



GÖTEBORGS
UNIVERSITET

Vad är en funktion?

Elevers svårigheter med funktionsbegreppet och funktioners historiska utveckling

Linnéa Ireklint och Hanna Lindroos

Ämneslärarprogrammet med inriktning mot
arbete i gymnasieskolan



Uppsats/Examensarbete: 15 hp
Kurs: LGMA2G
Nivå: Grundnivå
Termin/år: HT/2024
Handledare: Carl-Joar Karlsson
Examinator: Johanna Pejlare

Nyckelord: Funktionsbegreppet, funktionshistoria, matematik, svårigheter, högstadieelever, gymnasieelever

Abstract

The concept of function represents a major part of mathematics and becomes more significant in school during high school. Throughout history, it has been a difficult concept to define and may create challenges for contemporary students. This literature study aims to identify students' difficulties with the concept of function, as well as to account for how the definition of a function has evolved historically. The literature study has been conducted through database searches in ERIC, Education Research Complete and MathSciNet via EBSCOhost, as well as through chain searching. The study results in identifying that students' difficulties with the concept of function primarily include the graphical and algebraic forms of representation. The identified difficulties can be categorized according to conceptual understanding, students' mental images, graphical representation and specific mathematical difficulties related to constant functions, split domain and one-valuedness. One reason for the difficulties is discussed to be that calculation processes dominates over concept learning in the classroom. A consequence is that students lose interest in the subject. The results of this study are partly evaluated through the formulation of questions the studies are based on, aiming to promote students' competence, and partly through reliability when multiple sources reinforce each other. The historical development of the concept of function has, over several thousand years, resulted in a general and standardized definition, where historical milestones such as variable relation and differential calculus have been significant discoveries. It can be confirmed that the concept of function is abstract and can present various types of difficulties for students in their mathematical understanding. This can be related to the definition of function from a historical perspective, as the concept has been difficult to define throughout history.

Sammanfattning

Funktionsbegreppet utgör en stor del av matematiken och är i skolan mer betydande under gymnasieåren. Det har genom historien varit ett svårt begrepp att definiera och kan utgöra svårigheter för dagens elever. Denna litteraturstudie syftar till att identifiera elevers svårigheter med funktionsbegreppet i samband med funktioners representationsformer, samt att redogöra för hur definitionen av en funktion sett ut historiskt. Litteraturstudien har genomförts via databassökning i ERIC, Education Research Complete samt MathSciNet via EBSCOhost, men även genom kedjesökningar. Studien resulterar i att elevers svårigheter med funktionsbegreppet främst inkluderar den grafiska och algebraiska representationsformen, där svårigheterna som identifierats kan kategoriseras i fyra kategorier: begreppsförståelse, elevers mentala begreppsbilder, grafisk representation och specifika matematiska svårigheter. Specifika matematiska svårigheter syftar till konstanta funktioner, styckvis definierade funktioner och entydighet. En orsak till svårigheterna diskuteras vara att beräkningsprocesser dominerar framför begreppsinnläring i klassrummet. En konsekvens av svårigheterna diskuteras vara att eleverna tappar intresset för ämnet. Diskussionen innehåller också en kritisk granskning av källornas resultat, där utformningen av studiers frågor till eleverna ifrågasätts och där det noteras om de olika källorna styrker varandra. Den historiska utvecklingen av funktionsbegreppet har genom flera tusen år resulterat i en generell och standardiserad definition, där avstamp som variabelsamband och differentialkalkyl varit betydande upptäckter för funktionshistorien. Det kan bekräftas att funktionsbegreppet är avancerat och kan utgöra olika typer av svårigheter för elever i deras matematikförståelse. Detta kan kopplas till funktionsdefinitionen ur det historiska perspektivet, då begreppet genom historien varit svårt att definiera.

Förord

Som blivande gymnasielärare i matematik har vi ett starkt engagemang för ämnet och ett starkt engagemang för att bemöta framtida elever. Att ge elever bästa möjliga förutsättningar för lärande genom att bemöta deras svårigheter och frågor inom matematik är en stor anledning till att vi valt att utbilda oss till gymnasielärare. Denna litteraturstudie syftar till att bidra till ett perspektiv av elevers svårigheter i matematik för att både underlätta och utveckla lärande.

Vi vill rikta ett stort tack till vår handledare Carl-Joar Karlsson som med ett stort engagemang och goda råd kommit med värdefulla insikter under arbetets gång. Vi vill också tacka vår kursledare och examinator Johanna Pejlare för goda råd. Slutligen vill vi tacka varandra för ett bra samarbete och ett väl genomfört arbete.

Innehållsförteckning

1	Inledning	1
1.1	Syfte och frågeställning	1
1.1.1	Avgränsningar	2
2	Bakgrund	3
2.1	Definitionen av en funktion	3
2.2	Funktioners representationsformer	4
2.3	Funktionsbegreppet i kursplanerna	4
2.4	Elevers uppfattningar om funktionsbegreppet	5
3	Material och metod	7
4	Resultat	9
4.1	Elevers svårigheter i förståelsen av funktioner och dess representationsformer	9
4.1.1	Begreppsförståelse	9
4.1.2	Elevers mentala begreppsbild	10
4.1.3	Specifika matematiska svårigheter	11
4.1.4	Grafisk representation	12
4.2	Funktionsbegreppet i historisk belysning	14
4.2.1	Tidig historia	14
4.2.2	1700-talets funktionsdefinition	16
4.2.3	Modern definition av funktionsbegreppet	17
5	Diskussion	19
5.1	Resultatdiskussion	19
5.1.1	Resultatsammanfattning	19
5.1.2	Resultatdiskussion av första frågeställningen	19
5.1.3	Resultatdiskussion av andra frågeställningen	22
5.1.4	Rekommendationer för vidare forskning	23
5.1.5	Diskussionsammanfattning	23
5.2	Metoddiskussion	24
6	Slutsats	26
7	Referenslista	27

1 Inledning

Matematik är ett kärnämne som följer elever genom skolåren. Ämnet utgör en grund för logiskt tänkande, problemlösning och abstrakta resonemang. Ju högre årskurs elever når, desto mer teoretiskt blir innehållet i matematiken. På högstadiet och gymnasiet är aritmetik och algebra ett återkommande moment i matematikämnet, där ett centralt inslag i området är funktionsbegreppet. I övergången från aritmetik till analytisk matematik spelar funktioner en viktig roll.

Funktionsbegreppet används i mer eller mindre alla vetenskaper och har haft en stor betydelse för både naturvetenskaplig och teknisk utveckling. Trots begreppets vidsträckt användning finns ett flertal olika sätt att definiera en funktion och i skolan framställs begreppet idag på varierande sätt i olika läromedel (Häggström, 2005).

Funktioner och funktionsbegreppet ingår i samtliga kurser på högstadiet och gymnasiet. På högstadiet introduceras enkla linjära funktioner, medan gymnasiet inkluderar mer avancerade funktionstyper. Exempel på funktioner som tas upp i gymnasiets matematikkurser är linjära, andragsrads-, tredjegrads-, potens-, polynom-, exponential-, logaritmiska samt trigonometriska funktioner (Matematik, 2022).

Funktionsområdet är ett matematiskt område där elever tenderar att ha bristfälliga kunskaper. Av egna erfarenheter, både från den verksamhetsförlagda utbildningen och egen skoltid, kan funktionsbegreppet och kopplingen mellan olika representationsformer vara en osäkerhet hos elever under gymnasieåren. Vår upplevelse är att elever tenderar att tappa intresset för matematiken när svårigheter för ämnet ökar. Tall och Bakar (1992) skriver specifikt att funktionsbegreppet genomsyrar samtliga grenar inom matematiken och intar en central position i dess utveckling. Dessutom visar det sig vara diskret och otydligt vid försök att undervisa om begreppet i skolmiljö. Kilhamn (2004) skriver att funktionsbegreppet ofta upplevs som något abstrakt och svårt under de sista åren av grundskolan samt början av gymnasieåren. Många elever har än inte utvecklat förståelsen av funktioner trots att de i sin vardag möter olika samband som ofta kan beskrivas som matematiska funktioner.

Om vi i vår framtid som lärare får följande fråga från våra elever: "...men vad är en funktion egentligen?", vill vi kunna svara på ett sätt som främjar elevers lärande och undviker missuppfattningar. Med detta i åtanke har vi därför valt att utföra denna litteraturstudie.

1.1 Syfte och frågeställning

Syftet med litteraturstudien är att identifiera elevers svårigheter med funktionsbegreppet för att kunna förebygga dem, i samband med funktioners olika representationsformer. För att fördjupa förståelsen om funktionsbegreppet är syftet även att redogöra för hur definitionen av funktioner har sett ut och förändrats genom historien.

För att uppnå syftet har följande frågeställningar valts:

- Vilka svårigheter har elever i förståelsen av funktioner och funktioners representationsformer?
- Hur har definitionen av en funktion förändrats genom historien?

1.1.1 Avgränsningar

I denna litteraturstudie används begreppet elever, vilket syftar till elever på högstadie- och gymnasieskolor, huvudsakligen i Europa. I de fall då högstadie- och gymnasieskola inte kan garanteras, syftats begreppet istället på elever i ålder mellan 13 och 20 år.

2 Bakgrund

Detta avsnitt syftar till att ge bakgrundsinformation som underlättar förståelsen för litteraturstudiens kommande resultat. Avsnittet innefattar definitionen av en funktion enligt Dirichlet-Bourbaki, en beskrivning av funktioners representationsformer, en översikt av funktionsbegreppet i kursplanerna på gymnasieskolan samt en beskrivning av elevers uppfattningar av funktionsbegreppet.

2.1 Definitionen av en funktion

I dagens matematik används ofta Dirichlet-Bourbaki-definitionen för att beskriva en funktion. Algebraiskt kan definitionen beskrivas som en avbildning mellan två mängder, där varje element i den första mängden tilldelas exakt ett element i den andra mängden. Den första mängden är definitionsmängden eller domänen och den andra mängden är värdemängden eller målmängden. Dirichlet-Bourbaki-definitionen beskriver funktioner som godtyckliga samband, vilka varken behöver kunna ritas upp eller behöver vara kontinuerliga någonstans. Efter Bourbakis generella men ändå specifika etablering, klargjordes hur det ska tolkas att två funktioner är lika varandra via ekvivalens (Kleiner, 1989; Vinner & Dreyfus, 1989).

Med matematiskt symbolspråk, om X och Y är två givna mängder, är deras kartesiska produkt $X \times Y$ mängden av alla ordnade par (x, y) , där $x \in X$ och $y \in Y$. Med andra ord består $X \times Y$ av alla par som kan bildas genom att kombinera ett element från X med ett element från Y . En relation från X till Y är en delmängd av $X \times Y$. Om $Y = X$ talas det om en relation på X , eftersom alla par då består av element från samma mängd. Om R är en relation från X till Y , skrivs bland annat xRy för att beteckna att $(x, y) \in R$. De viktigaste relationstyperna är ekvivalensrelationer, ordningar och funktioner. Observera att tomma mängden är en relation (Folland, 1999; Hewitt & Stromberg, 1965).

En ekvivalensrelation på X är en relation R på X sådan att tre specifika villkor uppfylls; xRx för alla $x \in X$, xRy om och endast om yRx , xRz när xRy och yRz för något y . Ekvivalensrelationen delar upp mängden X i ekvivalensklasser. Ekvivalensklassen av ett element x är $\{y \in X: xRy\}$. Ekvivalensklasser överlappar inte varandra, det vill säga att varje element i X tillhör precis en ekvivalensklass. Mängden X är den disjunkta unionen av dessa ekvivalensklasser, vilket betyder att de täcker hela X utan att ha några gemensamma element (Folland, 1999).

