samt vilka utmaningar och möjligheter som uppstår när elever möter detta matematiska fenomen.

5.3.1 Regelbaserade och konceptuella förklaringar

Att använda regelbaserade förklaringar var den vanligaste förklaringsmodellen i Crespo och Nicols (2006) studie. Det var 71.9% som motiverade sitt svar med en regel eller hänvisning till exempelvis lärare, miniräknare eller lärobok (Crespo & Nicol, 2006).

Karakus och Aydin (2019) lyfter hur lärare kan hantera frågan om division med noll ur ett didaktiskt perspektiv. De belyser skillnaden mellan så kallade regelbaserade och konceptuella förklaringar. En regelbaserad förklaring kan exempelvis vara "7/0=∞, I express this is a rule" (Karakus & Aydins, 2019, s. 32) medan en konceptuell förklaring snarare utgår från betydelsen av division, exempelvis: "By the definition of rational numbers, the denominator cannot be zero. So we cannot calculate this operation." (Karakus & Aydins, 2019, s. 32). Karakus och Aydins (2019) studie visar att en konceptuell förståelse är avgörande för att man ska kunna tillämpa matematisk kunskap i nya sammanhang, snarare än att enbart memorera regler.

Ett fenomen som förekommer både hos lärarstudenter och elever är användandet av multiplikation för att utveckla resonemang kring division med noll. (Crespo & Nicol, 2006; Grouws & Reys, 1975b; Karakus & Aydin, 2019; Wheeler & Feghali, 1983). Istället för att använda den korrekta inversa multiplikationen till divisionen flyttar man talen så att svaret tillfredsställer förutfattade meningar. I Grouws och Reys (1975b) studie förekommer exempel där eleverna för att nå kvoten noll i exemplet $4 \div 0 = x$ felaktigt skriver den inversa multiplikationen som $4 \cdot x = 0$ istället för den korrekta inversen $0 \cdot x = 4$. Under intervjuerna fick eleverna ledande frågor som vägledde dem till att skriva ner den korrekta inversen. Trots den initiala motstridigheten kom eleverna efter en tids reflektion fram till att svaret var odefinierat (Grouws & Reys, 1975b). Under Crespo och Nicols (2006, s. 90) studie var det en av lärarstudenterna som uttryckte följande resonemang som svar till divisionen $5 \div 0$:

> The trick I used was the answer times the number of groups the number is being divided equals that original number. Wow, that sounds confusing but it works! 5÷0=? Therefore 0 x ? = 5 But there is no answer?!?

Att lärarstudenten i sitt resonemang drar slutsatsen att det inte finns något svar indikerar att den förväntade sig ett numeriskt tal som lösning till divisionen.

5.3.2 Användning av regelbaserade förklaringar

Lärare får aldrig säga någon matematisk regel som inte stämmer oavsett vilken årskurs de undervisar i menar Grouws och Reys (1975b). Det har identifierats i studierna (Ball, 1990; Crespo & Nicol, 2006; Grouws & Reys, 1975b; Karakus & Aydin, 2019) att det finns såväl lärare som lärarstudenter och elever som finner noll som ett undantag. De besvarar operationer innehållande noll med regelbaserade förklaringar där resonemang anses överflödigt. Exempelvis i en intervju med en fjärdeklassare från Grouws och Reys (1975b) studie förklarade eleven att läraren berättat att allt som divideras med noll blir noll och att eleven tror på det då eleven uttryckt "I believe what the school says" (Grouws & Reys, 1975b, s. 603). Liknande förklaringar där lärarstudenter uppgav att "my teacher taught me that." upptäcktes i Crespo och Nicols (2006, s. 84) studie där de svarade att kvoten till divisionen $5 \div 0$ blir noll. Balls (1990) studie visar också exempel där lärarstudenter använder regler för att beräkna division med noll med flera exempel på svar. Studien presenterar exempel där det i svaren förekommer regler för att division med noll är noll, odefinierat eller omöjligt samt antyder att lärarstudenter vet att det finns en regel men inte minns den.

I Grouws och Reys (1975a) studie utförde eleverna ett skrivtest som bestod av 18 bråkoperationer jämnt fördelat så att sex av dem inte innehöll noll, sex uppgifter hade noll i täljaren och sex uppgifter hade noll i nämnaren. När noll inte förekom i divisionen var det höga och jämna resultat för alla tre testerna i studien som genomfördes på elever i årskurs 4, 6 och 8. Med noll i nämnaren kom resultatet i medelvärdet för antalet rätt att öka från 0.32 (5.3%) i förtestet till 3.00 (50%) i eftertestet. I uppsamlingstestet sex veckor senare var resultatet 2.46 (41%). Studien visar att elever i årskurserna som testades kan lära sig att hantera division med noll. Däremot kan yngre elever som inte förstår konceptet tendera att förlita sig på en regel (Grouws & Reys, 1975a).

5.4 Svårigheter med olika didaktiska förklaringar för division med noll

I detta avsnitt beskrivs huruvida division med noll kan vara en didaktisk utmaning som kan leda till missförstånd inom matematiken. Vid planering för hur lärare bäst kan undervisa om division med noll spelar valet av konkreta och abstrakta aspekter in. Vidare diskuteras aspekternas för- och nackdelar samt svårigheterna som uppstår vid undervisningen om division med noll.

5.4.1 Konkreta argument som förklaring

Likt Karakus och Aydin (2019) i avsnitt 5.3.1 diskuterar Tsamir och Sheffer (2000) om varför division med ett tal som inte är noll, dividerat med noll är odefinierad, och menar att man kan förklara det med hjälp av både konkreta och formella argument. De konkreta argumenten bygger på vardagliga exempel för att förklara varför division med noll är en operation som inte går att beräkna. Ett exempel på ett konkret argument är att tänka på division som en uppdelning av något i lika stora delar. Exempelvis om man försöker dela ett antal objekt mellan noll personer, menar Tsamir och Sheffer (2000) att det uppstår en paradox eftersom det inte finns någon att fördela objekten till. Crespo och Nicol (2006) beskriver i likhet med Tsamir och Sheffer (2000) att denna idé bygger på en intuitiv känsla att en operation där man *inte gör något*, att dela med ingenting, inte borde förändra det ursprungliga talet. Juter (2022) diskuterar även liknande felaktiga resonemang hos lärarstudenter, där exemplet som används är 2 dividerat med 0. Vissa lärarstudenter i studien fokuserade på att antalet objekt som skulle delas ut fanns kvar eftersom det inte fanns några grupper att dela ut dem till. En av lärarstudenterna i Juters (2022) studie höll initialt med om att om man har två äpplen och inte delar med någon, så har man två kvar. Juter (2022) beskriver att lärarstudenten med exemplet med äpplen i själva verket dividerar med ett och inte med noll om talet ska förbli oförändrat.

5.4.2 Formella argument som förklaring

De formella argumenten bygger, till skillnad från de konkreta argumenten, istället på matematiska principer. Division är motsatsen till multiplikation vilket innebär att en division med noll säger att det finns ett tal som, när det multipliceras med noll, ger resultatet i täljaren. Eftersom ett tal multiplicerat med noll alltid ger noll, leder detta till en logisk motsägelse (Tsamir & Sheffer, 2000). Elevers förståelse för formella argument ökar i högre åldrar och årskurser vilket medför att de med större matematisk erfarenhet är mer mottagbara för abstrakta matematiska fenomen, menar Grouws och Reys (1975a).

5.4.3 Konkreta modeller jämfört med abstrakta aspekter

Artikeln *The danger of being overly attached to the concrete: The case of division by zero* av Lajoie och Mura (1998) undersöker hur en överdriven tilltro till konkreta representationer kan hindra förståelsen av abstrakta matematiska begrepp med division med noll som exempel. Lajoie och Muras (1998) studie visar att många blivande lärare kämpar med att förstå och förklara division med noll eftersom de försöker hitta en fysisk modell för divisionen. Studien visar att de flesta lärarstudenter gav regelbaserade eller intuitiva svar, ofta grundade på vardagliga situationer, men få använde matematiskt korrekta metoder som exempelvis att se divisionen som inversen av multiplikationen. Även när studenterna förstod den formella förklaringen, kämpade de med att acceptera den eftersom den saknade en konkret bild eller representation. Lajoie och Mura (1998) argumenterar för att konkreta modeller är viktiga, men har begränsningar. För att förstå matematik på djupet måste studenter inse att vissa begrepp saknar fysisk eller konkret representation och att matematiska regler inte alltid kan förklaras genom vardagliga analogier anpassade till vardagliga situationer. Detta har enligt Lajoie och Mura (1998) viktiga pedagogiska implikationer. Blivande lärare måste kunna balansera konkreta och abstrakta aspekter av matematik och hjälpa elever att förstå när modeller är användbara och när de blir missvisande. Exemplet de lyfter är division med noll och att konkreta modeller kan bidra till missförstånd och svårigheter.

