



Modellering av ögonrörelser på en målning med spatio-temporal punktprocesser

En jämförande simuleringsstudie av modeller med varierande homogenitet i tid och rum

Modelling eye movements on a painting with spatio-temporal point processes

A comparative simulation study of models with varying homogeneity in time and space

Examensarbete för kandidatexamen i matematisk statistik vid Göteborgs universitet

Jonathan Albertsson

Merima Dedić

Benjamin Reehorst Lyrstrand

David Ögaard Jozic

Modellering av ögonrörelser på en målning med spatio-temporala punktprocesser

En jämförande simuleringsstudie av modeller med varierande homogenitet i tid och rum

Examensarbete för kandidatexamen i matematisk statistik vid Göteborgs universitet

David Ögaard Jozic

Examensarbete för kandidatexamen i matematisk statistik inom Matematikprogrammet vid Göteborgs universitet

Jonathan Albertsson Merima Dedić Benjamin Reehorst Lyrstrand

Handledare: Aila Särkkä

Institutionen för Matematiska vetenskaper
CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
GÖTEBORGS UNIVERSITET
Göteborg, Sverige 2024

Förord

För det här kandidatarbetet har vi på olika sätt modellerat hur en person iakttar en målning. Frågeställningen togs fram av vår handledare Aila Särkkä som också har väglett oss under hela arbetet i frågor om såväl teori som metod. Vi vill tacka Aila för hennes generositet med både tid och engagemang.

Med ett projektarbete följer många ansvarsområden och vi har strävat efter en så rättvis fördelning som möjligt. För själva skrivandet framgår den huvudsakliga ansvarsfördelningen i tabell 1 nedan. Alla avsnitt har dock omarbetats i omgångar efter återkoppling från övriga gruppmedlemmar och handledare. Våra veckovisa möten har bidragit till att vi gemensamt har planerat, diskuterat val av metoder och kommit på idéer att utveckla. Både dessa gruppinsatser, och det enskilda arbetet, har loggats i en veckodagbok och i individuella tidsloggar. I stora drag har Benjamin och David ansvarat för att programmera våra modeller medan Jonathan och Merima har ansvarat för den teoretiska bakgrunden. Det har då fallit sig naturligt att Benjamin och David har experimenterat mer med olika kreativa lösningar under programmeringens gång, och att Jonathan och Merima har fördjupat sig i inläsning och språket i rapporten. Alla har dock satt sig in i både kod och teori, och samtal om dessa har förts gemensamt. Slutligen har även alla analyser samt författandet av slutsatsen genomförts gemensamt.

Avsnitt	Huvudförfattare
Förord	Merima
Populärvetenskaplig presentation	Benjamin
Sammandrag och abstract	David
Inledning	Jonathan
Syfte och frågeställningar	Jonathan
Avgränsningar	Jonathan
Samhälleliga och etiska aspekter	Merima
Spatiala punktprocesser	Merima
Intensitet	Merima
Skattning av intensitet	Merima
Kanteffekter och kantkorrigering	Jonathan
Homogena Poissonprocesser	Jonathan
Icke-homogena Poissonprocesser	Jonathan
Ripleys K-funktion och Besags L-funktion	Merima
Data och metod	Benjamin, David
Data	Benjamin, David
Modellanpassning	Benjamin, David
Skattning av tidslängder och intensitet	Benjamin, David
Test av CSR	Benjamin, David
Jämförelsestatistikor	Benjamin, David
Utförande	Benjamin, David
Resultat och analys	Benjamin, David
Modell 1: homogen spatial Poissonprocess	Benjamin, David
Modell 2: icke-homogen spatial Poissonprocess	Benjamin, David
Modell 3: tidsvarierande intensitet	Benjamin, David
Modell 4: anpassning utifrån extrema sackadlängder	Merima
Analys av Modell 4 på övriga personer	Jonathan
Diskussion och slutsats	Alla
Referenser	Jonathan
Appendix	Alla
Kod	Benjamin, David
Kod för modell 4	Merima

Tabell 1: Övergripande ansvarsfördelning av kandidatarbetet.

Populärvetenskaplig presentation

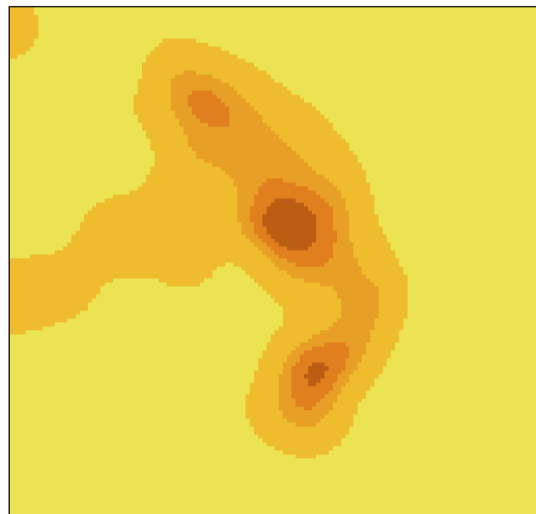
Du kanske någon gång ställt dig frågan, när du på din dator eller mobil surfat på internet, varför reklamen dyker upp på just de platser de gör på skärmen. Är det helt slumpmässigt? Eller har de som skapat hemsidan någon idé om var det är störst sannolikhet att vi som människor ser annonserna? Det korta svaret är att det inte är helt slumpmässigt, och som vi ska komma att se är frågan om hur människan ser på olika objekt inte en ny fråga.

År 1935 bröt psykologen Guy Thomas Buswell ny mark genom att försöka svara på frågan om hur människor ser på konst. Buswell konstaterade att resultaten av de olika deltagarna i hans studie varierade markant och var individuella. Han drog även slutsatsen att resultatet berodde på vilka instruktioner deltagarna fick innan de såg på konstverket. Nästan 100 år senare har teknologiska samt vetenskapliga framsteg möjliggjort en mer rigorös statistisk modellering av hur människor ser på objekt. Den här rapporten har tagit inspiration av en studie vid Jyväskylä universitet i Finland där de samlat in data av hur människors ögon rör sig när de tittar på konstverk. De ställde sig därefter frågan om det var skillnad mellan människor som hade erfarenhet av konst och de som inte hade det. Med den data som insamlades i samband med studien har vi i denna rapport försökt undersöka hur man kan skapa en statistisk modell som beskriver hur en människa ser på en målning.

Bilden nedan till vänster är ett konstverk vid namn *Picture with a Black Arch* av Wassily Kandinsky med tillhörande orange prickar som symboliserar vart en person i studien har sett på konstverket under en minut. Man kan tänka sig, ifall konstverket hade ett reellt motiv, som exempelvis ett porträtt, att man kan lista ut vart människor kommer att se på målningen. Kanske vid ögonen, eller näsan, eller en plats som konstnären särskilt lyfter fram. Men konstverket nedan är abstrakt och vår intuition kanske inte är så tillförlitlig här. Som man kan se finns det olika koncentrationer av prickar på konstverket. Man kan se att väldigt få prickar finns nere i de nedersta hörnen, såväl som i det övre högra hörnet. Istället verkar det finnas många prickar i centrum och längs det svarta bågliknande strecket som sträcker sig från vänstra sidan, ner mot det högra hörnet.

Ett sätt att representera vart en person tittar på konstverket är med en så kallad värmekarta. I värmekartan visar de mörkare nyanserna av gulorange platser som människan tittat mer på och de ljusare, områden där människan inte tittat lika ofta på. I figuren nedan till höger syns värmekartan för hur personen tittat på konstverket till vänster om den. Om man jämför de två figurerna ser man att de platser där de orange prickarna förekommer i högt antal är också de platser värmekartan visar de starkare färgerna.

Vid en observation av hur människan sett på målningen kan ett naturligt spørsmål vara huruvida man ser helt slumpmässigt eller om det finns någon struktur i vart ögat rör sig på målningen. Värmekartan indikerar dock, att man borde vara skeptisk till om man verkligen ser helt slumpmässigt. Man ser ju, att mitten av målningen verkar vara mer intressant som tidigare nämnts. Det verkar även som om den bågliknande figuren lockar personens ögon till högre grad.



För att modellera en människas blick har detta arbete studerat tre centrala egenskaper för ögonrörelser. Hur länge ögat stannar på varje punkt, hur långt ögat hoppar från en plats till en annan och tiden det tar för ögats hopp. Det finns svårigheter då konstverket är abstrakt som tidigare nämnts, men det finns några faktorer att ta i beaktning. Man kan vid observation av hur människan sett på målningen dra slutsatsen att det inte ser ut som om vår blick är helt slumpmässig. Vidare visar resultat att en modell som använder värmekartan baserad på andra personers blickar modellerar en människas blick bättre än en som antar att den vore helt slumpmässig.

Om en människa ser för länge på ett objekt kan man bli trött och blicken kanske inte rör sig på samma vis som i tidigare skede. Det motiverar att dela in tiden personen i studien tittar på målningen i kortare intervall för att ta hänsyn till tidsförändringen i blickens färdväg. Vidare visar det sig att personen tenderar att göra färre stora hopp med sin blick över tid, möjligtvis på grund av just tröttheten. Därför om man vid modellering tar hänsyn till färre långa hopp med blicken visar det sig vara en förbättring vid beskrivandet om hur personen tittar på målningen. Med denna återupprepande process utvecklades modellerandet där allt fler hänsynstaganden till olika fenomen inkluderades. I samklang med Buswells resultat visar detta arbete en hög variation bland olika individer. Men ändå, visar resultaten i denna rapport att det finns möjlighet att bättre modellera ett ögas rörelser på ett konstverk än att anta fullständig rumslig och tidsmässig slump.

Sammandrag

Ögats fixeringar, punkterna där blicken stannar, och sackader, de snabba hoppen mellan fixeringar, bildar ett unikt punktmönster i tid och rum. Dessa mönster kan därefter analyseras och tillämpas inom olika discipliner. Syftet med detta arbete är att bygga statistiska modeller som efterliknar dessa mönster. Modellerna anpassas till, och jämförs med, datan från en studie vid Jyväskylä universitet där 20 deltagare observerade sex olika målningar under tre minuter vardera. Detta arbete är begränsat till en av målningarna under första minuten av betraktandet.

Fyra unika modeller har utvecklats, alla använder sig av anpassade gammafördelningar till sackad- och fixeringstiderna för att modellera tidslängderna. Modellerna byggdes gradvis. Först en modell som är homogen i rum och tid, sedan en modell som är icke-homogen i rum men homogen i tid och därefter en modell som är icke-homogen både i rum och tid. Det slutgiltiga fixeringsmönstret för dessa tre är alla en realisering av en spatial Poissonprocess. I den slutgiltiga modellen tas sackadlängderna hänsyn till och ett beroende mellan punktpositionerna införs.

Modellerna utvärderades genom att använda existerande jämförelsestatistikor. Dessutom utvecklades en ny sådan. Den nya statistikan mäter hur stor andel av konstverket som täcks av både ögonrörelser från personen i fråga och modellen som utvärderas. Resultaten visar att en persons fixeringar över konstverket inte verkar vara likformigt fördelade. De visar också att en spatialt icke-homogen Poissonprocess är bättre på att fånga personens intresseområden än en spatialt homogen sådan, och att en tidsvarierande intensitet inte bidrar med en markant förbättring. Slutligen tyder resultatet på att en modell som tar hänsyn till ett beroende mellan fixeringar genom att reglera extrema sackadlängder presterar bäst. Specifikt framgår det att denna typ av modell är bättre på att undvika överskattning av blickens totala reslängd jämfört med de andra modellerna.

Nyckelord - fixering, jämförelsestatistikor, Poissonprocesser, punktmönster, sackad

Abstract

Eye fixations, the points where the gaze stops, and saccades, the rapid jumps between fixations, create a unique point pattern in time and space. These patterns can be analyzed and applied within different disciplines. The purpose of this project is to build statistical models that mimic these patterns. The models are fitted, and compared to, data from a study at the University of Jyväskylä where 20 participants observed six different paintings for three minutes each. This project is limited to a single painting for the duration of the initial minute of inspection.

Four unique models have been developed, all of them use a fitted gamma distribution for both the saccade and fixation durations to model time. The models were gradually built. First a homogeneous model in both space and time, then an inhomogeneous in space but homogeneous in time and thereafter an inhomogeneous model in both space and time. The final point pattern in these three models is a realization of a spatial Poisson process. The fourth and final model takes into account the saccade lengths and introduces dependency between point positions.

The models were evaluated using existing function summary statistics. In addition, a new one was developed. This measures what percentage of the painting is covered by both eye movements from the person in question and the model that is being evaluated. The results show that a person's fixations on the painting do not appear to be uniformly distributed. It also shows that a spatially inhomogeneous Poisson process is better at capturing the person's areas of interest when compared to its homogeneous counterpart, and that a time-varying intensity does not contribute to any visible improvement. Lastly, the results suggest that a model taking dependency between fixations into account by regulating extreme saccade lengths performs the best. Specifically, it appears that this type of model is better at avoiding overestimation of the total scanpath length compared to the other models.

Keywords - fixation, functional summary statistics, point pattern, Poisson processes, saccade

Innehåll

1	Inledning	1
1.1	Syfte och frågeställningar	1
1.2	Avgränsningar	2
1.3	Samhälleliga och etiska aspekter	3
2	Spatiala punktprocesser	3
2.1	Intensitet	4
2.2	Skattning av intensitet	4
2.3	Kanteffekter och kantkorrigering	5
2.4	Homogena Poissonprocesser	5
2.5	Icke-homogena Poissonprocesser	5
2.6	Ripleys K-funktion och Besags L-funktion	6
3	Data och metod	7
3.1	Data	7
3.2	Modellanpassning	7
3.2.1	Skattning av tidslängder och intensitet	7
3.2.2	Test av CSR	9
3.2.3	Jämförelsestatistikor	9
3.3	Utförande	10
4	Resultat och analys	10
4.1	Modell 1: homogen spatial Poissonprocess	11
4.2	Modell 2: icke-homogen spatial Poissonprocess	11
4.3	Modell 3: tidsvarierande intensitet	14
4.4	Modell 4: anpassning utifrån extrema sackadlängder	15
4.5	Analys av Modell 4 på övriga personer	17
5	Diskussion och slutsats	19
A	Appendix	i

1 Inledning

Synen utgör en betydande del av människans perception och har länge varit ett väl utforskat område. Särskilt har studier av ögats rörelser blivit allt viktigare inom flera discipliner, t.ex. för bättre visuell kommunikation och förståelse av människans kognitiva processer [1, 2]. Det finns också modernare exempel som demonstrerar hur datainsamling av ögonrörelser via smartmobiler kan identifiera lässvårigheter hos användaren [3].

