



# Banach-Tarskis paradox: amenabla grupper och urvalsaxiom

The Banach-Tarski paradox: amenable groups and axioms of choice

*Examensarbete för kandidatexamen i matematik vid Göteborgs universitet*

*Kandidatarbete inom civilingenjörsutbildningen vid Chalmers*

Albin Almgren Nylén

Elliot Duchek

Edwin Olausson

Edwind Stockfelt

Elmer Svedenkrans



# Banach-Tarskis paradox: amenabla grupper och urvalsaxiom

*Examensarbete för kandidatexamen i matematik vid Göteborgs universitet*

Albin Almgren Nylén   Edwin Olausson

*Kandidatarbete i matematik inom civilingenjörsprogrammet Teknisk matematik vid Chalmers*

Elliot Duchek   Edwind Stockfelt   Elmer Svedenkrans

Handledare: Eusebio Gardella

Institutionen för Matematiska vetenskaper  
CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA  
GÖTEBORGS UNIVERSITET  
Göteborg, Sverige 2025



## Förord

Följande är ett kandidatarbete skrivet av Albin Almgren Nylén, Elliot Duchek, Edwin Olausson, Edwind Stockfelt, Elmer Svedenkrans, vårterminen 2025 i ett samarbete mellan Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet. Målet med arbetet är att vidare utforska Banach-Tarskis paradox och de nära besläktade ämnen amenabilitet, paradoxalitet och urvalsaxiomet. Med det sagt förväntas läsaren besitta grundläggande kunskaper inom gruppteori och viss matematisk mogenhet. Kunskaper inom måtteori, mängdteori och grafteori anses även önskvärda. Appendix C ger en mycket kort överblick av dessa områden men är inte menat att ersätta tidigare studier inom områdena. Arbetet hade inte varit möjligt utan vår omtänksamma handledare Eusebio Gardella, och vi tackar även Paolo Boldrini för hans rådgivning kring kapitel 4.

Under skrivprocessen har gruppen fört en gemensam arbetslogg sammanställd av individuella dagböcker. Arbetet har ytterst varit ett lagarbete med särskilda ansvar.

- Albin Almgren Nylén - Kapitel 3, särskilt Sats 3.1, delkapitel 3.2, särskilt Sats 3.10, Sats 3.17. Kapitel 4. Appendix B.
- Edwin Olausson - Proposition 2.31. Kapitel 3, särskilt Sats 3.15, Lemma 3.5. Kapitel 4. Appendix A.2.
- Edwind Stockfelt - Kapitel 2, särskilt Proposition 2.13 till och med Proposition 2.15, delkapitel 2.3, Proposition 2.24, Korollarium 2.25, Proposition 2.29 och Korollarium 2.32. Kapitel 3, mer specifikt Sats 3.10. Appendix A särskilt Appendix A.1 (utom Lemma A.9), och Appendix A.3.
- Elliot Duchek - Kapitel 2, särskilt Lemma 2.16 till och med Korollarium 2.22, delkapitel 2.1. Kapitel 3, särskilt delkapitel 3.1 (utom Lemma 3.5 och Proposition 3.7), Proposition 3.14. Appendix A.1, mer specifikt beviset av Lemma A.9.
- Elmer Svedenkrans - Endast Proposition 3.7, Korollarium 3.16.

Utöver denna uppdelning har populärvetenskaplig text, sammandrag och introduktion skrivits gemensamt.

## Populärvetenskaplig presentation

Hela matematiken bygger på axiom, ett antal logiska grundantaganden som används för att bygga upp alla andra resultat. Alla axiom är dock inte utan kontrovers. År 1924 bevisades ett resultat som blivit känt som Banach-Tarskis paradox, vilket ledde flera såväl inom som utom matematiken till att ifrågasätta vilka axiom som vi egentligen bör acceptera. För att ge en inblick i dessa resultat presenterar vi en spännande berättelse från matematikens värld.

### Matematikerns hemlighet

I matematikens värld levde en gång Briska Naacht, en uppfinningsrik tysk företagare som luktade pengar i allt. En kväll snubblade han över ett gulnat häfte i ett antikvariat: ”*Den Store Matematikerns Hemlighet*”. Något i titeln lockade den vanligtvis självupptagna Briska, som öppnade häftet. Det berättade om en stor namnlös matematiker som över en natt hade blivit rikare än någon annan. Till Briskas förvåning var matematikerns hemlighet vare sig aktier, skattefusk eller vapenexport. Han hade nämligen en metod som han först på sin dödsbädd kryptiskt avslöjade. Briska kunde knappt tro sina ögon när han läste matematikerns sista ord.

*Nyttja det förbjudna axiomet på en fast klotform för att erhålla den paradoxala uppdelningen.  
Med en taktisk omkastning ska sedan en bli två och rikedomar du skall få!*

”Det är ju en oändlig vinstmaskin!” utbrast han. Med mynt i blicken och ett leende på läpparna rusade han till sin gamle vän Klena R.E. Frezmelo, en av världens före detta rikaste människor, men även professor i matematisk logik och expert på matematikens axiom.

Briska fann Frezmelo intryckt i en vrå på sitt kolsvarta kontor. Lukten av svett var näst intill outhärdlig, hans kostym verkade inte ha tvättats på veckor och hans vanligtvis stiliga skägg hade börjat få gråa toner. Framför honom låg en till synes oändlig hög med guldmynt som han med skakande händer räknade en efter en.

”Briska, å Briska, jag är ruinerad.”

”Vad är problemet? Det verkar ju inte finnas någon gräns på din rikedom?”

”Det här är bara en *uppräknelig* oändlighet guldmynt. Förut hade jag *överuppräkneligt*!”

”Finns det ens någon skillnad på olika oändligheter?”

”Det är klart det gör. En uppräknelig oändlighet är som min rad av mynt här. Det finns ett första mynt, ett andra mynt och så vidare. En överuppräknelig oändlighet skulle vara som en guldstav. Vi kan inte rada upp delarna av guldstaven, för oavsett hur mycket vi än delar upp den kan vi alltid dela bitarna i än mindre delar. Det går alltså inte att räkna en första, andra och tredje del av staven.”

”Nu förstår jag allt” ljög Briska.

”Då förstår du att min förmögenhet har minskat med flera kardinaliteter!” grät Frezmelo.

”Nåja hör här, du behöver inte oroa dig längre. Jag har hittat lösningen” tröstade Briska.

Frezmelo höjde skeptiskt ett ögonbryn medan Briska började förklara.

”Lyssna här min vän. Vi behöver bara få tag på ett enda guldklot, såga ner det till de magiska bitarna, flytta runt delarna – och voilà, ett klot blir till två! Upprepa, och vi badar i guld!”

Frezmelo som nästan hade fått tillbaka lite ljus i blicken suckade besviket.

”Briska, det är klart det inte går, storleken på delarna måste ju bevaras när vi sågar ner och flyttar runt dem. Inte kan vi ju skapa massa ur tunna luften. Fysikens lagar godkänner det inte och absolut inte Zermelo-Fraenkels matematiska axiom!”

Briska började tappa hoppet.

”Men texten sa ju att det ska vara möjligt. Det behövdes bara något förbjudet axiom” suckade Briska.

”*Det förbjudna axiomet!*?... Kanske om man... med precis de ekvivalensklasserna... så väljer man representanterna... och jag har ju faktiskt en kopia av axiomet...”

”Kommer du på något?” frågade Briska entusiastiskt.

”Det finns ett sätt. Men vi måste vara försiktiga, resultatet bygger på *urvalsaxiomet*”.

Briska Naacht hade övertygat sin professorsvän att Matematikerns Hemlighet inte bara var ett kuriosum utan en chans till den perfekta stöten. Med Frezmelos expertis avkodade de matematikerns sista ord och planerade sitt brott. Målet: den legendariska "Weierstrass-kulan" i Berlins matematikmuseum – en slät platinasfär på exakt ett kilogram. Med paradoxen i bakfickan skulle de duplicera kulan, lämna originalet där och smyga hem med kopian för att kлона den. Ingen skulle ens veta att de varit där.

"Vi behöver bara skära den i ändligt många bitar," förklarade Briska ivrigt, "sedan sätter vi ihop dem till två kopior. Fysiken kan inget göra åt ren logik!"

Frezmelo, som i vanliga fall föreläste om logikens subtiliteter, hade ett så desperat behov av pengar att han hade låtit löftet om oändliga rikedomar charma honom. "Okej, men vi måste följa instruktionerna *noga*. Det här urvalsaxiomet är inget att leka med."

Natten till kuppen drog de fram en sportväska.

"Glöm inget nu, kom ihåg att vi satsar allt på detta." varnade Frezmelo.

I tur och ordning packade Briska ner: svarta handskar (för att inte lämna fingeravtryck), rånarluvor (för att dölja deras ansikten), en extremt fin lasersåg (för att utföra "den paradoxala uppdelningen"), en rulle silvertejp (man vet aldrig), ett gigantiskt förstoringsglas (för att såga rätt), *Den Store Matematikerns Hemlighet* (för att veta hur de ska göra), en redan krossad spegel (mest för tur), monsterkakor från TARSKI© (närlingsrikt).

Till sist behövde Briska bara trycka ner urvalsaxiomet i den redan proppfulla väskan.

"Kom igen nu, vi måste skynda oss!" ropade Frezmelo, som redan var på väg.

Jäktad kastade Briska undan det allt för stora urvalsaxiomet och sökte efter en mindre kopia. Han såg en liten låda på sin hylla av uppräkneliga egendomar som det stod *urvalsaxiom* på, stoppade raskt ner den i väskan och sprang efter Frezmelo.

Strax efter midnatt, efter att ha smugit sig förbi bankens säkerhetssystem befann de sig framför Weierstrass-kulan. Frezmelo vecklade ut ett tunt häfte med instruktioner. **1.** Skapa de paradoxala ekvivalensklasserna. **2.** Använd urvalsaxiomet för att välja en representant ur varje ekvivalensklass. **3.** Dela kulan i icke-mätbara bitar med hjälp av representanterna (Viktigt, glöm ej!). **4.** Sätt ihop till två kulor. **5.** Profit!

Briska tog ut sin lilla låda, plockade urvalsaxiomet därur och tog det i sin vänstra hand. I höger hand höll han lasersågen medan Frezmelo höll förstoringsglas mot hans öga.

Långt bortifrån hördes sirener, någon måste ha upptäckt dem.

"Snabbt, använd axiomet!" ropade Frezmelo.

Briska såg ekvivalensklasserna framför sig och började såga, men stannade. Något var fel.

"Vad håller du på med?!" skrek Frezmelo.

"Jag kan inte välja representanterna... axiomet funkade inte!" svarade Briska med darrande röst.

"Ge hit det!" sa Frezmelo och ryckte åt sig axiomet.

Frezmelo stirrade på axiomet. Efter en sekund då tiden tycktes stå stilla vidgades hans ögon och benen vek sig under honom, hans ansikte en blandning av ilska och förtvivlan.

"Briska, det här är det uppräkneliga urvalsaxiomet. Vi kan bara göra uppräkneligt många val med detta - men metoden kräver ett överuppräkneligt axiom. Detta axiom räcker inte, vad gjorde du med det riktiga axiomet?"

Briska stirrade hopplöst på halvklotet.

"Men jag behövde plats i väskan..."

Så stod de två tjuvarna där med en söndersågad guldbit och ett vänligt blinkande larm som de inte ens lagt märke till. Inga dubbla kulor, inget oändligt guld – bara ett tungt bevis på att valet av matematiska axiom är kritiskt!

## Vårt Arbete

Som i berättelsen ovan bevisade matematikerna Stefan Banach och Alfred Tarski år 1924 att inom matematikens värld kan ett klot delas upp i mindre delar som sedan kan flyttas om för att skapa två identiska kopior av det ursprungliga klotet. Vi kommer i denna text först studera teorin bakom sådana uppdelningar för att sedan visa satsen på samma sätt som Banach och Tarski ursprungligen gjorde. Resultatet bygger på det så kallade *urvalsaxiomet* och vi kommer i sista kapitlet visa precis vad som gick fel för Briska Naacht och Klenna R.E. Frezmelo, att det *uppräkneliga* urvalsaxiomet inte räcker för att göra en sådan uppdelning.

## Sammandrag

Vi presenterar bevis av både den starka och svaga formuleringen av Banach-Tarskis paradox. Specifikt visar vi att alla klot i  $\mathbb{R}^3$  är  $\mathbb{E}(3)$ -paradoxala (svaga formuleringen), och att alla begränsade delmängder av  $\mathbb{R}^3$  med icke-tom interiör är  $\mathbb{E}(3)$ -ekvidekomponerbara (starka formuleringen). Vi presenterar relevant teori gällande ekvidekomponerbarhet och paradoxalitet som krävs för att genomföra bevisen.

Utöver Banach-Tarskis paradox undersöker vi amenabla grupper och presenterar ett grafteoretiskt bevis av Tarskis sats, nämligen att en grupp antingen är amenabel eller paradoxal. Vi ger några exempel på amenabla och paradoxala grupper, presenterar nödvändiga och tillräckliga villkor för amenabilitet och visar att alla Abelska grupper är amenabla samt att  $SO(n)$  är paradoxal för alla  $n \geq 3$  medan  $SO(1)$  och  $SO(2)$  är amenabla. Då Banach-Tarskis paradox bygger på paradoxaliteten hos  $SO(3)$  finns det alltså ingen analog paradox i  $\mathbb{R}$  eller  $\mathbb{R}^2$ .

Vi undersöker också urvalsaxiometets roll genom att visa att en uppräknelig begränsning av urvalsaxiomet inte ger Banach-Tarskis paradox. Detta gör vi genom att introducera determinismaxiomet och visa att under detta är alla delmängder av  $\mathbb{R}$  Lebesgue-mätbara vilket motsäger paradoxen. Därefter lägger vi även till axiomet  $V = L(\mathbb{R})$  och visar att de tillsammans medför den uppräkneliga begränsningen av urvalsaxiomet. Sammanlagt ger detta en modell där det uppräkneliga urvalsaxiomet håller men inte Banach-Tarskis paradox.

## Abstract

We present proofs of both the weak and strong formulations of the Banach-Tarski paradox. Specifically, we show that all balls in  $\mathbb{R}^3$  are  $\mathbb{E}(3)$ -paradoxical (the weak formulation) and that all bounded subsets of  $\mathbb{R}^3$  with non-empty interior are  $\mathbb{E}(3)$ -equidecomposable (the strong formulation). We present relevant theory regarding equidecomposability and paradoxicality necessary for carrying out the proofs.

Apart from the Banach-Tarski paradox, we also study amenable groups and present a graph theoretical proof of Tarski's theorem, namely that a group is either amenable or paradoxical. We give some examples of amenable and paradoxical groups, present necessary and sufficient conditions for amenability, show that all Abelian groups are amenable and that  $SO(n)$  is paradoxical for all  $n \geq 3$  while  $SO(1)$  and  $SO(2)$  are amenable. Since the Banach-Tarski paradox builds on the paradoxicality of  $SO(3)$  there is no analogous paradox in  $\mathbb{R}$  or  $\mathbb{R}^2$ .

We also study the role of the axiom of choice by showing that a countable restriction of the axiom does not give the Banach-Tarski paradox. We show this by introducing the axiom of determinacy and with this proving that all subsets of  $\mathbb{R}$  are Lebesgue measurable which contradicts the paradox. Then, we also add the axiom  $V = L(\mathbb{R})$  and show that it together with the axiom of determinacy gives the countable restriction of the axiom of choice. All together this gives a model where the countable axiom of choice holds but the Banach-Tarski paradox fails.

# Innehåll

<b>1</b>	<b>Inledning</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Amenabla och paradoxala grupper</b>	<b>1</b>
2.1	Tarskis sats . . . . .	3
2.2	Egenskaper för och exempel på amenabla grupper . . . . .	5
2.3	Paradoxalitet och amenabilitet . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Banach-Tarskis paradox</b>	<b>9</b>
3.1	Hausdorffs paradox och ekvidekomponerbarhet . . . . .	9
3.2	Svaga Banach-Tarskis paradox . . . . .	12
3.3	Starka Banach-Tarskis paradox . . . . .	14
<b>4</b>	<b>Urvalsaxiom</b>	<b>15</b>
4.1	Lebesgue-mätbarhet under determinismaxiomet . . . . .	15
4.2	Uppräkneliga urvalsaxiomet . . . . .	18
<b>5</b>	<b>Användning av AI</b>	<b>22</b>
<b>A</b>	<b>Komplement till kapitel 2, amenabla och paradoxala grupper</b>	<b>i</b>
A.1	Halls sats . . . . .	i
A.2	Bevis av Lemma 2.30 . . . . .	iii
A.3	Utvidgningar . . . . .	iv
<b>B</b>	<b>Kompletterande teori</b>	<b>vi</b>

# 1 Inledning

Huvudsyftet med denna uppsats var till en början att presentera bevis för den svaga och starka versionen av *Banach-Tarskis paradox* och att samla all nödvändig teori<sup>1</sup> för att förstå bevisen i en text. Under arbetets gång och i samråd med vår handledare kom vi dock även fram till två andra tätt kopplade områden att inkludera, nämligen *amenabla grupper* och *urvalsaxiom*.

Målet med kapitel 2 är att göra läsaren familjär med två av arbetets huvudbegrepp, *amenabla grupper* och *paradoxala grupper*. Konzeptet *amenabla grupper* introducerades av John von Neumann år 1929 [13]. Dessa grupper är sådana som kan tillskrivas ett ändligt mått som inte påverkas av gruppens verkan på sig själv, vilket ger dem trevliga egenskaper inom bland annat harmonisk analys, funktionalanalys och sannolikhetsteori. *Paradoxala grupper* är grupper som vi kan rekonstruera från blotta delmängder av gruppen genom att verka på dem med gruppens element. Detta kan kännas otrevligt eftersom det tolkas som att en delmängd till gruppen innehåller hela gruppen, vilket intuitivt borde vara omöjligt. Alfred Tarski visade år 1949 att de två definitionerna är nära besläktade i den mening att alla grupper kan klassificeras som antingen *amenabla* eller *paradoxala*, se [21]. Vi bevisar detta resultat i form av *Tarskis sats*. Vi går även igenom olika krav för *amenabilitet*, resultat som beskriver hur *amenabilitet* och *paradoxalitet* kan överföras och påvisas samt exempel på *amenabla* respektive *paradoxala* grupper som återkommer i kapitel 3.

I kapitel 3 bygger vi som sagt upp den ämnesspecifika teorin som krävs för att förstå bevisen vi presenterar av de två formuleringarna av *Banach-Tarskis paradox*. Den svaga versionen säger att vi kan dela upp ett klot i ändligt många delar, och genom att enbart flytta runt dessa erhålla två identiska kopior av det ursprungliga klotet. Den starka versionen säger att detta är möjligt för alla mängder i  $\mathbb{R}^3$  som är begränsade och har icke-tom interiör, och att vi dessutom kan plocka isär en godtycklig sådan mängd och sedan bygga ihop den till vilken annan sådan mängd som helst.