Tsamir och Sheffer (2000) lyfter tre didaktiska utmaningar som uppstod kring elevers förståelse av division med noll i sin studie. Inledningsvis visar studien att många elever har en intuitiv föreställning om att alla matematiska operationer måste ge ett numeriskt svar.

Denna didaktiska utmaning kallade de för "Awareness of intuitive belief" (Tsamir & Sheffer, 2000, s. 103-104). Detta innebär att elever förväntar sig att även $5 \div 0$ ska ha en definierad numerisk kvot. Studien betonade också vikten av att förstå när olika argument för division med noll är applicerbara, en didaktisk utmaning som beskrevs som "Awareness of applications of concrete and formal arguments" (Tsamir & Sheffer, 2000, s. 103-104). De beskriver att elever ofta använder konkreta argument, som att det är omöjligt att dela 6 kakor mellan 0 personer, för att förklara varför division med noll inte fungerar. Även om detta resonemang kan vara intuitivt och lätt att förstå, blir det problematiskt när elever börjar arbeta med mer abstrakta matematiska begrepp. Därmed behöver de utveckla en förståelse för när sådana argument är möjliga att tillämpa och när de inte är det menar Tsamir och Sheffer, (2000), vilket också Lajoie och Mura (1998) poängterar. Slutligen identifierade Tsamir och Sheffer (2000, s. 103-104) en tredje didaktisk utmaning, "Concrete arguments: To be or not to be?". Det handlar om två olika perspektiv, där det ena menar att konkreta argument bör användas tidigt i undervisningen eftersom de hjälper elever att få en intuitiv förståelse för operationen division med noll redan från början. Därefter kan eleverna gradvis introduceras till mer formella matematiska resonemang för att förstå den matematiska definitionen av division och varför division med noll är odefinierad. Det andra perspektivet argumenterar för att konkreta argument kan leda till missuppfattningar och att det därför är bättre att enbart använda formella förklaringar från början (Tsamir & Sheffer, 2000).

Grouws och Reys (1975b) förklarar att det finns fördelar med att använda konkreta laborativa uppgifter för att förstå grunderna i division och koppla det till multiplikation. Detta kan representeras symboliskt i matematiska operationer. Grouws och Reys (1975b) visar också ett alternativ med att enbart använda olika symboler där tal ska stå för att elever ska kunna göra korrekta kopplingar mellan hur platserna förflyttas beroende på om det är en multiplikation eller division. Exempelvis: $\square \cdot \triangle =$ ⍰ $\Leftrightarrow$ ⍰ $\div \triangle = \square$.

Sammanfattningsvis visar studierna (Lajoie & Mura, 1998; Tsamir & Sheffer, 2000; Grouws & Reys, 1975b) att både konkreta och abstrakta metoder har en viktig roll i matematikundervisningen, men att en obalanserad användning av konkreta modeller kan leda till missuppfattningar.

5.5 Division med noll i täljaren

Som presenterats i tidigare avsnitt 5.3.2 visade elever i Grouws och Reys (1975a) studie ökad kunskap gällande division med noll i nämnaren mellan för- och eftertestet. Detta skiljer sig dock från resultatet på de uppgifter där noll befann sig i täljaren. Uppgifter med noll i täljaren var medelvärdet för rätt svar 4.79 av 6 (79.8%) i förtestet och sjönk till 3.20 (53.3%) i eftertestet. Resultatet på uppsamlingstestet låg på 3.16 (52.7%). För att förklara detta redovisas i studien elevernas svar på en av uppgifterna, $0 \div 10$, som förekom i testen. I förtestet var det 73.3% som angivit det korrekta svaret noll. På eftertestet hade denna procent sjunkit till 49.7%. Det som ökade var andelen elever som svarade att $0 \div 10$ var odefinierat, från 4.0% till 41.9%. Grouws och Reys (1975a) drar slutsatsen att detta är till följd av att eleverna övergeneraliserat att divisioner innehållande noll alltid ger svaret odefinierat.

5.6 Division med noll i både täljaren och nämnaren

I Karakus och Aydins (2019) studie undersöktes lärare med varierande lång yrkeserfarenhet. Studien visar att 45% av lärarna motiverade sina svar på operationen noll dividerat med noll, medan 51% enbart svarade genom att använda matematiska regler. Den mest använda motiveringen till operationen var den multiplikativa inversen av noll dividerat med noll, oavsett hur många års yrkeserfarenhet lärarna hade. Andra motiveringar som fanns var bland annat med konkreta modeller eller med hjälp av logiska resonemang baserade på matematiska principer. Fler lärare med 6 till 10 års och 16 till 20 års yrkeserfarenhet gav förklaringar som fokuserade på betydelsen av noll dividerat på noll. Ju längre tid lärarna hade arbetat som verksamma lärare, desto fler konceptuella förklaringar gavs till operationen. Några lärare med både 1 till 5 och 6 till 10 års yrkeserfarenhet gav inget svar på operationen noll dividerat med noll.

Wheeler och Feghali (1983, s. 148) behandlade resonemangsfrågan "What is zero divided by zero?" i sin studie. Där svarade 23. 1% av lärarstudenterna att noll dividerat med noll är odefinierat. Det mest förekommande svaret var noll, 67. 3%. Resonemangsfrågan innebar att lärarstudenternas tankegång skulle förklaras vilket utfördes av 51. 9%. Utav de som förklarade sin tankegång var det 18. 5%, som förklarade att man inte kan ha noll som nämnare och 7. 4%, använde sig av förhållandet till multiplikation, det vill säga inversen. Användningen av division som förklaring användes av 55. 6%, där den mest förekommande förklaringen var att man inte kan dividera: "How can one divide nothing into nothing and receive anything but nothing" (Wheeler & Feghali, 1983, s. 152).

5.7 Påverkan av lärares yrkeserfarenhet

Karakus och Aydins (2019) studie undersökte lärares förklaringar av divisionen $7 \div 0$ i relation till antalet år som de varit verksamma som lärare. Resultatet visade att yrkeserfarenhet hade en betydande korrelation med hur korrekt de förklarade den matematiska operationen division med noll. Lärarna med 1 till 5 års erfarenhet hade den högsta andelen felaktiga förklaringar, 24%, medan lärarna med 16 till 20 års erfarenhet inte alls använde felaktiga förklaringar. Andelen korrekta förklaringar var också relaterad till erfarenhet, med en ökning från de med 1 till 5 års erfarenhet, 43%, till de med 16 till 20 års erfarenhet, 82%. Studien visade att ju längre lärarna hade arbetat inom yrket, desto mer korrekt förklarade de division med noll och desto mindre vanliga blev felaktiga förklaringar. Karakus och Aydin (2019) menar att detta resultat tyder på att erfarenhet ger lärarna en bättre förståelse för de abstrakta aspekterna av matematik och stärker deras förmåga att ge förklaringar som grundar sig på matematiska principer snarare än intuition.

5.8 Didaktiska undervisningsstrategier

För att förbättra lärarnas förståelse, som i sin tur påverkar elevernas förståelse av division med noll, föreslår Quinn m.fl. (2008) att undervisningen bör fokusera på förklaringar med hjälp av gränsvärde samt sambandet mellan multiplikation och division. Detta innebär att man börjar med ett tal som divideras med en större nämnare och sedan gradvis minskar denna nämnare mot noll. Då blir kvoten allt större och tenderar gå mot oändligheten, vilket indikerar att ingen ändlig lösning existerar. Quinn m.fl. (2008) argumenterar för att progressionen av division med allt mindre tal kan användas som en *ingång* för att förstå varför division med noll är odefinierad. Med sambandet av multiplikation och division menar Quinn m.fl. (2008) att det också kan förklara huruvida den multiplikativa inversen av division med noll inte är definierad, med den anledningen att $7 \div 0 = a$, ska ett tal, a, multiplicerat med noll bli 7, vilket är omöjligt eftersom multiplikation med noll alltid resulterar i noll.