Till följd av det ökande forskningsintresset har förståelsen för ögonrörelser förändrats genom historien [4]. Längre var uppfattningen att blicken rör sig harmoniskt mellan de punkter personen finner mer intressanta. Senare forskning, särskilt sedan uppkomsten av mer avancerad blickspårningsutrustning, visar däremot att ögonrörelser är mer komplexa än så [4]. Numera beskrivs ögonrörelser ofta som en sekvens av fixeringar och sackader. En fixering är ett tillstånd då blicken är relativt stilla, vilandes på en så kallad fixeringspunkt [5]. En sackad är däremot en liten, snabb och ofrivillig rörelse mellan två fixeringspunkter [4]. En samling av fixeringspunkter kan då ses som ett spatialt punktmönster och som en realisation av en spatio-temporal punktprocess [6].

I detta projekt kommer vi att studera ögonrörelser på ett konstverk med hjälp av blickspårningsdata. Den första användningen av blickspårning för studier av betraktelse av konst gjordes redan 1935 [7]. Sedan dess har flera bidrag till fältet uppkommit, t.ex. en två-stegsmodell för hur människor betraktar konst [7, 8]. Modellen bygger på att betraktaren i det första skedet skaffar sig en överblick av konstverket genom att observera det översiktligt, för att i det andra skedet fokusera på specifika detaljer som betraktaren finner mer intressanta.

Projektet tar avstamp från en studie av Ylitalo et al. [7] där ögonrörelser från personer med konstserfarenhet jämfördes med personer utan konstserfarenhet. Datan de använde sig av kommer från en tidigare konststudie där 20 studiedeltagares ögonrörelser spelades in medan de observerade sex olika målningar under tre minuters tid per målning. För att beskriva ögonrörelserna betraktades inte bara punktmönstret av fixeringspunkterna som en slumpvariabel, utan även fixeringstidslängderna, sackadtidslängderna och sackadlängderna. Genom detta kunde gruppernas ögonrörelser modelleras för att sedan simulera nya punktmönster. Vid simuleringarna användes en rad statistikor, det vill säga funktionsvärden som karakteriserar studiedeltagarnas punktmönster, för att kvantifiera ögonrörelserna. För att uppskatta modellernas förmåga att beskriva deltagarnas ögonrörelser jämfördes statistikorna bland simuleringarna från modellerna med de från datan över tid. Det är med bakgrund av dessa modellerings- och evalueringsmetoder som vårt projekt har sin utgångspunkt.

1.1 Syfte och frågeställningar

Det här projektet kommer att genomföras med data från den ovan nämnda konststudien. Av de sex målningarna som användes i studien så har vi för detta projekt valt en av dem, *Picture with a Black Arch* av Wassily Kandinsky, som visas i Figur 1. Syftet med arbetet är att modellera hur en person har tittat på konstverket. Modellkonstruktionen utgår från idéerna som presenterades ovan, d.v.s. genom att dels betrakta punktmönstret som ögonrörelsernas fixeringspunkter utgör som en realisation av en spatio-temporal punktprocess [6], och dels genom att betrakta fixeringstidslängderna, sackadtidslängderna och sackadlängderna som slumpvariabler likt Ylitalo et al. [7].



Figur 1: Målningen som arbetet bygger på, *Picture with a Black Arch* av Wassily Kandinsky [9].
Ⓢ Public domain.

Målet är att bygga och jämföra modeller som beskriver hur en person har tittat på målningen. Modellernas kvalitet kan värderas genom att jämföra personens simulerade ögonrörelser med dess faktiska ur datan, med hjälp av olika statistikor. Modellbyggandet kommer att behandlas iterativt där en ny, mer komplex modell analyseras och jämförs med den föregående. Först anpassas en relativt enkel modell där fixeringspunkterna är oberoende och följer en likformig sannolikhetsfördelning över hela målningen. En sådan modell skulle motsvara att personen tittade helt slumpmässigt på målningen utan någon underliggande spatial struktur. Denna modell kommer sedan att analyseras och jämföras med en annan som tar hänsyn till att personen tittar med större sannolikhet på vissa områden än andra. Eftersom den tidigare nämnda två-stegsmodellen från [8] föreslår att människor betraktar konst på olika sätt över tid undersöks och jämförs sedan två modeller som dessutom tar hänsyn till detta faktum. Av de genomlöpande analyserna och jämförelserna syftar arbetet till att besvara följande frågor:

1. Kan en fullständigt spatial slumpmässig modell beskriva hur en person ser på målningen eller tittar personen på den enligt någon underliggande spatial struktur?
2. I vilken omfattning förbättras modellen av att ta hänsyn till hur ögonrörelserna förändras över tid och rum?

1.2 Avgränsningar

I projektet har en rad avgränsningar gjorts för att passa dess syfte. Flera av dem rör hanteringen av datan. Till exempel används endast data tillhörande målningen i Figur 1, trots att data från alla sex målningar behandlade i konststudien finns att tillgå. Detta motiveras genom att målningarnas olika motiv uppenbarligen medför att personer tittar olika på dem.

En annan avgränsning är att endast datan av deltagarnas ögonrörelser från den första av de tre minuterna som deltagarna observerade målningen studeras. Med bakgrund av den tidigare nämnda två-stegsmodellen [8] är det rimligt att anta att deltagarna uppehåller sig alltmer inom samma områden på målningen vid slutet av observationstiden. På så sätt kan man argumentera för att datans senare delar rimligen inte bidrar till nya insikter om deltagarnas ögonrörelser.

Det bör också tydliggöras att våra resultat inte är generaliserbara för någon större population, eftersom deltagarna i konststudien inte utgör något slumpmässigt urval. Projektet bör därför endast ses som en förstudie som undersöker hur ögonrörelser på målningar kan modelleras.

1.3 Samhälleliga och etiska aspekter

Som tidigare nämnt så används data som består av inspelningar av ögonrörelser för en konststudie. När data från människor används är det viktigt att skydda deltagarnas integritet genom att beakta etiska aspekter.

Att använda data som ursprungligen har samlats in för ett annat syfte gör det svårt att känna till eventuella risker som deltagarna kan ha utsatts för under insamlingen. Vi känner inte heller till i vilken utsträckning deltagarna var medvetna om att datan skulle användas även i andra sammanhang. Samtidigt kan det ur ett samhällligt nyttoperspektiv ses som positivt att redan insamlad data används för flera olika studier om det går, eftersom datainsamling är kostsamt. Deltagarnas integritet skyddas genom att uppgifterna är anonymiserade och att det inte är möjligt att identifiera personer enbart utifrån ögonrörelser. Ytterligare kännedom om datainsamlingen gäller framför allt platsen och tillvägagångssättet för urvalet. Sammantaget är det inte tillräckligt för att kunna spåra datan till personerna i fråga.

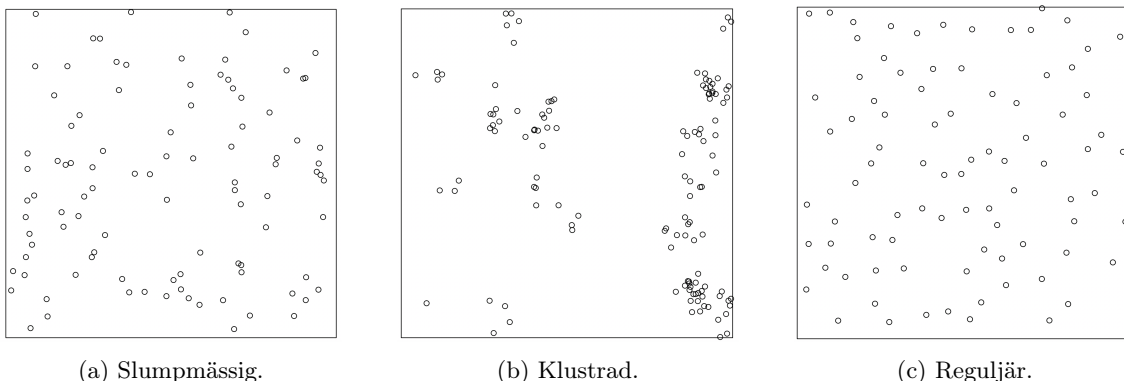
Tidigare i inledningen nämndes att studier på ögonrörelser kan användas i flera discipliner för olika syften. Det finns därmed många olika tillämpningsområden där man studerar ögonrörelser för samhälllig nytta. Förhoppningsvis kan detta arbete utgöra ännu ett bidrag. Även om tillämpningen i det här fallet görs på betraktelser av konstverk så kan själva metoderna ses som överförbara till andra områden.

2 Spatiala punktprocesser

Spatiala punktprocesser är ett sätt att modellera den slumpmässiga, geometriska fördelningen av en mängd punkter i planet eller rummet. Punkterna kan representera olika typer av objekt, t.ex. stjärnor på himlen, träd i en skog eller celler i kroppen [10]. Punktprocessen, d.v.s. hur den geometriska fördelningen av punkter har uppkommit, är slumpmässig och dess utfall är ett punktmönster. I jämförelse med klassisk statistik kan hela punktprocessen ses som motsvarigheten till en slumpvariabel; upprepningar resulterar i slumpmässigt genererade punktmönster varje gång [11]. När vi tar hänsyn till tidsaspekten i punktmönstrets utveckling kallas det spatio-temporal process [12]. Hur vi hanterar denna tidsaspekt beskrivs i avsnitt 3.2.1.

Eftersom koordinater används för att beskriva objektens platser är det naturligt att använda begreppet punkter för dessa platser. En punktprocess betecknas N och antalet punkter i en begränsad delmängd $B \subset \mathbb{R}^2$ är slumpmässigt och betecknas $N(B)$ [10].

En vanligt förekommande egenskap är stationaritet. En stationär punktprocess innebär att en translation av punktprocessen inte påverkar dess fördelning [10]. Om vi förskjuter B och därmed får ett annat punktmönster förväntar vi oss att se samma fördelning som hos den ursprungliga punktprocessen [12]. En punktprocess är inte stationär om punktfördelningen beror på punktens plats.



Figur 2: Olika typer av punktmönster, skapade med funktionerna `rpoispp`, `rThomas` respektive `rMater1` från paketet `spatstat` i R.

I Figur 2 ses punktmönster genererade av olika slags punktprocesser. Punktmönstret i Figur 2a

kallas fullständig spatial slumpmässighet och förkortas CSR (från engelskans "complete spatial randomness") vilket innebär att det saknas en inneboende struktur [11]. Både punktmönstret och den underliggande punktprocessen kommer att benämnas CSR. I Figur 2b ses klustrade områden och punktmönstret i Figur 2c kallas reguljärt eftersom det verkar finnas något som reglerar punkternas positioner sinsemellan och gör att de inte vill vara nära varandra [12]. Samtliga punktmönster i Figur 2 är genererade av stationära punktprocesser. Det kan vara svårt att avgöra huruvida en punktprocess är icke-stationär. Ett exempel på ett sådant punktmönster skulle vara om storleken på de klustrade områden i Figur 2b hade berott på deras platser [10].

2.1 Intensitet

I föregående avsnitt beskrevs att $N(B)$ är en slumpvariabel och B en begränsad yta. Väntevärdet av $N(B)$ är det förväntade antalet punkter i B och utgör ett mått på intensiteten som är en central egenskap inom punktprocesser [10]. Intensitetsfunktionen ges enligt [12, s. 57] av

$$\lambda(x) = \lim_{|dx| \rightarrow 0} \left\{ \frac{\mathbb{E}[N(dx)]}{|dx|} \right\}, \quad (1)$$

där $x \in B$ är en punkt i ett infinitesimalt område dx vars area betecknas $|dx|$. För stationära punktprocesser är intensiteten $\lambda > 0$ en konstant; medelvärdet av antal punkter per areaenhet [12].

2.2 Skattning av intensitet

Eftersom intensiteten är så pass central inom spatiala punktprocesser är dess skattning särskilt betydande. För att skatta intensiteten måste man välja ett observationsfönster $W \subseteq B$ varpå N studeras [10]. Exempelvis kan trädens positioner i en skog utgöras av en punktprocess N . Då är punkterna $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, där $n = N(W)$, de träd som står på det studerade delområdet W av hela skogen B . Om intensiteten antas vara konstant kan den skattas enligt

$$\tilde{\lambda} = \frac{n}{|W|},$$

vilket är en väntevärdesriktig skattning för alla stationära punktprocesser på W [10, s. 80].

När intensiteten inte är konstant utan varierar över W så kan intensitetsfunktionen (1) skattas med en icke-parametrisk metod som kallas kernelskattning [11]. Man använder en kernelfunktion $\kappa(x)$ som är en symmetrisk täthetsfunktion [10]. En skattning av intensitetsfunktionen i punkten x i observationsfönstret W ges enligt [10] av

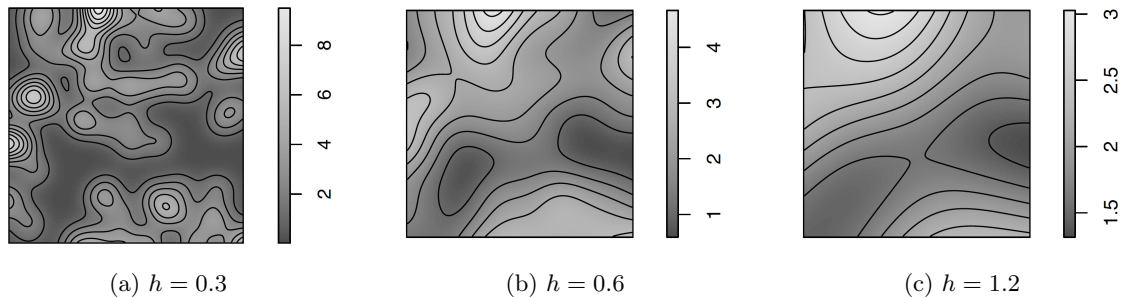
$$\tilde{\lambda}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \kappa_h(x - x_i), \quad \text{där } \kappa_h(x - x_i) = \frac{1}{h} \kappa\left(\frac{x - x_i}{h}\right).$$

Parametern h kallas bandbredd och används för att skala om täthetsfunktionen. Genom att justera h kan skattningen av intensiteten bli mer eller mindre jämn. Ovan ger alltså att

$$\tilde{\lambda}(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n \kappa\left(\frac{x - x_i}{h}\right). \quad (2)$$

Ofta används den Gaussiska täthetsfunktionen som kernelfunktion. Med omskalningen fås den Gaussiska fördelningen med väntevärde 0 och varians h^2 [13].