En funktion är en relation som är envärd. En relation kallas envärd ifall det för alla $x \in X$ finns ett unikt $y \in Y$ sådant att xRy . Ifall relationen är envärd används vanligen notationen $y = f(x)$. Funktioner kallas även avbildningar. Skrivsättet $f: X \rightarrow Y$ används för en relation från X till Y , som är en funktion. Denna notation säger att f tar element från mängden X och avbildar dem till element i mängden Y . Om $D \subseteq X$ och $E \subseteq Y$, definieras bilden av D och den inversa bilden av E under en avbildning $f: X \rightarrow Y$ som $f(D) = \{f(x): x \in D\}$ respektive $f^{-1}(E) = \{x: f(x) \in E\}$ (Folland, 1999).

Om $f: X \rightarrow Y$ är en funktion, kallas mängden X för definitionsmängden av f och mängden Y för värdemängden av f . En funktion f är injektiv om olika inmatningsvärden ger olika funktionsvärden. Formellt, om $f(x_1) = f(x_2)$ endast när $x_1 = x_2$, då är f injektiv. En funktion f är surjektiv om varje element i värdemängden Y har minst ett motsvarande värde i definitionsmängden. Formellt, $f(X) = Y$, vilket innebär att alla värden i Y kan nås av funktionen. En funktion är bijektiv när både injektiv och surjektiv uppfylls. Det innebär att om varje värde i värdemängden Y har exakt ett motsvarande värde i definitionsmängden X , och

tvärt om, är funktionen bijektiv. Om en funktion f är bijektiv, finns en invers $f^{-1}: Y \rightarrow X$ där $f^{-1}(f(x)) = x$ och $f(f^{-1}(y)) = y$ för alla x i X och alla y i Y (Folland, 1999).

2.2 Funktioners representationsformer

En funktion kan representeras på minst fyra olika sätt. Rosén (1996) beskriver funktioners representationer som den grafiska, den algebraiska, tabeller samt den verbala framställningen. Den algebraiska framställningen syftar på symboler och formler, medan den verbala syftar på texter och situationer (Persson, 2002; Rosén, 1996). Förståelse för funktionsbegreppet grundar sig i förmågan att använda funktioners representationsformer och även förmågan att utföra översättningar mellan dem (Borke, 2021). Tabellen nedan är en tolkning från Janvier's matris om funktioners representationsformer (Janvier, 1984). Rubrikerna för respektive kolumn beskriver de representationsformer som översätts ifrån och rubrikerna för respektive rad beskriver samma representationsformer som översätts till. I rutorna beskrivs det utförande som krävs för översättning från den ena representationsformen till den andra. Om en funktion exempelvis representeras i tabellform krävs utförandet att tolka tabeller för att översättas till verbal form. En representationsform kan inte översättas till samma representationsform, därav tom ruta mellan identiska former, med undantag för rubriken "Algebraisk form" då algebraiska uttryck kan omskrivas och manipuleras.

Tabell 1: Översättningstabell mellan fyra representationsformer av en funktion. Tabellinnehållet bygger på Janvier (1984).

Från \ Till	Verbal form	Tabellform	Grafisk form	Algebraisk form
Verbal form		Tolka tabeller	Tolka grafer	Tolka och känna igen
Tabellform	Samla in data		Avläsa punkter	Beräkna värden
Grafisk form	Skissa grafer	Plotta grafer		Plotta grafer
Algebraisk form	Modellera situationer	Anpassa formel till data	Anpassa funktion till graf	Omskriva och manipulera

2.3 Funktionsbegreppet i kursplanerna

I samtliga matematikkurser på gymnasiet ingår området "Aritmetik, Algebra och Funktioner". Funktionsbegreppet presenteras mer grundläggande i kurserna 1a till 1c och går mot en mer abstrakt definition och fördjupning i kurs fyra och fem. Nedan finns en sammanställd tabell som beskriver i vilken kurs olika typer av funktioner presenteras, samt i vilka kurser funktionstyperna ingår. Grå markering innebär att funktionstypen introduceras och ingår i markerad kurs. Blå markering innebär att funktionstypen ingår i markerad kurs, men har introducerats i tidigare kurs för eleverna (Matematik, 2022).

Tabell 2: Tabellen beskriver i vilken kurs olika typer av funktioner presenteras, samt i vilka kurser funktionstyperna ingår. Tolkad från ämnesplanen i matematik (Matematik, 2022).

Funktion \ Kurs	Linjära funktioner	Exponentialfunktioner	Potensfunktioner	Andragsgradsfunktioner	Polynomfunktioner	Trigonometriska och logaritmfunktioner
1 a						
1 b						
1 c						
2 a						
2 b						
2 c						
3 b						
3 c						
4						
5						

Funktionstypen introduceras i aktuell kurs	Funktionstypen ingår i aktuell kurs
--	-------------------------------------

2.4 Elevers uppfattningar om funktionsbegreppet

För att undersöka vilka typer av svårigheter elever har i förståelsen av funktioner och funktioners representationsformer är det väsentligt att förstå elevers uppfattningar om funktionsbegreppet och hur de kommunicerar sina uppfattningar.

Vinner och Dreyfus (1989) undersöker college-elevers uppfattningar om funktionsbegreppet i en kvalitativ studie. Studien baseras på intervjuer där eleverna besvarar olika frågor relaterade till funktionsbegreppet. I studien beskrivs fyra aspekter av elevers tolkningar och förklaringar tillhörande dessa frågor, där förklaringarna inkluderar både korrekta och felaktiga svar. De fyra aspekterna beskrivs vara entydighet, diskontinuitet, ”split domain” samt den exceptionella punkten. Dels underbygger college-eleverna sina förklaringar med någon av dessa aspekter i frågor såsom om en viss avbildning är en funktion, dels använder de aspekterna i fel syfte eller med avsaknad av motivering.

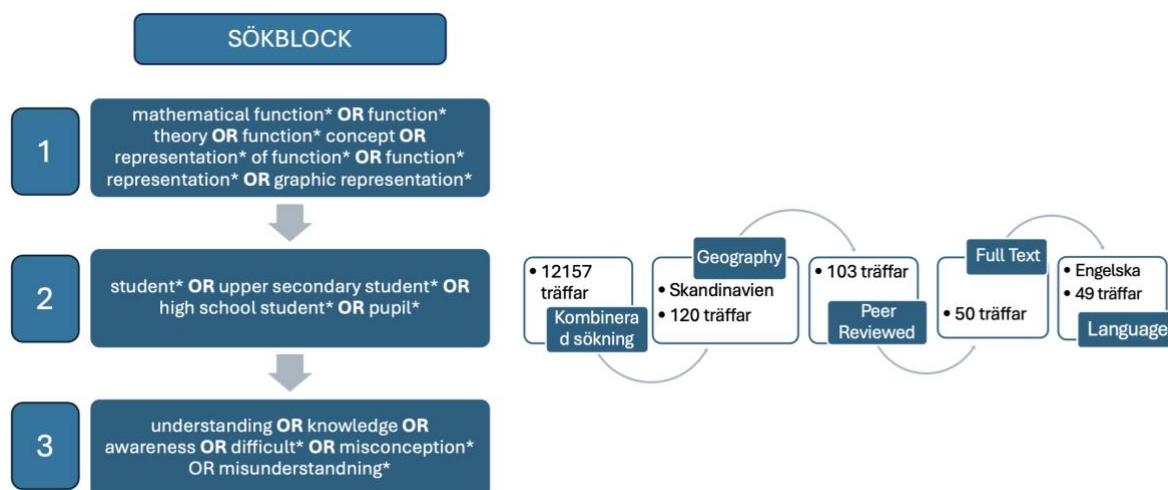
Enligt Vinner och Dreyfus (1989) beskrivs aspekten entydighet genom att eleverna problematiserar ifall relationer är entydiga, det vill säga att varje element i en mängd korresponderar med exakt ett värde i en annan mängd givet en regel. Om ett element korresponderar med mer än ett värde är det inte en funktion. Elevernas svar kan också handla om diskontinuitet, det vill säga huruvida en funktion är kontinuerlig eller inte. ”Split domain”, eller styckvis definierade funktioner, beskriver hur en funktion kan definieras med olika regler på olika delar inom sin definitionsmängd. Elevernas kommentarer berör aspekter av styckvis definierade funktioner, beroende på var man befinner sig inom den. Den exceptionella punkten innebär att det finns ett undantag för en given avbildning. Den allmänna regeln för avbildningen gäller inte i den punkten. Dessa fyra aspekter tenderar elever i studien att basera sina argument på när de svarar på frågor om funktioner (Vinner & Dreyfus, 1989).

I samma undersökning beskrivs det att elevers egen tolkning av funktionsbegreppets definition kan delas in i sex olika kategorier. Den första definitions-kategorin är att se en funktion som ett samband mellan två element och kan kopplas till Dirichlet-Bourbaki-definitionen. Den andra är att elever definierar en funktion som en beroenderelation mellan två variabler, där y beror av x . Den tredje kategorin beskrivs vara att en funktion är en regel, där något sammanför variablerna x och y med varandra. Elever ser även en funktion som en operation, vilket är den fjärde definitions-kategorin. Elever beskriver ofta begreppet som algebraiska operationer eller manipulationer. Den femte kategorin är att definiera funktioner via formler, algebraiska uttryck eller ekvationer som beskriver samband mellan variabler. Den sjätte och sista definitions-kategorin beskrivs vara att se en funktion som en representation, där skrivsättet $y = f(x)$ frekvent förekommer som förklaring (Vinner & Dreyfus, 1989).

3 Material och metod

För att besvara arbetets frågeställningar har en litteraturstudie genomförts. Till studiens första frågeställning har systematiska blocksökningar i databaserna ERIC, Education Research Complete och MathSciNet via EBSCOhost använts för att sammanställa relevant forskning. ERIC (Educational Resources Information Center) samt Education Research Complete är databaser med utbildningsrelaterad litteratur. MathSciNet via EBSCOhost är en databas som täcker världens matematiska litteratur sedan år 1940. Kedjesökning har också genomförts via artiklar som ansågs utmärkande för frågeställningarna. I denna metod har referenser och referenslistor granskats och nya artiklar har kunnat väljas ut. Utöver kedjesökning och blocksökning har artiklar från tidskrifterna *NOMAD* och *Nämnanen* från Nationellt Centrum för Matematikutbildning (NCM) använts, skrivna av personer som har bakgrund som eller är verksamma lärare, forskare, lärarutbildare eller matematiker.

En blocksökning till frågeställningen ”Vilka svårigheter har elever i förståelsen av funktioner och dess representationsformer?” har genomförts enligt figur 1. PICO-modellen har använts för att formulera sökord (Larsson, 2023), och booleska operatörer (AND, OR och NOT) har använts för en kombinerad sökning. Vissa sökord har trunckerats för att inkludera fler böjningar av orden i blocksökningen.



Figur 1: Figuren visar en illustration över en blocksökning där booleska operatörer belyser den kombinerade sökningen. Exklusionskriterierna till höger i figuren anges med tillhörande antal träffar.

Den kombinerade blocksökningen gav 12 157 träffar, vilket drastiskt reducerades till 120 träffar med exklusionskriteriet geografi och avgränsning till skandinavisk forskning (Sverige, Norge och Danmark). Därefter avgränsades resultaten ytterligare genom krav på Peer Reviewed samt Full Text. Till sist valdes språket engelska som ett kriterium och därefter återfanns 49 artiklar med tidsintervall från år 2002 till nutid. Dessa 49 artiklar genomgick relevansgranskning via titelobservation där åtta artiklar slutligen valdes. Dessa åtta artiklar granskades via relevans genom läsning av sammanfattningsavsnitt, där fem artiklar slutligen ansågs relevanta till frågeställningen. Efter djupläsning av de utvalda artiklarna ansågs tre relevanta för litteraturstudien och har därmed inkluderats i resultatet. Dessa tre artiklar är ”Bridging History of the Concept of Function with Learning of Mathematics: Students' Meta-Discursive Rules, Concept Formation and Historical Awareness” av T. Kjeldsen och P. Petersen (2014), ”Student teachers' knowledge of students' difficulties with the concept of function” av M. Borke (2021) och ”Equations, Functions, Critical Aspects and Mathematical Communication” av C. Olteanu och L. Olteanu (2012). Skäl till exkludering av resterande

träffar var främst på grund av högre skolnivå än vad som angivits i litteraturstudiens avgränsningar.