Vi visar först *Hausdorffs paradox*, ett liknande resultat för en sfär, och går sedan igenom de definitioner och resultat som krävs för att utvidga detta till ett klot, vilket ger oss den svaga versionen av *Banach-Tarskis paradox*. Efter att ha visat denna introducerar vi ytterligare teori som låter oss använda den svaga formuleringen för att bevisa den starka versionen av *Banach-Tarskis paradox*.

En kritisk del i beviset av *Banach-Tarskis paradox* använder *urvalsaxiomet*, ett omdiskuterat antagande inom matematiken som intuitivt borde vara sant men som ibland leder till oväntade resultat. Man kan därför fråga sig om paradoxen håller även om man inte antar *urvalsaxiomet*, och målet med kapitel 4 är att visa att den inte håller om man endast antar det uppräknliga *urvalsaxiomet*. Vi visar detta genom att först byta ut *urvalsaxiomet* mot *determinismaxiomet*, som ger oss att alla delmängder av  $\mathbb{R}$  är Lebesgue-mätbara. Därefter bygger vi upp en modell  $L(\mathbb{R})$  som tillsammans med *determinismaxiomet* ger oss det uppräknliga *urvalsaxiomet*, men som inte ger *Banach-Tarskis paradox* eftersom alla delmängder av  $\mathbb{R}$  är mätbara. För att uppmärksamma läsaren på vilka satser som kräver *urvalsaxiomet* har vi markerat dessa med  $(AC)$  och de som endast kräver det uppräknliga *urvalsaxiomet* med  $(AC_\omega)$ .

## 2 Amenabla och paradoxala grupper

Vi påbörjar det här kapitlet med definitioner av *amenabilitet* och *paradoxalitet*. Därefter formulerar vi *Tarskis sats* – som kopplar samman begreppen – och introducerar även *Følnerkravet*, som är ett starkt verktyg för att påvisa *amenabilitet*.

Därefter ger vi några grundläggande exempel på *amenabla grupper* och bygger sedan upp ett antal resultat som kulminerar i ett bevis av att alla Abelska grupper är *amenabla*. Vi går sedan in mer på *paradoxala grupper* och visar en viktig proposition som vi bland annat använder för att visa att den *speciella ortogonalgruppen* i  $\mathbb{R}^3$  är *paradoxal*. Vi visar sedan att i  $\mathbb{R}$  och  $\mathbb{R}^2$  är motsvarande grupp inte *paradoxal* utan istället *amenabel*.

Slutligen presenterar vi ett bevis av *Tarskis sats* som använder sig av två lemmor från grafteori gällande matchningar i bipartita grafer. Hela kapitlet utgår från *ZFC*, alltså *Zermelo-Fraenkels* axiomsystem inklusive *urvalsaxiomet*.

---

<sup>1</sup>Med "nödvändig teori" menar vi ämnesspecifik teori som oftast inte tas upp under bredare matematikkurser på grundnivå.

Vi kommer här diskutera grupper som har en naturlig topologi, men vi kommer att bortse från topologiska strukturer och endast arbeta med själva gruppstrukturerna. För den som redan är bekant med topologiska grupper innebär detta att vi rent formellt betraktar alla grupper tillsammans med den diskreta topologin. Har man inte en bakgrund inom topologi kan man vara trygg i att detta inte kommer påverka ens förståelse för kapitlets innehåll; vi betraktar helt enkelt alla grupper som en mängd med en tillhörande operation, som tillsammans uppfyller de vanliga gruppaxiomen.

Följande definition ackrediteras vanligtvis till John von Neumann. Vi kommer se ekvivalenta formuleringar av begreppet amenabilitet i texten men vi sparar denna som vår huvuddefinition.

**Definition 2.1** (amenabilitet). Låt  $G$  vara en grupp. Vi säger att  $G$  är *amenabel* om det finns ett ändligt additivt mått  $\mu$  på potensmängden  $\mathcal{P}(G)$  till  $G$  sådant att  $\mu(G) = 1$  och  $\mu(gD) = \mu(D)$  för alla  $g \in G$  och  $D \in \mathcal{P}(G)$ .

*Anmärkning 2.2.* Ett mått som i Definition 2.1 uppfyller att  $\mu(gD) = \mu(D)$  för alla  $g \in G$  kallas *G-invariant*.

En egenskap hos amenabla grupper är att vi enkelt kan konstruera ett ändligt mått på de mängder som gruppen verkar på. Detta formaliseras i följande proposition, vars bevis baseras på [5, Proposition 1.14]

**Proposition 2.3.** Låt  $G$  vara en amenabel grupp som verkar på en mängd  $X$ . Då finns det ett *G-invariant* ändligt additivt mått  $\nu$  på  $\mathcal{P}(X)$  sådant att  $\nu(X) = 1$ .

*Bevis.* Låt  $\mu$  vara ett mått som bevitnar att  $G$  är amenabel. Välj någon punkt  $x \in X$  och definiera för alla  $D \in \mathcal{P}(X)$

$$\nu(D) := \mu(\{g \mid g \in G, gx \in D\}).$$

Definitionen av  $\nu$  ger direkt att  $\nu(X) = 1$ . För ändlig additivitet, låt  $A, B \subseteq X$  sådana att  $A \cap B = \emptyset$  och betrakta  $\nu(A \cup B)$ . Vi har då, där den andra likheten följer från att  $A$  och  $B$  är disjunkta, att

$$\nu(A \cup B) = \mu(\{g \mid g \in G, gx \in A \cup B\}) = \mu(\{g \mid g \in G, gx \in A\} \cup \{g \mid g \in G, gx \in B\}).$$

Eftersom  $\mu$  är ändligt additivt följer det att därmed att  $\nu(A \cup B) = \nu(A) + \nu(B)$ .

Slutligen visar vi *G*-invarians för  $\nu$ . Låt  $h \in G$ ,  $D \in \mathcal{P}(X)$ . Då  $\mu$  är *G*-invariant har vi att

$$\nu(D) = \mu(\{g \mid g \in G, gx \in D\}) = \mu(\{hg \mid g \in G, gx \in D\}).$$

Vi noterar att om  $g \in G$  är sådant att  $gx \in D$  kommer  $hgx \in hD$ . Mängden efter andra likheten består alltså av alla  $g' \in G$  sådana att  $g'x \in hD$ . Alltså är

$$\nu(D) = \mu(\{g' \mid g' \in G, g'x \in hD\}) = \nu(hD). \quad \square$$

**Definition 2.4** (paradoxalitet). Låt  $G$  vara en grupp verkan på en mängd  $X$ . En mängd  $D \subseteq X$  kallas *G-paradoxal* eller sägs anta en *paradoxal dekomposition* om det existerar parvis disjunkta delmängder,  $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m \subseteq D$  samt gruppelment  $g_1, \dots, g_n, h_1, \dots, h_m \in G$  så att

$$\bigcup_{i=1}^n g_i A_i = \bigcup_{j=1}^m h_j B_j = D.$$

Vi säger att en grupp  $G$  är *paradoxal* om det existerar en paradoxal dekomposition av  $G$  där  $G$  verkar på sig själv genom vänster multiplikation. Alltså med  $D = G$ .

Vi kommer i nästa delkapitel se att alla grupper är antingen amenabla eller paradoxala. Detta resultat formuleras som *Tarskis sats*, men innan vi kan bevisa den behöver vi några fler verktyg.

**Definition 2.5.** Låt  $X$  vara någon mängd och låt  $A$  och  $B$  vara delmängder av  $X$ . Den *symmetriska differensen* av  $A$  och  $B$ , skrivet  $A \Delta B$ , är  $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ . Därmed är  $A \Delta B$  alla element som ingår i  $A$  eller  $B$ , men inte i båda.

*Anmärkning 2.6.* Om mängderna  $A$  och  $B$  i Definition 2.5 är ändliga är  $A \Delta B = |A| + |B| - 2|A \cap B|$ .

**Definition 2.7** (Følnerkravet). En grupp  $G$  sägs uppfylla *Følnerkravet* om det för varje ändlig mängd  $D \subseteq G$  och  $\epsilon > 0$  existerar en ändlig icke-tom mängd  $E \subseteq G$  sådan att för varje  $g \in D$  så gäller det att

$$\frac{|gE \Delta E|}{|E|} \leq \epsilon.$$

**Sats 2.8.** *En grupp är amenabel om och endast om den uppfyller Følnerkravet.*

*Bevis.* Se [7, Sats 2.16] □

## 2.1 Tarskis sats

I detta delkapitel kommer vi formulera och bevisa kapitlets huvudresultat, nämligen Tarskis sats (Sats 2.11). Vårt bevis följer Kate Juschenkos utläggning i [7, sida 145-147]. Vi börjar med att bevisa två grafteoretiska lemmen som vi sedan använder i beviset. För en mängd noder  $A$  i en graf låter vi  $N(A)$  beteckna mängden av alla noder som har en kant till en nod i  $A$ .

**Lemma 2.9** (Halls (1 till 1)-matchning). *Låt  $\Gamma = (A, B, K)$  vara en bipartit graf där mängden  $K$  innehåller kanterna mellan nodmängderna  $A$  och  $B$ . Antag att graden av varje nod i  $A$  är ändlig, och att vi för varje ändlig mängd  $D \subseteq A$  har att*

$$|N(D)| \geq |D|.$$

*Då finns det en injektiv avbildning  $i : A \rightarrow B$  sådan att*

$$(a, i(a)) \in K \text{ för alla } a \in A.$$

*Bevis.* Se Appendix A. □

Intuitivt säger Lemma 2.9 att om varje ändlig samling noder  $D$  i  $A$  är ansluten till åtminstone  $|D|$  olika noder i  $B$  går det att para ihop varje nod i  $A$  med en nod i  $B$  så att ingen nod i  $B$  paras ihop med fler än en nod i  $A$ . Lemmat är väsentligt för vårt bevis av Tarskis sats men omständligt att bevisa, varför vi väljer att visa det i appendix. Följande utvidgning av lemmat säger att ju fler noder i  $B$  som en godtycklig ändlig mängd  $D \subseteq A$  ansluter till, desto fler unika sätt kan hoppningen ske på.

**Lemma 2.10** (Halls (1 till  $n$ )-matchning). *Låt  $\Gamma = (A, B, K)$  vara en bipartit graf där mängden  $K$  innehåller kanterna mellan nodmängderna  $A$  och  $B$ . Låt  $n \in \mathbb{N}$  och antag att graden av varje nod i  $A$  är ändlig. Antag vidare att för varje ändlig mängd  $D \subseteq A$  har vi att*

$$|N(D)| \geq n|D|.$$

*Då finns det injektiva avbildningar  $i_1, \dots, i_n : A \rightarrow B$  med parvis disjunkta värdemängder sådana att*

$$(a, i_l(a)) \in K \text{ för alla } a \in A \text{ och } 1 \leq l \leq n.$$

*Bevis.* Se Appendix A, Lemma A.9. □

Slutligen kan vi nu bevisa Sats 2.11, Tarskis sats.

**Sats 2.11** (Tarskis sats). *En grupp  $G$  är amenabel om och endast om den inte medger en paradoxal verkan.*

Påståendet i satsen är av typen "om och endast om". "Endast om"-delen – att om  $G$  är amenabel medger den inte en paradoxal verkan – är betydligt lättare att visa än "om"-delen – att om  $G$  inte medger en paradoxal verkan är den amenabel. Vi börjar med riktningen "om", och visar istället det kontrapositiva påståendet "Om  $G$  inte är amenabel medger den en paradoxal verkan på någon mängd". För "endast om"-riktningen kommer vi göra ett motsägelsebevis.

*Anmärkning 2.12.* Om en grupp  $G$  inte medger en paradoxal på *någon* mängd kan den speciellt inte verka paradoxalt på sig själv. Alltså medför Sats 2.11 att om  $G$  är amenabel är den inte paradoxal, och om den är paradoxal är den inte amenabel<sup>2</sup>. Man kan även visa att om en grupp medger en paradoxal verkan är gruppen själv paradoxal, så en ekvivalent formulering hade varit ”En grupp  $G$  är amenabel om och endast om den inte är paradoxal”.

*Bevis av ”om”-delen i Tarskis sats.* Låt  $G$  vara någon grupp. Antag först att  $G$  inte är amenabel. Då finns det enligt Sats 2.8 någon ändlig mängd  $D_0 \subseteq G$  och något  $\epsilon_0 > 0$  sådana att för alla ändliga icke-tomma mängder  $E \subseteq G$  finns det något  $g_E \in D_0$  sådant att

$$\frac{|g_E E \Delta E|}{|E|} > \epsilon_0. \quad (1)$$

*Påstående 1.* Med  $D_0$ ,  $\epsilon_0$  och en godtycklig ändlig icke-tom mängd  $E \subseteq G$  som ovan har vi för  $D_0 E = \{ab \mid a \in D_0, b \in E\}$  att

$$|D_0 E| \geq (1 + \epsilon_0/2)|E|$$

*Bevis av Påstående 1.* Vi har att  $|g_E E \Delta E| = |(g_E E \setminus E) \cup (E \setminus g_E E)| = |g_E E \setminus E| + |E \setminus g_E E|$ , där den sista likheten följer av att unionen är disjunkt. Notera att eftersom  $|E| = |g_E E|$  gäller det att

$$|E \setminus g_E E| = |E| - |g_E E \cap E| = |g_E E| - |g_E E \cap E| = |g_E E \setminus E|,$$

så  $|g_E E \Delta E| = 2|g_E E \setminus E|$  och enligt (1) är alltså

$$|g_E E \setminus E| > \epsilon_0 |E|/2.$$

Vi kan utan inskränkning anta att  $e \in D_0$ , så  $E \subseteq D_0 E$ . Vidare har vi även att  $g_E \in D_0$ , så  $g_E E \subseteq D_0 E$  och speciellt är då  $(g_E E \setminus E) \subseteq D_0 E$ . Uppenbarligen är  $(g_E E \setminus E) \cap E = \emptyset$ , så

$$|D_0 E| \geq |E| + |g_E E \setminus E| > |E| + \epsilon_0 |E|/2 = (1 + \epsilon_0/2)|E|. \quad \square$$

*Påstående 2.* Antag samma förutsättningar som i Påstående 1 och låt  $n$  vara något positivt heltal. Då är

$$|D_0^n E| \geq (1 + \epsilon_0/2)^n |E|$$

*Bevis av Påstående 2.* Vi bevisar påståendet med hjälp av induktion. Som basfall, betrakta  $D_0^2 E$ . Enligt Påstående 1 räcker det att visa att  $|D_0^2 E| \geq (1 + \epsilon/2)|D_0 E|$ . Denna olikhet följer direkt av Påstående 1 eftersom påståendet måste hålla för alla ändliga mängder  $E \subseteq G$ . Vi kan alltså ta  $E = D_0 E$ , och erhåller därmed att  $|D_0^2 E| = |D_0(D_0 E)| \geq (1 + \epsilon/2)|D_0 E|$ .

Antag nu att Påstående 2 gäller för något  $n \geq 2$ . Betrakta  $|D_0^{n+1} E|$ . En applikation av Påstående 1 på  $|D_0^{n+1} E| = |D_0(D_0^n E)|$  samt användning av induktionsantagandet ger

$$|D_0^{n+1} E| \geq (1 + \epsilon_0/2)|D_0^n E| \geq (1 + \epsilon_0/2)^{n+1}|E|. \quad \square$$

Då  $\epsilon_0 > 0$  kan vi välja  $n \in \mathbb{N}$  sådant att  $(1 + \epsilon_0/2)^n \geq 2$ , vilket enligt Påstående 2 ger att  $|D_0^n E| \geq 2|E|$ . Låter vi  $D := D_0^n$  har vi då att

$$|DE| \geq 2|E|.$$

Bilda nu en bipartit graf  $\Gamma := (G, G, K)$  där kanterna mellan  $G$  och  $G$  definieras av  $(g, h) \in K$  om och endast om  $h = dg$  för något  $d \in D$ . Mängden  $E$  ovan är en godtycklig ändlig och icke-tom delmängd av  $G$ , där elementen i  $E$  nu tolkas som noder i  $\Gamma$ . Notera att  $N(E) = DE$ , så vi har att  $|N(E)| = |DE| \geq 2|E|$ . Enligt Lemma 2.10 finns det då injektiva avbildningar  $i$  och  $j$  på  $G$  med disjunkta värdemängder sådana att för varje  $g \in G$  har vi

$$(g, i(g)) \in K \text{ och } (g, j(g)) \in K.$$

<sup>2</sup>Ty då medger  $G$  en paradoxal verkan på sig själv.

Enligt definitionen av kanterna i  $\Gamma$  är då  $i(g) = sg$  och  $j(g) = tg$  för några  $s, t \in D$ . Definiera därför, för  $s, t \in D$ , två mängder

$$\begin{aligned} A_s &:= s\{g \in G \mid i(g) = sg\}, \\ B_t &:= t\{g \in G \mid j(g) = tg\}. \end{aligned}$$

Då  $i$  och  $j$  är injektiva och har disjunkta värdemängder kommer dessa mängder vara parvis disjunkta. Det är lätt att verifiera att

$$G = \bigcup_{s \in D} s^{-1}A_s = \bigcup_{t \in D} t^{-1}B_t,$$

och vi har alltså en paradoxal dekomposition av  $G$ . Därmed verkar  $G$  paradoxalt på sig själv.  $\square$

*Bevis av "endast om"-delen av Tarskis sats.* Låt återigen  $G$  vara en grupp. Vi vill visa att om  $G$  är amenabel medger den inte en paradoxal verkan. Antag istället att  $G$  är amenabel och medger en paradoxal verkan på någon mängd  $X$ . Vi ska finna en motsägelse.