Det är viktigare med val av bandbredd än kernelfunktion, och valet av lämplig bandbredd är ofta svårt [10, 12]. Ett för litet värde på bandbredden h ger en spetsig intensitetsskattning, medan ett för högt värde ger en alldeles för utjämnad skattning. Den spetsiga skattningen medför risk att tappa information om fördelningsstrukturen över W , medan den utjämnade skattningen gör att lokala detaljer utelämnas [10]. I Figur 3 nedan illustreras effekterna av olika val av h .



Figur 3: Intensitetsskattningar över observationsfönstret $[0, 1] \times [0, 1]$ för olika val av bandbreddsparameter h , med samma punktmönster. Den spetsigaste skattningen ses i (a) och den mest utjämnade i (c).

2.3 Kanteffekter och kantkorrigering

Ett förekommande problem vid studier av spatiala punktprocesser är så kallade kanteffekter. Kanteffekter uppstår då en punktprocess N även lever utanför observationsfönstret W [12]. Detta kan potentiellt påverka värdet av vissa statistikor. Problemet blir då att statistikorna kan vara missvisande och att parameterskattningarna, exempelvis av intensiteten λ , i förlängningen inte blir väntevärdesriktiga. Lösningen på detta kallas kantkorrigering.

Det finns flera typer av kantkorrigeringar vars lämplighet beror på karaktären av N , W och specifik statistika [10]. Dessa typer kommer inte att utforskas nämnvärt, utan begreppet introduceras eftersom det används senare i detta arbete. Generellt kan en kantkorrigering beskrivas som en metod som tar hänsyn till eventuella kanteffekter vid beräkandet av statistikor, vilket i sin tur kan leda till mer väntevärdesriktiga skattningar [10].

2.4 Homogena Poissonprocesser

Ett naturligt första steg i analys av spatiala punktprocesser är att undersöka huruvida punktmönstret kommer från en CSR-process [12], som punktmönstret i Figur 2a. Det kräver en formalisering av egenskaperna stationaritet och oberoende punktfördelning som karaktäriserar CSR. Formaliseringen är känd som den homogena Poissonprocessen och möjliggör konkreta beräkningar och analys av detta till synes slumpmässiga fenomen [10].

En punktprocess N kallas en homogen Poissonprocess om den uppfyller följande egenskaper [10, 11]:

(Homogenitetsegenskapen) Intensiteten $\lambda > 0$ är konstant över B .

(Poissonegenskapen) Antalet punkter i B är Poissonfördelat enligt $N(B) \sim Po(\lambda|B|)$.

(Egenskapen om oberoende) För disjunkta mängder $B_1, B_2, \dots, B_k \subset \mathbb{R}^2$ är $N(B_1), N(B_2), \dots, N(B_k)$ oberoende slumpvariabler, givet godtyckligt k .

Observera att det av Poissonegenskapen och Homogenitetsegenskapen följer att väntevärdet av antalet punkter i B är konstant ty $\mathbb{E}\{N(B)\} = \lambda|B|$. Det följer också av de tre egenskaperna att den homogena Poissonprocessen är såväl stationär som att den har oberoende punktfördelning [10].

Den homogena Poissonprocessen utgör fundamentet inom spatiala punktprocesser [10]. Den fungerar som en nollmodell som kan förkastas om punktmönstret skapats av en underliggande struktur, som punktmönstren i Figur 2b och Figur 2c. Samtidigt fungerar den ofta som en första byggsten i byggandet av mer komplexa modeller [10, 12].

2.5 Icke-homogena Poissonprocesser

Teorin om homogena Poissonprocesser vilar på antagandet om konstant intensitet över hela delmängden $B \subset \mathbb{R}^2$. I ett fall där punkter tycks vara mer sannolika inom vissa delområden, som i Figur A1 i Appendix, kan det vara ett lämpligt antagande att intensitetsfunktionen (1) inte är

konstant över hela B [11]. Ett sådant fall skulle kunna modelleras genom en icke-homogen Poissonprocess. Den icke-homogena Poissonprocessen kännetecknas av en identisk egenskap om oberoende som för den homogena Poissonprocessen i avsnitt 2.4. Däremot ändras den konstanta intensitetsparametern λ till intensitetsfunktionen (1) i såväl homogenitetsegenskapen som Poissonegenskapen för att även täcka fall av varierande, eller heterogena, intensiteter [10]. Vi kallar då punktprocessen N för en icke-homogen Poissonprocess om den uppfyller [10, 11]:

(Heterogenitetsegenskapen) $\lambda(x) = \lim_{|dx| \rightarrow 0} \left\{ \frac{\mathbb{E}[N(dx)]}{|dx|} \right\} \quad \forall x \in B.$

(Poissonegenskapen) Antalet punkter i B är Poissonfördelat enligt $N(B) \sim Po\left(\int_B \lambda(x) dx\right).$

(Egenskapen om oberoende) För disjunkta mängder $B_1, B_2, \dots, B_k \subset \mathbb{R}^2$ är $N(B_1), N(B_2), \dots, N(B_k)$ oberoende slumpvariabler, givet godtyckligt k .

Väntevärdet av antalet punkter i B för en icke-homogen Poissonprocess ges då istället av $\mathbb{E}\{N(B)\} = \int_B \lambda(x) dx$. Observera att detta inte innebär någon motsättning gentemot väntevärdet i det homogena fallet, likväl som heterogenitetsegenskapen inte motsäger homogenitetsegenskapen. Den icke-homogena Poissonprocessen kan därmed ses som en generalisering av den homogena svarigheten. Däremot är den icke-homogena Poissonprocessen inte stationär eftersom intensiteten inte nödvändigtvis är konstant över B [12].

2.6 Ripleys K-funktion och Besags L-funktion

Ett sätt att avgöra om punktmönstret är realiserat från en homogen Poissonprocess är med Ripleys K-funktion. Besags L-funktion är en transformation av K-funktionen. I det här avsnittet kommer dessa kort att beskrivas eftersom de används i rapporten för att testa nollmodellen.

K-funktionen av en punktprocess N definieras som det förväntade antalet punkter inom ett avstånd r från en godtycklig punkt av processen, dividerat med intensiteten λ . För detta antas att punktprocessen är stationär, d.v.s. intensiteten λ är konstant. Eftersom processen är stationär så kan man välja en godtycklig punkt, vanligtvis origo. Med dessa antaganden följer enligt [11] att

$$K(r) = \frac{1}{\lambda} \mathbb{E}_o [\text{antal grannar inom } r \text{ från } o \mid N \text{ har en punkt i } o],$$

där grannar syftar till andra punkter från punktprocessen N som är inom avstånd $r \geq 0$ och o betecknar origo, en position där det finns en punkt av N .

K-funktionen kan skattas enligt följande. Låt d_{ij} vara avståndet mellan två punkter x_i, x_j , $x_i \neq x_j$, i punktmönstret. Den skattade K-funktionen ges enligt [11, s. 204] av

$$\hat{K}(r) = \frac{|W|}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} \mathbb{1}\{d_{ij} \leq r\} e_{ij}(r), \quad (3)$$

där $e_{ij}(r)$ är en kantkorrigering. Som tidigare nämnt används kantkorrigering för att justera skattningar utifrån kanteffekter. Här behövs kantkorrigering eftersom för punkter med ett avstånd mindre än r från kanten så saknas information om området utanför kanten, vilket påverkar skattningen. Den skattade K-funktionen ger ett standardiserat, kantkorrigerat, genomsnittligt antal punkter inom avståndet r från en godtycklig punkt av processen. Standardiseringen och kantkorrigeringen gör att det går att jämföra punktmönster observerade i olika observationsfönster och med olika antal punkter [11]. I praktiken testas nollmodellen genom att visualisera den skattade K-funktionen (3) av punktmönstret tillsammans med den teoretiska K-funktionen för den homogena Poissonprocessen, πr^2 [11]. Då ses eventuella avvikelser från den teoretiska K-funktionen. Sådana avvikelser antyder att punktmönstret inte är genererat av en homogen Poissonprocess [11].

En vanlig transformation av K-funktionen ges av Besags L-funktion [11, s. 207],

$$L(r) = \sqrt{\frac{K(r)}{\pi}},$$

vilket stabiliserar variansen och förenklar tolkningen av figurer när nollmodellen ska testas. L-funktionen för punktmönstret jämförs med den teoretiska L-funktionen som bara är r [11].

3 Data och metod

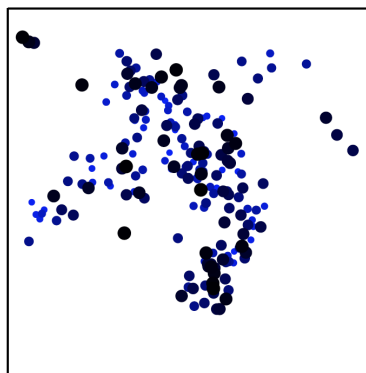
Avsnittet är indelat i följande delar. Inledningsvis beskrivs datan som ligger till grund för vårt arbete och relevanta variabler tillhörande datasetet. I avsnitt 3.2 följer en metodbeskrivning som beskriver de verktyg vi använder för de modeller vi utvecklar. Slutligen förklaras ytligt de tekniska verktygen som utförandet lutar på.

3.1 Data

Datasetet Bow innehåller de variabler som vårt arbete bygger på och innehåller information om hur 20 personer observerat konstverket. Det valda konstverket i Figur 1 bifogas i datasetet som en bild med måtten 795×768 pixlar, med en total area på 610560 pixlar. Detta utgör vårt observationsfönster. De variabler som används är: sackadlängderna, sackadtidslängderna, fixeringstidslängderna och koordinaterna för fixeringarna. Fixeringstidslängderna (i ms) har ett medelvärde på ca 270 och en median på ca 240, ett största värde på 4278 och ett minsta värde på 1.891. Sackadtidslängderna (i ms) har ett medelvärde på ca 70 och en median på ca 50, ett största värde på 4078 och ett minsta värde på 3.99. Vi ser att våra tidsvariabler har positiv skevhet, alltså att deras median är långt ifrån maxvärdet som gör att fördelningen får en lång svans åt höger. Se visualisering av datan för fixerings- samt sackadtidslängderna i Figur 5.

Vårt syfte är att modellera hur en person observerar ett konstverk. Vi har godtyckligt valt att modellera efter person med id-nummer 1. I Figur 4 kan man se hur person med id-nummer 1 har sett på konstverket. Här kan man se var personen har sett på konstverket, men även få en känsla för hur länge personen sett på konstverket, vilket visualiseras med olika storlek på punkterna. Hela tidslängden som personen ser på konstverket är inte med utan enbart den första (utav totalt tre minuter). Hur fixeringarna tillkommer över tid syns tydligare i Figur A2 i Appendix. Vi har valt, likt [7], att enbart betrakta fixeringar vars längd överskrider 40 ms. Personerna såg ibland utanför konstverket och dessa fixeringspunkter togs bort då punkter utanför konstverket inte är relevant till studien. Fixerings- samt sackadtidslängderna för tillhörande punkter summerades med föregående fixerings- samt sackadtidslängder då tidsaspekten för hela förloppet fortfarande är relevant. Endast 5 av 205 fixeringar från person med id-nummer 1 är utanför konstverket så resultatet bör inte påverkas markant.

Fixeringar från person med id-nummer 1



Figur 4: Fixeringar från punktmönstret för person med id-nummer 1 under de första 60000 ms. Ju större cirkel, desto längre har personen tittat på den punkten. Punkterna är ljusare blåa i början av tidsintervallet och blir mörkare ju längre tiden går.

3.2 Modellanpassning

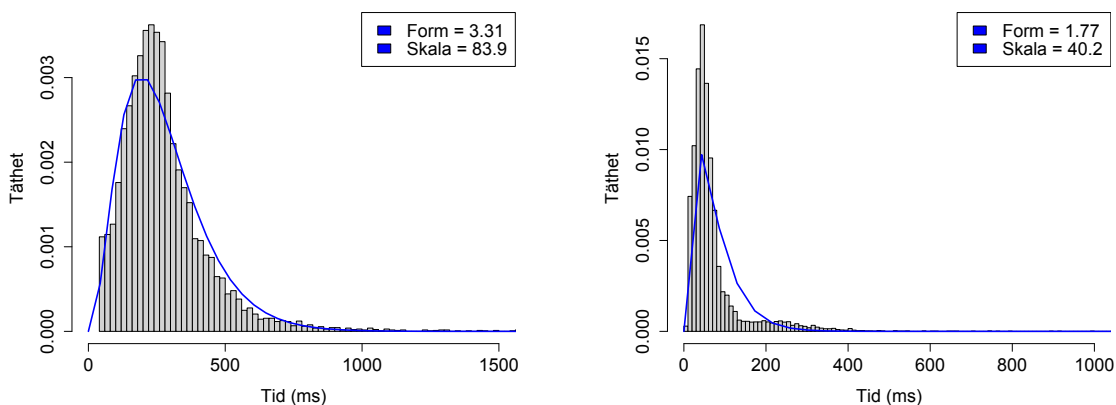
Nedan följer de verktyg som används vid modelleringen. Till att börja med förklaras i avsnitt 3.2.1 hur skattningen av olika relevanta parametrar görs. Därefter följer i 3.2.2 en beskrivning av ett statistiskt test som avgör huruvida vårt punktmönster är CSR eller ej. Våra jämförelsestatistikor beskrivs i 3.2.3 och slutligen i avsnitt 3.3 beskrivs de programmeringsverktyg som utförandet vilar på.

3.2.1 Skattning av tidslängder och intensitet

I studien av Ylitalo et al. [7] jämfördes totalt 20 personer från två separata grupper, tio erfarna konststudenter och tio oerfarna. Eftersom resultatet från studien tydde på att de två separata grupperna inte skiljde sig mycket från varandra har vi valt att behandla dem som en grupp.

Därför görs skattningen av tids- och intensitetsparametrar på de resterande 19 personer som inte modelleras.

Visualisering av fixeringstidslängderna visas i Figur 5a och sackadtidslängderna i Figur 5b. Histogrammens struktur motiverar gammafördelningar som styrks av Figur A5 i Appendix. Den blå kurvan ovanpå histogrammen är en täthetsfunktion av gammafördelningen som anpassats av datan. En gammafördelning har parametrarna form och skala, där form beskriver formen på fördelningen och skala beskriver spridningen. Parametrarna är skattade med maximum likelihood-metoden. I Figur A6 i Appendix kan man se tillhörande fördelningsfunktion.