Blocksökningens resultat gav förutsättningar att genom kedjesökning identifiera ytterligare artiklar till resultatet. En sådan kedjesökning är identifiering av fem artiklar ur ”Student Teachers' Knowledge of students' difficulties with the concept of function” av M. Borke (2021). Dessa fem artiklar är ”Images and definitions for the concept of function” av S. Vinner och T. Dreyfus (1989), ”Students' mental prototypes for functions and graphs” av D. Tall och M. Bakar (1992), ”Mathematical Knowledge for Teaching the Function Concept and Student Learning Outcomes” av V. Hatisaru och A. Erbas (2017), ”Prototypes: Brakes or Levers in Learning the Function Concept? The Role of Computer Tools” av B. Schwarz och R. Hershkowitz (1999) samt artikeln ”y måste bero av x – Gymnasieelevers förståelse av det matematiska begreppet funktion” av M. Borke (2014). I en ytterligare kedjesökning identifierades artikeln ”Some cognitive factors as causes of mistakes in addition of fractions” av S. Vinner m.fl. (1981). ”Translation Processes in Mathematics Education” av C. Janvier (1984), som hänvisas till i bakgrundsavsnittet, har identifierats ur artikeln ”Behöver alla lära sig algebra?” av P-E. Persson ur tidskriften *Nämnan* (2002). De artiklar som inte identifierats via blocksökning eller kedjesökning har lokaliserats via NCM.

En litteraturinsamling till frågeställningen ”Hur har definitionen av en funktion förändrats genom historien?” har främst genomförts via kedjesökningar och rekommendationer. Artikeln ”The Concept of Function up to the Middle of the 19th Century” av A. P. Youschkevitch (1976) har identifierats ur artikeln ”Evolution of the Function Concept: A Brief Survey” av I. Kleiner (1989). Den sistnämnda har hittats via kollegors rekommendationer, vilket även gäller ”Function: Part 1” av A. Shenitzer och N. Luzin (1998) och ”Evolution of the Function Concept: A Brief Survey” av I. Kleiner (1989). Även till denna frågeställning har litteratur lokaliserats via NCM.

4 Resultat

I detta avsnitt presenteras resultatet av den genomförda litteraturstudien. Resultatet är uppdelat i två huvudområden efter studiens frågeställningar, ”4.1 Elevers svårigheter i förståelsen av funktioner och dess representationsformer” samt den matematiska fördjupningen ”4.2 Funktionsbegreppet i historisk belysning”.

4.1 Elevers svårigheter i förståelsen av funktioner och dess representationsformer

Detta avsnitt syftar till att besvara frågeställningen ”Vilka svårigheter har elever i förståelsen av funktioner och funktioners representationsformer?”. Svårigheterna som har sammanställts genom litteraturstudien kategoriseras under följande underrubriker: begreppsförståelse, elevers mentala begreppsmodell, specifika matematiska svårigheter och grafisk representation.

4.1.1 Begreppsförståelse

Begreppsförståelse är den aspekt av elevers svårigheter och möjliga missuppfattningar med funktioner som relaterar till matematiska begrepp. I en kvalitativ studie av Olteanu och Olteanu (2012) undersöktes 45 elever från två klasser på naturvetenskapsprogrammet, på en gymnasieskola i Sverige, genom observationer från verkliga undervisningssituationer. De skriver att elevernas uppfattning av begreppen funktion och ekvation påverkade elevernas sätt att arbeta med realistiska problem. I ena klassen förstod eleverna inte vilken av koefficienterna i en andragsgradsfunktion som påverkade funktionsutfallet och hade samtidigt svårt att särskilja maximi- och minimipunkter, då eleverna tidigare enbart stött på funktioner med ett lägsta värde. I båda klasserna kan eleverna inte förstå hur man beräknar det högsta respektive lägsta värdet av en andragsgradsfunktion. Elevernas förståelse visar på en brist på generalisering och integrering av variationsmönster i de matematiska begrepp som inkluderas i undervisningen. Generalisering syftar på förmågan att dra bredare slutsatser och bilda mer allmänna principer (Olteanu & Olteanu, 2012).

En ytterligare vanlig feltolkning i förståelsen av funktionsbegreppet är att eleverna förväxlar funktionsvärdet med variabelvärdet (Olteanu & Olteanu, 2012). I en kvalitativ undersökning av Borke (2014) intervjuas matematikläroestuderanter utifrån fiktiva gymnasieelevers svårigheter med funktionsbegreppet. I undersökningen framgår att det kan finnas svårigheter hos elever gällande variabelbegreppet. En fiktiv elev menar att en variabel är alla tal och anser att x är en variabel, men inte y . Även Grønmo och Rosén (1997a) menar att elever har svårigheter i användningen av funktionsbegreppet för att beskriva ett samband mellan variabler. Begreppet variabel har nära koppling med funktioner och Kilhamn (2004) beskriver att en avsaknad av förståelse för variabelbegreppet gör det svårt att förstå funktionsdefinitionerna, inklusive de moderna definitionerna, då variabelbegreppet är en central del i förståelsen av funktioners idé.

I en kvalitativ studie av Kjeldsen och Petersen (2014) undersöks danska gymnasieelever i syfte att studera sambandet mellan historisk förståelse av funktionsbegreppet och hur eleverna utvecklar sin kunskap om detta begrepp. När en grupp elever arbetade med den moderna definitionen av funktionsbegreppet framkom det i diskussion att eleverna saknade en korrekt förståelse av beroende variabler, oberoende variabler och konstanter. I undersökningen stötte elever på a och b i ur Dirichlets definition från år 1837, vilket var i annan kontext än de tidigare bemött och detta skapade förvirring hos eleverna. Eleverna betraktade a och b som konstanta i en funktion och vissa elever betraktade de mer specifikt som konstanta i en linjär funktion. Eleverna i undersökningen ser därmed inte a och b som variabler, utan symbolernas innebörd

tolkas som fast och oberoende av situation. Detta är ett exempel på hur elevers tolkningar påverkar hur de ser den matematiska helheten (Kjeldsen & Petersen, 2014).

Elever tenderar att fokusera mer på beräkningsaspekterna av ett fenomen, än på de begreppsliga aspekterna (Vinner & Dreyfus, 1989). Detta leder till att elever ofta har svårt att tillämpa funktionsbegreppet i nya situationer och använder funktionsbegreppet främst i rutinemässiga sammanhang. Därmed kan elever även ha problem med förståelsen för mer avancerade begrepp som bygger på funktioner, såsom differentialekvationer och derivator (Blomhøj, 1997).

I undersökningen av Borke (2014) får en elev frågan om $y = kx + m$ är en funktion, varpå eleven svarar "nej" med motiveringen att en funktion är $y = f(x)$. Eleven skiljer på begreppet räta linjen från begreppet funktion. Eleven anser också att ett koordinatsystem är ett system med en inritad rät linje.

Tall och Bakar (1992) skriver i sin undersökning om när begreppet funktion introducerades i gymnasieskolan på 1960- och 1970-talet. Det var då fokus på domän, intervall och en regel som relaterar varje element i den första mängden med ett unikt element i den andra mängden. Det visade sig då vara svårt med begreppsuppfattningen för majoriteten av eleverna. Det allmänna konceptet verkade vara för allmänt för att vara meningsfullt och kunskapen befäste inte i elevernas minnen. Istället formades elevernas uppfattning om vad en funktion är genom tillämpning i undervisningen, vilket kan leda till förankrade idéer som går emot den formella definitionen (Tall & Bakar, 1992).

Kompartimentalisering är ett fenomen med innebörden att även om elever har de kunskaper som krävs, används inte dessa, då eleverna inte ser relevansen i ett visst sammanhang (Vinner m.fl., 1981). I sammanhanget innebär det att elever inte använder funktionsbegreppets definition, trots att de besitter kunskapen om begreppet. Undersökningen av Vinner och Dreyfus (1989) bekräftar att elever som ger en korrekt definition av en funktion ibland inte använder denna definition vid specifika uppgifter. 56 procent av eleverna som deltar i undersökningen uppvisar kompartimentalisering, på så vis att de uppger en korrekt beskrivning av Dirichlet-Bourbaki-definitionen, men använder trots det inte definitionen när de besvarar frågor om funktioner.

4.1.2 Elevers mentala begreppsbild

Begreppsbild är den samlade kognitiva strukturen kopplad till ett begrepp. Denna struktur inkluderar alla mentala bilder och processer associerade med begreppet (Kjeldsen & Petersen, 2014; Tall och Vinner 1981). Elevers mentala begreppsbild är den aspekt av elevers svårigheter med funktioner som handlar om metaforer och tankeexperiment som elever använder för att relatera till matematiken. Nedan behandlas begreppen prototypexempel och operativa aspekter, som aspekter till elevers mentala begreppsbild, vilka anses vara svårigheter för elever i uppfattningen om funktionsbegreppet.

Prototypexempel är en mental modell som används som referens för att förstå nya uppgifter inom begreppsinnläring. Vissa elever använder linjära funktioner och andragsgradsfunktioner som prototypexempel, istället för funktionsbegreppets definition, vilket beskrivs kunna vara skadligt för begreppsinnläringen (Schwarz & Hershkowitz, 1999).

Grønmo och Rosén (1997a) skriver att en vanlig feltolkning hos elever är att betrakta en funktion som en situationsspecifik avbildning och bekräftar att många elever tror att funktioner alltid avbildas enligt räta linjens ekvation. Grønmo och Rosén (1997b) skriver att eftersom eleverna enbart har erfarenhet av räta linjer när funktionsbegreppet introduceras, är det vanligt att elever kopplar funktioner enbart till räta linjer. Borke (2014) understryker att linjära

funktioner dominerar över andra typer av funktioner i elevers begrepps bild om funktioner. I studien tilldelas elever ett koordinatsystem med två markerade punkter och eleverna får frågan om det är möjligt att rita grafen till en funktion som går genom de två punkterna, samt hur många olika grafer som kan ritas genom punkterna. Fyra av 16 elever ritar endast en rät linje genom punkterna, vilket visar på elevers begrepps bild om funktioner där linjära funktioner dominerar.

I en undersökning av Hatisaru och Erbas (2017) om lärares och gymnasieelevers uppfattningar om funktionsbegreppet, beskrivs ett missförstånd där en elev tolkar funktionsbegreppet som en operation och definierar en funktion felaktigt. Undersökningen visar att eleven är omedveten om godtyckligheten hos funktioner. En av undersökningens slutsatser är att elever ser funktioner främst som formler och algebraiska operationer. En elev nämner att funktioner enbart är meningsfulla för att klara proven och kopplar ingen meningsfullhet till det vardagliga livet. Detta understryker att bilden av funktionsbegreppet är ofullständig (Hatisaru & Erbas, 2017).

Vinner och Dreyfus (1989) bekräftar i sin undersökning att många elever förlitar sig på operativa och formelbaserade uppfattningar om funktioner, istället för att använda den formella definitionen. Detta skapar en klyfta mellan elevernas mentala begrepps bild och den formella definitionen, som illustreras i elevernas svar på frågor där de ofta använder algebraiska uttryck felaktigt för att försöka beskriva funktioner.