Då  $G$  är amenabel och verkar på  $X$  finns det enligt Proposition 2.3 ett ändligt additivt,  $G$ -invariant mått  $\nu$  på  $\mathcal{P}(X)$  sådant att  $\nu(X) = 1$ . Vidare, låt mängderna  $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m \subseteq X$  och gruppelmenten  $g_1, \dots, g_n, h_1, \dots, h_m \in G$  bevittna att  $G$  verkar paradoxalt på  $X$ . Eftersom mängderna är delmängder av  $X$  har vi att

$$\bigcup_{i=1}^n A_i \cup \bigcup_{j=1}^m B_j \subseteq X,$$

och applicerar vi  $\nu$  på inklusionen ovan erhåller vi, då mängderna är parvis disjunkta, att

$$\nu \left( \bigcup_{i=1}^n A_i \cup \bigcup_{j=1}^m B_j \right) \leq \nu(X),$$

så

$$\sum_{i=1}^n \nu(A_i) + \sum_{j=1}^m \nu(B_j) \leq 1. \quad (2)$$

Då  $X$  är  $G$ -paradoxal har vi dock att

$$X = \bigcup_{i=1}^n g_i A_i = \bigcup_{j=1}^m h_j B_j,$$

så  $1 = \nu(X) = \nu(\bigcup_{i=1}^n g_i A_i) \leq \sum_{i=1}^n \nu(g_i A_i) = \sum_{i=1}^n \nu(A_i)$ . På samma sätt har vi att  $1 \leq \sum_{j=1}^m \nu(B_j)$ , så (2) ger att  $1 + 1 \leq 1$ , vilket är en uppenbar motsägelse.  $\square$

## 2.2 Egenskaper för och exempel på amenabla grupper

Tarskis sats visar att amenabla och paradoxala grupper är varandras motsatser, och då Banach-Tarskis paradox, som studeras i Kapitel 3, bygger på användandet av paradoxala grupper blir vi här motiverade att studera även amenabla grupper. För en vidare diskussion kring exempel på amenabla grupper utöver de exempel i detta delkapitel hänvisas läsaren till Appendix A.

**Proposition 2.13.** *Heltalsgruppen  $\mathbb{Z}$  är amenabel.*

*Bevis.* Tag någon mängd  $D \subseteq \mathbb{Z}$  och  $\epsilon > 0$ . Låt  $N := \max_{n \in D} |n|$  och  $m$  vara något heltal sådant att  $m \geq 1/\epsilon$ . Definiera

$$E := \{-mN, \dots, mN\}.$$

Vi har då för alla  $g \in D$

$$\frac{|(g + E) \Delta E|}{|E|} \leq \frac{2N}{2mN + 1} \leq \frac{2N}{2mN} = \frac{1}{m} \leq \epsilon,$$

påståendet följer nu från Sats 2.8.  $\square$

**Proposition 2.14.** *Alla ändliga grupper är amenabla.*

*Bevis.* Låt  $G$  vara en grupp och  $A \subseteq G$ . Definiera ett mått  $\mu$  som  $\mu(A) := |A|/|G|$ . Detta mått uppfyller villkoren i Definition 2.1 för amenabilitet.  $\square$

**Proposition 2.15 (AC).** *Låt  $G$  vara en grupp och  $H$  en delgrupp av  $G$ . Om  $G$  är amenabel så är  $H$  amenabel.*

*Bevis.* Vi vill bestämma ett mått  $\nu$  som i Definition 2.1 för  $H$ . Låt  $\mu$  bevitna att  $G$  är amenabel. Med urvalsaxiomet kan vi välja en delmängd  $M$  av  $G$  så att  $M$  består av precis en representant från varje sidoklass av  $H$  så att

$$G = \bigcup_{m \in M} Hm.$$

Då är  $\nu(A) := \mu(AM)$  precis det sökta måttet.  $\square$

Målet med de följande resultaten är att bevisa att alla Abelska grupper är amenabla. Vi börjar med att visa att om alla ändligt genererade delgrupper till någon grupp är amenabla, är även gruppen det. Sedan visar vi andra resultat som låter oss reducera till fallet av ändligt genererade Abelska grupper.

**Lemma 2.16.** *Låt  $G$  vara en grupp och antag att alla ändligt genererade delgrupper till  $G$  är amenabla. Då är även  $G$  amenabel.*

*Bevis.* Vi vill visa att  $G$  uppfyller Følnerkravet. Låt därför  $D$  vara någon ändlig delmängd av  $G$  och fixera ett godtyckligt  $\epsilon > 0$ . Definiera vidare  $G_D := \langle D \rangle$  och observera att  $G_D$  är ändligt genererad då  $D$  är ändlig, så enligt antagande är därmed  $G_D$  amenabel. Uppenbarligen är  $D \subseteq G_D$ , så då  $G_D$  är amenabel existerar det enligt Sats 2.8 en ändlig icke-tom mängd  $E \subseteq G_D$  sådan att för alla  $g \in D$  gäller att

$$\frac{|gE \Delta E|}{|E|} \leq \epsilon. \quad (3)$$

Notera nu att  $E \subseteq G_D \subseteq G$ . Alltså kan vi för varje ändlig delmängd  $D$  av  $G$  och  $\epsilon > 0$  hitta en ändlig icke-tom mängd  $E \subseteq G$  sådan att (3) håller för alla  $g \in D$ . Därmed uppfyller  $G$  Følnerkravet och är enligt Sats 2.8 amenabel.  $\square$

**Proposition 2.17.** *Om  $G$  och  $H$  är amenabla grupper är  $G \times H$  också en amenabel grupp.*

*Bevis.* Låt  $\mu_G$  och  $\mu_H$  vara mått som bevitnar att  $G$  och  $H$  är amenabla. Låt  $D$  vara någon delmängd av  $G \times H$  och låt

$$D_G := \{g \in G \mid (g, h) \in D \text{ för något } h \in H\},$$

$$D_H := \{h \in H \mid (g, h) \in D \text{ för något } g \in G\}.$$

Definiera sedan

$$\mu(D) := \frac{\mu_G(D_G) + \mu_H(D_H)}{2}.$$

Om  $D = G \times H$  kommer  $D_G = G$  och  $D_H = H$ , så

$$\mu(G \times H) = \frac{\mu_G(G) + \mu_H(H)}{2} = 1.$$

Låter vi  $(a, b) \in G \times H$  och  $D' := (a, b)D$  har vi att  $D'_G = \{ag \mid (g, h) \in D \text{ för något } h \in H\} = aD_G$ . På samma sätt har vi att  $D'_H = bD_H$ , och det följer alltså av invariansen av  $\mu_G$  och  $\mu_H$  att

$$\mu((a, b)D) = \frac{\mu_G(aD_G) + \mu_H(bD_H)}{2} = \frac{\mu_G(D_G) + \mu_H(D_H)}{2} = \mu(D).$$

Vi har definierat  $\mu$  på hela  $\mathcal{P}(G \times H)$  och visat att det uppfyller kraven i Definition 2.1, så  $G \times H$  är amenabel.  $\square$

**Proposition 2.18.** *Om grupperna  $G$  och  $H$  är isomorfa och  $G$  är amenabel är även  $H$  amenabel.*

*Bevis.* Då  $G \cong H$  existerar det en isomorfi  $\varphi : G \rightarrow H$ . Låt  $\mu$  bevittna att  $G$  är amenabel. Definiera nu för alla mängder  $A \subseteq H$  måttet  $\nu(A) := \mu(\varphi^{-1}(A))$ . Det är enkelt att verifiera att detta mått uppfyller Definition 2.1, och  $H$  är alltså amenabel.  $\square$

**Sats 2.19.** *Alla Abelska grupper är amenabla.*

*Bevis.* Enligt Lemma 2.16 räcker det att visa att alla ändligt genererade Abelska grupper är amenabla, eftersom alla ändligt genererad delgrupper till en Abelsk grupp också är Abelska.

Låt därför  $G$  vara en ändligt genererad Abelsk grupp. Enligt Fundamentalsatsen för ändligt genererade Abelska grupper är  $G \cong \mathbb{Z}^n \times F$  för något heltal  $n \geq 0$  och någon ändlig grupp  $F$ . Enligt Proposition 2.14 är  $F$  amenabel, och enligt Proposition 2.13 och Proposition 2.17 är  $\mathbb{Z}^n$  också amenabel. Därmed är  $\mathbb{Z}^n \times F$  amenabel enligt Proposition 2.17, så  $G \cong \mathbb{Z}^n \times F$  är också amenabel enligt Proposition 2.18.  $\square$

### 2.3 Paradoxalitet och amenabilitet

Det är nu läge att påbörja vår diskussion kring paradoxala grupper.

**Definition 2.20** (fixpunkter). Låt  $G$  vara en grupp som verkar på en mängd  $X$ . En *fixpunkt* är ett element  $x \in X$  sådant att  $gx = x$  för något  $g \in G \setminus \{e\}$ .

Följande proposition ger oss ett verktyg för att visa att en grupp är paradoxal. Beviset är baserat på [22, Proposition 1.10] och [9, Proposition 1.6].

**Proposition 2.21** (AC). *Antag att en paradoxal grupp  $G$  verkar på en mängd  $X$  utan fixpunkter. Då kommer  $X$  vara  $G$ -paradoxal.*

*Bevis.* Enligt urvalsaxiomet kan vi bilda en mängd med precis ett element ur varje bana som  $G$  ger upphov till. Låt  $O$  beteckna en sådan mängd. Vi vill från  $O$  bilda delmängder av  $X$  som utgör en paradoxal dekomposition av  $X$ .

Vi visar först att  $\mathcal{O} := \{gO \mid g \in G\}$  partitionerar  $X$ . Mängderna i  $\mathcal{O}$  är parvis disjunkta, och för att se detta antar vi motsatsen. Då har vi att  $gO \cap hO \neq \emptyset$  för några  $g, h \in G$ ,  $g \neq h$ . Väljer vi ett  $a \in gO \cap hO$  är  $gx = a = hy$  för några  $x, y \in O$ . Alltså är

$$gx = hy \iff h^{-1}gx = y \iff y \in \text{Orb}(x),$$

och då  $O$  endast innehåller ett element per bana måste vi ha  $y = x$ . Men då är  $h^{-1}gx = x$ , så  $x$  är en fixpunkt eftersom  $g \neq h$ , vilket motsäger antagandet att  $G$  verkar på  $X$  utan fixpunkter. Alltså är  $gO \cap hO = \emptyset$ .

Välj nu  $x \in X$  godtyckligt. Vi har att  $O$  innehåller precis ett  $y \in \text{Orb}(x)$  samt att  $x \in \text{Orb}(x)$ , så vi har  $x = gy$  för något  $g \in G$  och därmed att  $x \in gO$ . Det följer därför att  $\bigcup_{g \in G} gO = X$ , vilket tillsammans med ovan ger att  $\mathcal{O}$  partitionerar  $X$ .

Låt nu  $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m \subseteq G$  samt  $g_1, \dots, g_n, h_1, \dots, h_m \in G$  bevittna att  $G$  är paradoxal. Vi definierar

$$A_i^X := \bigcup_{g \in A_i} gO \subseteq X \text{ för } i = 1, \dots, n.$$

Varje  $A_i^X$  består av unionen av element i  $\mathcal{O}$ , vilka är parvis disjunkta, och då  $A_k \cap A_l = \emptyset$  för alla  $1 \leq k \neq l \leq n$  kan inte en mängd  $O' \in \mathcal{O}$  ingå i både  $A_k^X$  och  $A_l^X$ , så vi har att  $A_k^X \cap A_l^X = \emptyset$ . Eftersom  $G = \bigcup_{i=1}^n g_i A_i = \bigcup_{i=1}^n \{g_i g \mid g \in A_i\}$  följer den tredje likheten nedan, så vi har att

$$\bigcup_{i=1}^n g_i A_i^X = \bigcup_{i=1}^n g_i \left( \bigcup_{g \in A_i} gO \right) = \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{g \in A_i} g_i g O = \bigcup_{g' \in G} g' O = X.$$

Vi kan på liknande sätt definiera  $B_j^X := \bigcup_{h \in B_j} hO$  för  $j = 1, \dots, m$  och erhåller då en paradoxal dekomposition av  $X$ . Därmed har vi att  $X$  är  $G$ -paradoxal.  $\square$

**Korollarium 2.22** (AC). *Om en grupp  $G$  innehåller en paradoxal delgrupp är  $G$  paradoxal.*

*Bevis.* Varje delgrupp till  $G$  verkar på  $G$  med vänstermultiplikation, och då  $g = e$  är den enda lösningen till ekvationen  $gx = x$  för  $x \in G$  är denna verkan fri från fixpunkter. Proposition 2.21 ger då att  $G$  är paradoxal.  $\square$

**Definition 2.23** (fria gruppen). Den fria gruppen  $\mathbb{F}_2$  på 2 generatorer är den grupp genererad av  $L = \{\alpha, \beta, \alpha^{-1}, \beta^{-1}\}$  där ett element och dess invers inte står bredvid varandra. Gruppoperationen består av att konkaterera och sedan successivt ta bort par av element och dess invers bredvid varandra. Det tomma ordet utgör identitet till gruppen. Elementen i  $\mathbb{F}_2$  kallas *reducerade ord*.

**Proposition 2.24.** *Gruppen  $\mathbb{F}_2$  är paradoxal.*

*Bevis.* För varje  $x \in L = \{\alpha, \beta, \alpha^{-1}, \beta^{-1}\}$  låt  $W(x)$  vara mängden av alla reducerade ord med första element  $x$ . Vi har då

$$\mathbb{F}_2 = \{e\} \cup W(\alpha) \cup W(\alpha^{-1}) \cup W(\beta) \cup W(\beta^{-1}).$$

Observera att  $xW(x^{-1})$  är mängden av alla ord som inte börjar med elementet  $x$  varför

$$W(\alpha) \cup \alpha W(\alpha^{-1}) = \mathbb{F}_2 = W(\beta) \cup \beta W(\beta^{-1})$$

är en paradoxal dekomposition av  $\mathbb{F}_2$  där  $\mathbb{F}_2$  verkar på sig själv genom vänster multiplikation. Så  $\mathbb{F}_2$  är paradoxal.  $\square$

**Korollarium 2.25.**  $\mathbb{F}_2$  är icke-Abelsk.

*Bevis.* Enligt Sats 2.11 är  $\mathbb{F}_2$  ej amenabel. Det följer från Sats 2.19 att  $\mathbb{F}_2$  är icke-Abelsk ty annars hade den varit amenabel.  $\square$

**Definition 2.26** (Euklidiska gruppen). Vi skriver  $\mathbb{E}(n)$  för mängden av alla isometrier på  $\mathbb{R}^n$ . Denna mängd utgör en grupp under komposition och kallas därför den *Euklidiska gruppen*.

Vi talar ibland om  $\mathbb{E}(n)$  som alla längdbevarande translationer, rotationer och reflektioner av  $\mathbb{R}^n$  varför det kan tolkas som en delgrupp av den *symmetriska gruppen* av rummet i sig.

**Definition 2.27** (speciella ortogonalgruppen). Den *speciella ortogonalgruppen*  $SO(3)$  är den delgrupp av  $\mathbb{E}(3)$  sådan att de ingående transformationerna har en ortogonal matrisrepresentation och determinant ett. Den speciella ortogonalgruppen  $SO(n)$  för andra  $n \in \mathbb{N}$  definieras på motsvarande sätt.

*Anmärkning 2.28.* Under ovanstående definition består  $SO(3)$  av alla möjliga rotationer runt linjer genom origo i  $\mathbb{R}^3$  och  $SO(2)$  av alla rotationer kring origo i  $\mathbb{R}^2$ .

Följande proposition kommer ha en viktig konsekvens i kapitel 3.

**Proposition 2.29.** *De speciella ortogonalgrupperna  $SO(1)$  och  $SO(2)$  är amenabla.*

*Bevis.* Eftersom  $SO(1)$  är den triviala gruppen är den speciellt ändlig och därmed amenabel enligt Proposition 2.14. För att visa att  $SO(2)$  är amenabel, definiera avbildningen  $\varphi : S^1 \rightarrow SO(2)$  enligt regeln

$$\varphi(e^{i\theta}) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Det är lätt att visa att  $\varphi$  är en isomorfi och eftersom gruppen  $S^1$  är abelsk följer det från Sats 2.19 och Proposition 2.18 att  $SO(2)$  är amenabel.  $\square$

Vi kommer nu visa att  $SO(3)$  är paradoxal med hjälp av ett lemma för att göra beviset mer överskådligt. Lemmat är viktigt, men beviset är tekniskt och bidrar inte till ökad förståelse för resten av texten, varför den intresserade läsaren hittar det i Appendix A.2.

**Lemma 2.30.** *Låt  $\phi$  och  $\psi$  vara medurs rotationer i  $\mathbb{R}^3$  runt  $x$ -axeln respektive  $z$ -axeln med vinkeln  $\arccos(\frac{1}{3})$ . Antag att  $w$  är ett icke-trivialt reducerat ord som består av bokstäver ur mängden  $\{\phi, \psi, \phi^{-1}, \psi^{-1}\}$  och som slutar med  $\psi$  eller  $\psi^{-1}$ . Då kommer  $w(1, 0, 0)$  vara på formen  $(a, b\sqrt{2}, c)/3^k$  där  $a, b, c$  och  $k$  är heltal och  $b \neq 0$ .*

*Bevis.* Se Appendix A.2, Lemma A.10 □

**Proposition 2.31.**  $SO(3)$  innehåller en delgrupp som är isomorf med  $\mathbb{F}_2$ .

*Bevis.* Skapa en delgrupp  $G$  av  $SO(3)$  som genereras av  $\phi$  och  $\psi$  från Lemma 2.30. Vi behöver visa att inga reducerade ord är lika med identitetsrotationen. Eftersom konjugering av ett ord med  $\psi$  inte påverkar om det är identiteten eller inte kan vi utan inskränkning begränsa oss till ord som slutar på  $\psi^{\pm 1}$  genom att konjugera om ordet inte slutar på det. Antag att  $w$  är ett sådant ord, Lemma 2.30 ger då att  $w(1, 0, 0) \neq (1, 0, 0)$ , så  $w$  är aldrig identitetsrotationen. □

**Korollarium 2.32 (AC).** Gruppen  $SO(n)$  är paradoxal för  $n \geq 3$ .

*Bevis.* Påståendet för  $SO(3)$  följer från Proposition 2.31, Proposition 2.18, Korollarium 2.22, och Sats 2.11.

För alla  $n > 3$  har vi den kanoniska inbäddningen där  $i$  är en injektiv avbildning och  $I_k$  är  $k \times k$  identitetsmatrisen

$$i : SO(3) \hookrightarrow SO(n), \quad A \mapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_{n-3} \end{pmatrix}.$$

Eftersom  $SO(3)$  är paradoxal och att en grupp med paradoxal delgrupp är paradoxal enligt Korollarium 2.22 följer det att  $SO(n)$  för  $n > 3$  också är paradoxal. □

### 3 Banach-Tarskis paradox

Syftet med detta kapitel är att bevisa både den svaga och den starka formuleringen av Banach-Tarskis paradox. Vi bevisar först Hausdorffs paradox, som säger att om vi tar bort en uppräknelig delmängd av  $S^2$  kan vi rekonstruera denna nya "sfär" från delmängder av den. Sedan introducerar vi *ekvidekomponerbarhet*, och visar bland annat att detta förhållande överför paradoxalitet mellan mängder.

Vi använder ekvidekomponerbarhet och Hausdorffs paradox för att bevisa den svaga formuleringen av Banach-Tarskis paradox, och introducerar *delekvidekomponerbarhet* för att kunna utvidga den svaga formuleringen till den starka. Även i detta kapitel kommer vi arbeta i *ZFC*.

