
SKÄNKT TILL
GÖTEBORGS
STADSBIBLIOTEK
UR
C·F·WÆRNS
BOKSAMLING

FRAMSTÄLLNING

AF

ASTRONOMIN

I DESS HISTORISKA UTVECKLING OCH PÅ DESS NUVARANDE STÅNDPUNKT,

AF

HUGO GYLDÉN.

STOCKHOLM 1874.
JOS. SELIGMANNS FÖRLAG.

STOCKHOLM, 1874.
ISAAC MARCUS' BOKTRYCKERI-AKTIEBOLAG.

HERR PROFESSOR GUSTAF SVANBERG

FIL. DOKTOR, LEDAMOT AF K. VETENSKAPSAKADEMIEN SAMT AF
K. VETENSKAPSSOCIETETEN I UPSALA, RIDDARE AF
K. NORDSTJERNEORDEN SAMT OFFICER AF
ITALIENSKA S:T MAURITII- OCH
LAZARI-ORDEN M. M.

MED VÖRDNAD OCH TACKSAMHET

AF

FÖRFATTAREN.

FÖRETAL.

Ursprungligen var det författarens afsigt att i den framställning af astronomin och de astronomiska undersökningarne, som nu öfverlemnas i allmänhetens händer, hufvudsakligen framhålla utvecklingen af de astronomiska theorierna och den dermed sammanhängande omgestaltning af verldsåskådningen, hvilken sammanföll med den s. k. reformationen. Denna afdelning af det menskliga vetandets framåtskridande äger nämnligen ett vida allmännare intresse än blott och bart det, som vinnes från fackkunskapens synpunkt; ty ifrågavarande reformation af den astronomiska vetenskapen — påbegynnt af Copernicus och afslutad genom Newtons upptäckt af den allmänna gravitationslagen — öppnade blicken för verldsalltets verkliga beskaffenhet, en omständighet, som helt säkert utöfvat ett ganska väsentligt inflytande på omgestaltningen af den menskliga odlingen i öfrigt.

För att göra en sådan framställning mer allmänt tillgänglig, har föreliggande arbete blifvit beräknadt på så ringa förkunskaper, som möjligt, utan att författaren derföre ansett sig helt och hållet böra kringgå det mathematiska uttrycksättet. Endast genom att begagna detta, naturligtvis med en för den större läsarekretsen lämpad begränsning, har det varit möjligt att undvika långa omskrifningar samt understundom att förläna framställningen större skärpa. På *det att likväl förekomsten af några mathematiska formler ej må befinnas störande ens för dem, hvilka ej tillegnat sig vanan att med lätthet inse betydelsen af dylika, hafva några sidor af denna bok blifvit egnade åt en kort förklaring öfver betydelsen af de allmännast förekommande mathematiska beteckningar.*

På förläggarens önskan, vid den författaren gerna fästat afseende, har den ursprungliga planen likväl i en ej ringa grad blifvit utvidgad. Det syntes nämnligen önskvärdt att gifva det tillämnade arbetet en sådan fullständighet, att detsamma skulle återgifva en bild af den astronomiska vetenskapen i sin helhet och således i viss mon kunna begagnas såsom en populär lärobok i astronomin. En sådan synes ej heller vara öfverflödig, enär de flesta läroböcker, som varit beräknade för en större allmänhet — så utmärkta dessa än i öfrigt må vara — företrädesvis behandlat astronomin och de astronomiska resultaten endast beskrifvande. En följd häraf har äfven varit den, att man i allmänhet gjort sig något skefva föreställningar om sjelfva den astronomiska verksamheten, samt ofta tillmätt vissa frågor en vida större betydelse än de i verkligheten äga, under det att åter andra blifvit helt och hållet förbisedda, hvilka för astronomin äro af oberäknelig vigt.

Den rent deskriptiva delen af astronomin har i föreliggande arbete blifvit helt och hållet lemnad åsido, dels emedan denna del är af ett mycket underordnadt intresse för de egentligen astronomiska undersökningarna, dels emedan litteraturen häröfver ingalunda företer någon lucka.