Grouws och Reys (1975a) studie delade upp elever genom att använda sig av två olika strukturer i den lektion som hölls dagen mellan förtestet och eftertestet. Fördelningen var jämn så att det i varje årskurs var lika många klasser som fick vardera lektionsstruktur. Första gruppen elever fick första typen av lektionsstruktur och introducerades till division och därefter divisionens inversa multiplikation. Efter introduktionen presenterades en bråkoperation med kvoten som en tom ruta och dess inversa multiplikation där den faktor som motsvarar kvoten också skrivs som en tom ruta som eleverna skulle fylla i, exempelvis $15 \div 3 = \square, \square \cdot 3 = 15$. Det lades betoning på att multiplikationen och divisionen hänger ihop genom att de består av samma tal. Efter att klassen fått ett flertal liknande exempel introducerades de till division med noll. Det konstaterades under lektionen att noll i nämnaren är odefinierat då dess inversa multiplikation inte har någon lösning, samt att division med noll i täljaren gör att kvoten måste bli noll. Eleverna fick arbeta med ett arbetshäfte där lösningarna sedan diskuterades under lektionen (Grouws & Reys, 1975a). Skillnaden under lektionen för andra gruppen var att multiplikationsoperationen alltid skrevs ut först för att därefter koppla det till motsvarande divisionen.

Resultaten av Grouws och Reys (1975a) studie presenterade en skillnad i för- och eftertestet . En ökad förståelse hade skett i alla årskurser men en märkbar skillnad visade sig mellan de två olika grupperna. Eleverna som först haft fokus på division för att därefter härleda till förhållandet med multiplikation, hade ett medelvärde på 12.4 av 18, vilket motsvarade 68.9% rätt på eftertestet. Medelvärdet för den andra gruppen låg på 11.4 (63.3%) rätt. När det kom till uppsamlingstestet, sex veckor senare, hade båda grupperna ett medelvärde nära 11.2 (62.2%). Den första gruppen fick bättre effekt direkt efter lektionen medan den andra gruppen upprätthöll sina kunskaper i större utsträckning. Trots uppsamlingstestets likvärdiga resultat drar Grouws och Reys (1975a) slutsatsen att det är fördelaktigt att först visa en operation med division för att sedan koppla till dess inversa multiplikation då man ska undervisa om division med noll. Med tanke på att den första gruppens resultat sjönk mer än vad den andra gruppens gjorde i uppsamlingstestet uppmanar Grouws och Reys (1975b) lärare att kontinuerligt förklara konceptet av division med noll för att eleverna ska upprätthålla förståelsen.

5.9 Förståelse av noll påverkar inlärning

Begreppet noll har många olika betydelser och definitioner i dagens vardagliga språk (Blake & Verhille, 1985). Blake och Verhille (1985) beskriver hur vi i vårt vardagliga språk syftar till att noll betyder *ingenting*, ett tomrum. De kallar det för *noll-är-ingenting analogin* (zero-is-nothing analogy) och att det används på ett oprecist och tvetydigt sätt som gör det svårt att fastställa en exakt definition av ordet *noll* som ett begrepp inom matematiken. Att uppnå en djup matematisk struktur är svårt om det inte finns tydliga definitioner att bygga på. Blake och Verhille (1985) förklarar att *noll-är-ingenting analogin* ändå leder till korrekta lösningar och svar. Detta dock endast fram till mötet med division med noll. Det är först när division med noll uppstår som analogins semantik blir en källa till förvirring, vilket gör resonemanget både ologiskt och intuitivt otillfredsställande. I denna situation saknas en logisk grund för att tillämpa analogin *noll-är-ingenting*, och intuitionen leder konsekvent till felaktiga lösningar eller felaktiga resultat. Detta bidrar till att när elever studerar matematik uppstår stora svårigheter då de förväxlar *noll* med *ingenting* (Blake & Verhille, 1985). Liknande resonemang för Grouws och Reys (1975b) där de uppmanar lärare att påminna elever att säga noll när det är passande matematiskt. Exempelvis under matcher om ett idrottslag har noll poäng och motståndarna fyra poäng är det bättre matematiskt att säga att det står *fyra - noll* och inte *fyra mot ingenting*.

Vid förvirring över konceptet noll är division där noll förekommer svårt att greppa som ett tal, vilket Grouws och Reys (1975b, s. 601) beskriver genom följande citat:

> For example, consider those pupils who consider "zero not a number, but just nothing." Upon encountering a multiplication sentence which has no solution, i.e. "nothing" works, it seems perfectly logical to conclude that since "nothing" works in the multiplication sentence, the answer to the related division sentence is zero.

Med detta menar Grouws och Reys (1975b) att när elever ser en operation där den multiplikativa inversen inte har någon lösning, benämns det ofta som att *inget* tal fungerar som lösning. Elever som ser noll som *ingenting* kan därför komma att dra den felaktiga slutsatsen att kvoten på division med noll blir *noll*.

5.10 Närvaro av division med noll i läroplan och läroböcker

I Tsamir och Sheffers (2000) studie som är utförd i Israel, beskrivs deras läroplan, *israeliska nationella matematikplanen* (ISNM). Där står det att lärare för årskurs 4 förväntas förklara division med noll som *meningslöst*. Ett uttryck som $5 \div 0$ är *meningslöst* och uttrycket $0 \div 0$ är också *meningslöst*. Läroplanen specificerar inte exakt hur division med noll ska undervisas i årskurs 4, dock beskriver Tsamir och Sheffer (2000) att populära läroböcker och lärarhandledningar föreslår användningen av konkreta argument för att förklara varför division med noll inte är definierat. ISNM (Tsamir & Sheffer, 2000) nämner division med noll igen i årskurs 8. I denna årskurs, till skillnad från i årskurs 4, förväntas lärarna presentera formella argument istället för varför division med noll inte kan definieras, och sedan uppmuntra eleverna att tillämpa denna kunskap när det löser rationella ekvationer (Tsamir & Sheffer, 2000). Enligt den svenska läroplanen (Lgr22, 2022) nämns det under det centrala innehållet för kursplanen i matematik för årskurs 4 till 6, att eleverna ska utveckla kunskaper om "De fyra räknesätten och regler för deras användning vid beräkningar med naturliga tal" samt "Metoder för beräkningar med naturliga tal och enkla tal i bråk- och decimalform vid överslagsräkning, huvudräkning och skriftlig beräkning" (Lgr22, 2022, s. 57). Under det centrala innehållet för årskurs 7 till 9 står det "Matematiska lagar och regler samt deras användning vid beräkningar med tal i bråk-, decimal- och potensform" och "Metoder för beräkningar med tal i bråk- och decimalform vid överslagsräkning, huvudräkning och skriftlig beräkning" (Lgr22, 2022, s. 58) där division med noll kan inkluderas då det är beräkning av bråk.

Av flertalet svenska läroböcker som undersökts i denna studie, se tabell 4, var det ingen som presenterade definitionen av noll som ett naturligt tal för årskurs 4 till 6. Det förekom däremot i läroböcker riktade mot årskurs 7 till 9 där följande definierade noll som ett naturligt tal: *Favorit matematik 7, Favorit matematik 9, Matte direkt 9, Mondo matte 7, Prio 8, Vektor 9* och *X matematik.* Se alla studerade läroböcker i tabell 4.

I läroboken *Favorit matematik 4* för årskurs 4 nämns det kort om division med noll i täljaren, och att alla operationer där noll dividerat med ett icke-noll tal blir 0. Det står inte djupare förklaringar om varför det blir så, och inte heller exempel där nollan finns i nämnaren. I läroboken *Favorit matematik 7* för årskurs 7 nämns det om operationer med noll i både täljaren och nämnaren, med tillhörande räkneuppgifter. Det förklaras att noll dividerat med ett icke-noll tal blir noll, och att man inte kan dividera tal med noll med den anledningen att talet blir *oändligt*, och att oändligheten inte är ett tal. Dock skrivs det i en exempeluppgift att $15 \div 0$ inte är definierat, och att divisionen inte går att beräkna.

Alla läroböcker som behandlade begreppet naturliga tal definierade även noll som ett naturligt tal, vilket framgår av tabell 4. Trots att läroplanen för årskurs 4 till 6 (Lgr22, 2022) beskriver att elever ska lära sig beräkningar med naturliga tal är det ingen av de studerade läroböckerna för mellanstadiet som varken definierar eller presenterar naturliga tal. De läroböcker som har kryss i kolumnen för division med noll innehöll exempel där noll förekom i täljaren eller nämnaren.

Tabell 4

Tabellen visar vilka läroböcker som undersöktes hos NCM samt huruvida de presenterade följande innehåll: historiska talsystem (det babyloniska (B), mayanska (M) eller romerska (R)), definitionen av noll som ett naturligt tal och exempel på division där noll förekommer i täljaren och/eller nämnaren. Markering i tabellen visar att det aktuella innehållet behandlas i en faktaruta eller genomgång i läroboken.