#### 3.1 Hausdorffs paradox och ekvidekomponerbarhet

**Sats 3.1** (Hausdorffs paradox (AC)). *Det finns en uppräknelig mängd  $D \subseteq S^2$  sådan att  $S^2 \setminus D$  är  $SO(3)$ -paradoxal.*

*Bevis.* Enligt Proposition 2.31 finns en delgrupp av  $SO(3)$  som är isomorf med  $\mathbb{F}_2$ . Fixera en sådan delgrupp  $G$  av  $SO(3)$ . Definiera  $D$  som mängden av alla fixpunkter till  $G$ . Vi skall utnyttja Proposition 2.21 för att visa att  $S^2 \setminus D$  är  $G$ -paradoxal vilket implicerar att den är  $SO(3)$ -paradoxal ty  $\mathbb{F}_2 \cong G \subseteq SO(3)$ .

Notera att om  $W_n$  är antal ord i  $\mathbb{F}_2$  av längd  $n$ , där  $W_0$  endast består av det triviala ordet, så är  $W_n$  ändlig för alla  $n$  och därför är

$$G \cong \mathbb{F}_2 = \bigcup_{n=0}^{\infty} W_n$$

uppräknelig. Alltså är  $D$  uppräknelig eftersom varje element i  $G$  har exakt två fixpunkter där rotationsaxeln skär sfären. Vi behöver visa att  $G$  verkar på  $S^2 \setminus D$ . Sedan innan vet vi att  $G$  verkar på  $S^2$ , så det räcker att visa att för alla  $\phi \in G$  gäller  $\phi x \in D$  endast om  $x \in D$ . Antag därför att  $\phi x \in D$ . Per definition av  $D$  existerar  $\psi \in G \setminus \{e\}$  sådant att  $\psi\phi x = \phi x$  och därför är även  $\phi^{-1}\psi\phi x = x$ . Eftersom  $\psi \neq e$  är  $\phi^{-1}\psi\phi \neq e$  och därför är  $x$  en fixpunkt så  $x \in D$ . Alltså följer satsen från Proposition 2.21. □

I en artikel från 1924 bevisade Stefan Banach och Alfred Tarski [2, Lemma 21] att varje klot i  $\mathbb{R}^3$  är  $\mathbb{E}(3)$ -paradoxalt. Vårt mål är att utvidga Sats 3.1 till denna sats. Till detta ändamål introducerar vi ett nytt begrepp.

**Definition 3.2** (ekvidekomponerbarhet). Låt  $G$  vara en grupp verkande på en mängd  $X$  och låt  $A$  och  $B$  vara delmängder av  $X$ . Vi skriver  $A \sim_G B$  och säger att  $A$  och  $B$  är  $G$ -ekvidekomponerbara om det finns en partition  $\{A_i\}_{i=1}^n$  av  $A$ , en partition  $\{B_i\}_{i=1}^n$  av  $B$  samt gruppelment  $g_1, \dots, g_n \in G$  sådana att

$$B_i = g_i A_i \text{ för alla } i = 1, \dots, n.$$

Följande lemma ger en ekvivalent definition som ibland är enklare att arbeta med.

**Lemma 3.3.** Låt  $G$  vara en grupp verkande på en mängd  $X$  och låt  $A$  och  $B$  vara delmängder av  $X$ . Då är  $A \sim_G B$  om och endast om det finns en bijektion  $f : A \rightarrow B$  med tillhörande partition  $\{A_i\}_{i=1}^n$  av  $A$  och  $g_1, \dots, g_n \in G$  sådana att

$$f(x) = \begin{cases} g_1 x, & x \in A_1, \\ \vdots \\ g_n x, & x \in A_n. \end{cases}$$

Vi kallar då  $f$  en  $G$ -transformation.

*Bevis.* Antag först att  $A \sim_G B$ . Då finns det partitioner  $\{A_i\}_{i=1}^n$  och  $\{B_i\}_{i=1}^n$  av  $A$  respektive  $B$  samt  $g_1, \dots, g_n \in G$  sådana att

$$B_i = g_i A_i \text{ för alla } i = 1, \dots, n.$$

Vi kan då definiera

$$f(x) := g_i x, \text{ när } x \in A_i \text{ för alla } i = 1, \dots, n.$$

Då är  $f$  en avbildning från  $A \rightarrow B$ , och eftersom  $g_i$  är en bijektion för alla  $i = 1, \dots, n$  är även  $f$  det.

Antar vi istället att det finns en  $G$ -transformation  $f : A \rightarrow B$  med en partition  $\{A_i\}_{i=1}^n$  av  $A$  och  $g_1, \dots, g_n \in G$  kan vi definiera

$$B_i := f(A_i) = g_i A_i \text{ för alla } i = 1, \dots, n.$$

Då  $f$  är bijektiv och  $\{A_i\}_{i=1}^n$  partitionerar  $A$  kommer  $\{B_i\}_{i=1}^n$  partitionera  $B$ , så  $A \sim_G B$ .  $\square$

**Proposition 3.4.** Relationen  $\sim_G$  utgör en ekvivalensrelation.

*Bevis.* Låt  $A, B$  och  $C$  vara delmängder av  $X$ . Det krävande att bevisa är transitivitet. Vi börjar med reflexivitet och symmetri.

Reflexivitet följer av att  $\{A\}$  partitionerar  $A$  och att vi för identitetselmentet  $e \in G$  har att  $A = eA$ , så  $A \sim_G A$ .

För symmetri, antag att  $A \sim_G B$ . Då finns det partitioner  $\{A_i\}_{i=1}^n$  och  $\{B_i\}_{i=1}^n$  av  $A$  respektive  $B$ , samt tillhörande  $g_1, \dots, g_n \in G$  så att  $B_i = g_i A_i$  för alla  $i = 1, \dots, n$ . Vi har därmed även att  $A_i = g_i^{-1} B_i$  för alla  $i = 1, \dots, n$ , och alltså är  $B \sim_G A$ .

För transitivitet, antag att  $A \sim_G B$  och  $B \sim_G C$ . Enligt Lemma 3.3 finns det då  $G$ -transformationer  $f : A \rightarrow B$  och  $g : B \rightarrow C$  med motsvarande partitioner  $\{A_i\}_{i=1}^n$  och  $\{B_j\}_{j=1}^m$  samt gruppelment  $f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_m \in G$ . Vi ska visa att  $g \circ f : A \rightarrow C$  är en  $G$ -transformation.

Då både  $f$  och  $g$  är bijektioner är även  $g \circ f$  det. Tag nu  $x \in A$  godtyckligt. Då måste  $x \in A_i$  för precis ett  $i$  sådant att  $1 \leq i \leq n$ . Alltså är  $f(x) = f_i x$ , och då  $f_i x \in B$  är  $f_i x \in B_j$  för precis ett  $j$  sådant att  $1 \leq j \leq m$ . Vi har alltså att

$$g(f(x)) = g(f_i x) = g_j f_i x,$$

och om vi definierar

$$A'_{i,j} := A_i \cap f_i^{-1} B_j$$

har vi då att

$$(g \circ f)(x) = g_j f_i x \text{ då } x \in A'_{i,j} \text{ för alla } i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m.$$

Då  $G$  är en grupp är  $g_j f_i \in G$  för alla  $i = 1, \dots, n$  och  $j = 1, \dots, m$ . Slutligen kan det verifieras att  $\{A'_{i,j}\}_{i,j=1}^{i=n, j=m}$  är en partition av  $A$ , så  $g \circ f$  är en  $G$ -transformation och  $A \sim_G C$ .  $\square$

Två andra trevliga egenskaper hos  $\sim_G$  visas i följande lemma.

**Lemma 3.5.** *Relationen  $\sim_G$  uppfyller följande två påståenden.*

1. Antag  $D \subseteq A$ , om  $A \sim_G B$  och  $f : A \rightarrow B$  är motsvarande  $G$ -transformation så är  $D \sim_G f(D)$ .
2. Om  $A_1 \cap A_2 = \emptyset = B_1 \cap B_2$ , samt  $A_1 \sim_G B_1$  och  $A_2 \sim_G B_2$ , så är  $A_1 \cup A_2 \sim_G B_1 \cup B_2$ .

*Bevis.* För första delen, antag  $A \sim_G B$  och att  $D \subseteq A$ , då finns enligt Lemma 3.3 en  $G$ -transformation  $f$  som skickar partitionen  $\{A_i\}_{i=1}^n$  av  $A$  till  $B$ . Eftersom  $D$  är en delmängd till  $A$  så är  $\{A_i \cap D\}_{i=1}^n$  en partition av  $D$  och om  $f$  begränsas till  $\{A_i \cap D\}_{i=1}^n$  får vi en  $G$ -transformation  $f_D$  som skickar  $\{A_i \cap D\}_{i=1}^n$  till  $f(D)$ , vilket ger att  $D \sim_G f(D)$ .

Bevis av andra delen. Antag  $A_1 \cap A_2 = \emptyset = B_1 \cap B_2$ , samt  $A_1 \sim B_1$  och  $A_2 \sim B_2$ . Då finns  $G$ -transformationer  $f_1$  och  $f_2$  som skickar  $A_1$  till  $B_1$  respektive  $A_2$  till  $B_2$ . Det går då att skapa en  $G$ -transformation från  $A_1 \cup A_2$  till  $B_1 \cup B_2$  genom

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & \text{om } x \in A_1 \\ f_2(x), & \text{om } x \in A_2 \end{cases}$$

Vilket ger  $A_1 \cup A_2 \sim_G B_1 \cup B_2$ . □

Vi vill nu relatera ekvidekomponerbarhet till paradoxalitet, vilket vi gör genom följande proposition. Beviset är baserat på det som ges i [9, Proposition 1.15].

**Proposition 3.6.** *Om en grupp  $G$  verkar på en mängd  $X$  och  $D \subseteq X$  så kommer  $D$  vara  $G$ -paradoxal om och endast om det finns disjunkta delmängder  $A$  och  $B$  av  $D$  sådana att  $A \sim_G D \sim_G B$ .*

*Bevis.* Antag att  $A$  och  $B$  är disjunkta delmängder av  $D$  och att  $A \sim_G D \sim_G B$ . Låt  $g_1, \dots, g_n \in G$  och  $\{A_i\}_{i=1}^n$  bevittna att  $A \sim_G D$ , och  $h_1, \dots, h_m$  samt  $\{B_j\}_{j=1}^m$  bevittna att  $B \sim_G D$ . Då är

$$\bigcup_{i=1}^n g_i A_i = D = \bigcup_{j=1}^m h_j B_j.$$

Eftersom  $\{A_i\}_{i=1}^n$  och  $\{B_j\}_{j=1}^m$  är delmängder till  $A$  respektive  $B$  och  $A \cap B = \emptyset$  enligt antagande måste dessa mängder vara parvis disjunkta. Alltså har vi att  $D$  är  $G$ -paradoxal.

Antag nu istället att  $D$  är  $G$ -paradoxal. Då finns det mängder  $A_1, \dots, A_n$  och  $B_1, \dots, B_m$  i  $D$  som är parvis disjunkta, med tillhörande gruppelment  $g_1, \dots, g_n, h_1, \dots, h_m \in G$  sådana att

$$\bigcup_{i=1}^n g_i A_i = D = \bigcup_{j=1}^m h_j B_j.$$

Uppenbarligen partitionerar  $\{A_i\}_{i=1}^n$  mängden  $A := \bigcup_{i=1}^n A_i$ , men  $g_1 A_1, \dots, g_n A_n$  är inte nödvändigtvis parvis disjunkta och behöver därför inte partitionera  $D$ . Vi bildar därför nya mängder

$$A'_1 = A_1, \quad A'_i = A_i \setminus g_i^{-1} \bigcup_{k=1}^{i-1} g_k A_k, \quad \text{för all } i = 2, \dots, n,$$

vilka är parvis disjunkta då  $A'_i \subseteq A_i$  för alla  $i = 1, \dots, n$ . Dessa partitionerar alltså  $A' := \bigcup_{i=1}^n A'_i$ . När vi konstruerar  $A'_i$  ovan tar vi endast bort sådant som avbildas på redan övertäckta delar av  $D$ , så

$$D = \bigcup_{i=1}^n g_i A'_i,$$

vilket ger att  $A' \sim_G D$ . En mängd  $B'$  kan bildas analogt så att  $B' \sim_G D$ , och vi har då att  $A' \cap B' = \emptyset$  ty  $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m$  är parvis disjunkta. Detta bevisar påståendet. □

Följande proposition är central i beviset av den svaga formuleringen av Banach-Tarskis paradox. Beviset vi ger följer [9, Proposition 1.16].

**Proposition 3.7.** *Antag att  $G$  verkar på en mängd  $X$  och att  $D$  och  $D'$  är delmängder av  $X$ . Om  $D \sim_G D'$  och  $D$  är  $G$ -paradoxal, då är  $D'$  också  $G$ -paradoxal.*

*Bevis.* Låt  $f$  vara en  $G$ -transformation från  $D$  till  $D'$ , denna existerar enligt Lemma 3.3. Enligt föregående proposition har vi disjunkta delmängder  $A$  och  $B$  av  $D$  där  $A \sim_G D \sim_G B$ . Från injektiviteten hos  $f$  följer det att  $f(A)$  och  $f(B)$  är två disjunkta delmängder av  $D'$ . Detta ger nu enligt Lemma 3.5 att

$$f(A) \sim_G A \sim_G D \sim_G D' \text{ samt } f(B) \sim_G B \sim_G D \sim_G D'.$$

Alltså är  $f(A) \sim_G D' \sim_G f(B)$  vilket, enligt Proposition 3.4, innebär att  $D'$  är  $G$ -paradoxal.  $\square$

### 3.2 Svaga Banach-Tarskis paradox

Vi skall nu bevisa att även om en mindre del av  $S^2$  saknas kan hela  $S^2$  återfås bara genom att rotera en delmängd av den. Mer exakt så ska vi visa att om en mängd  $D \subseteq S^2$  är uppräknelig så är  $S^2 \setminus D \sim_{\text{SO}(3)} S^2$ . För att förtydliga beviset samt att undersöka hur man kan komma på en sådan sats själv ger vi först en informell förklaring av resonemanget.

Låt  $D$  vara en uppräknelig delmängd av sfären, exempelvis de punkter på en båge från sfärens topp till botten med rationella koordinater. Om vi upprepat roterar denna runt sfären med rätt vinkel kommer vi aldrig nå tillbaka till våra ursprungliga punkter. Markera, förutom  $D$  själv, alla punkter som vi kan nå från  $D$  genom något antal rotationer av  $D$ . Plocka nu bort  $D$  från sfären. Vad händer om vi nu tar alla markerade punkter och roterar tillbaka dem ett steg? Bland de markerade punkterna försvinner ingen punkt, för de punkter som roterats fyra gånger bildas på de som roterats tre gånger, de som roterats tre gånger bildas på de som roterats två gånger och så vidare. Däremot kommer  $D$  tillbaka som bilden av dem en gång roterade punkterna. Alltså har vi enbart genom rotation av en delmängd gjort om  $S^2 \setminus D$  till hela  $S^2$ . Låt oss nu formalisera argumentet.

Vi börjar med att visa ett viktigt lemma som kommer behövas i beviset av Sats 3.10, svaga Banach-Tarskis paradox. För detta behöver vi följande notation: om  $l$  är en linje,  $n$  är ett heltal och  $\theta$  ett reellt tal låter vi  $l_\theta^n$  vara rotationen moturs kring  $l$  med  $\theta$  grader utförd  $n$  gånger.

**Lemma 3.8** ( $AC_\omega$ ). *Låt  $D$  vara en uppräknelig delmängd av  $S^2$ . Då finns det en linje  $l$  genom origo som ej skär  $D$  samt en vinkel  $\psi$  sådan att  $l_\psi^n(D) \cap D = \emptyset$  för alla positiva heltal  $n$ .*

*Bevis.* För varje punkt i  $D$  finns exakt en linje genom origo som skär  $S^2$  i denna punkt. Det finns därför uppräkneligt många linjer genom origo som skär  $D$ , men överuppräkneligt många linjer genom origo. Vi kan därför välja en linje  $l$  genom origo som inte skär  $D$ . Vi skall hitta en vinkel  $\psi$  sådan att  $l_\psi^n(D) \cap D = \emptyset$  för alla  $n$ .

För alla  $x \in D$  definiera mängden  $V_x = \{\theta \in [0, 2\pi) : l_\theta^n(x) \in D \text{ för något } n > 0\}$ . Notera att för fixt  $x \in D$  finns det för alla  $y \in D$  som mest en vinkel  $\theta \in [0, 2\pi)$  sådan att  $l_\theta(x) = y$ . Om vi då har  $l_\phi^n(x) = y$  för någon vinkel  $\phi$  och något positivt heltal  $n$  måste  $\phi = (\theta + 2\pi k)/n$ . Men det finns bara uppräkneligt många tal på den formen, alltså bidrar varje  $y \in D$  som mest uppräkneligt många element till  $V_x$  för alla  $x \in D$ . Eftersom  $D$  också är uppräknelig ser vi därför att  $\bigcup_{x \in D} V_x$  är en uppräknelig mängd. Intervallet  $[0, 2\pi)$  är överuppräkneligt, så vi drar slutsatsen att det finns  $\psi \in [0, 2\pi) \setminus \bigcup_{x \in D} V_x$ . Enligt konstruktionen av  $V_x$  får vi att om  $x \in D$  gäller  $l_\psi^n(x) \notin D$  för alla positiva heltal  $n$ , vilket bevisar lemmat.  $\square$

**Proposition 3.9** ( $AC_\omega$ ). *Om  $D \subseteq S^2$  är uppräknelig så är  $S^2 \setminus D \sim_{\text{SO}(3)} S^2$ .*

*Bevis.* Enligt Lemma 3.8 kan vi välja en linje  $l$  och en vinkel  $\psi$  sådan att  $l_\psi^n(D) \cap D = \emptyset$  för alla positiva heltal  $n$ . Bilda nu

$$D' := \bigcup_{n=1}^{\infty} l_\psi^n(D) = l_\psi^1(D) \cup l_\psi^2(D) \cup \dots$$

Applicera nu  $l_\psi^{-1}$  på  $D'$  och notera att genom att i andra likheten distribuera  $l_\psi^{-1}$  över unionen och i tredje likheten använda att  $l_\psi$  är bijektiv fås

$$l_\psi^{-1}(D') = l_\psi^{-1}(\dots l_\psi^3(D) \cup l_\psi^2(D) \cup l_\psi^1(D)) = (\dots l_\psi^{-1}l_\psi^3(D) \cup l_\psi^{-1}(l_\psi^2(D)) \cup l_\psi^{-1}(l_\psi^1(D))) = (\dots l_\psi^2(D) \cup l_\psi^1(D) \cup D) = D' \cup D.$$

Genom att använda detta faktum och i definitionen av ekvidekomponerbarhet sätta  $A_1 = S^2 \setminus (D' \cup D)$  och  $A_2 = D'$  samt  $g_1 = e$  och  $g_2 = l_\psi^{-1}$  får vi

$$S^2 \setminus D = S^2 \setminus (D' \cup D) \cup D' = A_1 \cup A_2 \\ S^2 = (S^2 \setminus (D' \cup D)) \cup (D' \cup D) = eA_1 \cup l_\psi^{-1}A_2,$$

och därmed att  $S^2 \setminus D \sim_{\text{SO}(3)} S^2$  vilket bevisar satsen.  $\square$

Vi är nu redo att bevisa den svaga formuleringen av Banach-Tarskis paradox. Beviset följer det som ges i [22, Korollarium 3.11].