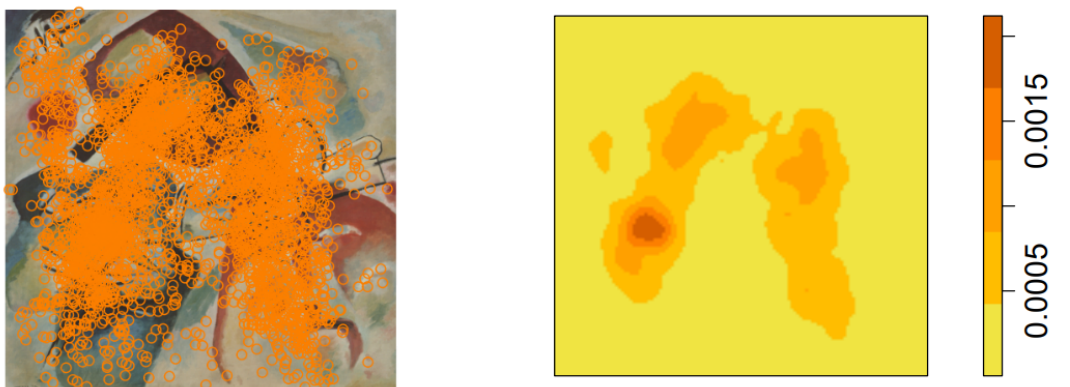


(a) Histogram av fixeringstidslängderna tillsammans med dess anpassade täthetsfunktion.

(b) Histogram av sackadtidslängderna tillsammans med dess anpassade täthetsfunktion.

Figur 5: Histogram samt anpassade täthetsfunktioner över fixerings- samt sackadtidslängderna av alla personer utom den med id-nummer 1.

Intensiteten kernelskattas enligt metoden som beskrivs i avsnitt 2.2 med hjälp av ekvation (2). Skattningen görs på resterande 19 personer. Fixeringspunkterna för dessa, tillsammans med den motsvarande intensitetsytan, visas i Figur 6.



(a) Fixeringar från 19 olika personer på konstverket.

(b) Intensitetsytan $\tilde{\lambda}(x)$ från kernelskattning av fixeringarna i (a).

Figur 6: Fixeringar samt tillhörande intensitetsytan av alla personer utom den med id-nummer 1.

3.2.2 Test av CSR

Det första steget i modelleringen är att undersöka om den underliggande punktprocessen för datan är CSR. Nollhypotesen om att fixeringsmönstret är CSR testas med hjälp av ett Maximum Absolute Deviation (MAD) test [11]. Man utför n simuleringar av CSR, därefter tar man den maximala avvikelser (δ) från den teoretiska L-funktionen för CSR och skapar ett hölje runt den teoretiska L-funktionen med bredden 2δ . Vi kallar detta för MAD-höljet. Därefter följer visuell inspektion som bekräftar testet. Nollhypotesen kan förkastas om L-funktionen av datan någon gång hamnar utanför MAD-höljet. Med n simuleringar kan man svara med signifikansnivå $\alpha = \frac{1}{n+1}$ huruvida nollhypotesen kan förkastas [11].

3.2.3 Jämförelsestatistikor

För att avgöra hur väl de spatio-temporal modellerna representerar datan används tre olika statistikor som kan ses i Figur 7. Dessa är funktioner av tid. En ordning av n_t fixeringar till en fixerad tid t betecknas $x = \{x_1, \dots, x_{n_t}\}$. Reslängd (från engelskans "scanpath") är ett mått som mäter den sammanlagda sackadlängden av en deltagare. Den kan definieras enligt [7, s. 566] som

$$L(t) = \sum_{i=1}^{n_t-1} l_i \mathbb{1}(t_{i+1} \leq t),$$

där t_{i+1} är tiden vid fixering $i + 1$ på plats x_{i+1} och l_i är sackadlängd till den fixeringen från den föregående. Det är en euklidisk längd mellan två fixeringar, d.v.s. sackadlängden [7]. Konvext hölje (från engelskans "convex hull") används för att mäta arean av den minsta polygon som innehåller alla punkter i punktmönstret. Låt W vara vårt observationsfönster och $x_i \in W$ vara den i :te fixeringen av fixeringsprocessen $\{N(t)\}$. Konvexa höljet av x är

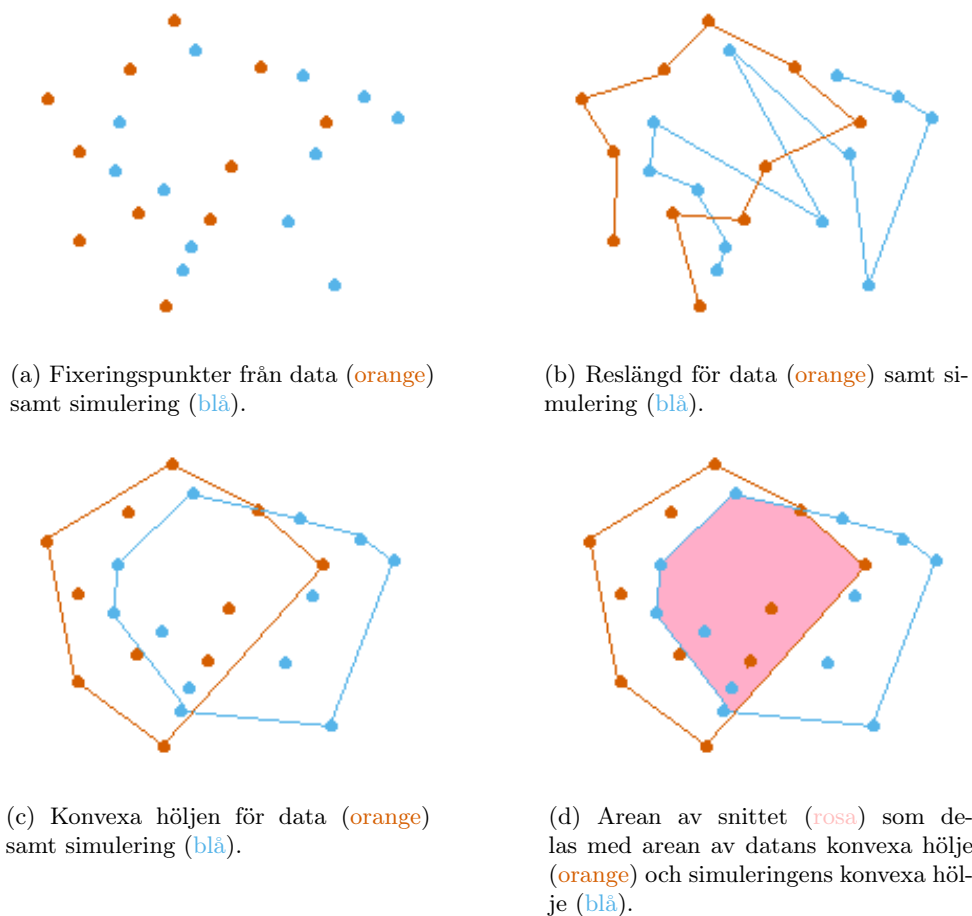
$$C_x(t) = \left\{ \sum_{i=1}^{n_t} \alpha_i x_i : \alpha_i \geq 0 \text{ för alla } i \text{ och } \sum_{i=1}^{n_t} \alpha_i = 1 \right\},$$

[7, s. 566]. Statistikan är arean av detta konvexa höljet och betecknas $|C_x(t)|$. Skärningskvot är ett mått som vi har utvecklat och utförs på följande vis. Konvexa höljen beräknas vid varje ny fixering för data och simulerad process. Arean av snittet beräknas mellan de två ytorna som bildas av de konvexa höljen. Denna area divideras med arean av konvexa höljet som fås av den simulerade processen. Då fås en kvot av den area som simulerade processen delar med snittet. Skärningskvot beskrivs av ekvationen

$$S(t) = \frac{|C_S(t) \cap C_D(t)|}{|C_S(t)|},$$

där C_S och C_D är arean för de konvexa höljen för den simulerade processen respektive datan vid tiden t . Metoden används för att få ett mått på hur väl den simulerade processen passar datan när det gäller vilket område som betraktats. Anledningen till att skärningskvot utvecklades är för att konvexa höljen har en brist. Två konvexa höljen kan ha lika stor area utan att sammanfalla. Vid jämförande av de bägge är det därför relevant att se hur stor area de delar för att få en djupare förståelse huruvida de representerar liknande områden.

För att modellera tidsdimensionen används sackad- och fixeringsfördelningarna som beskrivs i mer detalj under avsnitt 3.2.1. För varje fixering i punktmönstret dras ett unikt stickprov från båda tidsfördelningarna. Dessa två summeras för att få den totala tiden av blickens rörelse till, samt dess fokus på, den unika punkten på konstverket. Därefter beräknas den kumulativa summan av tidsstickproven för att få ett tidsintervall mellan 0 och 60000 ms. Om den kumulativa summan av tidsstickproven understiger den specificerade sluttiden på 60000 ms kvarstår den sista punkten tills sluttiden nås. Om den istället överstiger 60000 ms tas punkten bort.



Figur 7: Visualisering av statistikor.

3.3 Utförande

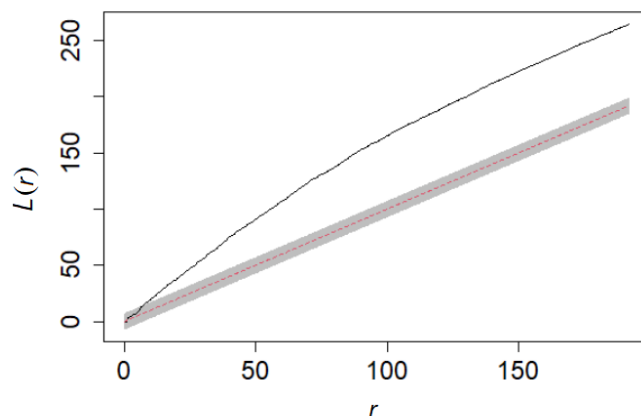
Analysen som utförs vilar till stor del på programmeringsspråket R. Här används specifikt ett paket vid namnet `spatstat`. I stort sett alla funktioner som metoden och i sin tur resultatet bygger på kommer från detta paket. `spatstat` används huvudsakligen för analyser av spatiala punktprocesser, primärt tvådimensionella men det finns även funktioner för tredimensionell analys. Det innehåller bland annat funktioner som skattar Ripleys K-funktion samt Besags L-funktion, de som simulerar Poissonprocesser samt funktioner för att skatta bandbredd för att nämna några [11]. Detta arbete använder sig av `bw.diggle` som verktyg för valet av bandbredd som senare används för att skatta intensitet. I avsnitt 2.2 förklaras vikten av valet av bandbredd vid skattning av intensitet. För att skapa ett punktmönster används funktionen `rpoispp`. Funktionen genererar ett punktmönster givet ett val av en kernelskattning. Punkterna genereras dock inte sekvensiellt utan alla punkter skapas omedelbart. Därav, för att sekvensiellt skapa ett punktmönster används `rpoint` som enbart skapar en punkt givet en kernelskattning av intensiteten. Koden för arbetet finns tillgänglig på <https://github.com/AyFK/MVEX-24-80>.

4 Resultat och analys

Analysen av modellerna utfördes genom tillämpning av jämförelsestatistikorna som presenterats i avsnitt 3.2.2. Fyra modeller har utvecklats, där den första är den s.k. nollmodellen där CSR testas med hjälp av 99 simuleringar. Resterande jämförelsestatistikor som beror av tid analyseras med hjälp av 40 unika simuleringar för att tydligt visualisera resultaten på en relativt kort tid.

4.1 Modell 1: homogen spatial Poissonprocess

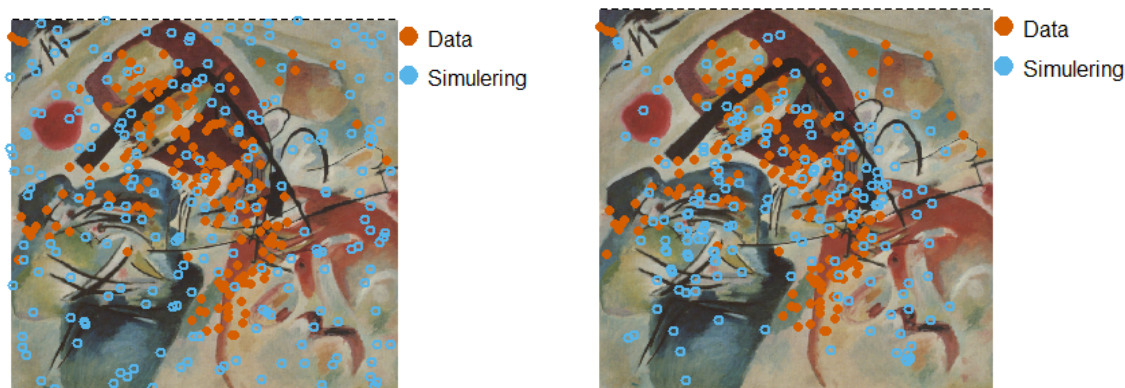
I Figur 8 visas L-funktionen för datan i svart, MAD-höljet av den teoretiska L-funktionen av 99 simulationer av CSR i grått och den teoretiska L-funktionen för CSR i rött. Nollhypotesen att fixeringsmönstret är CSR kan då förkastas med signifikansnivå $\alpha = 0.01$ då linjen tillhörande datan för person med id-nummer 1 hamnar utanför MAD-höljet i figuren.



Figur 8: Besags L-funktion av datan för person med id-nummer 1 i svart med MAD-höljet av de 99 simulationerna i grått samt den teoretiska L-funktionen för CSR i rött.

4.2 Modell 2: icke-homogen spatial Poissonprocess

Ovan resultat tyder på att datan inte är CSR vilket innebär att en spatialt homogen Poissonprocess inte är en lämplig modell för att beskriva punktmönstret från person med id-nummer 1, detta styrks även i Figur 9a då datans fixeringar avviker markant från simuleringen. Som följd av detta anpassas även en spatialt icke-homogen Poissonprocess som enligt avsnitt 2.5 utförs genom skattning av intensiteten $\lambda(x)$, med hjälp av kernelmetoden som beskrivs i detalj under avsnitt 2.2.



(a) Punktmönster från person med id-nummer 1 (orange), och en simulering från Modell 1 (blå).

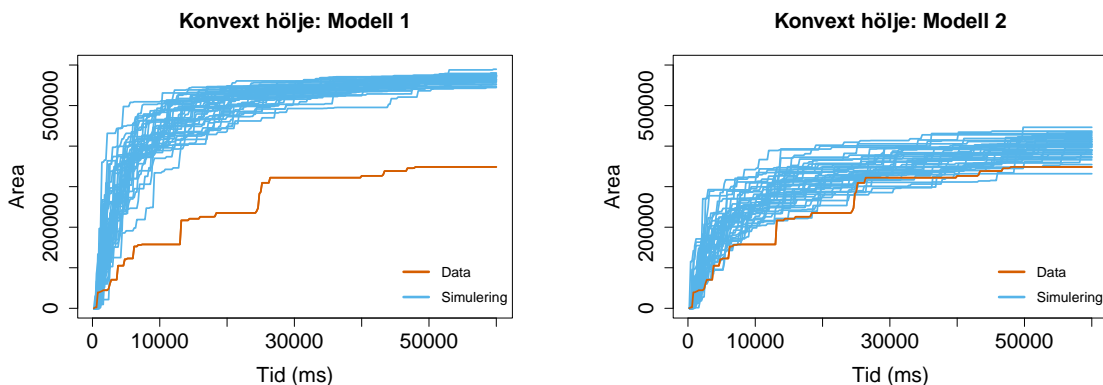
(b) Punktmönster från person med id-nummer 1 (orange), och en simulering från Modell 2 (blå).