Tabell över undersökta läroböcker och innehåll				
Lärobok	Årskurs	Innehåll		
		Historiska talsystem B, M och R	Noll definieras som ett naturligt tal	Division med noll
Matte direkt borgen	4			
	5	R		
	6			
Favorit matematik	4			x*
	5	B, M, R		
	6	B, M, R		
Koll på matematik	4			
	5			
	6	B, M, R		
Vektor	7			
	8			
	9	B, M, R	x	
XYZ	7		x	
	8			
	9			
Mondo	7		x	
	8			
	9			
Prio	7			
	8		x	
	9			
Mattedirekt	7	M, R		
	8			
	9		x	
Favorit matematik	7	R	x	x**
	8			
	9		x	

* = Noll i täljaren
** = Noll i täljaren och/eller nämnaren

6 Inslag av matematikhistoria i undervisning

I detta kapitel presenteras hur historiska perspektiv kan påverka inlärningen, med beaktande av både potentiella vinster och risker samt hur det kan påverka elevers matematiska förståelse. Vidare undersöks närvaron av historia i svenska läroböcker i matematik.

6.1 Matematikhistoria i undervisning

Enligt Bråting och Pejlare (2015) från artikeln *On the relations between historical epistemology and students conceptual developments in mathematics* framhävs både fördelar och risker med att integrera matematikhistoria i undervisningen. Artikeln (Bråting & Pejlare, 2015) syftar till att belysa fallgroparna med att använda matematikhistoria i undervisningen, då det kan leda till förvirring bland både lärare och elever. Författarna menar att det kan bli särskilt problematiskt att direkt försöka parallellisera den historiska epistemologin med elevers begreppsbildning. Vidare argumenterar de för att det är problematiskt att förvänta sig en historisk motsvarighet till elevers utveckling när de fortfarande kämpar med att förstå ett matematiskt begrepp. Trots fallgroparna understryker Bråting och Pejlare (2015) att de tror att matematikundervisningen kan dra nytta av både *history* (historia) och *heritage* (arv), så länge som dessa två perspektiv inte blandas ihop. Dessa två perspektiv grundar sig i en studie av Grattan-Guinness som refereras till i Bråting och Pejlares studie (2015). Perspektiven skiljer sig åt då historia handlar om att förstå det förflutna i sin egen kontext, medan arv fokuserar på hur det förflutna påverkar och används i nutiden.

Bråting och Pejlare (2015) förklarar att historia innebär att man studerar en specifik matematisk teori, definition eller ett koncept utifrån ett historiskt perspektiv och fokuserar på detaljerna kring dess ursprungliga utveckling och dess förhistoria. Den historiska ansatsen försöker besvara frågan "what happened in the past?" men också "what did not happen in the past?" (Bråting & Pejlare, 2015, s. 254). Den kan även beakta skillnader mellan historiska begrepp och modernare begrepp som vid första anblick kan verka liknande. Ett konkret exempel som Bråting och Pejlare (2015) lyfter är att om man studerar Eulers funktionsbegrepp med den historiska ansatsen, skulle fokus ligga på att analysera hans funktionsbegrepp baserat på det matematiska sammanhanget under den specifika tidsperioden, utan att påverkas av det moderna funktionsbegreppet. Att funktionsbegreppet var annorlunda på 1700-talet jämfört med idag skulle inte vara huvudpoängen.

Med arv refererar Bråting och Pejlare (2015) till inverkan på utvecklingen av matematik i efterföljande tidsperioder av en viss matematisk idé, en teori, definition eller ett koncept. Huvudfokus ligger vanligtvis på den moderna formen av det studerade begreppet, med uppmärksamhet på dess utvecklingsgång och, när det är lämpligt, infogas moderna idéer i det studerade begreppet. Användningen av arvs-ansatsen leder ofta till en modernisering av gamla resultat för att visa deras nuvarande plats inom matematiken, men det historiska sammanhanget tas inte alltid i beaktande. Bråting och Pejlare (2015) menar att det är legitimt att använda arvs-ansatsen så länge den inte blandas ihop med den historiska ansatsen. En aspekt som artikeln lyfter är att det är viktigt att komma ihåg att tidigare matematikers definitioner baserades på det konceptuella ramverk som var tillgängligt vid den aktuella tiden. Bråting och Pejlare (2015) menar att man inte bör anta att historiska matematiker nödvändigtvis strävade efter dagens moderna definitioner. Historiska matematiker och elever idag har olika teoretiska ramverk, det vill säga olika förutsättningar att förhålla sig till vid mötet med matematiken. Fortsättningsvis menar de att historiska matematiker utvecklade olika begrepp genom att successivt formulera, testa och vid behov omdefiniera sina begrepp, nerifrån och upp för att bättre passa deras aktuella matematiska mål. Dagens studenter möter däremot färdiga definitioner och försöker förstå dem uppifrån och ner, vilket kan leda till missförstånd och felberäkningar (Bråting & Pejlare, 2015). När paralleller dras mellan historisk och nutida matematik blandas ofta historia och arv ihop, vilket är problematiskt eftersom historiska definitioner måste tolkas i sitt rätta sammanhang. Bråting och Pejlare (2015) beskriver hur kulturella och lokala idéer varierar över tid och påverkar begreppsutveckling på olika sätt, vilket gör det riskabelt att anta en platonsk syn på matematikens utveckling. Dessutom skiljer sig den kognitiva nivån mellan dagens genomsnittliga student och historiens stora matematiker. Därför finns det ingen självklar väg för hur matematiska koncept utvecklas och hur kulturella faktorer spelar en central roll i denna process. Detta talar emot att okritiskt jämföra historisk utveckling med elevers begreppsbildning, eftersom dessa sker i skilda kulturella och kognitiva sammanhang.

Båda perspektiven arv och historia kan berika matematikundervisningen, men det är viktigt att skilja dem åt (Bråting & Pejlare, 2015). Författarna menar att en historisk kontext kan ge elever en djupare förståelse för matematiska begrepp och dess utveckling, men att det samtidigt finns en risk att om historia och modern matematik blandas samman kan det leda till missförstånd.

6.2 Närvaro av historiska talsystem i läroplan och läroböcker

I Lgr22 (2022) nämns det under ämnets syfte om huruvida historiska skeenden kan vara till stor fördel för eleverna för att förstå historiska sammanhang i matematiken. Det står: "Undervisningen ska ge eleverna förutsättningar att utveckla kunskaper om historiska sammanhang där viktiga begrepp och metoder i matematiken har utvecklats" (Lgr22, 2022, s. 54). I det centrala innehållet för årskurs 4 till 6 anges att undervisningen ska behandla "olika talsystem och några talsystem som använts i olika kulturer genom historien" (Lgr22, 2022, s. 56). För årskurs 1 till 3 nämns "symboler för tal och symbolernas utveckling i några olika kulturer genom historien". (Lgr22, 2022, s. 55). Under det centrala innehållet för årskurs 7 till 9 nämns det däremot ingenting om matematikens historia i undervisningen (Lgr22, 2022).

De läroböcker som presenterade historiska talsystem visade också exempel där noll ingick, se tabell 4. I de svenska läroböckerna *Favoritmatematik 5a, Favoritmatematik 6a, Favoritmatematik 7, Koll på matematik 6b, Matte direkt borgen 5a, Matte direkt borgen 6b, Matte direkt 7* och *Vektor åk 9* som används i matematikundervisning inkluderas uppgifter om historiska talsystem. Det presenteras olika historiska talsystem med dess ursprung och utveckling. I majoriteten av läroböckerna presenteras talsystemen, bland annat det babyloniska, mayainska och romerska, med en tabell som visar motsvarigheten i det hindu-arabiska talsystemet som används idag. Därefter följer ofta enstaka tillhörande uppgifter där eleverna exempelvis får i uppgift att addera två tal skrivna med babyloniska symboler.

7 Diskussion

Nollan har utvecklats från att vara en symbol och siffra till ett tal som används både i vardagen och inom matematiken. I följande kapitel diskuteras det om historian bakom noll och division med noll samt hur den kan användas för att skapa djupare förståelse i undervisningen. Vidare diskuteras det om matematikläromedel för mellan- och högstadiet med fokus på hur historiska talsystem och division med noll behandlas, samt läromedlens begränsningar. Slutligen sammanfattar vi litteraturstudien genom att presentera två lösningsförslag som kan förklara varför division med noll är odefinierat och inget annat.