**Sats 3.10** (Svaga Banach-Tarskis paradox (AC)). *Varje klot i  $\mathbb{R}^3$  är  $\mathbb{E}(3)$ -paradoxalt.*

*Bevis.* Vi kan utan inskränkning anta att klotet är  $B^3$ , enhetsklotet centrerat i origo. Enligt (Sats 3.1), Hausdorffs Paradox, existerar det en uppräknelig mängd  $D \subseteq S^2$  sådan att  $S^2 \setminus D$  är  $\text{SO}(3)$ -paradoxal. Enligt Proposition 3.9 gäller det att  $S^2 \setminus D \sim_{\text{SO}(3)} S^2$ , vilket enligt Proposition 3.7 medför att även  $S^2$  är  $\text{SO}(3)$ -paradoxal. Låt  $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m$  bevittna paradoxaliteten hos  $S^2$ . Bilda för alla heltal  $i = 1, \dots, n$  mängderna

$$A'_i := \bigcup_{r \in (0,1]} rA_i,$$

och bilda mängderna  $B'_j$  på motsvarande sätt för alla  $j = 1, \dots, m$ . Det är då enkelt att visa att  $A'_1, \dots, A'_n$  och  $B'_1, \dots, B'_m$  ger en paradoxal dekomposition av  $B^3 \setminus \{0\}$ . Alltså har vi att  $B^3 \setminus \{0\}$  är  $\text{SO}(3)$ -paradoxal och därmed även  $\mathbb{E}(3)$ -paradoxal.

För att avsluta beviset visar vi nu att  $B^3 \setminus \{0\} \sim_{\mathbb{E}(3)} B^3$ . Låt  $x = (0, 0, \frac{1}{4})$  och  $L$  vara en linje som inte innehåller origo så att  $x \in L$ . Låt  $\rho$  vara en rotation av oändlig ordning kring  $L$ . Definiera  $P = \{\rho^n(\mathbf{0}) : n \geq 0\}$ . Eftersom  $0 \notin \rho(P)$  och att  $\rho(P) \subseteq P$ , får vi att

$$B^3 = P \cup (B^3 \setminus P) \sim \rho(P) \cup (B^3 \setminus P) = B^3 \setminus \{0\}.$$

Satsens påstående följer nu från Proposition 3.7.  $\square$

*Anmärkning 3.11.* Mängderna i den paradoxala uppdelningen av klotet i Sats 3.10 kan inte vara Lebesgue-mätbara. Vi antar motsatsen och vill nå en motsägelse. Enligt Sats 3.10 är enhetsklotet  $\mathbb{E}(3)$ -paradoxalt. Låt  $A_1, \dots, A_n$  och  $B_1, \dots, B_m$  samt  $g_1, \dots, g_n$  och  $h_1, \dots, h_m$  bevittna denna paradoxalitet. Genom monotonitet, ändlig additivitet, isometri-invarians och subadditivitet får vi att

$$\frac{4\pi}{3} = \mu(B^3) \geq \mu(\bigcup_{i=1}^n A_i) + \mu(\bigcup_{j=1}^m B_j) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i) + \sum_{j=1}^m \mu(B_j) = \sum_{i=1}^n \mu(g_i A_i) + \sum_{j=1}^m \mu(h_j B_j) \geq \mu(\bigcup_{i=1}^n g_i A_i) + \mu(\bigcup_{j=1}^m h_j B_j) = \mu(B^3) + \mu(B^3) = \frac{8\pi}{3}.$$

Alltså drar vi slutsatsen att mängderna i uppdelningen inte är Lebesgue-mätbara.

**Korollarium 3.12.** *Det finns inget ändligt additivt, isometri-invariant mått definierat på alla delmängder av  $\mathbb{R}^3$ .*

*Bevis.* Följer av samma argument som i anmärkningen ovan.  $\square$

Banach-Tarskis paradox bygger på att  $\text{SO}(3)$  verkar paradoxalt på  $S^2$ . Enligt Proposition 2.29 är  $\text{SO}(1)$  och  $\text{SO}(2)$ , motsvarande grupper i  $\mathbb{R}$  respektive  $\mathbb{R}^2$ , amenabla och kan alltså enligt Sats 3.10 inte verka paradoxalt på någon mängd. Därmed finns ingen motsvarighet till Banach-Tarskis paradox varken i  $\mathbb{R}$  eller  $\mathbb{R}^2$ .

### 3.3 Starka Banach-Tarskis paradox

Vi har nu visat det som är allmänt känt som Banach-Tarskis paradox. Dock finns en betydligt starkare formulering som följer från denna. För att visa denna definierar vi en ny relation baserad på ekvidekomponerbarhet som kommer att uppfylla alla kriterier för att vara en partiell ordning.

**Definition 3.13.** Antag att  $G$  verkar på en mängd  $X$  och att  $A$  och  $B$  är delmängder till  $X$ . Mängden  $A$  kallas  $G$ -delekvidekomponerbar till  $B$ , skrivet  $A \preceq_G B$ , om  $A$  är  $G$ -ekvidekomponerbar till en delmängd av  $B$ .

**Proposition 3.14.** Relationen  $\preceq_G$  är reflexiv och transitiv.

*Bevis.* Låt  $A, B$  och  $C$  vara delmängder av en mängd  $X$ . Reflexivitet ärvs av  $\sim_G$ ; eftersom  $\sim_G$  är reflexiv är  $A \sim_G A$ , och då  $A \subseteq A$  har vi alltså att  $A \preceq_G A$ .

För transitivitet, antag att  $A \preceq_G B$  och  $B \preceq_G C$ . Låt  $B' \subseteq B$  och låt  $G$ -transformationen  $f : A \rightarrow B'$  bevittna att  $A \preceq_G B$ . Definiera på samma sätt  $C'$  och  $g : B \rightarrow C'$  för  $B \preceq_G C$ . Då är  $f(A) = B'$ , och då  $B' \sim_G g(B')$  enligt Lemma 3.5 är  $f(A)$  ekvidekomponerbar till en delmängd av  $C$ . Vidare har vi enligt Lemma 3.5 att  $A \sim_G f(A)$ , så transitiviteten hos  $\sim_G$  ger att  $A$  är ekvidekomponerbar till en delmängd av  $C$ . Därmed är  $A \preceq_G C$ .  $\square$

Vi ska nu bevisa att relationen  $\preceq_G$  är antisymmetrisk.

**Sats 3.15** (Banach-Schröder-Bernsteins sats). Antag att  $G$  verkar på en mängd  $X$  samt att  $A$  och  $B$  är delmängder till  $X$ . Om  $A \preceq_G B$  och  $B \preceq_G A$ , så är  $A \sim_G B$ .

*Bevis.* Låt  $A$  och  $B$  vara som i formuleringen av satsen och låt  $A_1 \subseteq A$  och  $B_1 \subseteq B$  vara de delmängder som  $B$  respektive  $A$  är  $G$ -ekvidekomponerbara till. Enligt Lemma 3.5 kan vi välja  $G$ -transformationer  $f : A \rightarrow B_1$  och  $h : A_1 \rightarrow B$ . Sätt  $D_0 := A \setminus A_1$  och definiera  $D_{n+1} := h^{-1}(f(D_n))$ . Skapa nu  $D := \bigcup_{n=0}^{\infty} D_n$ . Genom att betrakta  $D_0$  inser vi att  $h(A \setminus D) = h(A_1 \setminus D)$  och eftersom  $h$  är en bijektion har vi  $h(A_1 \setminus D) = h(A_1) \setminus h(D)$ . En kort beräkning som använder distributiva lagen för bilden av unionen ger  $h(D) = f(D)$ . Vi har nu  $h(A \setminus D) = h(A_1) \setminus h(D) = B \setminus f(D)$ , vilket ger  $A \setminus D \sim_G B \setminus f(D)$ . Eftersom  $f$  uppfyller första delen av Lemma 3.5 har vi  $D \sim_G f(D)$ . Beviset följer nu av andra delen av Lemma 3.5 som ger  $(A \setminus D) \cup D \sim_G (B \setminus f(D)) \cup f(D)$ . Vi har då  $A \sim_G B$ .  $\square$

Notera att skillnaden i följande korollarium jämfört med Proposition 3.6 är att  $A \cup B = D$ .

**Korollarium 3.16.** En mängd  $D \subseteq X$  är  $G$ -paradoxal om och endast om det finns disjunkta delmängder  $A$  och  $B$  av  $D$  sådana att  $A \cup B = D$  och  $A \sim_G D \sim_G B$ .

*Bevis.* Enligt Proposition 3.6 gäller det att  $D \subseteq X$  är  $G$ -paradoxal om och endast om det finns disjunkta delmängder  $A$  och  $B$  av  $D$  sådana att  $A \sim_G D \sim_G B$ . Låt  $A' = D \setminus B$ , vi har då att  $A \subseteq A'$  vilket innebär att  $A \preceq_G A'$ . Vi har även att  $A' \subseteq D$ , alltså att  $A' \preceq_G D$ . Eftersom  $D \sim_G A$  har vi alltså att  $A' \preceq_G A$ . Detta ger enligt Sats 3.15, Banach-Schröder-Bernsteins sats, att  $A' \sim_G A \sim_G D$ , vilket avslutar beviset ty  $A'$  och  $B$  partitionerar  $D$ .  $\square$

Vi kan nu formulera och bevisa Banach-Tarskis starka paradox.

**Sats 3.17** (Starka Banach-Tarskis paradox (AC)). Om  $A$  och  $B$  är två begränsade delmängder av  $\mathbb{R}^3$  med icke-tom interiör så är  $A \sim_{\mathbb{E}(3)} B$ . Vidare är  $A$  och  $B$   $\mathbb{E}(3)$ -paradoxala.

*Bevis.* Låt  $A$  och  $B$  vara som i formuleringen. För att bevisa första delen av satsen räcker det att visa att  $A \preceq_{\mathbb{E}(3)} B$  ty via symmetri gäller då även att  $B \preceq_{\mathbb{E}(3)} A$  och via Sats 3.15, Banach-Schröder-Bernsteins sats, får vi att  $A \sim_{\mathbb{E}(3)} B$ .

Eftersom  $A$  är begränsad kan vi ta en boll  $B_1$  så att  $A \subseteq B_1$  och eftersom  $B$  har icke-tom interiör kan vi ta en boll  $B_2$  så att  $B_2 \subseteq B$ . Välj  $n \in \mathbb{N}$  så att  $B_1$  kan täckas av  $n$  translaterade kopior av  $B_2$ , detta är möjligt ty  $B_1$  är begränsad. Beteckna unionen av dessa kopior  $S$ . Genom att upprepat använda Sats 3.10, svaga Banach-Tarskis paradox, ser vi att  $B_2$  via translationer är ekvidekomponerbar till  $S$ , vilket speciellt implicerar att  $S \preceq_{\mathbb{E}(3)} B_2$ . Vidare är  $B_1 \preceq_{\mathbb{E}(3)} S$  eftersom  $B_1 \subseteq S$ . Vi får alltså att

$$A \subseteq B_1 \preceq_{\mathbb{E}(3)} S \preceq_{\mathbb{E}(3)} B_2 \subseteq B,$$

vilket ger  $A \preceq_{\mathbb{E}(3)} B$ . Så första delen av satsen följer enligt tidigare resonemang.

För andra delen av satsen, betrakta två kopior av  $A$  separat från varandra, vilket igen är möjligt ty  $A$  är begränsad. Unionen av dessa två är också en begränsad mängd med icke-tom interiör och är därför enligt tidigare resonemang  $\mathbb{E}(3)$ -ekvidekomponerbar med  $A$  själv, vilket ger att  $A$  är  $\mathbb{E}(3)$ -paradoxal enligt Korollarium 3.16.  $\square$

## 4 Urvalsaxiom

I kapitel 3 har vi visat Banach-Tarskis paradox inom axiomsystemet Zermelo-Fraenkel tillsammans med urvalsaxiomet, alltså  $ZFC$ . Målet med detta kapitel är att visa att det uppräkneliga urvalsaxiomet inte räcker för att visa Banach-Tarskis paradox. Till detta ändamål ska vi fortsätta jobba med Zermelo-Fraenkels axiom  $ZF$  men byta ut urvalsaxiomet mot det så kallade *determinismaxiomet* Definition 4.2. Detta axiom motsäger urvalsaxiomet vilket vi kommer se då vi visar att under  $ZF$  med determinismaxiomet, vilket vi betecknar med  $ZF + AD$ , är alla delmängder av  $\mathbb{R}$  Lebesgue-mätbara. Genom att sedan bygga upp en modell av  $ZF + AD$ , alltså ett universum som vi begränsar matematiken till, kommer vi ändå få det uppräkneliga urvalsaxiomet. Inspirationen till detta kommer från Kechris [8]. Sammanlagt kommer dessa två faktum ge oss en modell där det uppräkneliga urvalsaxiomet gäller men inte Banach-Tarskis paradox.

Förståelse av detta kapitel underlättas av kunskap inom mängdteori. Notationsmässigt kommer vi i detta kapitel beteckna de naturliga talen med  $\omega$ , vilket är vanligt inom mängdteori. Om  $F$  är en familj av mängder betecknar  $\bigcup F$  unionen av alla mängder däri. Vi betecknar mängden av alla ändliga delmängder av en mängd  $X$  med  $X^{<\omega}$ . Vidare, om  $s$  är en ändlig sekvens av naturliga tal med längd  $n$  låter vi  $[s] = \{x \in \omega^\omega \mid x|_n = s\}$  alltså alla oändliga sekvenser av naturliga tal vars  $n$  första värden sammanfaller med  $s$ . Läsaren som vill se mängd- och måtteoretiska definitioner hänvisas till Appendix B.

### 4.1 Lebesgue-mätbarhet under determinismaxiomet

Nu inför vi grundläggande begrepp för så kallade spel, som kommer vara centrala i detta kapitel. För en mer detaljerad definition av spel se [24].

**Definition 4.1.** Låt mängden  $A \subseteq \omega^\omega$ , ett spel  $G_A$  går ut på att två spelare, spelare  $I$  och  $II$ , turas om att välja ett naturligt tal. Kalla det  $n$ :te valet för spelare  $I$  och  $II$  för  $a_n$  respektive  $b_n$ . Om den resulterande sekvensen  $(a_0, b_0, a_1, b_1, \dots)$  ligger i  $A$  vinner spelare  $I$ , annars vinner spelare  $II$ . En *strategi* för spelare  $I$  (respektive  $II$ ) är en funktion

$$\sigma : \bigcup_{n \in \omega} \omega^{2n} \rightarrow \omega \quad (\text{respektive } \sigma : \bigcup_{n \in \omega} \omega^{2n+1} \rightarrow \omega)$$

alltså en funktion som givet en sekvens av jämn (respektive udda) längd ger ett naturligt tal, tolkat som spelarens respons till sin motståndares drag. Vi säger att en sekvens  $x = (a_0, b_0, a_1, \dots)$  följer en strategi  $\sigma$  för spelare  $I$  om det för alla  $n$  gäller att  $a_n = \sigma((a_0, b_0, \dots, b_{n-1}))$ , med en motsvarande definition för spelare  $II$ . För en strategi  $\sigma$  definiera  $[\sigma] : \omega^\omega \rightarrow \omega^\omega$  enligt  $(a_n)_{n \in \omega} \mapsto (\sigma(a_n))_{n \in \omega}$ . Givet ett spel  $G_A$  säger vi att en strategi  $\sigma$  är en *vinnande strategi* för spelare  $I$  respektive spelare  $II$  om varje sekvens som följer  $\sigma$  ligger i  $A$  respektive  $A^c$ . Ett spel där en vinnande strategi finns kallas *determinerat*.

Vi kommer även prata om spel mer generellt, där spelarna istället väljer mängder som indexerats av naturliga tal. Detta kommer inte orsaka problem, ty att välja en sådan mängd är ekvivalent med att välja det naturliga tal som indexerar den.

**Definition 4.2.** *Determinismaxiomet* är påståendet att alla ovan definierade spel är determinerade. Vi förkortar detta som  $AD$ . Givet en icke-tom familj  $F = (F_i)_{i \in I}$  av icke-tomma mängder indexerad av en mängd  $I$  är en *urvalsfunktion* en funktion  $f : I \rightarrow \bigcup F$  så att  $f(i) \in F_i$  för alla  $i$ . *Urvalsaxiomet* är påståendet att alla sådana familjer har en urvalsfunktion. Vi betecknar detta med  $AC$ . Begränsningen av  $AC$  till uppräkneliga familjer betecknas  $AC_\omega$  och begränsningen till uppräkneliga familjer av reella tal betecknas  $AC_\omega(\mathbb{R})$ .

**Proposition 4.3.** *Antag  $ZF + AD$  då gäller  $AC_\omega(\mathbb{R})$ .*

*Bevis.* Låt  $\mathbb{F} = (F_n)_{n \in \omega}$  vara en uppräknelig samling av icke-tomma delmängder av  $\mathbb{R}$ . Identifiera  $\omega^\omega$  med  $\mathbb{R}$ , exempelvis genom att först omvandla till binära sekvenser och därefter se dessa som binära expansioner av reella tal.

Vi definierar nu spelet  $G_P$  där spelare  $II$  vinner om  $a_0 = k$  och  $(b_n)_{n \in \omega}$  ligger i  $F_k$ . Formellt definieras alltså mängden  $P$  via  $\omega^\omega \supseteq P = \{x = (a_0, b_0, a_1, \dots) \mid (b_0, b_1, \dots) \in F_{a_0}\}$ . Vi har att det finns minst ett element i  $F_k$  så spelare  $I$  kan inte garantera en vinst oavsett val av  $a_0$  och har då alltså ingen vinnande strategi. Spelare  $II$  måste då ha en vinnande strategi  $\sigma$  enligt  $AD$ , och vi får då en urvalsfunktion  $f$  på  $F$  genom  $f(n) = [\sigma]((n, 0, 0, 0, \dots))$   $\square$

Observera att vi inte har visat att  $ZF + AD$  medför  $AC_\omega$ . För att få  $AC_\omega$  från  $AC_\omega(\mathbb{R})$  kommer vi lägga till axiomet  $V = L(\mathbb{R})$  som ges i Definition 4.13. Vi fortsätter att arbeta med  $ZF + AD$  ett tag till då dessa axiom är tillräckliga för att visa att Banach-Tarskis paradox inte håller.