Figur 9: Punktmönster från en homogen och en icke-homogen Poissonprocess i jämförelse med punktmönstret från person med id-nummer 1 efter 60000 ms.

Skillnaden mellan de två modellerna i Figur 9 ses som tydligast i hörnen av målningen. Där är antalet fixeringar avsevärt färre i den icke-homogena modellen än i den homogena. Som följd av den kernelskattade intensitetsytan blir punktmönstret mer koncentrerat kring områden med hög

frekvens. Dessa områden behöver nödvändigtvis inte spegla intresseområdet för person med id-nummer 1 då intensiteten skattas på övriga 19 personer. I Figur 9b ser man denna brist i området som sträcker sig från det nedre vänstra hörnet mot mitten av målningen.

I Figur 10 ser vi en stark preferens för Modell 2 från resultaten av det konvexa höljet. Detta kan ses då simuleringarnas 40 kurvor ligger betydligt närmare datans. Den drastiska tillväxten vi ser i början av simuleringen från Modell 1 som visas i Figur 10a visas vara betydligt svagare i det icke-homogena fallet som ses i Figur 10b. Trots dessa förbättringar kvarstår en betydande variation bland de olika simuleringarna, dessutom ligger den faktiska datans konvexa hölje fortfarande under alla realiseringar av Modell 2 stor del av tiden.



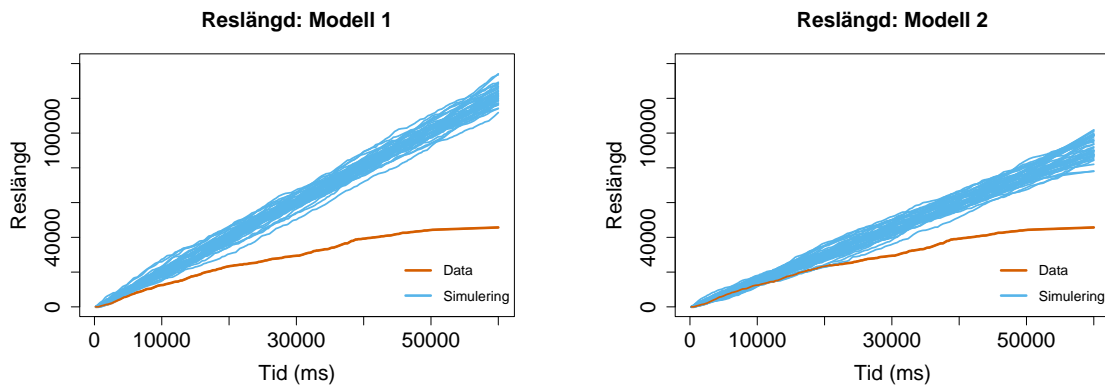
(a) Konvext hölje från person med id-nummer 1 (orange) och 40 simuleringar från Modell 1 (blå).

(b) Konvext hölje från person med id-nummer 1 (orange) och 40 simuleringar från Modell 2 (blå).

Figur 10: Jämförelse mellan konvexa höljen för person med id-nummer 1 samt Modell 1 och Modell 2 med 40 simuleringar.

Reslängderna för båda modellerna ses i Figur 11. Precis som i fallet med konvexa höljet, så över-skattar båda modellerna reslängden i den faktiska datan. Med denna jämförelsestatistika blir avvikelsen dessutom större under observationsperiodens gång. Båda modellernas reslängd antar en tydlig linjär utveckling, där simuleringarna av den homogena modellen i Figur 11a har en högre lutningskoefficient än simuleringarna av den icke-homogena modellen i Figur 11b. Detta resulterar i att måttet för den icke-homogena Poissonprocessen ligger närmare datan, vilket tyder på att en icke-homogen process resulterar i en bättre modell. Den faktiska datan däremot, uppvisar inte ett linjärt samband mellan tid och reslängd utan något som liknar en kvadratrotsrelation vars förändringshastighet avtar med tid.

Skillnaden mellan modellerna och data kan förklaras av att personernas ögonrörelser antas sträcka sig över längre avstånd när konstverket först ses, troligtvis i syftet av att utforska det nya innehållet. Med tiden tenderar reslängden att bli kortare, detta skulle kunna tyda på att personen inte har samma lust att utforska konstverkets innehåll i sin helhet. Som konsekvens tenderar personen att stanna längre tider inom samma områden. Båda modellerna misslyckas med att återspegla denna variation i rörelsemönstret.



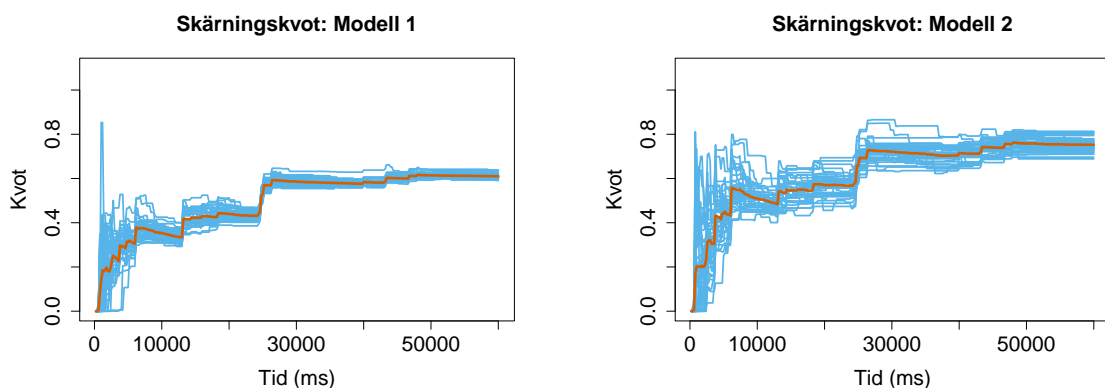
(a) Reslängd från person med id-nummer 1 (orange) och 40 simuleringar från Modell 1 (blå).

(b) Reslängd från person med id-nummer 1 (orange) och 40 simuleringar från Modell 2 (blå).

Figur 11: Jämförelse mellan reslängderna för person med id-nummer 1 samt Modell 1 och Modell 2 med 40 simuleringar.

Resultaten av skärningskvoten visas i Figur 12, där den icke-homogena modellen precis som i föregående statistikor, visar en förbättring i jämförelse med den homogena modellen. Som man ser i början av Figur 12a så kan anomalier av väldigt höga skärningskvotvärden förekomma. Detta sker på grund av att data och modell under en väldigt kort period befinner sig på samma del av målningen. För att skilja på beteendet har vi dessutom räknat ut medelvärdet av alla 40 simuleringar vilket visas i orange.

Modell 2 når ett slutvärde på cirka 0.76 medan Modell 1 stannar vid 0.6. Notera att båda modellerna når dessa maxvärden precis innan halva minuten (30000 ms) har passerat. Vi kan genom inspektion av figurerna dela in modellernas utveckling i fem tydliga perioder. Första perioden består av en snabb, kraftig ökning. I perioden som följer avtar värdet ytterst lite. Därefter uppstår två stabila perioder som separeras av ytterligare en snabb, kraftig ökning. Man kan se en högre varians i skärningskvoten för den icke-homogena modellen än i den homogena. Det kan bero på att den homogena modellen, med sin likformiga fördelning, genererar samma typ av utfall som resulterar i en lägre varians bland de separata simuleringarna. Medan den icke-homogena modellen med sin anpassade intensitetsyta skapar fler unika utfall som leder till högre variation och därav en mer spridd varians.



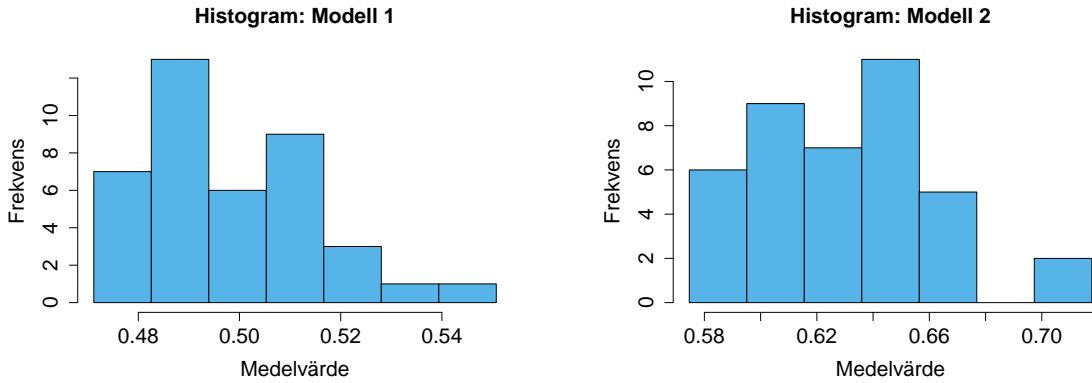
(a) 40 simuleringar av skärningskvoten från Modell 1 (blå) och medelvärdet av alla simuleringar (orange).

(b) 40 simuleringar av skärningskvoten från Modell 2 (blå) och medelvärdet av alla simuleringar (orange).

Figur 12: Jämförelse mellan skärningskvoten för Modell 1 och Modell 2 med 40 simuleringar.

Genom att ta medelvärdet av enskilda simuleringars skärningskvoter kan ett histogram bildas av

respektive modell. Skärningskvotsmedelvärdet återspeglar den genomsnittliga arean som delas av modellen och datan genom hela simuleringens gång. Av en bättre modell kan man därför förvänta sig ett högre genomsnittligt värde. I Figur 13 observerar vi att detta inträffar då medelvärdena tillsammans med min- och maxvärdena, är förskjutna mot högre värden för den icke-homogena modellen. Detta tyder på att Modell 2 utforskar en större andel av samma områden av konstverket som person med id-nummer 1 jämfört med Modell 1.



(a) Fördelning av skärningskvotsmedelvärden från 40 simuleringar från Modell 1.

(b) Fördelning av skärningskvotsmedelvärden från 40 simuleringar från Modell 2.

Figur 13: Jämförelse mellan skärningskvotsmedelvärden för Modell 1 och Modell 2 med 40 simuleringar.

Som följd av den överskattade reslängden samt konvexa höljet från Modell 1 och 2, föreslås Modell 3 med en tidsvarierande intensitet. Detta eftersom datan indikerar att personen ändrar sin blick längs tidens gång och att dela intensiteten i tidsintervall kanske bättre kan beskriva förändringen över tid.

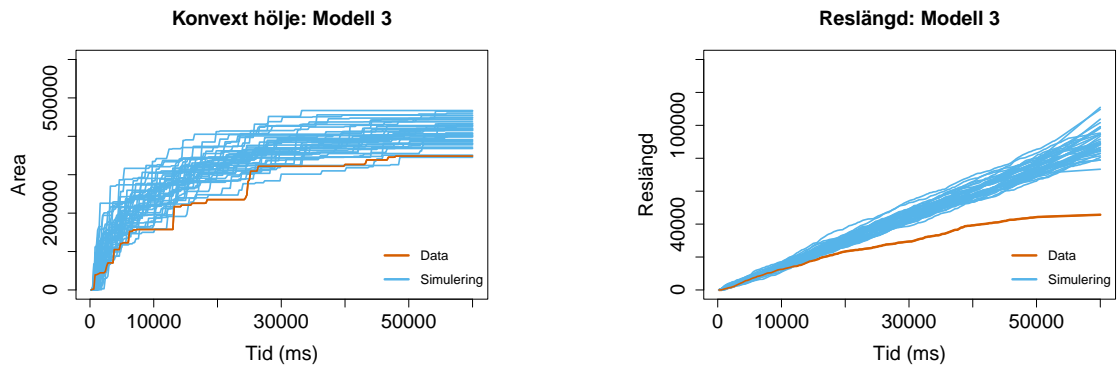
4.3 Modell 3: tidsvarierande intensitet

Som tidigare resultat indikerat tenderar den icke-homogena modellen, som beskrivs i avsnitt 4.2, att överskatta både reslängd och arean av det konvexa höljet. En möjlig förklaring till detta är att den intensitetsyta som genererar dess punktmönster har skattats från hela tidsintervallet. Eftersom personerna verkar ändra vilka områden på konstverket som de tittar på över tid motiveras en uppskattning av intensitetsytan över olika tidsspänn. Denna förändring i tid ses tydligast från värmekartan i Figur A3 under Appendix.

Datan delas in i fem lika stora tidsintervall som visas i Tabell 2. För respektive intervall kommer en unik intensitet att skattas. Därefter simuleras ett separat punktmönster från varje intensitet och kombineras till ett gemensamt punktmönster. Tanken är att försöka fånga variationen i vilka områden personen tittar på över tid. Resultatet för en simulering ses i Figur A4 i Appendix och visar inga större strukturella förändringar jämfört med simuleringen i Figur 9b. När det gäller jämförelsestatistikorna ses dessa resultat i Figur 14.

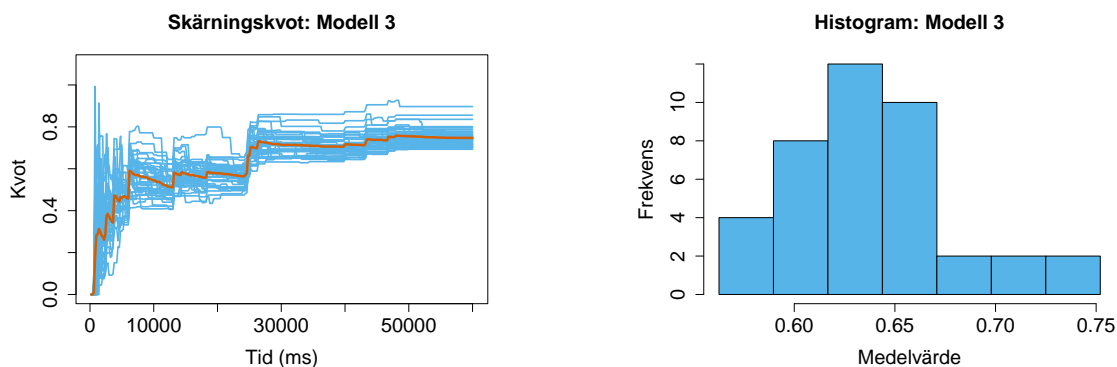
Period	Intervall (ms)
1	[0, 12000]
2	(12000, 24000]
3	(24000, 36000]
4	(36000, 48000]
5	(48000, 60000]

Tabell 2: Skattningsintervall för $\tilde{\lambda}(x)$.