7.1 Noll: historia och tillämpning inom matematikämnet

Noll har utvecklats från att enbart vara en platsmarkör till att bidra till utvecklingen av dagens aritmetik och algebra. Den konceptuella förståelsen för noll och dess användning har varit svår genom historien och är än idag. Babyloniernas användning av noll som platsmarkör visar att nollan var en lösning för tomma platser. Genom att använda sig av sneda kilformade symboler för att markera den tomma platsen mellan siffror kunde de undvika tvetydigheter, men de behandlade aldrig dessa symboler som ett eget numeriskt värde. En annan aspekt att beakta är att babylonierna aldrig placerade sina platsmarkör-symboler i slutet av ett tal, vilket antyder att deras behov av tydlighet endast gällde inuti tal. De förlitade sig på kontexten för att förstå det exakta värdet. Med tanke på hur länge babylonierna klarade sig utan de sneda kilformade symbolerna, kan man diskutera hur viktiga de egentligen var. Detta kan tyda på att behovet av en platsmarkör enbart uppstod när deras matematiska beräkningar blev allt mer komplicerade och därmed behövde ökad noggrannhet.

Det är intressant att notera att babyloniernas användning av noll skiljer sig markant från andra civilisationers användning av noll. Mayafolkets system innehöll en tydlig nollsymbol som var en del av deras kalendermatematik och hade då en aktiv roll. Detta tyder på att olika samhällen hade skilda behov och matematiska synsätt beroende på deras praktiska och kulturella sammanhang. Värt att diskutera är den kulturella och historiska spridningen av noll. Resultatet i denna studie visar att noll inte alltid varit en självklar del av matematiken och att dess acceptans i olika delar av världen utvecklats olika snabbt. Spridningen av noll till Europa mötte motstånd, och den långsamma acceptansen kan förklaras av att den romerska matematiken inte hade en motsvarighet för noll, samt den filosofiska tveksamheten gentemot att erkänna *ingenting* som ett numeriskt värde.

Nollans utveckling och förståelse har varit en komplex process genom historien, och denna komplexitet återspeglas i elevernas och lärarnas svårigheter att hantera begreppet idag. En central fråga är hur historiska inslag kan påverka förståelsen av noll. Å ena sidan kan ett historiskt perspektiv bidra till en djupare förståelse genom att visa hur olika kulturer och matematiska traditioner har närmat sig nollan. Å andra sidan kan det också skapa förvirring om det inte förmedlas på ett pedagogiskt genomtänkt sätt. En risk är att elever övertolkar äldre föreställningar och applicerar dem i moderna sammanhang där de inte längre är giltiga.

7.2 Division med noll: historia och tillämpning inom matematikämnet

Vidare kan vi observera att de förklaringsmodeller som användes av historiska matematiker vid hantering av division med noll på många sätt överensstämmer med de förklaringar som lärare, lärarstudenter och elever använder idag. Idéer som att talet i täljaren är svaret till division med noll, att det resulterar i noll, att det är oändligt, att det inte går att beräkna eller att det är odefinierat har återkommit genom historien och speglas fortfarande i moderna resonemang. Trots att de konceptuella ramverken har förändrats över tid, från historiska matematikers synsätt till dagens didaktiska perspektiv, kvarstår utmaningarna i att förstå och förklara division med noll. Vi ser från resultatet av denna litteraturstudie att även dagens lärare, lärarstudenter och elever bygger sina förklaringar på dessa grundläggande idéer, trots den matematiska utvecklingen och ett mer avancerat teoretiskt ramverk. Detta tyder på att vissa fundamentala tankemönster kring noll och division med noll är djupt rotade i vårt matematiska tänkande och påverkar inlärningen. I undervisningssammanhang kan läraren beskriva hur utvecklingen av tankar bakom beräkning av division med noll för eleverna. Med detta kan eleverna skapa en uppfattning om varför kvoten till division med noll inte blir ett tal, noll, oändligt eller omöjligt. Den blir odefinerad. Eleverna kan exempelvis studera Brahmaguptas försök till att definiera kvoten till division med noll och reflektera över hur han resonerade i förhållande till hur vi resonerar idag.

Bråting och Pejlare (2015) diskuterar hur matematikhistoriska inslag i undervisning kan bidra med ökad förståelse eller mer förvirring kring ämnet. Just division med noll är inget specifikt de benämner men deras teorier kan anpassas till vårt exempel. Precis som nämnts ovan har lärare, lärarstudenter och elever idag ett annat teoretiskt ramverk än vad historiska matematiker hade. Matematiker har genom historien försökt visa en lösning på division med noll men det tog flera hundra år innan de kom fram till lösningen som idag anses korrekt, att divisionen blir odefinerad. Begreppet odefinerad fanns inte för exempelvis Bháskara, Mahavira och Brahmagupta (Romig, 1924) och heller inte begreppet oändlighet som Wallis beskrev (Romig, 1924). Att presentera historiska lösningsförsök på division med noll kan skapa förvirring om eleverna inte tydligt ser skillnaden mellan historiska och moderna matematiska ramverk. Bråting och Pejlare (2015) betonar vikten av att särskilja mellan historia och arv, så att elever förstår att äldre matematiker arbetade under andra förutsättningar. Genom att elever till en början förstår nollans matematiska roll i division med noll med formella argument innan de introduceras för dess historiska utveckling kan risken för missförstånd minska. De förutsättningar som finns för att lösa division idag skiljer sig helt från hur det var förr. Historiska matematiker hade ett annat typ av konceptuellt ramverk än vad elever i högstadiet har idag då matematiker enligt historien tillbringade en stor del av sitt liv med matematiken. Eleverna i högstadiet har matematik några timmar i veckan och intresset eller engagemanget är sällan jämförbart. Genom att beskriva dessa skillnader skapas en förståelse hos eleverna hur de idag kan lösa uppgifter som inte historiska matematiker för hundratals år sedan kunde lösa. Att förstå nollans historia kan därför vara värdefullt, men det måste kopplas till moderna matematiska definitioner för att undvika missförstånd hos elever.

Dessa paralleller visar att vissa tankemönster kring noll verkar vara universella och återkommande, trots skillnader i tid, kultur och kunskapsnivå. Det är därför intressant att undersöka hur dessa idéer överlevt. Precis som de historiska försöken visar, kan begrepp som *oändlighet* eller *går inte* kännas mer intuitiva än den formella definitionen odefinierad. Detta pekar på en viktig didaktisk utmaning, att förena elevers intuitiva förståelse med det formella matematiska ramverket. Ett exempel på detta är det ofta förekommande svaret på att division med noll skulle kunna resultera i oändlighet. Resultaten från studierna visar att elever än idag ofta svarar att division med noll är oändligt. Detta resonemang går att härleda till äldre matematiska idéer som presenterades av Wallis under 1600-talet. Utifrån ett didaktiskt perspektiv innebär detta att undervisningen behöver adressera både de matematiska definitionerna och de underliggande missförstånden. Det är inte tillräckligt att bara slå fast att division med noll är odefinierad utan lärare behöver också hjälpa eleverna att förstå varför det är så, och varför det inte kan vara något annat. Här finns därmed stora möjligheter att använda historiska exempel som en brygga mellan elevens vardagsförståelse och matematiken. Vi kan konstatera att ett historiskt perspektiv inte bara förklarar hur uppfattningar om noll och division med noll vuxit fram, utan också hur dessa idéer fortfarande påverkar förståelsen hos elever och lärarstudenter idag. Den didaktiska utmaningen ligger i att knyta samman dessa historiska exempel med den moderna matematiken och därigenom skapa en undervisning som inte bara förmedlar rätt begrepp, utan också främjar djupare förståelse och nyfikenhet hos elever. Det finns med andra ord en stor pedagogisk vinst i att anlägga ett historiskt perspektiv i undervisningen om noll och division med noll, men kräver att läraren särskiljer på den historiska matematiken och dagens moderna matematik.

7.3 Den pedagogiska paradoxen: Hur lär man ut ingenting?

Ordet *noll* har genomgått en språklig och konceptuell transformation som skapar både filosofiska och pedagogiska utmaningar. Ordet härstammar ursprungligen från det indiska ordet *sunya* som betyder tomhet vilket antyder att noll initialt inte bara var en numerisk symbol utan också en abstrakt idé om frånvaro eller tomrum. Detta leder till en grundläggande språklig paradox: Hur kan något som representerar ingenting ändå ha en egen existens? I vardagligt språk implicerar *ingenting* en total frånvaro, medan noll inom matematiken betraktas som ett tal med ett definierat värde, vilket kan orsaka missuppfattningar särskilt vid operationer med division. Som Juter (2022) och Tsamir och Sheffer (2000) påpekar, kan denna språkliga tvetydighet göra det svårt att förstå varför division med noll är odefinierad för lärarstudenter och elever. Detta dilemma förstärks av historiska skillnader i hur matematiska begrepp utvecklats.