Vi introducerar nu två lemmen som behövs för att visa att  $AD$  medför att alla delmängder av  $\mathbb{R}$  är Lebesgue-mätbara.

**Lemma 4.4.** *Antag  $ZF + AD$ . Låt  $\mu_*$  och  $\mu^*$  beteckna det inre respektive yttre Lebesgue-måttet. Om det finns  $X \subseteq [0, 1]$  som ej är Lebesgue-mätbar så finns  $M \subseteq [0, 1]$  med  $\mu_*(M) = 0$  och  $\mu^*(M) > 0$ .*

*Bevis.* Låt  $m = \mu_*(X)$ . Från definitionen av inre mått får vi att det för varje  $r \in \mathbb{Q} \cap (0, m]$  finns någon mätbar mängd  $I \subseteq X$  med  $\mu(I) \geq m - r$ . Välj med hjälp av  $AC_\omega(\mathbb{R})$ , som vi har enligt Proposition 4.3, för varje sådant  $r$  en sådan mängd  $I_r$ . Definiera

$$I = \bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap (0, m]} I_r$$

som då är mätbar med  $I \subseteq X$  och  $\mu(I) \geq m - r$  för alla  $r > 0$ , så vi måste ha  $\mu(I) = m$ .

Låt nu  $M = X \setminus I$ . Från egenskaperna för inre mått får vi  $\mu_*(X) \geq \mu_*(M) + \mu_*(I)$  och eftersom  $\mu_*(X) = \mu_*(I)$  får vi  $\mu_*(M) = 0$ . Vidare gäller det att  $\mu^*(X) \leq \mu^*(M) + \mu^*(I)$  så  $\mu^*(X) - \mu^*(I) \leq \mu^*(M)$  och enligt antagandet att  $X$  inte är mätbar får vi  $\mu^*(X) > \mu_*(X) = \mu^*(I)$  (se Appendix B) vilket till sist ger  $0 < \mu^*(X) - \mu^*(I) \leq \mu^*(M)$ . Alltså har mängden  $M$  de eftertraktade egenskaperna.  $\square$

Vi kommer även behöva följande lemma från [11].

**Lemma 4.5.** *Antag  $ZF + AD$ . Om  $X \subseteq \mathbb{R}$  är så att  $\mu(X) = 0$  och vi har en följd  $(\epsilon_n)_{n \in \omega}$  med  $\epsilon_n > 0$  för alla  $n$  och  $\sum_{n \in \omega} \epsilon_n < \infty$  så finns  $(C_n)_{n \in \omega}$  där*

- Varje  $C_n$  är en ändlig union av öppna intervall med rationella ändpunkter,
- för alla  $n$  är  $\mu(C_n) < \epsilon_n$ ,
- $X \subseteq \bigcup_{n \in \omega} C_n$ .

*Bevis.* Vi visar först motsvarande påstående men där varje  $C_n$  är en union av slutna intervall med godtyckliga ändpunkter. Eftersom  $\mu(X) = 0$  kan vi täcka  $X$  med slutna intervall  $(I_n)_{n \in \omega}$  med

$$\sum_{n \in \omega} \mu(I_n) = \sum_{n \in \omega} \epsilon_n.$$

Vi kan därför hitta  $n$  sådan att  $\mu(I_0) + \mu(I_1) + \dots + \mu(I_{n-1}) < \epsilon_0 \leq \mu(I_0) + \mu(I_1) + \dots + \mu(I_n)$ . Vi delar nu upp  $I_n$  i en vänsterhalva  $I_{n_0}$  och högerhalva  $I_{n_1}$  där  $\mu(I_{n_0}) + \mu(I_{n_1}) = \mu(I_n)$  och  $\epsilon_n = \mu(I_0) + \mu(I_1) + \dots + \mu(I_{n-1}) + \mu(I_{n_0})$ . Vi kan nu sätta

$$C_0 = I_0 \cup I_1 \cup \dots \cup I_{n-1} \cup I_{n_0}.$$

Denna process kan nu upprepas med intervallen  $I_{n_1}, I_{n+1}, \dots$  för att skapa  $C_n$  för varje  $n$ . Detta visar lemmat fast för slutna intervall med godtyckliga ändpunkter. För fallet med öppna intervall applicera metoden ovan med sekvensen  $(\frac{\epsilon_n}{2})_{n \in \omega}$ . För  $C_n = I_m \cup I_{m+1} \cup \dots \cup I_{m+k}$  där  $I_j = [a_j, b_j]$  väljer vi  $\delta_{j_1}$  och  $\delta_{j_2}$  i  $(0, \frac{\epsilon_n}{2^{k+2}}]$  sådana att  $a_j - \delta_{j_1}$  och  $b_j + \delta_{j_2}$  är rationella och sätter sedan  $I'_j = (a_j - \delta_{j_1}, b_j + \delta_{j_2})$ , vilket ger oss  $C'_n = I'_m \cup I'_{m+1} \cup \dots \cup I'_{m+k}$  och bevisar lemmat.  $\square$

Vi har nu allt vi behöver för att visa att alla delmängder av  $\mathbb{R}$  är mätbara under  $AD$ .

**Sats 4.6.** *Antag  $ZF + AD$ . Då är alla delmängder av  $\mathbb{R}$  Lebesgue-mätbara.*

*Bevis.* Vi betraktar först bara mängder i  $[0, 1]$ . Antag att det finns en icke-mätbar mängd, enligt Lemma 4.4 existerar då en annan mängd  $X \subseteq [0, 1]$  med  $\mu_*(X) = 0$  och  $\mu^*(X) > 0$ . Låt  $\epsilon_n$  vara sådana att

$$\sum_{n \in \omega} 2^n \epsilon_n \leq \frac{1}{2} \mu^*(X)$$

och definiera  $\mathcal{C}_n$  genom

$$\mathcal{C}_n := \{C \subseteq [0, 1] \mid C = \bigcup_{i=1}^k (a_i, b_i) \text{ för rationella } a_i \text{ och } b_i, k \in \omega \text{ och } \mu(C) < \epsilon_n\}.$$

Betrakta följande spel: Spelare  $I$  spelar på sin  $n$ :te tur ett intervall  $I_n$  på formen  $[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]$  och spelare  $II$  spelar på sin  $n$ :te tur en mängd  $C_n$  där  $C_n \in \mathcal{C}_n$ . Spelare  $II$  vinner om

$$X \cap \bigcap_{n \in \omega} I_n \subseteq \bigcup_{n \in \omega} C_n.$$

Vi visar nu att spelare  $I$  inte kan ha en vinnande strategi i detta spel genom att först anta att spelare  $I$  har en vinnande strategi  $\sigma$ . En stunds betänketid visar att om spelare  $I$  ska vinna måste intervallen vara nästlade, alltså att  $I_n \subseteq I_{n+1}$  för alla heltal  $n$ . Alltså har vi en oändlig följd av kompakta intervall vars längd halveras och det är då välkänt från analysen att deras snitt innehåller exakt ett element  $x$ . Detta låter oss tolka dragen som spelare  $I$  gör som element ur  $\{0, 1\}$ , där 0 motsvarar första halvan av det förra intervallet och 1 andra halvan. Vi får därför en mängd  $W := \{x \in 2^\omega \mid x \text{ följer } \sigma\}$  i princip genom att identifiera tal i  $[0, 1]$  med deras binära expansioner. På motsvarande sätt kan vi definiera  $T$  som alla ändliga sekvenser som kan uppstå då spelare  $I$  spelar enligt  $\sigma$ . För en ändlig sekvens  $s$  av längd  $n$  motsvarar  $[s]$  en mätbar delmängd av  $[0, 1]$ , ty om  $b(s)$  är binära expansionen som först innehåller värdena från  $s$  och sedan nollor så motsvarar  $[s]$  intervallet  $[b(s), b(s) + \frac{1}{2^{n+1}}]$ . Låt nu

$$U_n := \bigcup_{s \in T, |s|=n} [s]$$

vilket ger att

$$W = \bigcap_{n \in \omega} U_n.$$

Eftersom varje  $[s]$  är mätbar så är deras union mätbar. Därefter blir det uppräknliga snittet av alla  $U_n$  mätbar, så  $W$  är mätbar. Dessutom måste (efter att återigen identifiera till  $\mathbb{R}$ )  $W \subseteq X$  och eftersom  $\mu_*(X) = 0$  får vi att  $\mu(W) = 0$ . Enligt Lemma 4.5 kan vi då täcka  $W$  med  $(C_n)_{n \in \omega}$  där  $C_n \in \mathcal{C}_n$  för alla heltal  $n$ . Men detta är då en sekvens som spelare  $II$  kan spela och täcker hela  $W$ , så om spelare  $II$  spelar denna kommer spelare  $II$  att vinna. Alltså kan spelare  $I$  inte ha en vinnande strategi.

Eftersom spelare  $I$  inte kan ha en vinnande strategi måste spelare  $II$  ha en vinnande strategi  $\sigma$  enligt  $AD$ . Notera nu att vid det  $n$ :te steget har spelare  $I$  exakt  $2^n$  möjliga drag. Eftersom  $\sigma$  är en vinnande strategi ger den för varje sådant drag  $I_n$  en strategiskt korrekt respons  $C_n$ . Vi kan därför skapa  $D_n := \{C_n \in \mathcal{C}_n \mid C_n \text{ strategiskt korrekt respons till } I_n \text{ enligt } \sigma\}$ . Mängden  $D_n$  innehåller precis de  $2^n$  stycken element som spelare  $II$  kan svara på drag  $n$ . Spelare  $I$  kan spela sina intervall för att inkapsla vilket  $x \in [0, 1]$  som helst, så det måste gälla att

$$X \subseteq \bigcup_{n \in \omega} \cup D_n$$

vilket ger

$$\mu^*(X) \leq \mu\left(\bigcup_{n \in \omega} \cup D_n\right)$$

men vi har också

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \omega} \cup D_n\right) \leq \sum_{n \in \omega} 2^n \epsilon_n$$

eftersom det finns exakt  $2^n$  element i  $D_n$  och varje sådant även ligger i  $\mathcal{C}_n$ . Från definitionen av  $\epsilon_n$  får vi nu att

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \omega} \cup D_n\right) \leq \frac{1}{2}\mu^*(X)$$

vilket är en motsägelse eftersom  $\mu^*(X) > 0$ . Alltså måste vårt antagande vara fel, det kan inte finnas någon omätbar mängd i  $[0, 1]$ .

Till sist betraktar vi mängder i  $\mathbb{R}$ . Det är klart att vårt argument även gäller för andra intervall  $[n, n + 1]$ . Om det fanns en omätbar mängd  $M \in \mathbb{R}$  kan vi skriva

$$M = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} M \cap [n, n + 1]$$

där minst en av mängderna i unionen måste vara omätbar. Men detta är omöjligt enligt ovanstående argument, alltså kan  $M$  ej vara omätbar.  $\square$

Notera att ovanstående bevis inte demonstrerar att de mängder som vanligtvis är omätbara under  $AC$  får ett rimligt mått under  $AD$ . Det visar istället att omätbara mängder inte egentligen är mängder under  $ZF + AD$ .

Intuitivt kan man tänka sig att om alla delmängder av  $\mathbb{R}$  är Lebesgue-mätbara så är även alla delmängder av  $\mathbb{R}^n$  Lebesgue-mätbara. Detta är även fallet, se [22, Sida 296]. Banach-Tarskis paradox uppstår eftersom enhetsbollen delas upp i delar som ej är mätbara. När dessa delar roteras, translateras och slutligen sammanfogas behöver därför inte måttet bevaras. På grund av ovanstående resonemang existerar inte sådana uppdelningar under  $AD$ , så varje uppdelning måste bestå av mätbara mängder vars mått förblir invariant. Alltså kan vi under  $AD$  inte göra om enhetsbollen till två kopior av sig själv enbart via rotation och translation.

## 4.2 Uppräkneliga urvalsaxiomet

Målet med detta delkapitel är att konstruera en modell där  $AC_\omega$  gäller men inte Banach-Tarskis paradox. Vi har från förra delkapitlet att  $ZF + AD$  ger  $AC_\omega(\mathbb{R})$  och att Banach-Tarskis paradox inte gäller. Nu skall vi förstärka  $AC_\omega(\mathbb{R})$  till  $AC_\omega$  genom att lägga till ytterligare ett axiom. Till detta ändamål kommer vi behöva följande lemma.

**Lemma 4.7** ( $ZF$ ).  $|\mathbb{R}| = |\mathbb{R}^{<\omega}|$ .

*Bevis.* Notera först att det finns en injektion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{<\omega}$  via  $x \mapsto \{x\}$ . Vi identifierar återigen reella tal i  $[0, 1]$  med deras binära expansion, där  $x^n$  blir det  $n$ :te talet i den binära expansionen av  $x$ . För att säkerställa unikheter stipulerar vi att binära expansionen inte får sluta i en oändlig följd av 1:or. För varje  $n \in \omega$  definiera  $\mathbb{R}_n := \{A \subseteq \mathbb{R} \mid |A| = n\}$ . Ordna varje  $M \in \mathbb{R}_n$  storleksmässigt och definiera  $f_n : \mathbb{R}_n \rightarrow [0, 1]$  enligt  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \mapsto 0.x_1^1 x_2^1 \dots x_1^2 x_1^2 x_2^2 x_3^2 \dots$ . Vi sammanflätar alltså den binära expansionen av talen i vår givna mängd för att få ett reellt tal. Denna funktion är tydligt injektiv, ty två olika mängder av storlek  $n$  måste skiljas åt på något element vars binära expansion därför skiljer sig åt vid något index. Vi kan sedan definiera  $f : \mathbb{R}^{<\omega} \rightarrow \mathbb{R}$  genom  $f(A) = |A| + f_{|A|}(A)$  vilket då blir en injektion. Vi har alltså en injektion åt båda håll och enligt Schröder-Bernsteins sats [26] (utan  $AC$ ) finns då en bijektion mellan dem.  $\square$

Innan vi kan fortsätta behöver vi introducera det så kallade *Von Neumann-universumet* med hjälp av  $ZF$ . Först måste vi införa en beteckning för klassen av ordinaltal. Läsaren som vill dubbelkolla vissa definitioner hänvisas återigen till Appendix B.

**Definition 4.8.** Med  $\mathbb{ORD}$  betecknar vi den äkta klassen av alla ordinaltal. Se Appendix B eller [10] för mer detaljer.

**Definition 4.9** (Von Neumann-universumet).

- $V_0 = \emptyset$ ,
- $V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$  för alla ordinaltal  $\alpha$ ,
- om  $\lambda$  är ett gränsordinaltal är  $V_\lambda = \bigcup_{\alpha < \lambda} V_\alpha$ ,
- $V = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{ORD}} V_\alpha$ .

Alla steg i konstruktionen är transitiva mängder, och det går att tolka  $V$  som universumet där matematiken utspelar sig. Relevant för vårt arbete är just  $V_{\omega+1} = \mathcal{P}(V_\omega)$ . Specifikt kommer vi behöva det faktum, som är enkelt att visa men som vi utelämnar, att det finns en bijektion mellan  $V_{\omega+1}$  och  $\mathbb{R}$ . För att nu definiera axiomet  $V = L(\mathbb{R})$  kommer vi bygga upp den äkta klassen  $L(\mathbb{R})$  i liknande stil med  $V$  men med inspiration från Gödels konstruerbara universum  $L$ , se [25]. Först behöver vi en till definition.

**Definition 4.10.** För en mängd  $X$  och en första-ordningens mängdteoretisk formel  $\phi(a_1, \dots, a_n)$  skriver vi  $X \models \phi(a_1, \dots, a_n)$  om  $\phi(a_1, \dots, a_n)$  är sant då alla kvantorer i  $\phi$  begränsas till  $X$ . En mängd  $Y \subseteq X$  sägs vara *definierbar* från  $X$  om  $Y = \{x \in X \mid X \models \phi(x, a_1, \dots, a_n)\}$  för någon första-ordningens formel  $\phi$ . Vi inför även beteckningen  $\text{Def}(X) := \{Y \subseteq X \mid Y \text{ definierbar från } X\}$ .

**Definition 4.11.** Vi definierar  $L(\mathbb{R})$  med hjälp av följande transfinitrekursiva formel

- $L_0(\mathbb{R}) = V_{\omega+1}$
- $L_{\alpha+1}(\mathbb{R}) = \text{Def}(L_\alpha(\mathbb{R}))$
- Om  $\lambda$  är ett gränsordinaltal så sätter vi  $L_\lambda(\mathbb{R}) = \bigcup_{\alpha < \lambda} L_\alpha(\mathbb{R})$
- $L(\mathbb{R}) = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{ORD}} L_\alpha(\mathbb{R})$

För en given mängd  $X \in L(\mathbb{R})$  skriver vi  $\text{rank}(X)$  som det första ordinaltalet så att  $X$  dyker upp i konstruktionen.

*Anmärkning 4.12.* Bassteget är  $V_{\omega+1}$  och inte  $\mathbb{R}$ , detta för att vi vill börja med en transitiv mängd som ändå är i bijektion med de reella talen.

**Definition 4.13.** Axiomet  $V = L(\mathbb{R})$  säger att alla mängder som kan betraktas ligger i  $L(\mathbb{R})$ .

$L(\mathbb{R})$  är en så kallad inre modell av  $ZF + AD$ . Vi går inte in på detaljerna av vad detta innebär eller teorin och antagandena bakom detta och konstaterar helt enkelt att antagandet  $ZF + AD + V = L(\mathbb{R})$  inte är problematiskt för våra syften.