Kjeldsen och Petersen (2014) skriver i sin undersökning att det finns fler exempel som visar på att många elever definierar funktioner som analytiska uttryck. En elev beskriver Dirichlets uppfattning av funktioner som att den kan utges på annat sätt än som en formel eller analytiskt uttryck. Eleven indikerar däremot att idag är detta inte synen på en funktion, då en funktion idag utges vara en form av ett analytiskt uttryck. En ytterligare elev svarar att en funktion är en procedur för beräkning, vilket indikerar på en operativ uppfattning om funktionsbegreppet. Det framgår att eleverna har ett analytiskt uttryck i åtanke när de beskriver sin förståelse av funktioner (Kjeldsen & Petersen, 2014).

De operativa aspekterna av funktionsbegreppet beskrivs av Blomhøj (1997) utgöra en fara för elevers förståelse av funktioner som objekt. De operativa aspekterna som ofta föregår de strukturella aspekterna, understryker Blomhøj (1997) inte är optimalt för inläringen.

4.1.3 Specifika matematiska svårigheter

I detta avsnitt behandlas tre specifika matematiska svårigheter som kan orsaka problem hos elever. Dessa svårigheter är kopplade till konstanta funktioner, styckvis definierade funktioner och entydighet.

I en kvalitativ studie, som genomfördes i England, av Tall och Bakar (1992) undersöks 28 gymnasieelevers uppfattningar om funktioner och grafer. Konstanta funktioner beskrivs utgöra svårigheter för elever då x -termen inte är synlig i en sådan funktion. I undersökningen anger 28 procent av eleverna rätt svar gällande om $y = 4$, eller när y är lika med en konstant, är en funktion eller inte. Tall och Bakar (1992) argumenterar för att $y = 4x^0$ hade förtydligat situationen för eleverna.

Elevers svårigheter med den konstanta funktionen som beskrivs i ovan stycke bekräftas i en liknande undersökning, där tio av 16 elever anser att varken ekvationen $y = 4$, eller den grafiska representationen till $y = 4$, uttrycker en funktion. En elev resonerar att $y = 4$ inte kan vara en funktion, eftersom det inte finns någon x -term i uttrycket. Andra elever uttrycker att det inte kan vara en funktion, eftersom y inte förändras beroende av x -värdet och att funktionen inte beror av x . En ytterligare elev har missuppfattningen att det inte finns variabler i den konstanta funktionen. Endast en elev formulerar en korrekt motivering om varför den konstanta

funktionen är en funktion. Elever kan ha svårt att identifiera konstanta funktioner, eftersom de förväntar sig en oberoende variabel i den algebraiska representationen (Borke, 2014; Borke, 2021).

Liksom i undersökningen av Tall och Bakar (1992) menar Borke (2014) att elever uttrycker att $y = 4$ inte är en funktion, men uttrycker att $y = 4x^0$ är en funktion. Detta faktum kan kopplas till den operationella förståelsen av funktionsbegreppet, på så vis att förståelsen är starkt knuten till att en operation utförs med variabeln x för att erhålla motsvarande y -värde. Hatisaru och Erbas (2017) bekräftar att många elever inte ser konstanta funktioner som funktioner, vilket har att göra med att många elever inte upplever det som en funktion om den inte innehåller algebraiska symboler.

Styckvis definierade funktioner kan innebära svårigheter för elever. I en studie av Vinner och Dreyfus (1989) får elever olika frågor kopplade till styckvis definierade funktioner, exempelvis "Finns det en funktion vars graf är...", följt av tre bilder på grafer, där två av dem representerar styckvis definierade funktioner. Majoriteten elever ger det korrekta svaret "ja" på frågorna om de styckvis definierade funktionerna. Däremot föreslår många elever en enda algebraisk regel till ena styckvis definierade funktionen, med avsaknad av förståelse att det krävs fler regler för olika intervall. Till den andra styckvis definierade funktionen motiverar många elever sina svar genom hänvisning till diskontinuitetsaspekten, samt "split domain". Elever tror att dessa egenskaper utesluter möjligheten för en funktions giltighet. Många elever saknar dessutom argument till frågorna och vissa elever svarar "ja" i fel situationer. Elever motiverar även varför en graf representerar en funktion genom argument som att matematiker har bestämt att det är en funktion. Vinner och Dreyfus (1989) sammankopplar detta argument med en lägre nivå av förståelse, till skillnad från argument som innefattar de fyra aspekterna av elevers förståelse, vilka beskrivs i avsnitt "2.4 Elevers uppfattningar om funktionsbegreppet".

I undersökningen av Borke (2014) anger tre av 16 elever krav på en funktion som att grafen måste vara sammanhängande. Endast fem elever accepterar faktumet att en icke sammanhängande graf kan representera en funktion. En elev får frågan om en styckvis definierad funktion, med en sammanhängande graf bestående av en böjd kurva och en halv rät linje, varpå eleven svarar att grafen inte beskriver y som en funktion av x , eftersom grafen innehåller både räta linjens ekvation och en andragradsekvation. Eleven saknar styckvis definierade funktioner i sin förståelse om funktioner. Andra elever vill bestämma en formel som ska gälla för hela funktionens definitionsmängd och som uppfyller båda villkoren. En av eleverna uttrycker att pennan inte får lyftas när en graf skissas. I elevernas förståelse om funktioner finns den felaktiga bilden att en funktion måste kunna representeras med en enda formel.

Det framkommer i studien av Borke (2014) att vissa elever har svårigheter med entydighetsaspekten. Exempelvis uppfattar en elev att en ekvation representerar en funktion, trots att y -värdet inte är entydigt bestämt för $x = 0$. Eleven hävdar att det finns tre olika funktionsvärden för $x = 0$ i cirkelns ekvation och svarar "ja" på frågan om det kan finnas tre olika funktionsvärden. Eleven visar därmed inte att kravet på ett entydigt funktionsvärde är en del av förståelsen av funktionsbegreppet. En annan elev medger att y kan vara ± 3 när $x = 0$ och ser inget problem med detta, då eleven menar att det handlar om en andragradsekvation där svaret är två värden.

4.1.4 Grafisk representation

Den grafiska framställningen av funktioner tenderar att utgöra svårigheter hos elever. Det är särskilt svårt att översätta mellan de olika representationsformerna, framför allt när det gäller att gå till och från den grafiska representationsformen (Rosén, 1996). Ett exempel på en

feltolkning hos elever beskrivs vara att grafiska framställningar inom statistik anses vara en av funktioners representationsformer. Elever ser alltså ingen skillnad mellan grafer i statistiska sammanhang och den grafiska representationen för funktioner (Grønmo & Rosén, 1997a).

I undersökningen av Tall och Bakar (1992) är den grafiska representationen i fokus. Eleverna avgör skriftligt om olika avbildningar representerar en funktion eller ej. Första exemplet visar en andragsgradsfunktion med nollställe i origo, där samtliga deltagande elever korrekt instämmer att det är en funktion. Samma avbildning, fast vriden 90 grader medurs, presenteras därefter. Här svarar 95 procent av eleverna att det är en funktion, men ingen gymnasieelev anger det väsentliga argumentet att x kan vara en funktion av y . De fem procent som nekar har ingen motivering bakom svaret. Denna missuppfattning kan vara ett resultat av elevers mentala prototypexempel, eftersom grafen ser bekant ut för eleverna.

Vidare exempel handlar om halvcirklar istället för parabler, där svaren skiljer sig betydligt mer. I ett exempel som avbildar en halvcirkel med mittpunkt i origo, i första och andra kvadranten, svarar 61 procent av eleverna att det representerar en funktion och 36 procent av eleverna att det inte representerar en funktion. Missuppfattningarna hos elever som svarar att det inte representerar en funktion är exempelvis att funktionen stannar av, att den skulle fortsätta om det var en funktion och att den inte är kontinuerlig. Dock använder eleverna kontinuitetsbegreppet i fel matematiskt syfte. Ett ytterligare exempel, där halvcirkeln är vriden 90 grader medurs, visar att 43 procent av eleverna felaktigt svarade ”ja” på frågan om det representerar en funktion (Tall & Bakar, 1992).

Uppfattningen om att den grafiska avbildningen även representerar en funktion, i ovanstående exempel, sjunker från 100 procent till 43 procent. Det sjunker ytterligare till 29 procent när cirkeln sedan begränsas i första kvadranten. Elever som svarar att det inte representerar en funktion motiverar med att den är inkomplett, då det är en del av en cirkel och att hela cirkeln måste vara utritad om det skulle representera en funktion. Eleven missuppfattar funktionsbegreppet som en naturlig helhet given av en formel där det är viktigt att inte ha en onaturligt vald del (Tall & Bakar, 1992). Denna missuppfattning kan kopplas till entydighetsaspekten som Vinner och Dreyfus (1989) skriver om, då en cirkel bryter mot det argumentet. Tall och Bakar (1992) illustrerar en cirkel centrerad i origo som är begränsad i första kvadranten, där 61 procent av eleverna anser felaktigt att det inte representerar en funktion. Situationen är omvänd i ett exempel med en hel cirkel, där näst intill två tredjedelar resonerar att det representerar en funktion. Att två tredjedelar av eleverna ihärdigt tror att cirkeln är en funktion knyter an till att deras bekantskap med grafiska representationer har gjort att de kopplar alla grafer till funktioner, inklusive cirkelns graf. Med andra ord kopplar eleverna den grafiska representationen till ett samband mellan två variabler. Detta trots att en cirkel inte uppfyller kraven för att vara en funktion. Denna övertygelse stämmer dock sällan överens med hur eleverna vanligen beskriver en funktion i samband med processer (Tall & Bakar, 1992).

Slutligen presenteras tre exempel i artikeln där graferna beskrivs vara konstiga av eleverna då de inte är igenkänningsbara. Två av graferna skulle teoretiskt sett kunna uppfylla funktionsdefinitionen, men den tredje grafen kan motiveras inte vara en funktion via entydighetsaspekten. Detta argument framförs inte av eleverna, utan grafen tolkas bland annat som för komplicerad eller oregelbunden (Tall & Bakar, 1992).

I studien av Borke (2014) ställs frågan ”Vad är en funktion?”, varpå en elev svarar att en graf ska kunna ritas. Andra elever svarar att en funktion är en graf, där det till varje x -värde finns ett y -värde. Detta visar på en övertro på den grafiska representationen av funktioner och i elevernas begreppsbild finns endast funktioner vars grafer kan ritas ut. Ett annat missförstånd är när en elev uttrycker att en kurva måste vara böjd för att representera en funktion (Borke, 2014).

4.2 Funktionsbegreppet i historisk belysning

Detta avsnitt syftar till att besvara frågeställningen ”Hur har definitionen av en funktion förändrats genom historien?”. Den matematiska fördjupningen om funktioners historia har sammanställts genom litteraturstudien och kategoriseras under följande underrubriker: tidig historia, 1700-talets funktionsdefinition samt modern definition av funktionsbegreppet. Den tidiga historien sträcker sig från den sumeriska kulturen fram till 1700-talet och den moderna historien inkluderar 1800-talet och framåt.

4.2.1 Tidig historia

Funktionsbegreppets historia sträcker sig tillbaka till den sumeriska kulturen omkring 3000 år f.Kr. Där uttrycktes relationer mellan tal genom tabeller, som exempelvis innehöll inverterade tal eller kvadratrötter. Dessa tabeller kan antas som funktioner, då relationen mellan tal i två mängder var entydigt formulerad. Vidare, i antikens Grekland, gavs det utöver tabeller beskrivningar av metoder att räkna fram ”funktionsvärdet” för ett givet värde på den oberoende variabeln. Dessa metoder användes troligen av astronomer långt tidigare (Hägström, 2005).