Resultatet visar att elevers uppfattning om noll ofta präglas av vardagliga föreställningar där noll ses som *ingenting* (Blake & Verhille, 1985). Denna förenklade analogi fungerar i vissa sammanhang men leder till problem vid mer abstrakta begrepp/operationer/divisioner som division med noll. Som Grouws och Reys (1975b) visar, tenderar elever att resonera att om *ingenting fungerar* i en multiplikation, så blir kvoten i motsvarande division noll. Detta är en slutsats som bygger på intuition snarare än matematiska resonemang. Dock kan det finnas en pedagogisk vinst i att använda uttryck som exempelvis *addera ingenting* i undervisningen särskilt i tidiga årskurser. Förklaringar där det kan vara meningsfullt att säga att om man har fem äpplen och lägger till *ingenting*, så har man fortfarande fem. Detta beskriver på ett intuitivt sätt nollans effekt i en matematisk operation, där noll-är-ingenting analogin fungerar som ett verktyg för att förstå beräkningen. Det finns som sagt både pedagogiska vinster och utmaningar med noll-är-ingenting analogin. Ett exempel på en utmaning är när elever möter mer komplexa matematiska operationer där noll har definierade egenskaper, och inte bara är ett tomrum. Detta tyder på behovet av ett mer precist språk i undervisningen. Att exempelvis säga "fyra - noll" i en idrottssituation istället för "fyra mot ingenting" kan bidra till att befästa noll som ett tal snarare än ett tomrum. För att undvika missförstånd behöver eleverna inte bara procedurkunskaper utan också en begreppslig förståelse för när vardagliga analogier inte längre är tillämpbara. Samtidigt som lärare kan man med fördel uppmärksamma för eleverna att noll i många vardagliga sammanhang fungerar som en referens snarare än som ett tecken på tomhet. I stället för att signalera frånvaro markerar noll ofta en neutral position eller ett utgångsläge som exempelvis våning noll i en byggnad eller havsnivån i höjdmätningar. I dessa fall representerar noll ett faktiskt värde i skalan, snarare än *ingenting*. En nyanserad undervisning av noll kan bidra till att eleverna erhåller en mer djupgående förståelse av dess betydelse i olika matematiska sammanhang.

Vidare framkommer det i resultatet av denna litteraturstudie att många elever och även lärarstudenter har bristande förståelse för varför division med noll är odefinierad. Som Clarke, Roche och Mitchell (2010) diskuterar är bråk ett utmanande område att undervisa om och att lära sig. Enligt resultatet i denna litteraturstudie stämmer det inte minst när nollan är inkluderad. En möjlig lösning är att följa en mer konceptuell undervisningsmodell där elever får arbeta sig uppåt i sin förståelse, snarare än att börja med abstrakta regler. Att först förstå multiplikation, sedan division och därefter den inversa relationen kan hjälpa elever att gradvis bygga upp en stabil förståelse för varför division med noll skapar problem. Att elever förstår multiplikation och division innan de introduceras för division med noll är mer fördelaktigt än att möta det som en abstrakt regel utan kontext. Läraren bör aktivt arbeta med att få elever att ifrågasätta och utforska matematiska regler snarare än att bara acceptera dem. Detta är en del av den svenska läroplanen (Lgr22, 2022) där lärare ska ge elever möjlighet att göra rimlighetsbedömningar vid beräkningar.

Vi har observerat att lärare har använt sig av regeln att division med noll är odefinierad och använder förklaringen att *det bara är så*, utan att ge ett djupare resonemang. Detta kan vara problematiskt eftersom det kan hämma elevernas nyfikenhet, kritiska tänkande och förståelse av matematiska koncept. Att förlita sig enbart på matematiska regler kan också leda till ogrundade slutsatser. Ett exempel på detta är den generalisering som uppkom då elever förstått att noll i nämnaren gjorde operationen odefinierad och därmed drog slutsatsen att division med noll i täljaren fick samma resultat (Grouws & Reys, 1975a). En viktig didaktisk implikation är därför hur lärare presenterar och förklarar noll, särskilt i relation till divisionen. Det är också relevant att påpeka att regelbaserade förklaringar som förekom ofta i de undersökta studierna kan ha en grund i att man anser att dagens matematik är fullständig. Genom att betrakta matematiken som ett ständigt pågående arbete snarare än en färdig produkt kan det bli tydligare varför det är viktigt att förstå resonemang och bakomliggande koncept än att enbart förlita sig på inlärda regler.

7.4 Läromedlens begränsningar och det didaktiska ansvaret

I vår undersökning av svenska läroböcker i matematik för mellan- och högstadiet på NCM fann vi inte att division med noll varken i täljaren eller nämnaren var en del av innehållet. Det var endast två av alla böcker som tog upp det, se tabell 4. Detta innebär i sin tur att ännu större ansvar läggs på läraren att förklara division med noll både när noll står i täljaren och nämnaren. Från resultatet i denna litteraturstudie ser vi inte att lärare och lärarstudenter har tillräcklig förståelse för att undervisa elever om vad division med noll är och varför det blir odefinierat. Lärare med över tio års yrkeserfarenhet kunde i större utsträckning ge korrekta välgrundade förklaringar till varför divisionen blir odefinierad. En fråga som väcks kring detta är vad det kan bero på att endast lärare med längre erfarenhet har djupare förståelse kring division med noll? Kan deras förståelse utvecklas på grund av att de genom åren mött frågor och funderingar från elever om division med noll? Genom att besvarat frågor och reflekterat djupare över varför division med noll är odefinerad kan de sökt mer grundläggande förklaringar. En annan möjlig förklaring är att de med längre erfarenhet har haft fler tillfällen att själva stöta på och diskutera ämnet med kollegor, vilket kan ha bidragit till en fördjupad förståelse. Oavsett orsak pekar detta på vikten av att integrera tydligare undervisning om division med noll i både lärarutbildning och fortbildning för att säkerställa att alla lärare, oavsett erfarenhet, har de kunskaper som krävs för att undervisa om ämnet på ett korrekt och begripligt sätt.

En motsägelsefull insikt vi identifierade under undersökningen av svenska matematikläroböcker i förhållande till läroplanen (Lgr22, 2022) var närvaron av division med noll. Läroplanen (Lgr22, 2022) beskriver att elever i årskurs 4 till 6 ska lära sig "De fyra räknesätten och regler för deras användning vid beräkningar med naturliga tal" (Lgr22, 2022, s. 57) där division med noll är inkluderat då noll är ett naturligt tal enligt andra läroböcker från undersökningen, se tabell 4. Att division med noll i täljaren är det enda exemplet i *en* av böckerna är väldigt motsägelsefullt. Då läroböcker ska vara ett hjälpmedel för att underlätta lärarens undervisning kan man se det som essentiellt att de uppfyller det innehåll som förväntas ingå i undervisningen enligt läroplanen. Med avsaknad av uppgifter eller förklaringar i läroböckerna till division med noll måste läraren vara uppmärksam. Läraren behöver på egen hand upptäcka det läroplanen kräver som inte läroböckerna uppfyller och på ett pedagogiskt sätt förklara det för eleverna. Att hitta det innehåll som läroböckerna inte behandlar är svårt. Det är därför viktigt att läraren inte helt förlitar sig på och utformar undervisningen enbart efter läroboken.

Att använda fysiska modeller för att beräkna och förklara bråk och division är i många fall väldigt pedagogiskt då det blir synligt och konkret för eleverna. I fallet med division med noll kan dock fysiska modeller leda till förvirring, vilket Lajoie och Mura (1998) diskuterar. Detta bidrar till stora svårigheter för lärare då de inte kan förlita sig på konkreta argument eller fysiska modeller eftersom det kan bli förvirrande för eleverna. Samtidigt återfinns endast ett exempel med division med noll i nämnaren i *en* av de undersökta läroböckerna för högstadiet. I läroboken finns en exempeluppgift som förklarar att man inte kan dividera tal med noll då det blir oändligt, och att oändligt inte är ett tal. Det anges i en annan exempeluppgift i samma lärobok att division med noll inte är definierat och att det inte går att beräkna. Informationen i läroboken är därmed motsägelsefull. Det som är intressant är att samtliga svar i läroboken säger emot varandra, och kan därför bli mer förvirrande både för elever som försöker förstå begreppet och för lärare som ska förmedla det på ett tydligt sätt. Efter att ha granskat resultaten i de undersökta artiklarna har vi som blivande lärare insett betydelsen av att ha kunskap och förståelse för division med noll för att kunna hantera det i undervisningssammanhang. Vi ser dock utmaningar med att inkludera detta i undervisningen eftersom det finns få läromedel som behandlar ämnet. Det är därför inte självklart att lärare uppmärksammar det, om det inte lyfts på annat sätt, till exempel genom frågor från nyfikna elever.