Slutligen tillåter sig författaren omnämna, att tryckningen af detta ej synnerligen omfångsrika arbete försiggått under särdeles ogynnsamma omständigheter, samt med mer *eller mindre betydliga afbrott fortgått under närmare tvenne år. Dessa omständigheter hafva vållat, att åtskilliga tryckfel samt en och annan oegentlighet förblifvit qvarstående, för hvilka läsarens benägna öfverseende måste tagas i anspråk. Desslikes äro några figurer mindre väl lyckade, men motsvara dock sitt hufvudsakliga ändamål att förtydliga texten.*

Stockholm i December 1874.

FÖRFATTAREN.

INNEHÅLL.

Register.

Rättelser:

Sid. 51 rad 6 u. böra orden *uttryckt medelst en mathematisk formel* inskjutas efter ordet bana)

»	56	» 10 n.	står	HPP	läs	H·P·P	
»	—	» 7 n.	»	HPP'	»	H,PP'	
»	57	» 17 n.	»	hvilken	»	hvilket	
»	58	» 9 n.	»	Hiparchus	»	Hipparchus	
»	60	» 5 u.	»	»	»	»	
»	62	» 9 n.	bör	ordet *långt* inskjutas efter ordet Venus			
»	64	» 20 n.	»	» *ock*	»	»	» paralella
»	89	» 16 u.	står	andra,	läs	första	
»	93	» 23 n.	»	-360^0 t	»	$+360^0$ t	
»	94	» 15 u.	»	Sin g	»	Sin g'	
»	98	» 4 u.	»	Sin(amb)	»	Sin(anb)	
»	113	» 5 n.	»	den	»	dess	
»	122	» 3 u.	»	ändtligen	»	ändringen	
»	126	» 15 u.	»	den	»	dess	
»	141	» 14 u.	»	kropp	»	kraft	
»	144	» 7 n.	»	r	»	R	
»	160	» 16 n.	»	dylika konkaviteter	läs	underjordiska berg	
»	162	» 9 u.	»	flodvägar	läs	flodvågor	
»	169	» 5 n.	»	coh	»	och	
»	173	» 11 n.	»	ellipsen	»	ellipser	
»	179	» 20 n.	»	jorden	»	solen	
»	184	» 6 n.	»	rättelserna	»	rörelserna	
»	208	» 14 n.	»	Leverier	»	Leverrier	
»	224	» 6 u.	»	$\mathrm{Sin}(\alpha' - \alpha')$	»	$\mathrm{Sin}(\alpha' - \alpha)$	

Inledning.

Vetenskapen om lagarne för himlakropparnas rörelser har man benämnt *Astronomi.* Under denna benämning har man utan inskränkning sammanfattat alla undersökningar, som hafva afseende på utrönandet af dessa lagar: man räknar hit såväl den direkta bestämningen af en kropps skenbara bana på himmeln medelst omedelbara iakttagelser, som den theoretiska härledningen af rörelsens verkliga beskaffenhet i rymden i enlighet med bekanta mekaniska lagar. Astronomin sammanhänger således på det allra närmaste med mekaniken och utgör till sin theoretiska del ett stort problem från denna senare vetenskap, hvilket problem äfven blifvit kalladt himmelsk mekanik (*mécanique céleste*).

I främsta rummet afser astronomin visserligen himlakropparnes rörelser i rymden, men äfven undersökningarne om dessas rotationsrörelser utgöra en ej ringa afdelning i denna vetenskap. Isynnerhet spelar theorin om jordens rotationsrörelse kring sin axel en särdeles vigtig rol i astronomin, emedan företeelserna på himmeln endast kunna varseblifvas från punkter, som deltaga i denna rotationsrörelse.

På en liknande grund är äfven theorin för jordens framåtskridande rörelse af framstående betydelse. Himlakroppames skenbara rörelser på himmeln äro nämnligen icke allenast beroende af deras verkliga rörelser, utan understundom till stor del endast en återspegling af jordens. Sålunda är t. ex. solens skenbara årliga omloppsrörelse kring jorden endast föranledd af jordens verkliga rörelse kring solen.