Nicole Oresme (1320 – 1382) utvecklade en metod för att beskriva sambandet mellan hastighet och tid genom en kurva. Tekniken återkom först när Galileo Galilei (1564 – 1642) använde metoden för att uttrycka sambandet mellan varierande storheter via formler. Galilei var central i utvecklingen av funktionsbegreppet, då han kvantitativt försökte beskriva naturfenomen under slutet av 1500-talet. Före Galilei formulerades samband med naturligt språk och geometriska begrepp, men dessa utvecklades till algebraiska formler (Hägström, 2005).

Funktionsbegreppet breder ut sig under andra halvan av 1500-talet i Europa och tar en mer explicit form. Algebra och symbolspråket utvecklas, som i sin tur möjliggör användningen av bokstäver för att skriva kompakta formler, det vill säga introduktionen av variabler. Innan dess handlade algebra främst om ekvationslösning, där en symbol användes för att beskriva ett obekant tal. Kombinationen av algebra och geometri i början av 1600-talet lade grunden för den moderna matematiska vetenskapen och möjliggjorde vidareutvecklingen av variabler och ekvationer. Bokstävernans nya matematiska betydelse gav förutsättningar för den matematiska formeln (Hägström, 2005; Kleiner, 1989).

I början av 1600-talet utvecklade René Descartes (1596 – 1650) och Pierre de Fermat (1601 – 1665) koordinatsystemet. De använde koordinatsystemet för att representera kurvor och började använda ekvationer för att representera dem. Senare in på 1600-talet presenterades flera metoder för att beskriva funktionssamband. Detta via naturligt språk, tabeller, grafer och formler. Det blev möjligt att översätta mellan dessa så kallade representationsformer. Under samma tidsperiod introducerade Isaac Newton (1643 – 1727) och Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) termen ”funktion”. Leibniz beskrev funktioner som ett samband mellan olika sträckor som representerar punkter på en kurva, såsom sambandet mellan abscissa och ordinata, som motsvarar x- och y-koordinaten i ett tvådimensionellt koordinatsystem. Newton och Leibniz utvecklade metoder för att analysera förändringshastigheten hos varierande storheter, samt för att hantera kvoten mellan sträcka och tid vid tidsintervall där tiden blir oändligt liten. Detta hanterades genom infinitesimaler, oändligt små tal som mäter oändligt korta tidsintervall, för att beskriva momenthastigheten (Hägström, 2005).

Tidigt i Newtons matematiska utvecklingsarbete insåg han att beräkna avståndet givet en hastighet var likvärdigt med att bestämma arean under en kurva. En sådan insikt bidrog avsevärt till utvecklingen av funktionsbegreppet, då det möjliggjorde en viktig koppling mellan derivering och integrering (Katz, 2004; Youschkevitch, 1976).

Newton kallade x och y för fluenter ("fluents"), som är de kontinuerligt föränderliga kvantiteterna. Momenten $\dot{x}o$ och $\dot{y}o$ är oändligt små tillägg av dessa fluenter och symboliserar förändring under oändligt små tidsintervall. Kvantiteterna x och y blir efter vilket oändligt litet tidsintervall som helst $x + \dot{x}o$ och $y + \dot{y}o$, så att x och y kan ersättas mot dessa i ekvationer. Låt ett konkret exempel vara ekvationen $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$ och ersätt x med $x + \dot{x}o$ och y med $y + \dot{y}o$. Ekvationen blir då (Katz, 2004, s. 307);

$$x^3 + 3\dot{x}ox^2 + 3\dot{x}^2o^2x + x^3o^3 - ax^2 - 2a\dot{x}ox - ax^2oo + axy + axoy \\ + a\dot{y}ox + ayxoo - y^3 - 3\dot{y}oy^2 - 3\dot{y}^2o^2y - y^3o^3 = 0$$

De termer som inte multipliceras med o samt de som multipliceras med mer än en dimension av o stryks. De övriga termerna divideras med o för att kunna isolera förändringshastigheterna. Enligt tidigare angivna regler kommer dessa alltid ha den form de borde ha. Detta förenklas till $3\dot{x}ox^2 - 2a\dot{x}ox + a\dot{x}oy + a\dot{y}ox - 3\dot{y}oy^2 = 0$, vilket kan översättas till derivatan av exemplet ovan, då $\dot{x}o$ och $\dot{y}o$ är infinitesimala. Denna metod baseras på ett algebraiskt antagande eller manipulation. Båda är tvivelaktiga och försvaras enbart genom hänvisning till infinitesimaler. Antagandet finns i påståendet att $x + \dot{x}o$ och $y + \dot{y}o$ kommer att vara proportionerliga mot x och y . Dess rimlighet bygger på antagandet att om en partikel rör sig längs kurvan, kan dess hastighet betraktas som konstant under ett oändligt litet tidsintervall med längd o . I början av intervallet befinner sig partikeln vid en punkt (x, y) på kurvan, och vid slutet av intervallet har den förflyttat sig till punkten $(x + \dot{x}o, y + \dot{y}o)$ med antagandet att hastigheten förblir konstant under hela intervallet, alltså är $(x + \dot{x}o, y + \dot{y}o)$ en punkt på kurvan. Dock är antagandet om konstant hastighet endast giltigt om $o = 0$, annars kommer det att finnas ett fel involverat. Att påpeka att detta fel kan bli försumbart innebär att man avstår från metoden för infinitesimaler till förmån för en metod som liknar den för "first and last ratio" (Kitcher, 1973; Yu, 2016).

Newton var medveten om kritiken mot metoden för infinitesimaler och eventuella brister i den. Istället för att svara på kritiken med motargument avfärdade han dem av pragmatiska skäl. Det fanns en nyligen etablerad tradition bland tidens geometer som använde liknande metoder och Newton ansåg att hans arbete passade in i denna tradition (Kitcher, 1973).

I sitt verk *Principia* från 1693 föreslog Newton att kalkylen skulle baseras på en fast geometrisk grund. Han presenterade metoden för "first and last ratio". Bok I i *Principia* inleds med en diskussion om denna metod där lemma I utgör kärnan i den:

Quantities and the ratios of quantities, which in any finite time converge continually to equality, and, before the end of that time approach nearer to one another by any given difference become ultimately equal (Newton, *Principia*, 1693, citerad i Kitcher, 1973, s. 46–47).

I Lemma XII använde Newton ett exempel från Lemma IV för att bevisa det centrala resultatet att de slutgiltiga förhållandena mellan linje, båge och tangent är proportionerliga. År 1693 blev Newton tydligare med hur detta ger en geometrisk grund för metoden för fluxioner ("fluxions"). Fluxioner liknar fluenter, men beskriver mer exakt hastigheten med vilken fluenterna förändras över tid. Hans motivering börjar med en ny betoning på den kinematiska synen på kurvor:

I don't here consider Mathematical Quantities as composed of Parts *extremely small*, but as *generated by a continual motion* (Newton, *Principia*, 1693, citerad i Kitcher, 1973, s. 47).

Den nya betoningen fokuserar på kontinuitet. Newton särskilde skillnaden mellan användningen av diskreta element och de nya kinematiska perspektiven genom att direkt referera till teorin om fluxioner (Kitcher, 1973).

Genom att sammanföra den senare beskrivningen av fluxionsbegreppet med Lemma I ur Bok I av *Principia*, kan resultatet användas för att etablera ett sammanställt underlag för metoden. Om $dx(t)$ och $dy(t)$ är små ökningar i x respektive y , och \dot{x} och \dot{y} är fluxionerna av x och y , kan skillnaden mellan $dx(t):dy(t)$ och $\dot{y}:\dot{x}$ göras obetydlig genom att välja t tillräckligt litet. Detta resultat, som Newton grundade på en fast geometrisk bas, använde han för att motivera sina analytiska satser (Kitcher, 1973).

Newton arbetade också med potensserier (power series) som möjliggjorde en funktionsrepresentation som en serie av termer. Detta lade en viktig grund för funktionsutvecklingen. Genom utvecklingen av serier bidrog Newton till att skapa en tydligare förståelse för hur funktioner kunde representeras algebraiskt (Katz, 2004; Youschkevitch, 1976).

Trots framstegen finns det dock delade åsikter om huruvida Newton och Leibniz faktiskt arbetade med funktionsbegreppet. Man kan snarare säga att de använde funktioner på ett intuitivt och informellt sätt när de försökte lösa problemen kring hastigheter (Häggström, 2005). Även infinitesimaler mötte kritik för att vara antingen nära noll eller lika med noll, vilket ledde till debatt om deras korrekta användning (Häggström, 2005; Katz, 2004).

4.2.2 1700-talets funktionsdefinition

År 1692 introducerade Leibniz begreppet funktion för att beteckna ett geometriskt objekt kopplat till en kurva. Under samma tidsperiod upptäckte Leibniz och Johann Bernoulli (1667 – 1748) behovet av en allmän term för att beskriva kvantiteter som beror av andra kvantiteter i formler och ekvationer. Behovet ledde till användningsområdet för termen ”funktion”, som förekommer i Bernoullis definition år 1718 som:

One calls here Function of a variable quantity composed in any manner whatever of this variable and of constants (Kleiner, 1989, s. 3).

Detta var den första formella definitionen av en funktion, trots att Bernoulli inte beskrev vad ”composed in any manner whatever” egentligen innebar (Kleiner, 1989).

Under 1700-talet ökade behovet att precisera funktionsbegreppet bortom den algebraiska formelbeskrivningen. Leonhard Euler (1707–1783) publicerade i början av seklet *Eulers introducto*, där funktionsbegreppet spelar en central roll. Detta verk blev det första av sitt slag och bidrog därmed betydligt i utvecklingen av funktioner som koncept. Euler definierade en funktion som ett analytiskt uttryck men gav vidare ingen exakt definition av begreppet analytiskt uttryck. Han nämner enbart att analytiska uttryck kan involvera rötter, exponenter, logaritmer, trigonometriska funktioner, derivator och integraler (Kleiner, 1989).

Senare in på 1700-talet uppstod en omfattande dispyt om preciseringen av funktionsbegreppet mellan Leonhard Euler, Jean d’Alembert (1717–1783) och Daniel Bernoulli (1700 – 1782), son till Johann Bernoulli. Konflikten grundades i ett problem med vibrerande strängar där två olika lösningar hade presenterats. d’Alembert visade år 1747 att rörelsen styrs av den partiella differentialekvationen, vågekvationen, som i sin tur löste problemet. Han kallade sin lösning för ”general solution”. Euler skrev år 1748 ett verk av samma problem där han höll med i d’Alemberts lösning men kallade den för ”truly the general solution”, och introducerade samtidigt beteckningen $f(x)$. Både Euler och d’Alembert var ense om att termen ekvation innebar likhet av två analytiska uttryck, samt att om två analytiska uttryck antar samma värden i alla punkter måste de vara identiska. Däremot var de oense om

begreppet funktion. d'Alembert definierade en funktion som ett analytiskt uttryck, medan Euler definierade begreppet som en kurva ritad på fri hand. År 1753 bidrog D. Bernoulli med en annan lösning på problemet uttryckt i en enda formel, en trigonometrisk funktion, men både Euler och d'Alembert förkastade denna lösning (Häggström, 2005; Kleiner, 1989; Shenitzer & Luzin, 1998). Euler utvecklade sin egen definition av funktionsbegreppet år 1755 och relaterade den inte längre till ett analytiskt uttryck:

A quantity should be called a function only if it depends on another quantity in such a way that if the latter is changed, the former undergoes change itself (Häggström, 2005, s. 87-88).

Konflikten som bröt ut handlade främst om funktionsbegreppet och hur funktionssamband skulle uttryckas, särskilt genom formler. Ståndpunkten var att en funktion måste kunna formuleras antingen med en formel eller med ett uttryck (Häggström, 2005).