7.5 Didaktiska lösningsförslag

Studierna diskuterar olika lösningsförslag till hur lärare kan förklara division med noll. Vi väljer att lyfta två olika förslag som vi som framtida lärare tar med oss. Dessa anser vi som både pedagogiska och effektiva för att förklara division med noll i nämnaren utan att använda fysiska modeller eller regelbaserade förklaringar. Förklaringsmodellerna bidrar till en ökad konceptuell förståelse då de baseras på matematiska principer och metoder.

Det första lösningsförslaget på förklaringsmodell beskrivs av Grouws och Reys (1975a). De menar att vid förklaringen av division med noll kan läraren relatera till sambandet mellan multiplikation och division. Vi resonerar på liknande sätt som Grouws och Reys (1975a), att elever kommer få en större förståelse för definitionen av division med noll genom att de först introduceras till divisionen för att sedan relatera till den multiplikativa inversen. Detta kan genomföras under en genomgång med exempeluppgifter där kvoten representeras av en tom ruta eller symbol i både divisionen och multiplikationen. Exempelvis divisionen $15 \div 0 = \square$ och den multiplikativa inversen $\square \cdot 0 = 15$. Här söker vi alltså efter ett tal som multiplicerat med 0 blir 15. Enligt definitioner för multiplikation finns inget tal som kan multipliceras, då alla tal multiplicerat med 0 blir 0 och kan därmed inte vara lika med 15. Detta innebär att division med noll i nämnaren är odefinierad då det inte finns något tal som multiplicerat med noll kan ge ett annat numeriskt värde än noll. Ett missförstånd som kan uppstå är när elever stöter på divisionen $0 \div 0$. Ett tal dividerat med sig själv är lika med 1, exempelvis $5 \div 5 = 1$ och elever kan missförstå och dra slutsatsen att divisionen $0 \div 0$ också måste bli 1. Detta missförstånd kan förklaras med hjälp av sambandet mellan division och multiplikation då divisionen $0 \div 0 = \square$ och den multiplikativa inversen $\square \cdot 0 = 0$. Den multiplikativa inversen beskriver att ett tal multiplicerat med 0 blir 0 vilket gäller för *alla* tal, och därför är denna division också odefinerad då det inte finns ett entydigt svar. I det fall, då läraren använder sig av en tom ruta som representation, är det en viktig aspekt att reflektera över hur detta som fysisk modell kan vara källa till förvirring som Lajoie och Mura (1998) diskuterar. En möjlig lösning för att undvika de tomma rutorna som symbol är att använda bokstäver för att representera hur talen i division och dess multiplikativa invers relaterar, exempelvis $a \div b = c \Leftrightarrow c \cdot b = a$, eller med former som presenteras i exemplet i 5.4.3.

Det andra lösningsförslaget är att använda gränsvärde som ett verktyg för att förklara för elever varför division med noll är odefinierad. Att använda gränsvärde som förklaring i undervisningen föreslår Quinn m.fl. (2008) som en metod för att förbättra lärarnas förståelse av division med noll och därmed deras möjligheter att undervisa om det. Vi anser att detta även är något som elever kan dra nytta av. Genom att förklara hur kvoten i en division blir större och större ju mindre talet i nämnaren är, kan elever få en djupare förståelse för att division med noll inte kan ha ett entydigt resultat. Ett tydligt exempel är att ta en serie tal som närmar sig noll och undersöka vad som händer med kvoten. Om vi dividerar talet 1 med successivt mindre positiva tal, som $1 \div 0.1$, $1 \div 0.01$ och $1 \div 0.001$, ser vi att resultatet blir 10, 100 och $1\,000$. Kvoten blir alltså större och större. Om vi istället dividerar 1 med negativa tal som närmar sig noll, som $1 \div (-0.1)$, $1 \div (-0.01)$ och $1 \div (-0.001)$, ser vi att resultatet blir -10, -100 och -1 000, vilket innebär att talet i kvoten blir ett större och större negativt tal. Detta visar att när nämnaren närmar sig noll från olika håll (positivt och negativt), går kvoten mot två helt olika gränser: positiv och negativ oändlighet. Gränserna kommer inte att ge ett entydigt svar och därför är divisionen med noll i nämnaren inte definierad. Detta kan med fördel visas visuellt med hjälp av en graf för funktionen $1 \div x$, som illustrerar hur kvoten av divisionen ser ut när x närmar sig noll från både positiv och negativ riktning.

Ett missförstånd som kan uppstå med detta lösningsförslag är om eleverna istället tänker att kvoten till division med noll blir oändlig. Ett sätt att förhindra detta missförstånd är att läraren noggrant förklarar att om kvoten går mot oändlighet, innebär det inte att den når ett specifikt värde, utan snarare att resultatet blir oändligt stort i både positiv och negativ riktning beroende på om vi närmar oss noll från den positiva eller negativa sidan. Det är då viktigt att understryka för eleverna att oändlighet inte är ett tal, utan ett sätt att beskriva något utan gräns. Att det från positiv och negativ riktning mot noll drar sig mot positiv respektive negativ oändlighet. Detta medför att när nämnaren *är* noll finns inte ett bestämt resultat och därför inte kan definieras matematiskt. Anledningen till att elever ändå tror att kvoten blir oändlig kan vara för att de har svårt att se *odefinierat* som ett korrekt svar då det kan ge en känsla av att det är ofullständigt. Varken oändlighet eller odefinierat är ett specifikt värde. Med tanke på att oändligheten har en symbol, ∞, till skillnad från odefinierat som inte har det, kan det därför ge känslan av att odefinierat inte är ett fullständigt svar.

7.6 Vidare forskning

Vidare forskning kan undersöka hur olika pedagogiska metoder påverkar elevernas förståelse av noll och division med noll. Att undersöka huruvida det finns fysiska modeller eller visuella representationer som kan minska elevernas förvirring kring begreppet noll kan vara fördelaktigt för att använda i lägre årskurser som mellanstadiet då elever där använder mycket figurer och symboler för att förstå division och bråk. Det vore också intressant att jämföra hur läroplaner i flera olika länder behandlar detta ämne och hur det påverkar elevernas begreppsförståelse. Från våra undersökningar av läromedel där division med noll inte är inkluderat anser vi att mer forskning kring hur moderna läromedel bättre inkluderar förklaringar och uppgifter som rör division med noll är nödvändig.

Referenslista

Ball, D. L. (1990). Prospective elementary and secondary teachers' understanding of division. *Journal for Research in Mathematics Education, 21*(2), 132–144. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.21.2.0132

Blake, R., & Verhille, C. (1985). The Story of 0. *For the Learning of Mathematics*, *5*(3), 35–47. http://www.jstor.org/stable/40247793

Boyer, C. B. (1944). Zero: The symbol, the concept, the number. *National Mathematics Magazine*, *18*(8), 323–330. https://doi.org/10.2307/3030083

Bråting, K., & Pejlare, J. (2015). On the relations between historical epistemology and students' conceptual developments in mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 89*(2), 251–265. https://doi.org/10.1007/s10649-015-9600-8

Clarke, D. M., Roche, A. & Mitchell, A. (2010). Tio sätt att göra bråk levande. *Nämnaren, nr 2,* (37–44). https://ncm.gu.se/media/ncm/matematiklyftet/07F_clarke_mfl.pdf

Crespo, S., & Nicol, C. (2006). Challenging Preservice Teachers' Mathematical Understanding: The Case of Division by Zero. *School Science and Mathematics, 106*(2), 84–97. https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2006.tb18138.x

Grouws, D. A., & Reys, R. E. (1975a). Division involving zero: an experimental study and its implications. *The Arithmetic Teacher, 22*(1), 74–80. https://doi.org/10.5951/AT.22.1.0074

Grouws, D. A., & Reys, R. E. (1975b). Division involving zero: Some revealing thoughts from interviewing children. *School Science and Mathematics*, *75*(7), 593–605. https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.1975.tb09861.x

Henry, B. (1969). Zero, the troublemaker. *The Arithmetic Teacher*, *16*(5), 365–367. https://doi.org/10.5951/AT.16.5.0365

Juter, K. (2019). University students' general and specific beliefs about infinity, division by zero and denseness of the number line. *NOMAD Nordic Studies in Mathematics Education*, *24*(2), 69–88. https://doi.org/10.7146/nomad.v24i2.149020

Juter, K. (2022). Pre-Service Teachers' General and Specific Arguments in Real Number Contexts. *Mathematics Teacher Education & Development, 24*(1), 1–22. https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1360871.pdf

Kaplan, R. (1999). *The nothing that is: a natural history of zero.* Oxford university press.