(a) Konvext hölje från person med id-nummer 1 (orange) och 40 simuleringar från Modell 3 (blå).

(b) Reslängd från person med id-nummer 1 (orange) och 40 simuleringar Modell 3 (blå).



(c) 40 simuleringar av skärningskvoten från Modell 3 (blå) och medelvärdet av alla simuleringar (orange).

(d) Fördelning av skärningskvotsmedelvärden från 40 simuleringar från Modell 3 (blå).

Figur 14: Jämförelsestatistikor för person med id-nummer 1 samt Modell 3 med 40 simuleringar.

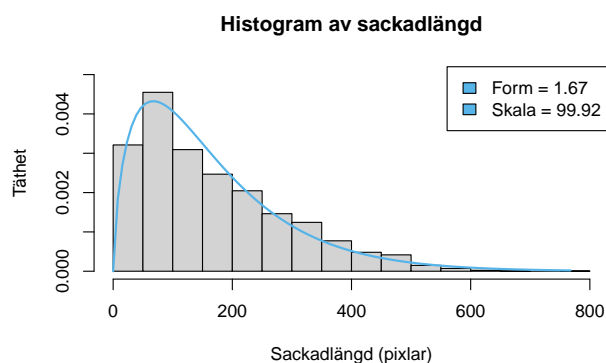
Som visas i Figur 14 överskattas det konvexa höljet och reslängden jämfört med den faktiska datan från person med id-nummer 1, precis som Modell 2 gjorde i föregående avsnitt 4.2. Resultatet för dessa två jämförelsestatistikor visar på att det ej har blivit någon synlig förbättring.

Man ser dessutom att skärningskvoten har ungefär samma slutgiltiga kvot som i Figur 12b för föregående modell. Även här nås ett slutvärde på cirka 0.76. Tidigare i tidsförloppet har Modell 3 dessutom ungefär samma värde som Modell 2 vilket indikerar på att den inte har blivit bättre på att beskriva datan i ett tidigare skede. Medelvärdet av enskilda simuleringars skärningskvoter i Figur 14d visar inte heller på någon förbättring då medelvärdet ungefär är detsamma som i Figur 13b.

4.4 Modell 4: anpassning utifrån extrema sackadlängder

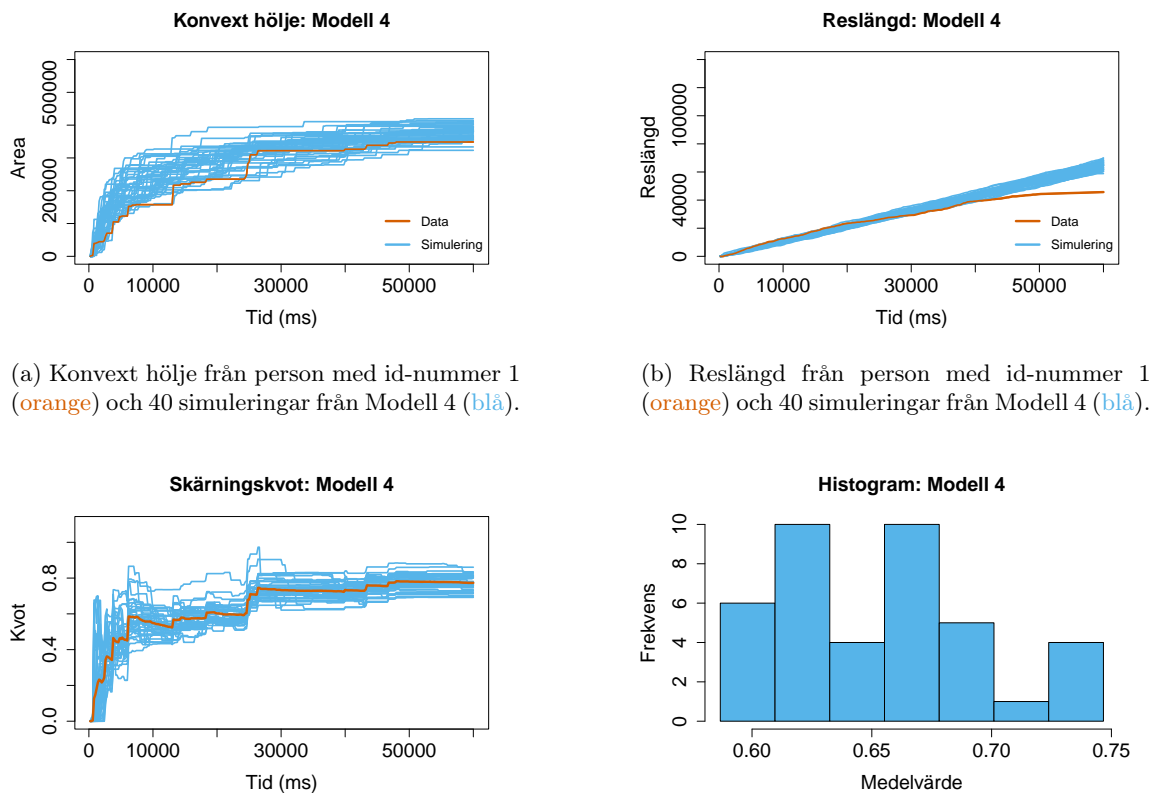
Ett annat sätt att modifiera modellen utifrån att den överskattar avstånden mellan fixeringar är att försöka reglera antalet fixeringar som är extremt långt bort från den föregående. Eftersom simuleringen av nästa punkt då inte är oberoende av den föregående punkten så är den underliggande punktprocessen inte längre en Poissonprocess, dock går modellen fortfarande att betrakta som en spatio-temporal punktprocess.

För varje fixering utgör sackadlängden avståndet till den föregående fixeringen, i pixlar. För att avgöra vad ett extremt avstånd är så undersöks först fördelningen av dessa sackadlängder, se Figur 15 nedan.



Figur 15: Histogram med täthet över sacklängder mellan fixeringar för samtliga personer, med en anpassad gammafördelning och dess parametrar.

För att få ett generellt värde för en extrem sacklängd r har vi valt att undersöka fördelningen av samtliga 20 personers sacklängder. Figuren visar att fördelningen av sacklängderna verkar följa en gammafördelning. Vi har definierat r genom att ta den 90:e kvantilen av den anpassade gammafördelningen, vilket här ger $r = 334$ pixlar. Sacklängder större än r förekommer alltså med sannolikheten 10%. Vidare har vi för denna modell även valt att med endast 10% sannolikhet acceptera nya fixeringar där sacklängden överstiger r . Förhoppningen är att de överskattade avstånden ska minska och därmed ge en bättre modell. Resultaten ses i Figur 16 nedan.



(a) Konvext hölje från person med id-nummer 1 (orange) och 40 simuleringar från Modell 4 (blå).

(b) Reslängd från person med id-nummer 1 (orange) och 40 simuleringar från Modell 4 (blå).

(c) 40 simuleringar av skärningskvoten från Modell 4 (blå) och medelvärdet av alla simuleringar (orange).

(d) Fördelning av skärningskvotsmedelvärden från 40 simuleringar från Modell 4.

Figur 16: Jämförelsestatistikor för person med id-nummer 1 samt Modell 4 med 40 simuleringar.

I Figur 16a ses att Modell 4 presterar något bättre än vad Modell 3 gör i Figur 14a gällande hur stort område av konstverket som täcks. Simuleringarna är närmare datan, särskilt mot slutet av tiden. Den tydligaste förbättringen hos Modell 4 ses vid jämförelse av reslängden i Figur 16b och reslängden för Modell 3 i Figur 14b. För Modell 4 följer simuleringarna datan väl under ca de första 40000 ms, jämfört med 20000 ms för Modell 3. Simuleringarna för Modell 4 är därmed närmare datan över längre tid och dessutom är skillnaden på slutet mindre. För måttet skärningskvot är det svårare att se en tydlig skillnad mellan Modell 4 i Figur 16c och Modell 3 i 14c, båda når cirka 80% gemensamt konvext hölje med datan i slutet. Histogrammet av medelvärden av skärningskvoten för Modell 4 i Figur 16d ger dock något högre medelvärden jämfört med Modell 3. För både konvext hölje, reslängd och skärningskvot ses att det verkar vara mindre spridning bland simuleringarna från Modell 4 jämfört med Modell 3.

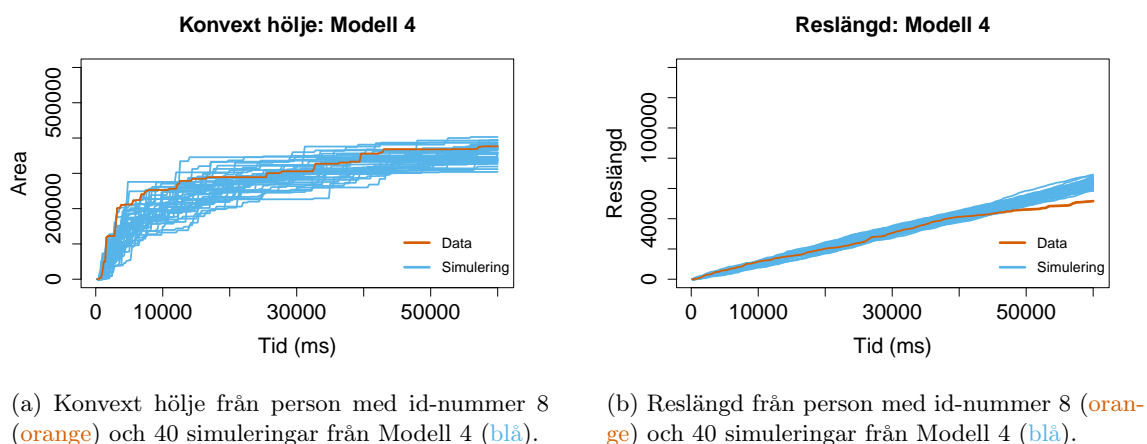
Dessa resultat är förväntade; när antalet extrema sackadlängder begränsas är det rimligt att exempelvis reslängden för simuleringarna blir kortare eller inte växer lika fort. På samma sätt är det rimligt att de konvexa höljen av simuleringarna inte växer lika fort. Även simuleringarnas lägre spridning för dessa mått är rimligt när extrema sackadlängder begränsats.

4.5 Analys av Modell 4 på övriga personer

I föregående avsnitt framkommer det att Modell 4 verkar prestera bättre än Modell 3 i avseendet att modellera hur person med id-nummer 1 ser på målningen. Samtidigt var valet av person godtyckligt, vilket påpekades redan i avsnitt 3.1. Därför kan det vara av intresse att undersöka hur väl Modell 4 beskriver de andra personernas ögonrörelser. Notera att skattningarna för intensiteten, fixeringstidslängderna samt sackadtidslängderna varierar beroende på vilken persons ögonrörelser som modelleras, eftersom att de skattas med data från övriga personer.

Det visar sig att Modell 4 lyckas beskriva de övriga personernas ögonrörelser olika bra över tid sett till statistikorna konvext hölje, reslängd och skärningskvot. I jämförelse med person med id-nummer 1 verkar Modell 4 beskriva ögonrörelserna bättre bland ungefär hälften av de övriga 19 personerna, medan för den andra hälften sämre.

Ett exempel på person då Modell 4 beskriver ögonrörelserna bättre är person med id-nummer 8. Detta kan ses genom att jämföra Figur 17a och Figur 17b, vilka visar det konvexa höljet respektive reslängden för person med id-nummer 8, med motsvarande figurer för person med id-nummer 1, d.v.s. Figur 16a respektive Figur 16b.



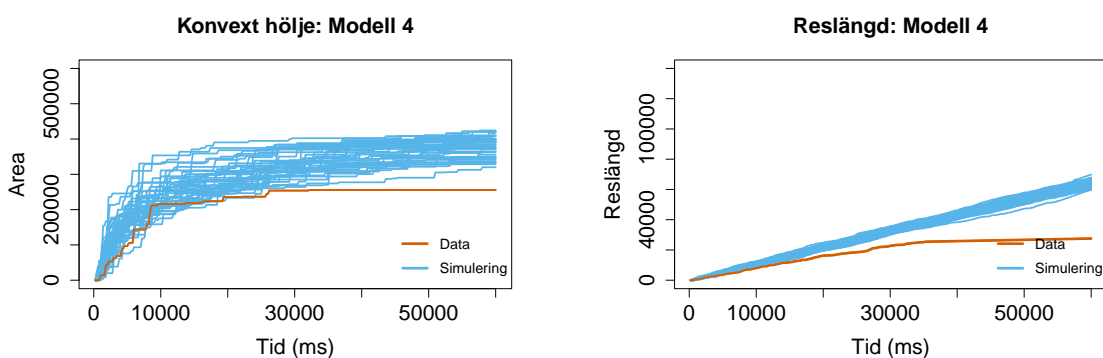
(a) Konvext hölje från person med id-nummer 8 (orange) och 40 simuleringar från Modell 4 (blå). (b) Reslängd från person med id-nummer 8 (orange) och 40 simuleringar från Modell 4 (blå).

Figur 17: Jämförelsestatistikorna konvext hölje och reslängd för person med id-nummer 8 samt Modell 4 med 40 simuleringar.

I både Figur 17a och Figur 17b verkar simuleringarna täcka linjerna för datan i högre grad än vad motsvarande simuleringar gör i Figur 16a och Figur 16b. Dessutom verkar den genomsnittliga nivån för skärningskvoten redan efter ca 5000 ms landa på ett värde om 0.8 och sedan stanna däromkring under resten av observationstiden, vilket visas i Figur A7a i Appendix. Motsvarande figur för person med id-nummer 1, Figur 16c, visar att medelvärdet knappt kommer upp i den

nivån överhuvudtaget under observationstiden. I Figur A8b i Appendix ser vi därför också att skärningskvotsmedelvärdena för respektive simulering av person med id-nummer 8 är högre än de för person med id-nummer 1, vilka visas i Figur 16d.