Joseph Fourier (1768 – 1830) tog nästa revolutionära steg i utvecklingen av funktionsbegreppet. Han löste den långvariga oenigheten mellan tidigare nämnda matematiker genom att visa att summor av trigonometriska funktioner kan uttryckas med olika formler över olika intervall. År 1822 presenterade han Fourierserier (Häggström, 2005; Kleiner, 1989). Joseph-Louis Lagrange (1736 – 1813) deltog också i debatten och försökte år 1759 bevisa att Euler hade rätt genom interpolationsproblemet. Under processen erhåller Lagrange Fouriers trigonometriska serie. Om Lagrange hade justerat gränser hade han kunnat upptäcka bildningslagen för Fourierkoefficienter, vilket hade avslutat alla debatter. År 1797 försökte han i sin teori visa att varje kontinuerlig funktion kunde utökas till Taylor-serier, men Fourier visade senare att dessa antaganden var både meningslösa och omöjliga (Shenitzer & Luzin, 1998).

4.2.3 Modern definition av funktionsbegreppet

Innan 1800-talet användes funktioner för att beskriva fysikaliska fenomen kvantitativt. Det blev under 1800-talets början tydligt att matematiken saknade en stabil grund, vilket ledde till att matematiker fokuserade på att utveckla funktionsbegreppet mot något mer generellt och abstrakt. Lejune Dirichlet (1805 – 1859) formulerade år 1837 en allmän definition av en funktion, vilket anses ha lagt grunden för det moderna funktionsbegreppet (Häggström, 2005). Dirichlet gjorde en noggrann analys av Fouriers arbete för att göra det mer matematiskt respektabelt. Detta skapade dock problem, eftersom Fouriers påstående att vilken funktion som helst kan representeras av en Fourierserie visade sig vara inkorrekt. ”The Dirichlet Function” var första explicita hypotesen av en funktion som varken definieras genom ett analytiskt uttryck eller med en kurva ritad för hand, och som inte är definierad överallt (Kleiner, 1989).

If a variable y is so related to a variable x that whatever a numerical value is assigned to x there is a rule according to which unique value of y is determined, the y is said to be a function of the independent variable x (Häggström, 2005, s. 89).

Med Dirichlets definition övergår funktionsbegreppet från att vara en beroenderelation till ett godtyckligt samband mellan reella tal. Dirichlets definition innebär att för varje värde x finns ett entydigt värde y . Detta breddar funktionsbegreppet och tillåter beskrivningar av samband bortom matematiska operationer (Häggström, 2005).

Under samma tidsperiod bidrog Augustin Louis Cauchy (1789 – 1857) till utvecklingen och definierade funktionsbegreppet genom bevisföring, som kom att bli en ny riktning inom analysen. Cauchys funktionsbegrepp var dock inte olik andra föregångare. Han vidareutvecklade även integralbegreppet för kontinuerliga funktioner, vilket senare blev utvecklat av Bernhard Riemann (1826 – 1866) i hans *Habilitationsschrift* från år 1854. Riemann började representera funktioner med ändligt många diskontinuiteter med hjälp av Fourierserier

och utökade Cauchys idéer till en mer allmän form av integration, som kallas Riemannintegralen. Riemanns arbete anses vara början på en teori av för matematiskt diskontinuerliga funktioner (Kleiner, 1989).

Drygt 100 år efter Dirichlets definition, närmare bestämt år 1939, tog den franska matematikgruppen som verkade under pseudonymen Nicolas Bourbaki det sista steget i utvecklingen av funktionsbegreppet. Bourbaki definierade en funktion som en relation mellan ett variabelement x som tillhör mängden E och variabelement y som tillhör mängden F . En sådan relation kallas för en funktionsrelation i y om det för varje x i E finns exakt ett y i F som har en given relation med x (Häggström, 2005; Kleiner, 1989).

Idag, i modern matematik, används ofta den formella Dirichlet-Bourbaki-definitionen. Funktionsdefinitionen fick sitt namn efter Dirichlet, vars tankar vidareutvecklades av matematikgruppen Bourbaki. Definitionen beskriver en funktion som en viss relation mellan två mängder. Vinner och Dreyfus (1989) beskriver definitionen som att en funktion är varje korrespondens mellan två mängder, där varje element i den första mängden tilldelas exakt ett element i den andra mängden. Den första mängden är definitionsmängden och den andra mängden är värdemängden. Kleiner (1989) skriver att Bourbaki såg funktionsdefinitionen som en specifik delmängd av den kartesiska produkten, alltså definitionen av en funktion som en mängd ordnade par. Dirichlet-Bourbaki-definitionen och Bourbakis koppling till den kartesiska produkten kan återses i avsnittet ”2.1 Definitionen av en funktion”. Dessa avstamp i historien används med andra ord i dagens funktionsdefinition.

5 Diskussion

5.1 Resultatdiskussion

Nedan följer en resultatsammanfattning och därefter följer diskussioner om studiens resultat, där frågeställningarna diskuteras separat. Diskussionen inkluderar bland annat ett kritiskt ställningstagande till forskningen och förslag på framtida forskning.

5.1.1 Resultatsammanfattning

De dominerande svårigheterna som elever upplever med funktionsbegreppet kan enligt det sammanställda resultatet kategoriseras enligt begreppsförståelse, mentala begreppsbilder, specifika matematiska svårigheter samt grafisk representation. Begreppsförståelse innefattar elevers svårigheter med funktionsbegreppet och andra matematiska begrepp kopplade till funktionsområdet. Mentala begreppsbilder innefattar elevers användning av prototypexempel samt operativa aspekter. Med specifika matematiska svårigheter avses elevers svårigheter med konstanta funktioner, styckvis definierade funktioner och entydighet.

Den grafiska samt algebraiska representationen är de representationsformer som elever tycks ha mest svårt för. Svårigheterna med den grafiska representationen handlar mestadels om diskontinuitet och entydighet. Elevers svårigheter med den algebraiska representationen innefattas i denna litteraturstudie främst av de specifika matematiska svårigheterna.

En observerad trend i resultatet är att elever är mer bekväma i operativa sammanhang, än i begreppsliga områden av funktionsbegreppet. Elever känner igen sig i situationer och beräkningar de tidigare arbetat med, men har svårt att tillämpa sina kunskaper i nya situationer.

Den historiska fördjupningen i ämnet visade att matematiker och forskare som anses utmärkande är Newton, Leibniz, Dirichlet, Euler och Bourbaki. Dessa matematiker tog funktionsdefinitionen framåt genom respektive epoker och utmanade samtidigt varandras definitioner. Funktionsdefinitionen gick från något situationsspecifikt och geometriskt till något formellt generellt för samtliga typer av funktioner.

5.1.2 Resultatdiskussion av första frågeställningen

I denna diskussion diskuteras resultatet till frågeställningen ”Vilka svårigheter har elever i förståelsen av funktioner och funktioners representationsformer?”. Diskussionen innefattar trender i resultatet samt orsaker och konsekvenser av elevers svårigheter kopplat till funktionsbegreppet. Diskussionen innefattar även en kritisk granskning av forskningen som litteraturstudien grundar sig i och aspekter av ett tillförlitligt resultat.

En trend i resultatet som anses vara en betydande faktor till att elever har missuppfattningar och svårigheter med funktionsbegreppet är användningen av prototypexempel. Schwarz och Hershkowich (1999) skriver att det är skadligt för begreppsinnläringen att använda sig av prototypexempel. Användningen kan också vara en bidragande faktor till varför elever har svårt att tillämpa funktioner i nya, obekanta situationer, vilket Blomhøj (1997) understryker i sin artikel. Även Tall och Bakar (1992) skriver att användningen av prototypexempel förekommer hos elever, dels i försök att definiera funktioner, dels för att avgöra om liknande exempel tillhör konceptet. Exempelvis kan prototypexempel som linjära funktioner och andragsgradsfunktioner användas i försök att definiera funktionsbegreppet och på så vis ge eleverna en felaktig bild av funktionsbegreppets definition. I undersökningen beskrivs det även att eleverna tidigare har hanterat polynomfunktioner och trigonometriska funktioner. Dessa funktioner är naturligt definierade av en formel nästan överallt, bortsett från några punkter där uttrycket kan vara odefinierat. Det kan därmed antas att elevernas prototyper också är naturligt definierade överallt

där en funktion definieras, vilket är en förklarande orsak till elevernas svårigheter med att identifiera funktioner, som i exemplet med halvcirklar i undersökningen av Tall och Bakar (1992).

Blomhøj (1997) skriver att man kan förvänta sig att grundläggande svårigheter gällande matematiska funktioner kommer att uppstå både hos högstadie- och gymnasieelever. Detta då funktionsbegreppet inte längre huvudsakligen presenteras som ett begrepp, varken i högstadiet eller i gymnasieskolan, utan presenteras snarare ur ett tillämpningssammanhang. Hatisaru och Erbas (2017) poängterar detta och skriver att den algebraiska representationen tas upp som ett huvudsakligt undervisningsfokus i skolan, med desto mindre fokus på resterande representationsformer. En orsak till elevers grundläggande svårigheter med funktionsbegreppet kan alltså vara skolans undervisningsfokus på tillämpning av funktioner framför begreppsinnläring, samt fokus på den algebraiska representationsformen framför resterande representationsformer och en funktion som ett centralt begrepp (Hatisaru & Erbas, 2017). Däremot skulle undervisningsfokuset kunna komma att ändras i och med programmeringens framfart i skolan, då funktioner är mer allmänna i programmeringsspråk som exempelvis Python. Programmeringens framfart skulle i sin tur kunna bidra till att elever får en djupare och mer generell uppfattning av funktionsbegreppet.

Rosén (1996) betonar att funktionsundervisningen i Sverige och Norge vanligtvis utgår från algebraiska uttryck samt tabeller och att det därefter skissas grafer, eller att värden avläses ur grafer. Elever stöter till störst del på representationsformerna tabellform och algebraisk form, vilket orsakar svårigheter hos elever att gå mellan representationsformerna, mer specifikt till och från den grafiska representationen. Med mindre fokus på den grafiska representationsformen blir elevers svårigheter mer omfattande inom detta område, vilket kan vara en orsak till att svårigheterna som observerats i denna litteraturstudie till stor del innefattas av just den grafiska representationsformen. Vidare skrivs det att om funktioner ska relateras till modeller med verklighetsperspektiv, betonas vikten av att eleverna besitter kunskap om samtliga representationsformer (Rosén, 1996). Det kan med andra ord vara en av förklaringarna till varför elever inte kopplar funktioner med meningsfullhet till verkliga sammanhang och det vardagliga livet.

Tall och Bakar (1992) skriver att elever istället för att acceptera den formella definitionen, som verkar vara svår att memorera, får sitt intryck av vad en funktion är genom dess användning i läroplanen. Eleverna inför då djupt förankrade idéer som kan motsäga den formella funktionsdefinitionen, vilket är en orsak till elevers begreppsliga svårigheter med funktioner. Vinner och Dreyfus (1989) skriver likaså att elever tenderar att inte fokusera på de begreppsliga aspekterna, utan fokuserar snarare på beräkningsaspekten av ett fenomen.

I resultatet av den matematiska fördjupningen i funktionsbegreppets historia syns det att funktionsbegreppet tidigare har varit svårt att definiera. Med tanke på att en funktion kan definieras på många olika sätt och att funktionsbegreppet är avancerat, är även detta en möjlig orsak till att dagens elever kan ha svårt att förstå funktionsbegreppet.