Omedelbart kan man ur iakttagelser ej komma till insigter om himlakropparnes verkliga rörelser; ty observationerna kunna i och för sig sjelfva ej leda till annan kunskap, än den om himlakropparnas skenbara rörelser på den skenbara himmelssferen. Men i alla händelser hämtar astronomin nya data och nytt forskningsmaterial just ur dessa direkt ur observationerna härledda skenbara rörelser eller, om man så vill, ur sjelfva observationerna. Det är derföre nödvändigt att ega methoder, enligt hvilka rörelserna på himmelssferen med lätthet kunna undersökas; dessa methoder äro rent geometriska och sammanfattningen af dem benämnes *sferisk astronomi.*

Med denna gren af vetenskapen sammanhänger den praktiska astronomin eller observationskonsten på det närmaste. Genom en enda astronomisk observation bestämmes nämnligen läget af en himlakropp på det såsom en sfer ansedda himlahvalfvet; resultaten af de astronomiska observationerna bestå derföre i uppgifter om punkters lägen på en sfer eller, såsom man med ett tekniskt uttryck säger, i uppgifter om dessa punkters sferiska koordinater.

Den theoretiska astronomins föremål är dels att ur de skenbara rörelserna bestämma de verkliga, dels att medelst räkning kunna härleda himlakropparnas verkliga och skenbara lägen vid hvilken tidpunkt som helst; men i sin högsta utbildning att undersöka och bestämma de krafter, som äro orsaken till en gifven rörelse.

Problemet att bestämma himlakropparnes verkliga banor ur observationer, anstälda på den äfven i rörelse stadda jorden, utgör hufvudinnehållet af den s. k. *theoriska astronomien.* Denna uppgift är dock i sjelfva verket obestämd och derföre äfven olösbar eller rättare sagdt lösbar på mångahanda sätt, af hvilka man ej omedelbart kan utfinna det rätta. Ty om jag befinner mig i rörelse utan att känna beskaffenheten af denna och ser ett föremål, om hvilket jag vet, att det äfvenledes är i rörelse, så kan jag omöjligt afgöra huru detta föremål ändrar sitt läge i rymden, om jag än vet, huru dessa ändringar presentera sig från min rörliga ståndpunkt. Man uppgaf dock ej hoppet att finna en lösning till theoriska astronomins problem och försökte att anbana en sådan genom uppstälningen af hypotheser om den allmänna beskaffenheten af de verkliga rörelserna. De olika verldssystemen, som äro bekanta från astronomins historia, äro ingenting annat än dylika hypotheser. Det sista, som ännu kan räknas hit, är det kopernikansk-keplerska, om hvars värde vi nu kunna fälla det omdöme, att detsamma var så nära riktigt som man gerna kunde komma utan att känna rörelsens mekaniska lagar.

Numera, sedan man funnit, att himlakropparnas rörelser försiggå i enlighet med mekaniska lagar, är en hypothes af den ofvan antydda naturen helt och hållet obehöflig; man gör ej vidare några, ofta endast på filosofiska grunder byggda förutsättningar om verldssystemets geometriska beskaffenhet, utan man undersöker naturen af de krafter, som inverka på de olika kropparnes rörelser. Då ordet kraft i astronomin finner en så vidsträckt användning, så skola vi genast här försöka att tydliggöra det begrepp, som förknippas med detsamma.

En af de första principerna, som läras i mekaniken, är den att, om en kropp öfverlemnas åt sig sjelf, så bibehåller densamma sin rörelse oförändrad, d. v. s. en sådan kropp framskrider med oförändrad hastighet och i oförändrad riktning. Såsom en motsats till rörelsen behöfver här ej hvilan betraktas; ty hvila kan den rörelse anses vara, hvars storlek är noll; med detta förbehåll gäller då ofvan anförda sats för alla händelser. Man kallar nu hvarje orsak, som sträfvar att förändra riktningen eller storleken af en kropps rörelse, *kraft*, och säger då omvändt, att en kropp bibehåller sin rörelse oförändrad, om densamma ej angripes af några (yttre) krafter. Den omständigheten att en kropp vid frånvaron af (yttre) krafter bibehåller sin rörelse oförändrad, härledes visserligen af något, som äfven benämnes kraft (vis inertiæ), ehuru detta är en kraft af helt annat slag, nämnligen af alldeles passiv natur. Om således en kropp med oförändrad hastighet fortskrider i en rätlinig bana, så vet man, att densamma ej är angripen af några krafter, eller åtminstone ej af märkbara krafter; man kan om en sådan kropp på sin höjd säga, att han någongång varit angripen af krafter, men att dessa upphört att verka. En sådan rörelse synes sakna allt intresse i den moderna, på mekanisk grund uppbyggda astronomiska vetenskapen, men detta är icke i alla händelser fallet. Man kan nämnligen ur en sådan rörelse under vissa omständigheter sluta till de krafter, som kunna antagas engång hafva inverkat på den i rörelse stadda kroppen. En sådan händelse inträffar t. ex. om flera kroppar med likformiga hastigheter röra sig i räta linier, och om man om dessa kroppar kan antaga, att de engång varit angripna af samma kraft; under sådana omständigheter kan man draga vissa slutsatser rörande den ifrågavarande kraftens egenskaper.