Den andra typen av fall, fallet då Modell 4 beskriver ögonrörelserna sämre än för person med id-nummer 1, exemplifieras väl av person med id-nummer 10. Denna persons observerade konvexa hölje tillsammans med de simulerade konvexa höljen visas i Figur 18a, medan dess observerade reslängd tillsammans med de simulerade reslängderna visas i Figur 18b. Jämför vi dessa figurer återigen med de motsvarande för person med id-nummer 1, Figur 16a och Figur 16b, visas i motsats till det föregående fallet att simuleringarna verkar täcka datan i lägre grad än för person med id-nummer 1. I Figur A8a i Appendix visas också att den genomsnittliga nivån för skärningskvoten för person med id-nummer 10 verkar stagnera omkring 0.6, till skillnad från person med id-nummer 1 där den går upp mot 0.8. Det förklarar också varför skärningskvotsmedelvärdena för respektive simulering av person med id-nummer 10 är lägre än de för person med id-nummer 1, vilket ses genom att jämföra Figur A8b i Appendix med Figur 16d.



(a) Konvext hölje från person med id-nummer 10 (orange) och 40 simuleringar från Modell 4 (blå). (b) Reslängd från person med id-nummer 10 (orange) och 40 simuleringar från Modell 4 (blå).

Figur 18: Jämförelsestatistikorna konvext hölje och reslängd för person med id-nummer 10 samt Modell 4 med 40 simuleringar.

Gemensamt för nästintill alla personer i datasetet är att Modell 4 verkar prestera ungefär lika bra under de första 15000 ms sett till statistikorna konvext hölje och reslängd. Därefter börjar resultaten för dessa statistikor att variera mer mellan personerna. Detta faktum exemplifieras väl genom att jämföra resultaten för person med id-nummer 10 med de motsvarande resultaten för person med id-nummer 8. I Figur 18a och Figur 18b noterar vi att simuleringarna inte verkar täcka linjen för datan i samma grad efter denna tidpunkt i jämförelse med simuleringarna i Figur 17a och Figur 17b. Denna skillnad kan tänkas bero på att Modell 4 misslyckas med att beskriva hur observationsbeteenden kan förändras över tid. Utifrån det observerade konvexa höljet tillhörande person med id-nummer 10 verkar det som att personen med tiden håller sig allt mer inom det befintliga konvexa höljet, d.v.s. den slutar att utforska nya områden på konstverket. Samtidigt kan personens sackadlängder tänkas avta med tiden på grund av den avtagande reslängden, vilket indikerar att den tittar allt mer klustrat. I jämförelse verkar det som att dessa statistikor tillhörande person med id-nummer 8 verkar fortsätta att öka enligt relativt liknande mönster som under de begynnande 15000 ms. Det konvexa höljet verkar fortsätta i något som liknar en kvadratsrelation, medan reslängden verkar fortsätta att följa en linjär tillväxt. Dessa observationer kan styrkas genom att jämföra Figur A9a och Figur A9b i Appendix, vilka är visualiseringar av personernas fixeringsmönster där varje fixering är färgkodad efter tiden den tillkom. Dessa olika förändrade observationsbeteenden går också i linje med resultaten i Figur A8a och Figur A8b, där skärningskvoten för person med id-nummer 10 inte bara är generellt lägre jämfört med den för person med id-nummer 8 utan också tenderar att minska mer under observationstidens senare del. Att skärningskvoten verkar minska mer mot slutet för person med id-nummer 10 än vad den gör för person med id-nummer 8 kan innebära att den delar allt mindre observerat område med respektive simuleringar.

Sammantaget verkar Modell 4 beskriva de flesta personernas ögonrörelser bra under de första 15000 ms. Däremot varierar dess förmåga att beskriva ögonrörelserna under den resterande observationstiden beroende på personen den modellerar. Generellt verkar modellen lyckas sämre med att beskriva tidsinhomogena observationsbeteenden jämfört med observationsbeteenden som är mer lika över tid.

5 Diskussion och slutsats

Syftet med detta kandidatarbete har varit att modellera ögonrörelser på målningen *Picture with a Black Arch*. Resultaten tyder på att ögonrörelserna inte är likformigt fördelade över målningen. Arbetet har även syftat till att besvara i vilken omfattning modellen förbättras när man på olika sätt tar hänsyn till hur ögonrörelserna förändras över tid och rum. För varje modell har resultat analyserats utifrån jämförelsestatistikor och därefter har anpassningar gjorts till nästa modell i syfte att uppnå bättre resultat. För Modell 2, där den homogena intensiteten för fixeringspunkter ersattes med en icke-homogen, såg vi att sackadlängden överskattades vilket vi försökte åtgärda med Modell 3 genom att genomföra flera intensitetsskattningar utifrån olika tidsintervall. Det senare resultatet innebar ingen markant förbättring, varför vi utvecklade Modell 4 som specifikt anpassas utifrån extrema sackadlängder. Resultaten förbättrades för den person vi hade valt att undersöka först och därför anpassade vi modellen även för de andra personerna. Vi kunde då se att resultaten överlag skiljde sig beroende på person, särskilt efter ca 15000 ms och beroende på hur personens observationsbeteenden verkade förändras över tid. Detta exemplifierades genom att jämföra statistikorna mellan två personer där den ena verkade fortsätta utforska nya områden på konstverket, medan den andra inte verkade göra det. Trots detta anser vi att Modell 4 även för de övriga personerna är bättre än samtliga tidigare modeller.

Faktumet att resultaten skiljer sig beroende på vald person att modellera efter leder in oss på frågan om hur vi avgör om nästa modell medför en faktisk förbättring. Våra val av jämförelsestatistikor är här centrala. En möjlig vidareutveckling vore att kombinera statistikorna för att få en sammantagen uppskattning av modellens prestation. Exempelvis kan man för varje statistika beräkna skillnaden mellan datan och modellen, och standardisera och vikta dessa på ett lämpligt sätt som i [14]. En fördel med ett sådant mått är att det kan ge en indikation på hur väl modellen presterar även då enskilda statistikor visar på motstridiga resultat, vilket inte sällan verkade gälla för våra modeller som ofta verkade överskatta reslängderna relativt mer än vad de överskattade det konvexa håljet. Det kan även tilläggas att det konvexa håljet kan vara bristfälligt i avseendet att mäta storleken på det område av konstverket som har observerats. Om en ny, isolerad fixeringspunkt tillkommer utanför det befintliga konvexa håljet av ett fixeringsmönster kan det få håljets area att öka markant, trots att det inte finns några andra fixeringar inom området för den nytillkomna arean. Det konvexa håljet bör därför tolkas med försiktighet och inte ses som ett exakt mått på hur stort område av konstverket som har observerats. Av denna anledning skulle en annan typ av mått som beskriver storleken av det observerade området på konstverket vara mer lämpligt. Ett exempel skulle kunna vara bollunionen [7], vilken ges av att runt varje fixeringspunkt bilda en cirkelskiva av en viss radie och sedan räkna arean av unionen av dessa skivor. Med en välvald radie skulle arean av bollunionen i jämförelse med det konvexa håljets vara mindre känsligt vid tillskottet av isolerade fixeringar utanför det befintliga konvexa håljet, eftersom att bollunionen i sådana fall rimligen inte tillgodoräknar lika stora ej observerade områden.

En annan brist med det konvexa håljet beskrevs tidigare i avsnitt 3.2.3, nämligen att konvexa håljen för simulering och data kan ha lika stor area utan att sammanfalla. Därför utvecklades skärningskvoten som mått för hur väl de konvexa håljena överensstämmer. Dock uppstår en felkälla med denna statistika när simuleringens konvexa hålje växer för långsamt i jämförelse med det konvexa håljet för personen. Som konsekvens kan hela snittet hamna innanför personens konvexa hålje och då ge en kvot på 1.0, motsvarande 100%. Man skulle då kunna tro att respektive hålje täcker samma områden på konstverket. Faktum är att simuleringens hålje är betydligt mindre samt ligger innanför personens hålje. Detta är precis vad som sker i början av observationstiden för vissa simuleringar av person med id-nummer 8 vars skärningskvot ses i Figur A7a i Appendix. Felkällan kan åtgärdas om kvotens nämnare istället är den största utav de två separata areorna.

Skärningskvoten skulle då ges av

$$S(t) = \frac{|C_S(t) \cap C_D(t)|}{\max\{|C_S(t)|, |C_D(t)|\}},$$

där C_S och C_D är areorna för de konvexa höljen för modellen respektive datan.

Även för våra modeller finns utrymme för förbättring. Med mer tid hade man i Modell 3 även kunnat skatta fördelningarna av fixerings- och sackadtidslängd på samma tidsintervall som för intensitetsytan. Om respektive fördelning hade varit unik i varje period från Tabell 2 så hade denna ändring möjligen bidragit till ett bättre resultat. I avsnitt 4.5 diskuterades hur resultaten för Modell 4 varierade beroende på valet av person. För de flesta av personerna presterade modellen relativt lika bra under de första 15000 ms med avseende på våra statistikor, för att under senare tidsperioder visa på mer varierande resultat. I de fall då Modell 4 beskrev ögonrörelserna sämre under den senare delen av observationstiden var problemet ofta att statistikorna konvext hölje och reslängd överskattades. Detta skulle kunna bero på att modellen genererar extrema sackadlängder med lika stor sannolikhet över hela observationstiden. Därför skulle en möjlig förbättring för Modell 4 kunna vara att låta det konstanta värdet för vad som anses vara en extrem sackadlängd r istället vara en avtagande funktion av tid, $r(t)$. Med denna förändring hade man kunnat angripa problemet med den linjärt växande simulerade reslängden som nämndes i avsnitt 4.2 och som kvarstår även för Modell 4. När det gäller definitionen av r överlag så valde vi att använda data från samtliga 20 personer i syfte att få ett generellt värde. Ett alternativt sätt vore att låta r variera beroende på personen som ska modelleras, genom att definiera r baserat på data enbart från övriga 19 personer i likhet med tidigare skattningar av parametrar. Ett sådant tillvägagångssätt innebär att data från personen som ska modelleras inte används i utformningen av modellen, med följd att r inte längre är generellt.

Förutom att Modell 4 var den som presterade bäst så var det också den enda modellen där vi introducerade beroenden mellan fixeringar. När det gäller en eventuell femte modell så hade det varit ett naturligt nästa steg att försöka utveckla modeller som tar hänsyn till mer komplexa beroenden mellan fixeringar. En idé skulle kunna vara att för varje ny fixering skulle man kunna se hur ofta det har förekommit tidigare fixeringar i en omgivning av den nya, och endast acceptera den nya fixeringen utifrån beräknade sannolikheter för denna omgivning baserat på en given modell, likt [15]. Ett intressant spår att utforska vore en s.k. “self-exciting” punktprocess där den nuvarande intensiteten ändras baserat på föregående punkter [16]. Det verkar nämligen vara så att speciella områden där personerna har tittat på konstverket har en högre sannolikhet att förekomma baserat på vilka platser personen tidigare har tittat på. En speciell sådan punktprocess, Hawkesprocessen, ser vi som särskilt intressant att tillämpa eftersom att den tar hänsyn till klustrade områden över tid [16]. En sådan “self-exciting” modell förutsätter att fixeringspunkterna simuleras sekventiellt som görs i koden för Modell 4, framför de funktioner i `spatstat` som simulerar färdiga punktmönster med oberoende mellan punkterna.

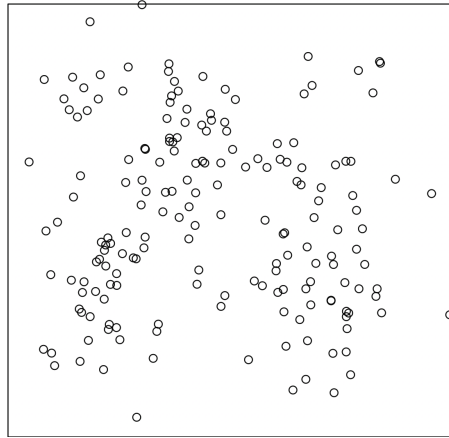
Eftersom datan som denna rapport utnyttjat inte är slumpmässigt insamlad finns en snedvridning. För att skapa en mer universell modell på hur en människa observerar ett konstverk behöver urvalet av deltagare vid studien ses över. Detta kan lösas genom att se till så att inte bara det är studenter som deltar i studien utan även andra grupper. Man borde även utöka antalet individer i studien för att mer generellt kunna svara på frågan hur en människa ser på ett specifikt konstverk.

Slutligen tillhör studier av ögonrörelser på målningar med detta tillvägagångssätt ett till stora delar utforskat forskningsfält [7]. Utöver vikten av antagandet om spatial icke-homogenitet för den underliggande punktprocessen så vill vi med detta arbete, för framtida studier, särskilt förmedla betydelsen av att ta hänsyn till beroende mellan fixeringar.

Referenser

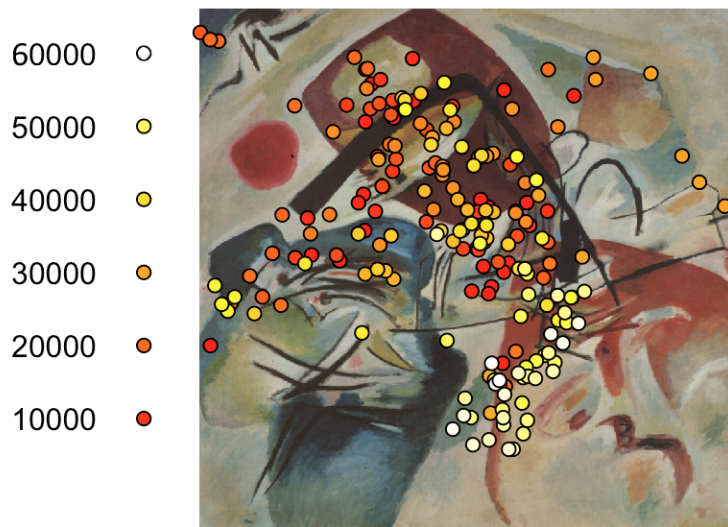
- [1] Holsanova J. New methods for studying visual communication and multimodal integration. *Visual Communication*. 2012;11(3):251-7.
- [2] Wolf A, Ueda K. Contribution of eye-tracking to study cognitive impairments among clinical populations. *Frontiers in Psychology*. 2021;12.
- [3] Valliappan N, Dai N, Steinberg E, He J, Rogers K, Ramachandran V, et al. Accelerating eye movement research via accurate and affordable smartphone eye tracking. *Nature communications*. 2020;11(1).
- [4] Wade NJ. Pioneers of eye movement research. *i-Perception*. 2010;1(2):33-68.
- [5] Barlow HB. Eye movements during fixation. *The Journal of Physiology*. 1952;116(3):290-306.
- [6] Barthelmé S, Trukenbrod H, Engbert R, Wichmann F. Modeling fixation locations using spatial point processes. *Journal of Vision*. 2013;13(12).
- [7] Ylitalo AK, Särkkä A, Guttorp P. What we look at in paintings: A comparison between experienced and inexperienced art viewers. *The Annals of Applied Statistics*. 2016;10(2):549-74.
- [8] Locher P. The usefulness of eye movement recordings to subject an aesthetic episode with visual art to empirical scrutiny. *Psychology Science*. 2006;48(2):106-14.
- [9] Kandinsky W. Picture with a Black Arch [Målning]; 1912 [hämtad 21 april 2024]. Centre Pompidou, Paris. Hämtad från: <https://www.centrepompidou.fr/en/ressources/oeuvre/c88MRG>.
- [10] Illian J, Penttinen A, Stoyan H, Stoyan D. Statistical analysis and modelling of spatial point patterns. Chichester, West Sussex: John Wiley & Sons; 2008.
- [11] Baddeley A, Rubak E, Turner R. Spatial point patterns: methodology and applications with R. Boca Raton, FL: Chapman & Hall/CRC press; 2016.
- [12] Diggle PJ. Statistical analysis of spatial and spatio-temporal point patterns [Internet]. Boca Raton, FL: Chapman & Hall/CRC press; 2013. [hämtad 18 januari 2024]. Hämtad från: <https://doi.org/10.1201/b15326>.
- [13] Chung MK. Statistical and computational methods in brain image analysis [Internet]. Boca Raton, FL: Chapman & Hall/CRC press; 2013. [hämtad 14 februari 2024]. Hämtad från: <https://doi.org/10.1201/b15056>.
- [14] Redenbach C, Särkkä A. Parameter estimation for growth interaction processes using spatio-temporal information. *Computational Statistics & Data Analysis*. 2013;57(1):672-83.
- [15] Penttinen A, Ylitalo AK. Deducing self-interaction in eye movement data using sequential spatial point processes. *Spatial Statistics*. 2016;17:1-21.
- [16] Hawkes AG. Spectra of some self-exciting and mutually exciting point processes. *Biometrika*. 1971;58(1):83-90.