De svårigheter som innefattas av forskningen i denna litteraturstudie är kopplade till elever som ger felaktiga svar på matematiska frågor, elever som har svårigheter med att lösa matematiska uppgifter, elever som har olika missuppfattningar kopplade till funktionsbegreppet, och så vidare. Konsekvenserna av elevers svårigheter med funktionsbegreppet har främst en negativ betydelse, där en svårighet dessutom kan leda till ytterligare problem. Blomhøj (1997) menar att om elever har bristande förståelse för vad en funktion är kan det i sin tur påverka förmågan att förstå andra matematiska koncept som är beroende av funktioner, såsom derivata, integraler och gränsvärden. Konsekvensen av elevers

svårigheter kring funktionsbegreppet stannar inte bara vid den specifika svårigheten, utan kan leda till att elever inte kan lösa en rad olika matematiska uppgifter och problem. En missuppfattning kan leda till nya missuppfattningar. Om svårigheten finns på en grundläggande nivå inom området funktioner kan det vara svårt att fördjupa sig både inom området och i matematiken generellt.

Förutom de konsekvenser av elevers svårigheter med funktionsbegreppet som litteraturen identifierat är det troligt att andra negativa konsekvenser av elevers svårigheter är att de kan sänka elevers motivation, bidra till ett försämrat självförtroende i matematiken och ge en känsla av misslyckande och frustration. Om kunskapsglappet blir tillräckligt stort skulle det kunna leda till att elever tappar intresset för funktionslära och matematiken i stort.

I resultatet, enligt Hatisaru och Erbas (2017), nämns att en elev inte kopplar funktionsbegreppet till meningsfullhet i det vardagliga livet, utan snarare till att klara matematikproven i skolan. Att inte se någon nytta med användningen av funktioner i vardagen, eller till andra syften utanför matematikklassrummet, kan ses som både en orsak och en negativ konsekvens av elevers svårigheter med funktioner. Dessutom skulle det faktum att elever inte kopplar funktionsbegreppet till meningsfullhet kunna leda till ytterligare negativa konsekvenser, såsom minskad motivation, vilket i sin tur kan få en negativ inverkan på lärmiljön och minskad arbetsro i klassrummet.

Å andra sidan kan det vara till nytta att bemöta svårigheter, på så vis att det ger elever utmaning. Med rätt verktyg och stöttning i matematikklassrummet kan elever bemöta sina svårigheter och utveckla en djupare förståelse och kunskap. Detta leder oss in på ett nytt forskningsområde kopplat till undervisningsstrategier samt didaktiska och pedagogiska aspekter för att bemöta elevers svårigheter med funktionsbegreppet. Se avsnitt "5.1.4 Rekommendationer för vidare forskning", för förslag på framtida forskning inom området.

Vid granskning av de studier som ligger till grund för resultatet framkommer det att undersökningarna hade kunnat utformas annorlunda för att främja elevernas kompetens. I undersökningarna av Borke (2014) och Vinner och Dreyfus (1989) ställs frågor till elever på ett sätt som kan skapa förvirring hos eleverna. Vinner och Dreyfus (1989) ställer bland annat frågan "Does there exist a function whose graph is...?" med efterföljande avbildningar av olika typer grafer och Borke (2014) ställer frågan "Vad är en funktion?". Dessa frågor kan i sitt sammanhang leda till onödigt förvirring och därmed orsaka felaktiga svar från elever i undersökningarna. Första frågan skulle elever kunna uppfatta som en kuggfråga, där de svarar vad de tror att läraren vill höra. Andra frågan presenteras sist i undersökningen, efter ett flertal andra frågor kopplade till olika typer av grafer. Detta gör att eleverna svarar på frågan när de är som mest osäkra, då de stött på olika frågor som kan ha skapat osäkerhet. Hade frågan istället varit ställd först skulle eleverna kunna främjas av att reflektera över vad en funktion är, utan att ha blivit influerade av undersökningens resterande frågor.

I resultatet framkommer det att i undersökningen av Borke (2014) ställs frågan om $y = kx + m$ är en funktion, varpå eleven svarar "nej" med motiveringen att en funktion är $y = f(x)$. Även i detta sammanhang kan frågans utformning förvirra eleverna. Råta linjens ekvation $y = kx + m$ är en funktion, men också en ekvation med två variabler. Däremot menar eleven vidare att en graf måste vara sammanhängande för att vara en funktion. Även om råta linjens ekvation inte trovärdigt kunde klargöra om eleven har betydande svårigheter med funktionsbegreppet, stärkts det senare i undersökningen, angående den grafiska representationen att eleven inte har en fullständig bild av funktionen.

En aspekt som gör resultatet mer tillförlitligt är när resultat från flera olika källor stärker varandra. I denna litteraturstudie är ett sådant exempel när Schwarz och Hershkowitz (1999), Grønmo och Rosén (Grønmo & Rosén, 1997b, 1997a) samt Borke (2014) bekräftar varandra i att det är vanligt förekommande att elever använder linjära funktioner som prototypexempel

och som innefattas i den mentala begreppsbilden av funktionsbegreppet. Ett annat exempel är undersökningarna av Tall och Bakar (1992) samt Borke (2014) som styrker varandra gällande elevers svårigheter med konstanta funktioner. Båda undersökningarna visar på att majoriteten elever inte anser att den konstanta funktionen $y = 4$ är en funktion. Undersökningarna styrker dessutom varandra i att $y = 4x^0$ förtydligar situationen för eleverna (Borke, 2014; Tall & Bakar, 1992). Att $y = 4x^0$ hade förtydligat situationen för eleverna kan dock kritiseras, då det kan leda till missuppfattningar om att en funktion måste innehålla variabeln x . I ett undervisningssammanhang skulle detta algebraiska förtydligande snarare kunna förvirra än underlätta för elevers förståelse om funktionsbegreppet.

5.1.3 Resultatdiskussion av andra frågeställningen

Nedan diskuteras möjliga aspekter till den historiska utformningen av funktionsbegreppet.

Ur den historiska utvecklingen av funktionsbegreppet kan det idag urskiljas delar som har tydliga kopplingar till specifika matematiker, från den algebraiska och geometriska matematiken under den tidiga historien, till Descartes som började se funktioner som relationen mellan variabler (Häggström, 2005). Newtons arbete inom differentialkalkyl gav synen på funktioner som att en variabel kan påverka en annan variabel (Häggström, 2005). Vidare definierade Euler funktioner mer formellt och introducerade beteckningen $f(x)$ för att senare utvecklas av Bourbaki. Matematikgruppen Bourbaki standardiserade matematiska begrepp, och funktioner som avbildningar mellan mängder formulerades här (Häggström, 2005; Kleiner, 1989). Samtliga avstamp i historien ovan återses i dagens funktionsdefinition. Descartes började se funktioner som relationer, Dirichlet beskrev funktioner som en beroenderelation och Bourbaki beskrev en funktion som envärd relation, vilka återkommer i definitionen i avsnittet ”2.1 Definitionen av en funktion”. Beteckningen $y = f(x)$ som Euler upptäckte, finns också med i definitionen ovan. Att uttrycka funktioner med hjälp av värdemängd tillhör den moderna definitionen av funktionsbegreppet, från 1800-talet och framåt, och var en viktig aspekt i att standardisera begreppet.

Dåtidens matematiker samarbetade med varandra som lärlingar eller kollegor. Tydliga konflikter mellan matematiker bidrog dels positivt till utvecklingen, dels fördröjdes den. Euler och D. Bernoulli var två matematiker som samarbetade under 1700-talet. Euler byggde vidare på D. Bernoullis idéer, men även på J. Bernoullis idéer då han var mentor till Euler tidigt under hans karriär (Kleiner, 1989). Matematikerna D. Bernoulli och d’Alembert var dock i konflikt under denna tidsperiod, men rivaliteten ledde istället till att föra matematiken framåt, då de ifrågasatte och kritiserade varandras matematiska idéer. Leibniz och Newton är kända för sina rivaliteter, som ledde till isolering av visst material. Det fanns tendenser till att isolera sitt material för att skydda sina idéer (Häggström, 2005; Kleiner, 1989; Shenitzer & Luzin, 1998). Deras dispyt ledde till att den brittiska matematiken stannade av, och den centraleuropeiska fortsatte i framfart. Newton och Leibniz kom båda fram till definitioner av en funktion, men Newtons var mer komplicerad. Detta gjorde att den brittiska matematiken, som utgick från Newtons material, stannade av i utvecklingen samtidigt som den centraleuropeiska matematiken, som utgick från Leibniz material, förde utvecklingen av funktionsbegreppet framåt. Detta genom matematiker som Lagrange, Euler samt Bernoulli (Häggström, 2005; Katz, 2004). Detta belyser vikten av att matematiken måste vara enkel att förstå, för att upptäckter ska kunna bidra till utvecklingen av matematiska koncept. Sådana tolkningar inkluderar både språkliga aspekter och matematiska notationer.

Dispyter ledde även till att flera verk publicerades efter skribenternas död. Exempelvis publicerades många av Eulers kvarvarande verk efter hans död (Kleiner, 1989). Flera matematiska verk var även svåra att få tillgång till på grund av de få kommunikationsmöjligheter som fanns, men även på grund av språkliga skillnader och användning av olika notationer. I jämförelse med dagens samhälle, med moderna verktyg, kan forskning spridas allt mycket fortare mellan varandra och näst intill allt är tillgängligt medan det fortfarande är aktuellt. Detta bidrar till att utvecklingen går betydligt snabbare. Hade dåtidens matematiker delat med sig mer av sina tankar och idéer hade funktionsdefinitionens utveckling alltså troligtvis gått snabbare. Däremot kan den moderna kommunikationen bidra till att det finns ett överflöd av information, som i sin tur kan göra att det är svårt att avgöra om resultaten är relevanta och att använda den mest optimala informationen.

5.1.4 Rekommendationer för vidare forskning

Rekommendationer för framtida forskning kring elevers svårigheter med funktioner och funktioners representationsformer är att fokusera på representationsformerna och elevers specifika svårigheter kopplat till dessa, samt elevers förmåga att översätta mellan dem. I utförandet av denna litteraturstudie, upplevs en saknad av forskning om elevers svårigheter i översättning mellan representationsformerna, samt en särskild saknad av forskning om elevers svårigheter kopplat till tabellform. Detta skulle kunna utformas genom att elever får tolka tabeller som beskriver olika samband för att tolka deras förståelse om tabellformen och kopplingen till andra representationsformer. Exempel på funktioner som skulle kunna användas i en sådan undersökning är inte bara samband mellan tal, utan även ord och bild eller färger och symboler, för att identifiera elevers svårigheter med funktioner. Detta hade också kunnat kopplas till den verbala representationsformen och elevers språkliga svårigheter kopplat till funktionsbegreppet.

Ett ytterligare forskningsförslag är att bygga vidare på den forskning som finns om elevers svårigheter kopplade till funktionsbegreppet, för att undersöka de orsaker och konsekvenser som finns till dessa svårigheter, med syfte att exempelvis förebygga elevers svårigheter i matematiklassrummet. Orsakerna kan exempelvis kopplas till didaktiska och pedagogiska perspektiv på undervisningen, med hänsyn till undervisningsmetoder, läromedel, läroplan och andra aspekter som påverkar utformningen av undervisning.

5.1.5 Diskussionssammanfattning

Orsakerna bakom de svårigheter som presenteras i resultatet understryks i diskussionen via argument som att funktionsundervisningen i Sverige och Norge ofta utgår från tabeller och algebraiska uttryck, samt att funktionsbegreppet inte längre huvudsakligen presenteras som ett centralt begrepp varken i högstadiet eller gymnasieskolan, utan snarare ur ett tillämningsammanhang. Elevers svårigheter med funktionsbegreppet kan ha negativa konsekvenser, såsom minskad motivation. Om elever har bristande förståelse för funktionsbegreppet kan det även påverka deras förmåga att förstå andra matematiska koncept som är beroende av funktioner, såsom derivata, integraler och gränsvärden.