Karakus, F., & Aydin, B. (2019). Elementary Mathematics Teachers' Specialized Content Knowledge Related to Division by Zero. *Malaysian Online Journal of Educational Sciences*, *7(2)*, 25–40. https://mojes.um.edu.my/index.php/MOJES/article/view/17325/9963

Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet. (2022). Skolverket. https://www.skolverket.se/getFile?file=13074

Lajoie, C., & Mura, R. (1998). The danger of being overly attached to the concrete: the case of division by zero. *NOMAD Nordic Studies in Mathematics Education, 6*(1), 7–21. https://tidsskrift.dk/NOMAD/article/download/146497/189713

O'Connor, J.J., & Robertson, E.F. (2000a, november). *A history of Zero.* MacTutor. https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Zero/

O'Connor, J.J., & Robertson, E.F. (2000b, november). *Mayan mathematics.* MacTutor. https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Mayan_mathematics/

Quinn, R. J., Lamberg, T. D., & Perrin, J. R. (2008). Teacher perceptions of division by zero. *The Clearing House: A Journal of Educational Strategies, Issues and Ideas, 81*(3), 101–104. https://doi.org/10.3200/TCHS.81.3.101-104

Romig, H. G. (1924). Discussions: Early history of division by zero. *The American Mathematical Monthly, 31*(8), 387–389. https://doi.org/10.2307/2298825

Svenska Akademiens Ordböcker. (2021). Noll. I *Svensk ordbok.* Hämtad 3 april 2025 från https://svenska.se/so/?id=155737_1&pz=7
Tsamir, P., & Sheffer, R. (2000). Concrete and formal arguments: The case of division by zero. *Mathematics Education Research Journal*, *12*(2), 92–106. https://doi.org/10.1007/BF03217078
Wheeler, M. M., & Feghali, I. (1983). Much ado about nothing: Preservice elementary school teachers' concept of zero. *Journal for Research in Mathematics Education, 14*(3), 147–155. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.14.3.0147

Bilaga

Nedan presenteras en bilaga till litteraturstudien där referenserna till de undersökta läroböckerna listas.

Referenslista för undersökta läroböcker

Asikainen, K., Nyrhinen, K., Rokka, P. & Vehmas, P. (2018). Mera Favorit Matematik 4A. (Andra upplagan). Studentlitteratur.

Asikainen, K., Nyrhinen, K., Rokka, P. & Vehmas, P. (2018). Mera Favorit Matematik 5A/B. (Andra upplagan). Studentlitteratur.

Asikainen, K., Nyrhinen, K., Rokka, P. & Vehmas, P. (2018). Mera Favorit Matematik 6A. (Andra upplagan). Studentlitteratur.

Asikainen, K., Nyrhinen, K., Rokka, P. & Vehmas, P. (2018). Mera Favorit Matematik 6B. (Andra upplagan). Studentlitteratur.

Asikainen, K., Nyrhinen, K., Rokka, P. & Vehmas, P. (2019). Mera Favorit Matematik 4B. (Andra upplagan). Studentlitteratur.

Bjermo, J., Domert, D., Lundin Jakobsson, J., Madej, L., Öberg, M., Amberntsson, I., Ristamäki, A., & Söderberg, L. (2013). Vektor Matematik årskurs 7. (Första upplagan). Natur & Kultur.

Bjermo, J., Domert, D., Madej, L., Ristamäki, A., & Lundin Jakobsson, J. (2015). Vektor Matematik årskurs 9. (Första upplagan). Natur & Kultur.

Björklund, E. & Dalsmyr, H. (2014). Koll på matematik 4A. (Första upplagan). Sanoma utbildning.

Björklund, E. & Dalsmyr, H. (2015). Koll på matematik 4B. (Första upplagan). Sanoma utbildning.

Björklund, E. & Dalsmyr, H. (2015). Koll på matematik 5A. (Första upplagan). Sanoma utbildning.

Björklund, E. & Dalsmyr, H. (2016). Koll på matematik 6A. (Första upplagan). Sanoma utbildning.

Björklund, E. & Dalsmyr, H. (2017). Koll på matematik 5B. (Första upplagan). Sanoma utbildning.

Björklund, E. & Dalsmyr, H. (2017). Koll på matematik 6B. (Första upplagan). Sanoma utbildning.

Carlsson, S. & Hake, K. B. (2016). Matte direkt 7. (Tredje upplagan). Sanoma Utbildning.

Carlsson, S., Hake, K. B. & Öberg, B. (2017). Matte direkt 8. (Tredje upplagan). Sanoma Utbildning.

Carlsson, S., Hake, K. B., Lundkvist, E. & Öberg, B. (2018). Matte direkt 9 (Tredje upplagan). Sanoma Utbildning.

Carlsson, S., Liljegren, G. & Picetti, M. (2004). Matte direkt: Borgen 6A. (Första upplagan). Sanoma utbildning.

Carlsson, S., Liljegren, G. & Picetti, M. (2004). Matte direkt: Borgen 6B. (Första upplagan). Sanoma utbildning.

Cederqvist, K., Larsson , S. & Gustafsson, P. (2013). Prio matematik 8. (Första upplagan). Sanoma Utbildning.

Cederqvist, K., Larsson , S. & Gustafsson, P. (2014). Prio matematik 9. (Första upplagan). Sanoma Utbildning.

Cederqvist, K., Larsson , S. & Gustafsson, P. (2024). Prio matematik 7. (Andra upplagan). Sanoma Utbildning.

Domert D., Lundin Jakobsson J., Madej L. & Öberg M. (2014). Vektor Matematik Årskurs 8.

(Första upplagan). Natur & Kultur
Falck, P. & Picetti, M. (2012). Matte direkt: Borgen Grundbok 4B. (Andra upplagan). Sanoma utbildning.
Falck, P. & Picetti, M. (2012). Matte direkt: Borgen Grundbok 5A. (Andra upplagan). Sanoma utbildning.
Falck, P. & Picetti, M. (2012). Matte direkt: Borgen Grundbok 5B. (Andra upplagan). Sanoma utbildning.
Falck, P., Picetti, M. & Sundin, K. (2011). Matte direkt: Borgen Grundbok 4A. (Andra upplagan). Sanoma utbildning.
Gustafson, L., Hällebrand, J., Nyhlén Johansson, O., & Persson, J. (2016). Mondo Matematik 7. (Andra upplagan). Gleerups Utbildning AB.
Gustafson, L., Nyhlén Johansson, O., & Persson, J. (2017). Mondo Matematik 8. (Andra upplagan). Gleerups Utbildning AB.
Gustafson, L., Nyhlén Johansson, O., & Persson, J. (2018). Mondo Matematik 9. (Första upplagan). Gleerups Utbildning AB.
Heinonen, M., Luoma, M., Mannila, L., Rautakorpi-Salmio, K., Tapiainen, T., Tikka, T. & Urpiola, T. (2018). Favorit matematik 7. (Första upplagan). Studentlitteratur.
Heinonen, M., Luoma, M., Mannila, L., Rautakorpi-Salmio, K., Tapiainen, T., Tikka, T. & Urpiola, T. (2019). Favorit matematik 8. (Första upplagan). Studentlitteratur.
Heinonen, M., Luoma, M., Mannila, L., Rautakorpi-Salmio, K., Tapiainen, T., Tikka, T. & Urpiola, T. (2020). Favorit matematik 9. (Första upplagan). Studentlitteratur.
Undvall, L., Johnson, K. & Welén, C. (2019). Matematik Z. (Första upplagan). Liber.
Undvall, L., Johnson, K., Welén, C. & Ramsfeldt, S. (2017). Matematik X. (Första upplagan). Liber.
Undvall, L., Johnson, K., Welén, C. & Ramsfeldt, S. (2018). Matematik Y. (Första upplagan). Liber.