

THESIS FOR THE DEGREE OF DOCTOR OF PHILOSOPHY

# Hyperuniformity and Hyperfluctuations for Random Measures on Euclidean and Non-Euclidean Spaces

Mattias Byléhn

The thesis will be defended in public on Wednesday the 28'th of May 2025  
in room Euler at 13:15, Department of Mathematical Sciences,  
Skeppsgränd 3, Gothenburg

Faculty opponent: Professor Günter Last, Department of Mathematics,  
Karlsruhe Institute of Technology



UNIVERSITY OF GOTHENBURG

*Division of Analysis and Probability*  
*Department of Mathematical Sciences*

UNIVERSITY OF GOTHENBURG

Gothenburg, Sweden

## SAMMANFATTNING

I denna avhandling studerar vi fluktuationer av generiska slumpmässiga punktkonfigurationer i Euklidiska och symmetriskt krökta geometrier. Matematiskt tolkas sådana konfigurationer som isometriskt invarianta punktprocesser, och fluktuationer bestäms av variansen av antalet punkter i en centrerad boll, *talvariansen*. Hyperuniformitet och hyperfluktuation av sådana konfigurationer enligt Stillinger-Torquato är karakteriserade i termer av storskalig asymptotik av talvariansen relativt talvariansen av en ideal gas, och ekvivalent genom småskalig asymptotik av *Bartlett-spektralmåttet* i diffraktionsbilden. Till avhandlingen hör tre artiklar:

I Artikel I finner vi nedre asymptotiska begränsningar för talvarianser av isometriskt invarianta slumpmått i Euklidiska och hyperboliska rum, vilket generaliserar ett resultat av Beck. Särskilt finner vi att geometrisk hyperuniformitet inte gäller för något isometriskt invariant slumpmått på hyperboliska rum. I kontrast till detta definierar vi spektral hyperuniformitet som uppfylls av vissa invarianta slumpmässiga gitterkonfigurationer.

I Artikel II finner vi liknande nedre asymptotiska begränsningar för talvariansen av automorfi-invarianta punktprocesser i reguljära träd. Huvudresultatet är att dessa nedre begränsningar inte är likformiga för invarianta slumpmässiga gitterkonfigurationer tillhörande fundamentalgrupper av fullständiga reguljära grafer och Petersen-grafen. Vi ger också ett kriterium för när dessa nedre begränsningar är likformiga i termer av uppträdandet av vissa rationella toppar i diffraktionsbilden.

I Artikel III bevisar vi existens och entydighet av Bartlett-spektralmått för invarianta slumpmått på en stor klass av icke-kompakta kommutativa rum, vilket inkluderar de som behandlas i Artikel I och II. För symmetriska rum av högre rang som kommer från enkla Liegrupper bevisar vi att det finns en potens strikt mindre än 2 av volymen av bollar som asymptotiskt begränsar alla talvarianser av invarianta slumpmått från ovan. Vi härleder också Bartlett-spektralmått för invarianta determinantprocesser på kommutativa rum och definierar *värmekärne-hyperuniformitet* på Euklidiska och hyperboliska rum som är ekvivalent med spektral hyperuniformitet.

Nyckelord: Punktprocesser, talvarians, hyperuniformitet, spektralmått, sfärisk harmonisk analys.

ISBN: 978-91-8115-246-3 (PRINT)

ISBN: 978-91-8115-247-0 (PDF)