Diskussionen innehåller en kritisk granskning av källornas resultat, där utformningen av frågor till eleverna ifrågasätts. En aspekt som gör resultatet mer tillförlitligt är när flera olika källor stärker varandra. En annan aspekt som skapar tillförlitlighet är när en undersökning visar på att elever har svårigheter med funktionsbegreppet via flertalet kategorier av svårigheter.

Den matematiska fördjupningen diskuterades genom att ta upp viktiga avstamp i historien som fått betydelse för den nuvarande funktionsdefinitionen. Tydliga konflikter mellan

matematiker, som dels bidrog positivt till utvecklingen, men som även kunde fördröja den, anses vara en aspekt till varför historien utformades på ett visst sätt. Det fanns även tendenser till att isolera sitt material för att skydda sina idéer. Ett exempel på detta är konflikten mellan Newton och Leibniz, där Newtons definition var mer komplicerad. Den brittiska matematikern byggde vidare på Newtons definition, medan den centraleuropeiska matematikern utgick från Leibniz definition, som ledde till att vidareutvecklingen av matematiken fortgick i Centraleuropa, medan den brittiska matematikern stannade av. Den historiska utvecklingen av funktionsbegreppet hade troligtvis gått mycket snabbare om matematikerna hade delat med sig av sitt material. Detta kan jämföras med dagens samhälle med moderna verktyg där forskning kan spridas mycket snabbt mellan parter och där näst intill allt är tillgängligt medan det fortfarande är aktuellt.

För framtida forskning anses det efter denna litteraturstudie vara aktuellt att fokusera på funktioners representationsformer och elevers specifika svårigheter kopplat till dessa, samt förmågan att översätta mellan dem. En annan rekommendation är att bygga vidare på forskningen om elevers svårigheter i syfte att förebygga dem, med fokus på det didaktiska och pedagogiska perspektivet.

5.2 Metoddiskussion

För att besvara litteraturstudiens första frågeställning har systematiska blocksökningar genomförts i databaser. Det är noterbart att främst databaserna ERIC och Education Research Complete har varit tillgångar och dessa har en pedagogisk koppling. MathSciNet via EBSCOhost inkluderar inte den pedagogiska synvinkeln i samma utsträckning av gav endast ett fåtal träffar i blocksökningen. Det ansågs trots det viktigt att inkludera denna databas för relevansen i sökningen, då studiens syfte dels är pedagogiskt, dels matematiskt.

Kedjesökningen anses vara relevant, då den utgår från utvalda artiklar från blocksökningen. De artiklar som varit utgångspunkt i kedjesökningen är skandinaviska, men resultaten av artiklar från kedjesökningen behöver i sin tur inte vara skandinaviska. Eftersom artiklarna har använts i skandinavisk forskning antas de vara relevanta även i denna studie. Flertalet artiklar har även hämtats från tidskrifterna *NOMAD* och *Nämaren* från Nationellt Centrum i Matematikutbildning (NCM) som skriver om den didaktiska kopplingen till matematik. Många skribenter är geografiskt aktuella för studien, då NCM befinner sig i Göteborg, med anknytning till ämneslärarutbildningen på Göteborgs Universitet.

Urvalskriterierna för studien fastställdes, förutom geografiskt område, att omfatta aktualitet i förhållande till publikationsåret. Det ansågs vara relevant vetenskap om artikeln var publicerad i närheten av 2000-talet. Blocksökningen i databaserna utgår därför från år 2002 och framåt. Gällande andra frågeställningen ansågs det inte vara ett kriterium med tidsmässigt aktuell vetenskap, då historians perspektiv är viktig att se från olika perspektiv och ur olika tidsperioder. Däremot har frågeställningens litteratursökning i huvudsak fokuserat på europeisk forskning, eftersom det var i detta geografiska område som störst utveckling och forskning, inom funktionsbegreppet, ägde rum.

Majoriteten av artiklarna till litteraturstudien av frågeställning ett är som tidigare nämnt skandinavisk forskning, vilket är relevant och relaterbart till litteraturstudiens innehåll och syfte. De artiklar som inte utgår från skandinavisk forskning, exempelvis "Students' mental prototypes for functions and graphs" av Tall och Bakar (1992) är publicerad i Storbritannien på University of Warwick, vilket anses vara inom geografisk räckvidd. Ytterligare ett exempel är "Images and Definitions for the Concept of Function" av Vinner och Dreyfus (1989), som är publicerad av *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) vilket är en organisation

som utvecklar matematik genom skolåren och är baserad i USA. NCTM är störst i världen gällande detta och trots den geografiska placeringen anses artikeln därför vara relevant.

6 Slutsats

Det kan konstateras att funktionsbegreppet kan utgöra betydande svårigheter för högstadiesamt gymnasieelevers matematikförståelse. Utifrån resultatet kan slutsatsen dras att de svårigheter som finns hos elever, kopplade till funktioner och funktioners representationsformer, är svårigheter som kan kategoriseras enligt begreppsförståelse, elevers mentala begreppsbild, specifika matematiska svårigheter och grafisk representation, där den grafiska samt algebraiska representationsformen ingår under flera av kategorierna. Vad gäller begreppsförståelsen har eleverna svårt med specifika begrepp som funktion, ekvation, variabel och derivata. Det kopplas även till kompartmentalisering. Elevers mentala begreppsbild inkluderar prototypexempel och operativa aspekter, där elever ofta kopplar funktioner till ett analytiskt uttryck eller en specifik grafisk avbildning. Till de specifika matematiska svårigheterna inkluderas konstanta funktioner, styckvis definierade funktioner samt entydighet. Dessa är svårigheter av både grafisk och algebraisk form, där elever har svårt att förstå en viss ekvation eller en viss graf som en funktion.

En annan slutsats är att tabellform inte anses utgöra lika betydande svårigheter för elever gällande funktionsbegreppet. Detta då inga svårigheter kopplat till tabellform har identifierats i forskningen som innefattas av denna litteraturstudie, samt att forskningen menar att stor del av undervisningen utgår från tabeller.

Funktionsbegreppets definition har förändrats genom historien, där flertalet matematiker och händelser från olika tidsperioder påverkat definitionens framfart. Slutsatsen är att definitionen gick från något geometriskt och situationsspecifikt till något generellt, där definitionerna däremellan bygger på varandra. Både samarbeten och dispyter mellan dåtidens matematiker har avgjort funktionsdefinitionens framfart. En slutsats är att Dirichlets definition, Newtons differentialkalkyl, Eulers formella definition med beteckningen $f(x)$ samt Bourbakis standardisering har betydande roll i utvecklingen av funktionsdefinitionen.

Sammanfattningsvis kan det bekräftas att funktionsbegreppet är ett avancerat fenomen som kan utgöra olika typer av svårigheter för elever i deras matematikförståelse. Detta kan kopplas till definitionen av en funktion ur ett historiskt perspektiv, då det genom alla tider varit ett avancerat begrepp att definiera.

7 Referenslista

- Blomhøj, M. (1997). Funktionsbegrebet og 9. Klasse elevers begrebsforståelse. *NOMAD*, 1.
- Borke, M. (2014). y måste bero av x —Gymnasieelevers förståelse av det matematiska begreppet funktion. [Magisteruppsats, Göteborgs Universitet].
- Borke, M. (2021). Student teachers' knowledge of students' difficulties with the concept of function. *LUMAT: International Journal on Math, Science and Technology Education*, 9(1). <https://doi.org/10.31129/lumat.9.1.1661>
- Folland, G. B. (1999). *Real Analysis: Modern techniques and Their Applications* (2:a uppl.). John Wiley & Sons, inc.
- Grønmo, L. S., & Rosén, B. (1997a). Elevers uppfattningar av funktioner. *Nämnanen*, 1, 43–47.
- Grønmo, L. S., & Rosén, B. (1997b). Funktioner i berg- och dalbana. *Nämnanen*, 2, 41–45.
- Hatisaru, V., & Erbas, A. K. (2017). Mathematical Knowledge for Teaching the Function Concept and Student Learning Outcomes. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 15(4), 703–722. <https://doi.org/10.1007/s10763-015-9707-5>
- Hewitt, E., & Stromberg, K. R. (1965). *Real and abstract analysis*. Springer.
- Hägström, J. (2005). Begreppet funktion i historisk belysning. *Normat*, 1(53:2), 82–92.
- Janvier, C. (1984). *Translation Processes in Mathematics Education*. Erlbaum.
- Katz, V. J. (2004). *A History of Mathematics (brief version)* (2:a uppl.). Pearson Education, Inc.
- Kilhamn, C. (2004). Funktionslådor. *Nämnanen*, 2004(1), 19–25.
- Kitcher, P. (1973). Philip Kitcher—*Fluxions, Limits, and Infinite Littleness. A Study of Newton's Presentation of The Calculus* | PDF | Geometry | Calculus. <https://www.scribd.com/document/268500052/Philip-Kitcher-Fluxions-Limits-And-Infinite-Littleness-a-Study-of-Newton-s-Presentation-of-the-Calculus>
- Kjeldsen, T., & Petersen, P. (2014). Bridging History of the Concept of Function with Learning of Mathematics: Students' Meta-Discursive Rules, Concept Formation and Historical Awareness. *Science & Education*, 23(1), 29–45. <https://doi.org/10.1007/s11191-013-9641-2>
- Kleiner, I. (1989). Evolution of the Function Concept: A Brief Survey. *The College Mathematics Journal*, 20. <https://doi.org/10.2307/2686848>

- Larsson, L. (2023, maj 30). Systematiska Översikter—Sökstrategier? (2/3). GU Play, Göteborgs universitet. https://play.gu.se/media/Systematiska+%C3%96versikter+-+S%C3%B6kstrategierF+%282+3%29/0_08wcls195
- Matematik[*ämnesplan*]. (2022, juli 1). Skolverket. <https://www.skolverket.se/undervisning/gymnasieskolan/laroplan-program-och-amnen-i-gymnasieskolan/gymnasieprogrammen/amne>
- Olteanu, C., & Olteanu, L. (2012). Equations, Functions, Critical Aspects and Mathematical Communication. *International Education Studies*, 5(5). <https://doi.org/10.5539/ies.v5n5p69>
- Persson, P.-E. (2002). Behöver alla lära sig algebra? *Nämna*, 3, 24–31.
- Rosén, B. (1996). Funktionslära i skolmatematik. *Nämna*, 4, 44–47.
- Schwarz, B. B., & Hershkowitz, R. (1999). Prototypes: Brakes or Levers in Learning the Function Concept? The Role of Computer Tools. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30(4), 362–389. <https://doi.org/10.2307/749706>
- Shenitzer, A., & Luzin, N. (1998). Function: Part I. *The American Mathematical Monthly*, 105(1), 59–67. <https://doi.org/10.2307/2589528>
- Tall, D., & Bakar, M. (1992). Students' mental prototypes for functions and graphs. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 23(1), 39–50. <https://doi.org/10.1080/0020739920230105>
- Vinner, S., & Dreyfus, T. (1989). Images and Definitions for the Concept of Function. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(4), 356–366. <https://doi.org/10.2307/749441>
- Vinner, S., Hershkowitz, R., & Bruckheimer, M. (1981). Some Cognitive Factors as Causes of Mistakes in the Addition of Fractions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 12(1), 70–76. <https://doi.org/10.2307/748660>
- Youshkevitch, A. P. (1976). The Concept of Function Up To The Middle of The 19th Century. *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 16, 37–85. <https://doi-org.ezproxy.ub.gu.se/10.1007/BF00348305>
- Yu, Z. (2016, mars 1). The history of calculus first draft. SlideShare. <https://www.slideshare.net/AlexYu32/the-history-of-calculus-first-draft>