**Proposition 4.14.** *Antag  $ZF + AC_\omega(\mathbb{R}) + V = L(\mathbb{R})$ . Då gäller  $AC_\omega$ .*

*Bevis.* Vi vill först identifiera element i  $L(\mathbb{R})$  med reella tal. Mer specifikt vill vi för varje ordinaltal  $\alpha$  kunna skapa en funktion  $f : \omega \times \mathbb{R} \rightarrow L_\alpha(\mathbb{R})$ . Notera att en första ordningens logisk formel  $\phi$  alltid är ändligt lång och för varje position finns ändligt många symboler att välja mellan. Alltså kan vi indexera dessa formler med naturliga tal som  $(\phi_n)_{n \in \omega}$ . Definiera nu  $F : \mathbb{ORD} \times \omega \times \mathbb{R}^{<\omega} \rightarrow L(\mathbb{R})$  enligt

$$F(\alpha, n, \{x_1, x_2, \dots, x_m\}) = \{S \in L_\alpha(\mathbb{R}) \mid L_\alpha(\mathbb{R}) \models \phi_n(S, x_1, x_2, \dots, x_m)\}$$

där vi i steg 0 övergår från  $V_{\omega+1}$  till  $\mathbb{R}$  via den tidigare nämnda bijektionen. Enligt definitionen av  $L(\mathbb{R})$  är detta därför en surjektion. Notera det rekursiva i denna definition, ett element i  $L_\alpha(\mathbb{R})$  definieras vanligtvis med parametrar från tidigare rangen i hierarkin, men vi behöver här endast använda ändligt många reella tal som parametrar ty elementen i tidigare ranger har redan identifierats med reella tal via  $F$ . Notera vidare att även om  $F$  just nu är en klassfunktion är  $F$  för fixt  $\alpha$  en vanlig funktion, som dessutom är definierbar. Enligt Lemma 4.7 finns en bijektion mellan  $\mathbb{R}$  och  $\mathbb{R}^{<\omega}$ . Använder vi denna identifikation i  $F$  kan vi tolka  $F$  som en funktion definierad på

$\mathbb{ORD} \times \omega \times \mathbb{R}$  och sedan sammanfatta resultatet ovan på följande sätt: För varje  $X \in L(\mathbb{R})$  finns en surjektion från  $\omega \times \mathbb{R} \rightarrow X$ , som fås genom att fixera  $\alpha > \text{rank}(X)$  och betrakta  $F$  för detta  $\alpha$ . För mer detaljer se [4][15][17].

Med hjälp av detta visar vi nu  $AC_\omega$  i  $L(\mathbb{R})$ , där  $AC_\omega(\mathbb{R})$  antas känt. Vi betraktar en uppräknelig familj  $F = (F_n)_{n \in \omega}$ . Fallet då  $F$  är ändligt är trivialt så antag att det finns en bijektion  $b : \omega \rightarrow F$ . Eftersom  $\bigcup F \in L(\mathbb{R})$  kan vi enligt ovan hitta en surjektion  $f : \omega \times \mathbb{R} \rightarrow \bigcup F$ . För  $n \in \omega$ , låt

$$a_n = \min\{a \in \omega \mid f(\{a\} \times \mathbb{R}) \cap b(n) \neq \emptyset\}$$

$$X_n = \{x \in \mathbb{R} \mid f(a_n, x) \in b(n)\}.$$

Vi erhåller nu en uppräknelig samling  $X_n$  av delmängder av  $\mathbb{R}$ . Enligt  $AC_\omega(\mathbb{R})$  finns en urvalsfunktion

$$g : \omega \rightarrow \bigcup_{n \in \omega} X_n$$

så att  $g(n) \in F_n$  för alla naturliga tal  $n$ . Definiera  $h : \omega \rightarrow \bigcup F$  enligt  $n \mapsto f(a_n, h(n))$  vilket är precis en urvalsfunktion på  $F$ , som önskat.  $\square$

**Sats 4.15.** *Inom  $ZF + AD + V = L(\mathbb{R})$  håller  $AC_\omega$  men inte Banach-Tarskis paradox.*

*Bevis.* Vi använder oss nu av  $ZF + AD + V = L(\mathbb{R})$ . Eftersom vi har  $ZF + AD$  har vi  $AC_\omega(\mathbb{R})$  enligt Proposition 4.3 och enligt Proposition 4.14 har vi att  $AC_\omega(\mathbb{R})$  tillsammans med  $V = L(\mathbb{R})$  ger  $AC_\omega$ . Från Sats 4.6 har vi att alla delmängder av  $\mathbb{R}$  är Lebesgue-mätbara vilket enligt kommentaren efter Sats 4.6 ger att Banach-Tarskis paradox inte håller.  $\square$

Värt att notera är att det finns andra mängdteoretiska modeller där  $AC_\omega$  håller och alla delmängder av  $\mathbb{R}$  är Lebesgue-mätbara. Ett exempel på en sådan är Solovays modell, [18, Kapitel 8].

**Korollarium 4.16.** *Banach-Tarskis paradox är inte en följd av  $ZF + AC_\omega$ .*

*Bevis.* För att visa korollariet räcker det att hitta en modell där  $ZF$  och  $AC_\omega$  håller samt att Banach-Tarskis paradox inte håller. Ett exempel på en sådan modell är  $ZF + AD + V = L(\mathbb{R})$  som uppfyller kraven enligt Sats 4.15.  $\square$

## Referenser

- [1] An Jinpeng. "A proof of Zorn's lemma". I: *School of Mathematics and Sciences, Peking University* (2019). URL: <https://www.math.pku.edu.cn/teachers/anjp/Zorn.pdf>.
- [2] Banach Stefan och Tarski Alfred. "Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes". I: *Fundamenta Mathematicae* 6 (1924), s. 244–277. DOI: 10.4064/fm-6-1-244-277.
- [3] Cornulier Yves de och Harpe Pierre de la. *Metric Geometry of Locally Compact Groups*. Vol. 25. EMS Tracts in Mathematics. Zürich: European Mathematical Society (EMS), 2016. ISBN: 978-3-03719-167-6. DOI: 10.4171/167. URL: <https://doi.org/10.4171/167>.
- [4] Fremlin D. H. "Measure theory and the axiom of choice". I: *Transactions of the American Mathematical Society* 255 (1979), s. 295–319. DOI: 10.1090/S0002-9947-1979-0542870-6. URL: <https://www.ams.org/journals/tran/1979-255-00/S0002-9947-1979-0542870-6/>.
- [5] Garrido Alejandra. *An introduction to amenable groups*. 2013. URL: <https://www.math.uni-duesseldorf.de/~garrido/amenable.pdf>.
- [6] Hall Phillip. "On Representatives of Subsets". I: *Journal of the London Mathematical Society*. s1 10.1 (1935), s. 26–30. ISSN: 0024-6107. DOI: 10.1112/jlms/s1-10.37.26. URL: <https://doi.org/10.1112/jlms/s1-10.37.26>.
- [7] Juschenko Kate. *Amenability of discrete groups by examples*. Vol. 266. Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Society, Providence, RI, 2022, s. xi+165. ISBN: 978-1-4704-7032-6. DOI: 10.1090/surv/266. URL: <https://doi.org/10.1090/surv/266>.
- [8] Kechris Alexander S. "The Axiom of Determinacy Implies Dependent Choices in  $L(\mathbb{R})$ ". I: *The Journal of Symbolic Logic* 49 (1984), s. 161–173. DOI: 10.2307/2274099. URL: <https://www.jstor.org/stable/2274099>.
- [9] Knudby Søren. "The Banach-Tarski Paradox". Kandidatuppsats. University of Copenhagen, 2009. URL: [https://web.math.ku.dk/~rordam/students/SK\\_bsthesis.pdf](https://web.math.ku.dk/~rordam/students/SK_bsthesis.pdf).
- [10] Kunen Kenneth. *Set Theory: An Introduction to Independence Proofs*. Vol. 102. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. Amsterdam: North-Holland, 1980. ISBN: 0-444-85401-0.
- [11] Miller Arnold W. *Lecture Notes on Set Theory Without Choice*. University of Wisconsin–Madison, Math 873 Lecture Notes. Febr. 2008. URL: <https://people.math.wisc.edu/~awmille1/old/m873-08/ac.pdf> (hämtad 2025-05-10).
- [12] Munkres James. *Topology*. Vol. 2. Pearson Education, 2023, s. 232. ISBN: 978-1-292-02362-5.
- [13] Neumann J. "Zur allgemeinen Theorie des Masses". I: *Fundamenta Mathematicae* 13 (1929), s. 73–116. ISSN: 1730-6329. DOI: 10.4064/fm-13-1-73-116. URL: <http://dx.doi.org/10.4064/fm-13-1-73-116>.
- [14] Nuida Koji. "A simple and elementary proof of Zorn's Lemma". I: *Discrete Mathematics Letters* 13 (2024), s. 108–110. DOI: 10.47443/dml.2023.143. URL: [https://www.dmllett.com/archive/v13/DML24\\_v13\\_pp108-110.pdf](https://www.dmllett.com/archive/v13/DML24_v13_pp108-110.pdf).
- [15] pillow\_enjoyer. *Countable choice on the reals implies countable choice in  $L(\mathbb{R})$* . Math Stack Exchange, Question 5062348. Maj 2025. URL: <https://math.stackexchange.com/questions/5062348/countable-choice-on-the-reals-implies-countable-choice-in-l-mathbb-r> (hämtad 2025-05-10).
- [16] Rado Richard. "Note on the Transfinite Case of Hall's Theorem on Representatives". I: *Journal of the London Mathematical Society*. s1 42.1 (1967), s. 321–324. ISSN: 0024-6107. DOI: 10.1112/jlms/s1-42.1.321. URL: <https://doi.org/10.1112/jlms/s1-42.1.321>.

- [17] Ryan-Smith Calliope. "Local Reflections of Choice". I: *arXiv preprint arXiv:2412.13785* (mars 2025). DOI: 10.48550/arXiv.2412.13785. URL: <https://arxiv.org/abs/2412.13785>.
- [18] Schindler Ralf. *Set Theory*. 1. utg. Springer Cham, 2014. ISBN: 978-3-319-06725-4.
- [19] Sternberg Shlomo. *Lecture 11: Amenability*. Lecture notes for Math 212A, Harvard University. URL: <https://people.math.harvard.edu/~shlomo/212a/11.pdf>.
- [20] Tao Terence. *Some Notes on Amenability*. Terry Tao's Blog. 2009. URL: <https://terrytao.wordpress.com/2009/04/14/some-notes-on-amenability/>.
- [21] Tarski Alfred. *Cardinal Algebras. With an Appendix: Cardinal Products of Isomorphism Types, by Bjarni Jónsson and Alfred Tarski*. Oxford University Press, New York, 1949.
- [22] Tomkowicz Grzegorz och Wagon Stan. *The Banach-Tarski Paradox*. 2. utg. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. One Liberty Plaza, New York, NY 10006: Cambridge University Press, 2016. ISBN: 978-1-107-04259-9.
- [23] Wagon Stan. *The Banach-Tarski Paradox*. 1. utg. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, 1985. ISBN: 0521302447.
- [24] Wikipedia skribenter. *Axiom of determinacy* — *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. April 2024. URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Axiom\\_of\\_determinacy](https://en.wikipedia.org/wiki/Axiom_of_determinacy) (hämtad 2025-05-07).
- [25] Wikipedia skribenter. *Constructible universe*. 2025. URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Constructible\\_universe](https://en.wikipedia.org/wiki/Constructible_universe) (hämtad 2025-05-10).
- [26] Wikipedia skribenter. *Schröder–Bernstein theorem* — *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. Maj 2025. URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Schröder-Bernstein\\_theorem](https://en.wikipedia.org/wiki/Schröder-Bernstein_theorem) (hämtad 2025-05-13).

## 5 Användning av AI

Vi har i den här uppsatsen använt AI i följande syften.

1. Översätta längre texter på annat språk än svenska eller engelska.
2. Ge idéer till svenska översättningar av matematiska begrepp på engelska som vi inte hittat i någon svensk skrift.
3. Bevisidéer av enklare påståenden.
4. Feedback på struktur och grammatik i texten.

# A Komplement till kapitel 2, amenabla och paradoxala grupper

## A.1 Halls sats

Målet med Appendix A.1 är att bevisa Lemma 2.9, Halls (1 till 1)-matchning, i den form som används för att bevisa Sats 2.11, Tarskis sats. Vi visar först satsen i dess ursprungliga form för att sedan motivera den form vi använder. För att bevisa satsen har vi även två lemman. Philip Hall [6] bevisade följande sats, vars formulering är tagen från [16].

**Sats A.1** (Halls sats). *Låt  $A = (A_v)_{v \in N}$  vara en ändlig familj av mängder indexerad av en mängd  $N$ . Antag att för varje delmängd  $M$  av  $N$  gäller*

$$\left| \bigcup_{v \in M} A_v \right| \geq |M|,$$

där  $|A|$  betecknar kardinaliteten av  $A$ . Då är det möjligt att bestämma, för varje  $v \in N$ , ett element  $x_v$  av  $A_v$  sådan att  $x_\mu \neq x_\nu$  då  $\mu \neq \nu$ .

Juschenkos [7, Sats A.16] grafteoretiska formulering (i vår text Lemma 2.9) av Sats A.1 är istället fallet då  $N$  tillåts vara godtycklig och då  $A_v$  är ändliga. Det är särskilt viktigt att  $N$  och  $A_v$  är sådana eftersom det är antaganden i beviset av Sats 2.11, Tarskis sats. Juschenko bevisar Sats A.1 med hjälp av ett kompakthetsargument byggt på Tychonoffs sats<sup>3</sup>. Med anledning av att vi vill undvika topologiska argument följer vi istället ett argument av Richard Rado [16] baserat på Halls originella formulering.

**Definition A.2.** Låt  $N$  vara en godtycklig mängd och låt  $(A_v)_{v \in N}$  vara en *indexerad familj* av mängder. Vi säger att  $(A_v)_{v \in N}$  är *representerbar* om det finns en injektiv avbildning

$$x: N \longrightarrow \bigcup_{v \in N} A_v \quad \text{så att} \quad x(v) \in A_v \quad \text{för alla } v \in N.$$

Vi säger då att  $x_v$  är en *representation* av den indexerade familjen  $(A_v)_{v \in N}$ .

**Definition A.3** (Halls villkor). Den indexerade familjen  $(A_v)_{v \in N}$  uppfyller *Halls villkor* om för varje ändlig mängd  $M \subseteq N$  gäller olikheten

$$\left| \bigcup_{v \in M} A_v \right| \geq |M|.$$

För att bevisa Halls sats för godtyckligt  $N$  behöver vi två lemman, varav det första är *Zorns lemma*. För att förenkla notationen låter vi  $(A_v)_{v \in N} + (B)$  beteckna ett system av mängder bestående av  $A_v$  för alla  $v \in N$  och mängden  $B$ . Det kan alltså läsas  $\{A_v\}_{v \in N} \cup B$ . För  $M \subseteq N$  skriver vi också  $S(M) = \bigcup_{v \in M} A_v$ .

**Lemma A.4** (Zorns lemma). *Låt  $X$  vara en partiellt ordnad mängd. Antag att varje kedja  $Y \subseteq X$  har en majorant  $x \in X$ . Då innehåller  $X$  ett maximalt element.*

Zorns lemma bevisas inte här, då det återfinns i många standardverk inom mängdlära och funktionalanalys. För en utförlig genomgång, se till exempel beviset av Koji Nuida [14] eller beviset av Jinpeng An [1].

**Lemma A.5.** *Låt systemet  $(A_v)_{v \in M}$  samt  $B$  uppfylla Halls villkor. Då gäller*

(i) *Om  $|B| \geq 2$  finns  $x \in B$  sådant att  $(A_v)_{v \in M} + (B \setminus \{x\})$  uppfyller Halls krav.*

(ii) *Om  $|B|$  är ändligt finns  $\xi \in B$  sådan att  $(A_v)_{v \in M} + (\{\xi\})$  uppfyller Halls krav.*

Endast (ii) är nödvändig för att bevisa Halls sats. Det är däremot enklare att visa (i), varur (ii) följer omedelbart.

<sup>3</sup>En godtycklig produkt av kompakta mängder är kompakta med produkttopologin [12].

*Bevis av Lemma A.5.* Välj två skilda element  $x_0, x_1 \in B$ . Anta, för motsägelse, att varken  $x_0$  eller  $x_1$  kan väljas som  $x$ . Då finns för varje  $\lambda \in \{0, 1\}$  en ändlig mängd  $M_\lambda \subseteq M$  sådan att

$$|P_\lambda| \leq |M_\lambda|, \quad \text{där} \quad P_\lambda = S(M_\lambda) \cup (B \setminus \{x_\lambda\}).$$

Då får vi

$$\begin{aligned} |M_0| + |M_1| &\geq |P_0| + |P_1| = |P_0 \cup P_1| + |P_0 \cap P_1| \\ &\geq |S(M_0 \cup M_1) \cup B| + |S(M_0 \cap M_1)| \\ &\geq |M_0 \cup M_1| + 1 + |M_0 \cap M_1| = |M_0| + |M_1| + 1, \end{aligned}$$

vilket är en motsägelse. Alltså kan antingen  $x_0$  eller  $x_1$  väljas som  $x$ , och (i) är bevisat.

Vidare följer (ii) genom att tillämpa (i)  $|B| - 1$  gånger.  $\square$

**Sats A.6** (Halls sats för godtyckligt  $N$ ). *Låt  $(A_v)_{v \in N}$  vara en indexerad familj där varje  $A_v$  är ändlig, och antag att Halls villkor är uppfyllt. Då är  $(A_v)_{v \in N}$  representerbar.*

*Bevis.* Låt  $\Omega$  vara mängden av alla system  $(B_v)_{v \in N}$  sådana att  $B_v \subseteq A_v$  för varje  $v \in N$  och att systemet  $(B_v)_{v \in N}$  uppfyller Halls villkor. Påståendet i satsen säger att det finns ett system  $(B_v)_{v \in N} \in \Omega$  sådan att  $|B_v| = 1$  för alla  $v \in N$ . Vi definierar en partiell ordning  $\leq$  på  $\Omega$  som

$$(B'_v)_{v \in N} \leq (B''_v)_{v \in N}, \quad \text{om och endast om,} \quad B'_v \subseteq B''_v, \quad \text{för alla } v \in N.$$

Eftersom varje  $A_v$  är ändlig, och Halls villkor endast testas på ändliga delmängder, kan Zorns lemma tillämpas på  $(\Omega, \leq)$ . Därigenom erhålls ett minimalt element  $\omega$ , kalla det  $(B_v^{min})$ .

Om det minimala elementen innehåller mer än ett element väljer Lemma A.5 ett enda element  $\xi$  så att ersättningen  $(B_v^{min}) \mapsto \xi$  fortfarande uppfyller A.3, Halls villkor. Det nya systemet ligger i  $\Omega$  är strikt mindre, ett brott mot minimaliteten, varför  $|(B_v^{min})| = 1$  för alla  $v$ .  $\square$

Vi kan nu använda detta resultat för att visa Halls (1 till  $n$ )-matchning, i vår text Lemma 2.10. Vi påminner läsaren om formuleringarna så som de förekommer i kapitel 2.

*Anmärkning A.7.* Formuleringen av Sats A.6 kan visas vara ekvivalent till Lemma A.8. Om  $\Gamma = (A, B, K)$  är en bipartit graf, låt vänster sida vara index mängden  $A := N$  och låt höger sidan vara unionen  $B := \cup_{v \in N} A_v$ , och rita en kant  $(v, x) \in K$  exakt då  $x \in A_v$ .