A Appendix

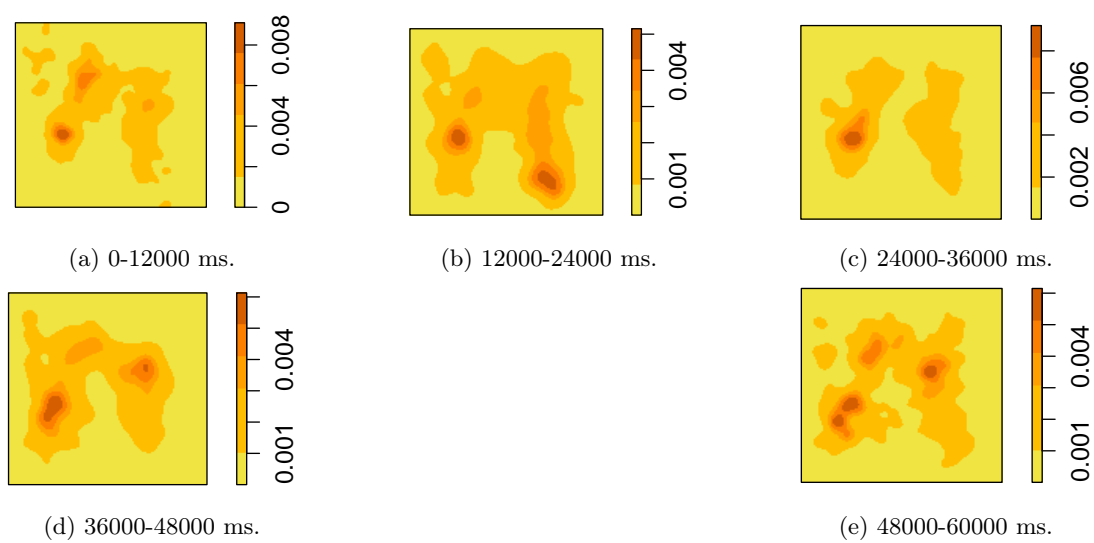


Figur A1: Punktmönster från en simulerad icke-homogen Poissonprocess skapad med `rpoispp` med intensitet baserat på den i Figur 6b.

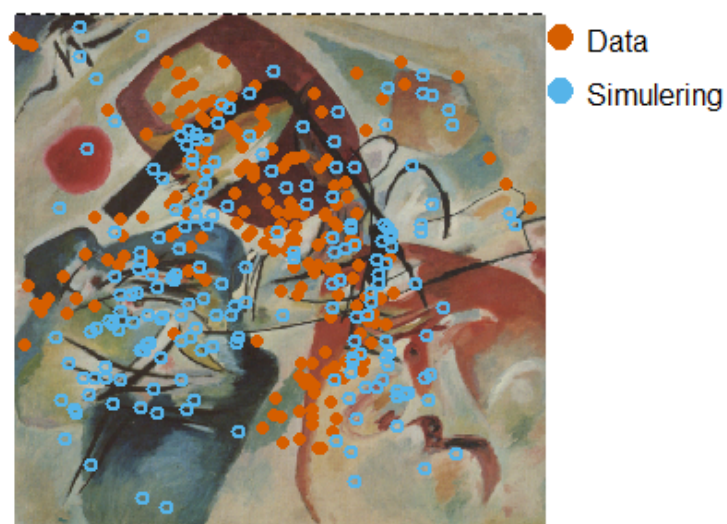
Fixeringar från person med id-nummer 1



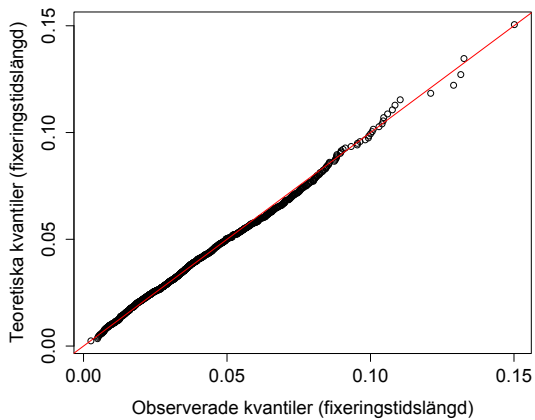
Figur A2: Fixeringar för person med id-nummer 1 under första minuten. Färgerna indikerar när fixeringen tillkom under observationstiden 0-60000 ms. Mörkare färg indikerar en tidig fixering, medan en ljusare färg indikerar en senare. Talet till vänster om respektive färgad prick visar intervallets övre gräns i ms.



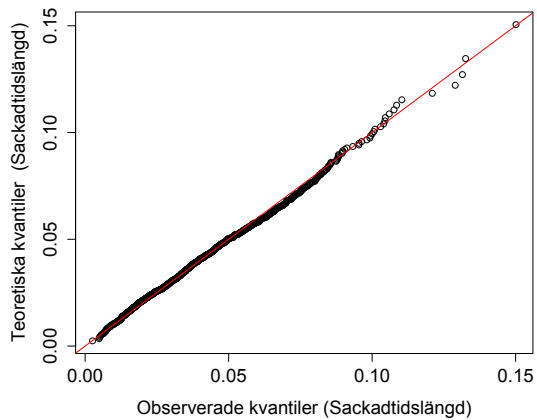
Figur A3: Skattad intensitetsyta över tidsintervallet 0-60000 ms uppdelat i fem intervall.



Figur A4: Punktmönster från person med id-nummer 1 (orange), och en simulering från Modell 3 (blå).

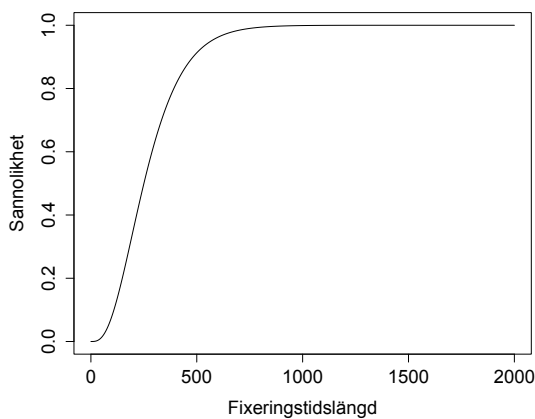


(a) QQ-plot för fixeringstidslängder.

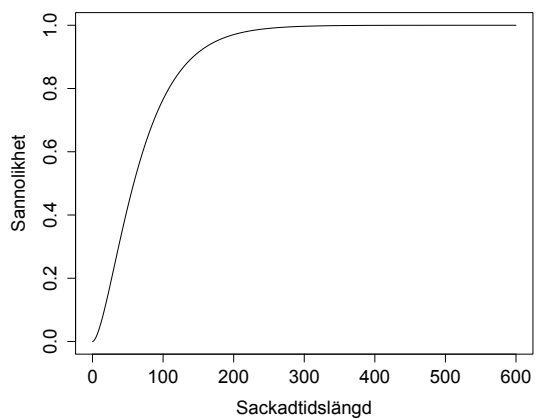


(b) QQ-plot för sackadstidslängder.

Figur A5: QQ-plots för de två gammafördelningarna för fixerings- samt sackadstidslängder. De röda linjerna visar där de observerade kvantilerna är lika med de teoretiska.

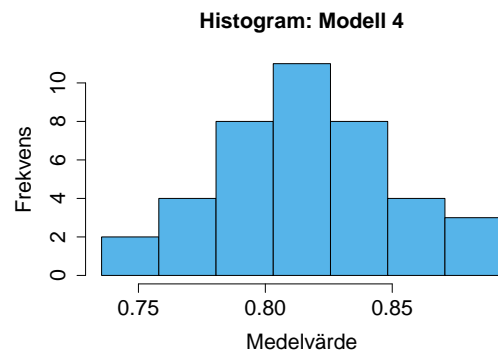
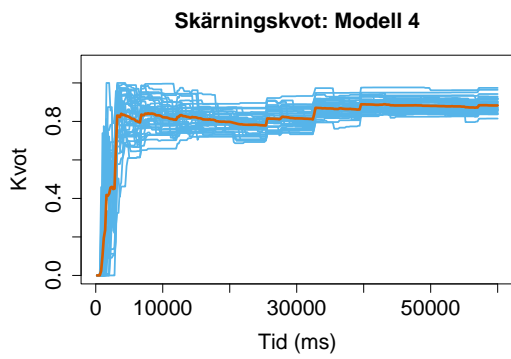


(a) Fördelningsfunktionen för gammafördelningen av fixeringstidslängderna.



(b) Fördelningsfunktionen för gammafördelningen av sackadstidslängderna.

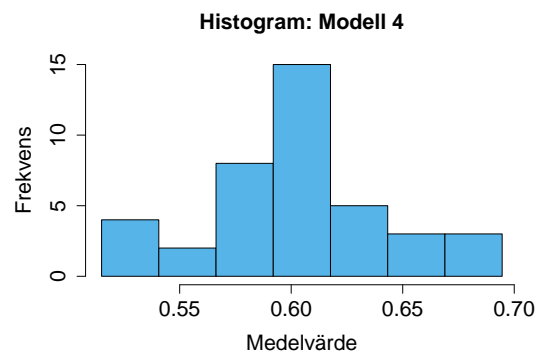
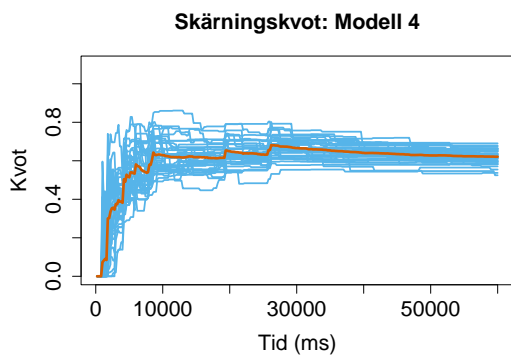
Figur A6: Fördelningsfunktioner för gammafördelningarna för fixerings- samt sackadstidslängderna.



(a) 40 simuleringar av skärningskvoten från Modell 4 (blå) och medelvärdet av alla simuleringar (orange).

(b) Fördelning av skärningskvotsmedelvärden från 40 simuleringar från Modell 4.

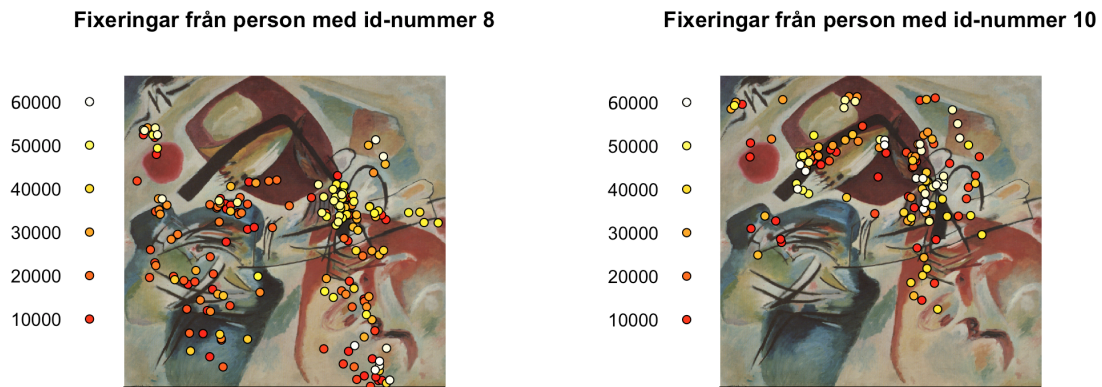
Figur A7: Skärningskvoten för Modell 4 med 40 simuleringar på person med id-nummer 8 (a) tillsammans med skärningskvotsmedelvärden av dessa (b).



(a) 40 simuleringar av skärningskvoten från Modell 4 (blå) och medelvärdet av alla simuleringar (orange).

(b) Fördelning av skärningskvotsmedelvärden från 40 simuleringar från Modell 4.

Figur A8: Skärningskvoten för Modell 4 med 40 simuleringar på person med id-nummer 10 (a) tillsammans med skärningskvotsmedelvärden av dessa (b).



(a) Fixeringar för person med id-nummer 8.

(b) Fixeringar för person med id-nummer 10.

Figur A9: Fixeringsmönstret för person med id-nummer 8 i (a) samt fixeringsmönstret för person med id-nummer 10 i (b). Färgerna indikerar när fixeringen tillkom under observationstiden 0-60000 ms. Mörkare färg indikerar en tidig fixering, medan en ljusare färg indikerar en senare. Talet till vänster om respektive färgad prick visar intervalllets övre gräns i ms. Notera att person med id-nummer 8 verkar titta förhållandevis likartat över hela observationstiden på det viset att nya områden utforskas, samt att sakkaderna verkar fortsätta att vara ungefär lika stora i snitt mellan de olika intervallen i (a). Person med id-nummer 10 verkar däremot titta alltmer klustrat, vilket kan ses genom att jämföra de ljusare och de mörkare prickarnas spridning i (b).