**Lemma A.8** (Halls (1 till 1)-matchning). *Låt  $\Gamma = (A, B, K)$  vara en bipartit graf där mängden  $K$  innehåller kanterna mellan nodmängderna  $A$  och  $B$ . Antag att graden av varje nod i  $A$  är ändlig, och att vi för varje ändlig mängd  $D \subseteq A$  har att*

$$|N(D)| \geq |D|.$$

*Då finns det en injektiv avbildning  $i : A \rightarrow B$  sådan att*

$$(a, i(a)) \in K \quad \text{för alla } a \in A.$$

**Lemma A.9** (Halls (1 till  $n$ )-matchning). *Låt  $\Gamma = (A, B, K)$  vara en bipartit graf där mängden  $K$  innehåller kanterna mellan nodmängderna  $A$  och  $B$ . Låt  $n \in \mathbb{N}$  och antag att graden av varje nod i  $A$  är ändlig. Antag vidare att för varje ändlig mängd  $D \subseteq A$  har vi att*

$$|N(D)| \geq n|D|. \tag{4}$$

*Då finns det injektiva avbildningar  $i_1, \dots, i_n : A \rightarrow B$  med parvis disjunkta värdemängder sådana att*

$$(a, i_l(a)) \in K \quad \text{för alla } a \in A \text{ och } 1 \leq l \leq n.$$

*Bevis.* Håller påståendet för en enkel graf  $\Gamma$  fortsätter det att hålla även om vi skulle lägga till dubletter av kanter mellan noder i  $\Gamma$ . Vidare, om en graf som inte är enkel uppfyller kraven i lemmat måste den innehålla en enkel delgraf som också uppfyller kravet. Detta beror på att (4) måste gälla för alla ändliga mängder  $D \subseteq A$ , så speciellt gäller det för varje  $a \in A$  att

$|N(\{a\})| \geq n|\{a\}| = n$ . Alltså måste varje nod  $a$  vara ansluten till åtminstone  $n$  olika noder i  $B$ , så tar vi bort alla dubletter av kanter har vi kvar en enkel graf som uppfyller kravet. Därmed kan vi utan inskränkning anta att  $\Gamma$  är enkel.

Låt därför  $\Gamma$  vara som i Lemma 2.10, samt enkel. Om  $n = 1$  kan vi direkt applicera Lemma 2.9, och vi är klara. Antag därför att  $n > 1$ . Enligt antagande har vi för varje ändlig mängd  $D \subseteq A$  att  $|N(D)| \geq n|D| \geq |D|$ . Alltså uppfyller  $\Gamma$  kraven i Lemma 2.9, och vi kan med  $i_1$  beteckna en sådan avbildning lemmat garanterar existerar. Tar vi för varje  $a \in A$  bort kanten  $(a, i_1(a))$  från  $K$  kommer vi för varje ändlig mängd  $D \subseteq A$  ha tagit bort  $|D|$  kanter från noderna i  $D$  till noder i  $B$ . Kvar har vi alltså  $|N(D)| - |D| \geq n|D| - |D| = (n-1)|D|$  kanter från noderna i  $D$  till noder i  $B$ . Vår nya graf uppfyller alltså kraven i Lemma 2.9, och vi kan därmed låta  $i_2$  vara en sådan avbildning lemmat garanterar existerar. Eftersom  $\Gamma$  är enkel kan det för alla  $a \in A$  som mest finnas en kant mellan  $a$  och  $i_1(a)$ , och då vi tog bort denna kant tidigare finns den inte längre kvar i  $K$ . Då Lemma 2.9 garanterar att  $i_2$  är sådan att  $(a, i_2(a)) \in K$  måste alltså  $i_2(a) \neq i_1(a)$  för alla  $a \in A$ , så  $i_1(A) \cap i_2(A) = \emptyset$ .

Vi kan göra samma process  $n$  gånger om och kommer då att få de  $n$  stycken önskade avbildningarna.  $\square$

## A.2 Bevis av Lemma 2.30

Detta lemma används i Proposition 2.31, som säger att  $SO(3)$  har en delgrupp isomorf med  $\mathbb{F}_2$ , och är viktigt för läsaren som vill vara säker på att  $SO(3)$ , som bevarar längd, är paradoxal.

**Lemma A.10.** *Låt  $\phi$  och  $\psi$  vara medurs rotationer i  $\mathbb{R}^3$  runt  $x$ -axeln respektive  $z$ -axeln med vinkeln  $\arccos(\frac{1}{3})$ . Antag att  $w$  är ett icke-trivialt reducerat ord som består av bokstäver ur mängden  $\{\phi, \psi, \phi^{-1}, \psi^{-1}\}$  och som slutar med  $\psi$  eller  $\psi^{-1}$ . Då kommer  $w(1, 0, 0)$  vara på formen  $(a, b\sqrt{2}, c)/3^k$  där  $a, b, c$  och  $k$  är heltal och  $b \neq 0$ .*

*Bevis.* Beviset är baserat på [23, sida 15-16]. Lemmat kommer bevisas med induktion på längden av  $w$ . Matriserna för  $\phi^{\pm 1}$  och  $\psi^{\pm 1}$  är

$$\phi^{\pm 1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \mp \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \pm \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \quad \psi^{\pm 1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \mp \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ \pm \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Först vill vi visa att  $a, b$  och  $c$  är heltal och sedan att  $b$  aldrig är delbart med tre, då är  $b$  specifikt inte noll. Låt  $w$  vara som i lemmats formulering. Om  $w$  har längd ett så är  $w = \psi^{\pm 1}$  vilket efter en applikation av rotationsmatrisen ger

$$w(1, 0, 0) = (1, \pm 2\sqrt{2}, )/3$$

som bevisar basfallet. Antag nu att alla ord  $w'$  av längd  $k-1$  är på formen  $(a', b'\sqrt{2}, c')$ , där  $(a', b', c')$  uppfyller lemmat och låt  $w$  ha längd  $k$ . Då är  $w = \phi^{\pm 1}w'$  eller  $w = \psi^{\pm 1}w'$ . Första fallet

$$\phi^{\pm 1}w' = (3a', (b' \mp 2c')\sqrt{2}, \pm 4b' + c')/3^k,$$

då är  $a = 3a', b = b' \mp 2c'$  och  $c = \pm 4b' + c'$  heltal och  $w = (a, b\sqrt{2}, c)/3^k$ . Andra fallet

$$\psi^{\pm 1}w' = (a' \mp 4b', (\pm 2a' + b')\sqrt{2}, 3c')/3^k,$$

då är  $a = a' \mp 4b', b = \pm 2a' + b', c = 3c'$  heltal och  $w = (a, b\sqrt{2}, c)/3^k$ . Detta visar att  $a, b, c$  alltid är heltal.

För att visa att  $b$  inte är delbart med tre finns det fyra fall att betrakta

1.  $w = \psi^{\pm 1} \phi^{\pm 1} v$ ,
2.  $w = \phi^{\pm 1} \psi^{\pm 1} v$ ,
3.  $w = \psi^{\pm 1} \psi^{\pm 1} v$ ,
4.  $w = \phi^{\pm 1} \phi^{\pm 1} v$ ,

där  $v$  är något ord. I de två första fallen får vi med hjälp av likheterna ovan antingen att  $b = b' \pm 2c'$  där  $3 \mid c'$  eller  $b = b' \pm 2a'$  där  $3 \mid a'$ . Detta tillsammans med att  $b'$  är inte delbart med tre enligt induktionsantagandet ger att  $b$  inte är delbart med tre i dessa fallen. Antag nu att  $a'', b'', c''$  är heltalen från  $v(1, 0, 0)$ , notera att  $b''$  är noll om  $v$  är identitets ordet vilket uppstår om  $w$  har längd två. Det tredje fallet ger då

$$b = b' \pm 2a' = b' + 2(a'' \mp 4b'') = b' + b'' \pm 2a'' - 9b'' = 2b' - 9b''$$

så  $b$  är inte delbart med tre, ty  $2b'$  är ej delbart med tre och  $9b''$  är delbart med tre. Fjärde fallet ger

$$b = b' \mp c2' = b' \mp 2(c'' \pm 4b'') = b' + b'' \mp 2c'' - 9b'' = 2b' - 9b''$$

som visar att  $b$  aldrig är delbar med tre och då specifikt inte noll så lemmat är nu bevisat.  $\square$

### A.3 Utvidgningar

Syftet med detta delkapitel är att introducera en ekvivalent definition av amenabilitet till Definition 2.1 som istället använder begreppet *invariant medelvärde*. Det är särskilt användbart för att det tillåter oss att enklare visa att en större klass av grupper är amenabla förutom de som visats i kapitel 2. Vi kommer specifikt visa att *utvidgningar* av uppräknliga amenabla grupper är amenabla.

**Definition A.11** (kort exakt följd). En följd av grupphomomorfier

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$$

kallas *kort exakt* om

- (i)  $\alpha$  är injektiv,
- (ii)  $\beta$  är surjektiv,
- (iii)  $\text{im } \alpha = \ker \beta$ .

Vi kan också tolka en kort exakt följd som att bilden av varje homomorfi är kärnan av den nästkommande. Det vill säga att  $A$  är en normal delgrupp i  $B$  och att kvotgruppen  $B/A$  är isomorf med  $C$ .

**Definition A.12** (grupputvidgning). Om

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$$

är en kort exakt följd säger man att  $B$  är en *utvidgning av  $C$  med  $A$* .

Man skriver ofta att  $C$  *utvidgas av  $A$  genom  $B$* .

**Definition A.13** (invariant medelvärde). Låt  $G$  vara en grupp. Ett *invariant medelvärde* på Banach-rummet av reellvärda funktioner,  $\ell^\infty(G)$ , är en linjär funktional

$$L : \ell^\infty(G) \longrightarrow \mathbb{R}$$

som uppfyller

(i) (positivitet och normalisering)

$$L(1) = 1, \quad f \geq 0 \implies L(f) \geq 0.$$

Eller ekvivalent

$$\inf f \leq L(f) \leq \sup f \text{ för alla } f \in \ell^\infty(G).$$

(ii) (vänster-invarians)

$$L(\tau_g f) = L(f) \text{ för alla } g \in G \text{ och } f \in \ell^\infty(G),$$

$$\text{där } (\tau_g f)(x) = f(g^{-1}x).$$

*Anmärkning A.14.* Vi talar ibland om att ett invariant medelvärde är av formen vänsterinvariant eller högerinvariant. Det definieras i den uppenbara meningen. Vad gäller vår diskussion av amenabla grupper är det lätt att visa att det betyder samma sak, varför vi ibland skriver vänsterinvariant medelvärde och ibland bara invariant medelvärde. Däremot är det inte sant för topologiska grupper, detta diskuteras i Cornulier och de la Harpe [3, Kapitel 4].

**Sats A.15.** *En grupp  $G$  är amenabel om och endast om det existerar ett invariant medelvärde  $L$  på  $\ell^\infty(G)$ .*

*Bevis.* Antag att  $L$  är ett invariant medelvärde på  $\ell^\infty(G)$ . För varje mängd  $A \subseteq G$ , definiera

$$\mu(A) := L(\chi_A),$$

där  $\chi_A$  är indikatorfunktionen för  $A$ . Eftersom  $L$  är linjär, positivt och normaliserad följer att  $\mu$  är ett vänsterinvariant, ändligt additivt sannolikhetsmått på  $G$ . Alltså är  $G$  amenabel enligt Definition 2.1. Antag istället att  $G$  är amenabel och att  $\mu$  är ett vänsterinvariant, ändligt additivt sannolikhetsmått på  $G$ . Definiera då  $L(f) := \int_G f d\mu$ . Då är  $L$  en linjär, positiv och normaliserad funktional på  $\ell^\infty(G)$ , som dessutom är vänsterinvariant.  $\square$

**Proposition A.16.** *Utvidningar av uppräknliga amenabla grupper är amenabla. Det vill säga om figuren i Definition A.11 är en kort exakt följd och om  $A, B$  och  $C$  är uppräknliga och  $A$  och  $C$  är amenabla så är  $B$  amenabel.*

Följande bevis är baserat på det av Tao [20] och Juschenko [7, sida 16-17].

*Bevis utvidningar.* Vi börjar med att definiera invarianta medelvärden på  $A$  respektive  $C$  som

$$\lambda_A : \ell^\infty(A) \rightarrow \mathbb{R} \quad \lambda_C : \ell^\infty(C) \rightarrow \mathbb{R}.$$

Definiera nu funktionalen  $\lambda_B : \ell^\infty(B) \rightarrow \mathbb{R}$  med regeln  $\lambda_B(f) := \lambda_C(F)$  där  $F : C \rightarrow \mathbb{R}$  är definierad som

$$F(xA) := \lambda_A(f(xa))$$

för alla sidoklasser  $xA$ . Märk väl att val av sidoklassrepresentant är irrelevant. Det återstår att visa  $\lambda_B$  är ett invariant medelvärde.

- (i) **linjäritet**  $\lambda_B$  är uppenbarligen linjär ty  $\lambda_A, \lambda_C$  och avbildningen  $f \mapsto F$  är linjära.
- (ii) **positivitet**  $f \geq 0$  då följer det att  $F(xA) = \lambda_A(f(xa)) \geq 0$  ty  $\lambda_A$  är ett invariant medelvärde. Positivitet följer från detta.
- (iii) **normalisering** Låt  $f(x) = 1$ , för alla  $x \in B$ . Då är  $F(xA) = \lambda_A(f(xa)) = f(xa) = 1$ . Det följer att  $\lambda_B(1) = \lambda_C(F) = 1$
- (iv) **invariant** Fixera  $b \in B$  och  $f \in \ell^\infty(B)$ . Vi måste visa att

$$\lambda_B(\tau_b f) = \lambda_B(f),$$

$$\text{där } (\tau_b f)(x) = f(b^{-1}x).$$

Låt  $F: C \rightarrow \mathbb{R}$  definieras för varje sidoklass av  $A$  som

$$F(xA) = \lambda_A(f(xa)).$$

Definiera på motsvarande sätt  $\tilde{F}: C \rightarrow \mathbb{R}$  som

$$\tilde{F}(xA) = \lambda_A(\tau_b f)(xa) = \lambda_A(f(b^{-1}xa))$$

Eftersom  $b^{-1}xa = (b^{-1}x)a$ , får vi att

$$\tilde{F}(xA) = \lambda_A(f((b^{-1}x)a)) = F(b^{-1}xA) = (\tau_{\bar{b}}F)(xA),$$

där  $\bar{b} = bA \in C$ .

Slutligen, eftersom  $\lambda_C$  vänster invariant, följer

$$\lambda_B(\tau_b f) = \lambda_C(\tilde{F}) = \lambda_C(\tau_{\bar{b}}F) = \lambda_C(F) = \lambda_B(f). \quad \square$$

## B Kompletterande teori

Vi ger först de mest grundläggande definitionerna inom måtteori.

**Definition B.1.** En *sigma-algebra* över en mängd  $X$  är en samling  $\sigma$  av delmängder av  $X$  sådan att

- $X \in \sigma$  och  $\emptyset \in \sigma$
- $A \in \sigma \implies A^c \in \sigma$
- $A_n \in \sigma$  för alla  $n \in \mathbb{N} \implies \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \in \sigma$ .

**Definition B.2.** Ett *mått* på en mängd  $X$  med tillhörande sigma-algebra  $\sigma$  är en funktion  $\mu: \sigma \rightarrow [0, \infty]$  sådan att

- $\mu(\emptyset) = 0$
- Om  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  är en samling disjunkta mängder ur  $\sigma$  så är  $\mu(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n)$ .

Elementen i  $\sigma$  kallas då  $\mu$ -mätbara.

**Definition B.3.** För ett intervall  $I = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$  definiera  $|I| = b - a$ . Det *yttre Lebesgue-måttet*  $\mu^*: \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, \infty]$  på  $\mathbb{R}$  definieras genom

$$\mu^*(X) := \inf \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} |I_n| \mid (I_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ öppna intervall och } X \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} I_n \right\}.$$

Samlingen  $\sigma := \{E \subseteq \mathbb{R} \mid \text{för alla } A \subseteq \mathbb{R} \text{ gäller } \mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)\}$  bildar en sigma-algebra och begränsningen av  $\mu^*$  till  $\sigma$  betecknas  $\mu$  och kallas *Lebesgue-måttet*. Elementen i  $\sigma$  kallas Lebesgue-mätbara. Det *inre Lebesgue-måttet*  $\mu_*$  definieras som  $\mu_*(A) = \sup\{\mu(M) \mid M \subseteq A, M \text{ Lebesgue-mätbar}\}$ .

Man kan visa att det yttre Lebesgue-måttet är *subadditivt*, alltså

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu^*(A_n)$$

för alla  $A_n \subseteq \mathbb{R}$ . Tvärtom är det inre Lebesgue-måttet *superadditivt*,

$$\mu_*\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) \geq \sum_{n=0}^{\infty} \mu_*(A_n)$$

för alla  $A_n \subseteq \mathbb{R}$ . Vidare gäller generellt att en mängd är Lebesgue-mätbar om och endast om dess inre och yttre mått sammanfaller. Se [19] för vidare läsning.

Vi definierar även några mängdteoretiska begrepp som de flesta matematikstudenter på kandidatnivå inte stött på.

**Definition B.4.** En mängd  $M$  är *transitiv* om för alla  $x \in M$  gäller  $x \subseteq M$ .

Transitiva mängder är viktiga för att bygga upp modeller av axiomsystem.

Mycket inom mängdteori bygger på ordinaltal, varför vi definierar dem här.

**Definition B.5.** En mängd  $\alpha$  är ett *ordinaltal* om den är strikt välordnad av relationen  $\in$  (mängdmedlemskap) och är transitiv. Ett ordinaltal kan under denna definition ses som mängden av alla föregående ordinaltal. För ett ordinaltal  $\alpha$  definieras dess *efterföljare*  $\alpha + 1$  som  $\alpha \cup \{\alpha\}$ .

*Exempel B.6.* Definiera  $0 = \emptyset$ , genom att därefter beteckna med 1 efterföljaren till 0, med 2 efterföljaren till 1 och så vidare kan vi mängdteoretiskt konstruera de naturliga talen. Dessa blir då ordinaltal.

**Definition B.7.** Om det för ett givet ordinaltal  $\alpha$  finns ett ordinaltal  $\beta$  så att  $\alpha = \beta + 1$  kallas  $\alpha$  ett *följarordinaltal*. Om ett ordinaltal inte är ett följarordinaltal och inte är 0 kallas det ett *gränsordinaltal*.

Sist definierar vi även begreppet klass, som en generalisering av mängdbegreppet.

**Definition B.8.** En *klass* är en samling av alla mängder  $x$  som uppfyller  $\phi(x)$ , för något första ordningens påstående  $\phi$ . Notera att alla mängder är klasser men det finns klasser som inte är mängder. En klass som inte är en mängd kallas en *äkta klass*. En *klassfunktion* är en funktion som är en äkta klass.