Men visar en kropp i sin rörelse afvikelser från en rätlinig bana, eller är denna rörelse ej likformig, så bevisas dessa omständigheter omedelbart tillvaron af krafter, och det är just undersökningen om dessa krafter, som egentligen utgör astronomins sista föremål. Om åter krafterna äro bekanta, så kan man alltid enligt mekanikens lagar härleda eller beräkna en kropps rörelse, hvilken är angripen af desamma. Denna senare uppgift, som utgör föremålet för den af några s. k. *fysiska* astronomin, är visserligen ej alltid lätt att lösa, utan erfordrar tvärtom ganska ofta de mest djupgående mathematiska undersökningar, men densamma är dock i alla händelser möjlig. Detta är icke alltid fallet, då man ur en gifven rörelse vill sluta till de krafter, som inverka; redan den omständigheten, att man ej under alla förhållanden kan afgöra, huruvida man skall anse sig hafva att göra med en eller flere olika krafter, föranleder en obestämdhet, som ej kan häfvas. Under sådana omständigheter måste en undersökning uppskjutas till dess man genom fortsatta iakttagelser af den ifrågavarande kroppens rörelser vinner en säkrare bas för att afgöra det, som förut ej kunde bestämmas.

Genom Newtons upptäckt af den allmänna gravitationslagen förknippades begreppen af kraft och materie. Der materie fanns, der verkade äfven en kraft. Nu kan materie, äfven om den befinner sig i de aflägsnaste rymder, varseblifvas, och riktningen, hvarunder densamma synes från iakttagarens ståndpunkt, kan medelst astronomiska observationer bestämmas; men detta är ock under vanliga förhållanden allt. Man kan ej direkt ur observationerna afgöra med hvilken styrka en del materie inverkar på en annan, emedan man ej kan bestämma afståndet dem emellan eller den qvantitet af materie (massa), som hvardera delen innehåller. Och detta är dock nödvändigt för afgörandet af den kraft, hvarmed de inverka på hvarandra; ty enligt Newtons lag attrahera tvenne kroppar hvarandra i direkt proportion af deras massor, men i indirekt af qvadraten på deras inbördes afstånd. Om man således medelst astronomiska iakttagelser bestämmer läget af himlakroppar vid olika tider, så finner man de skenbara banorna af punkter, från hvilka attraherande krafter inverka; det är då äfven astronomins uppgift att bestämma de olika kropparnes massor, samt deras inbördes afstånd.

Vi hafva sökt antyda, hvaruti de astronomiska undersökningarne bestå eller hvad de åsyfta; huru de i sjelfva verket utföras, skola vi i det följande försöka att framställa på ett sådant sätt, att äfven den, som ej är förtrogen med mera invecklade mathematiska operationer, dock skall kunna göra sig en föreställning derom.

Vid sidan af dessa, om vi så få uttrycka oss, rent astronomiska forskningar, finner man likväl ej sällan undersökningar och spekulationer med ett helt annat syfte, ehuru de till en viss grad synas beslägtade med de förra. Vi tänka här i främsta rummet på de i nyaste tider med så stor framgång och med så fullkomnade hjelpmedel anbanade undersökningarne om himlakropparnas fysiska beskaffenhet. Visserligen äro de materiela föremålen för sådana undersökningar desamma, som vid de rent astronomiska, men icke desto mindre skilja sig de senare ganska betydligt från de förra. De stränga mathematiska methoder, som användas i astronomin, sakna ännu motsvarande vid undersökningarne om himlakropparnas fysiska beskaffenhet; den följdriktighet, hvarmed de astronomiska resultaten härledas, påträffas ej i liknande grad vid försöken att erfara något om en långt från iakttagaren befintlig kropps egenskaper, de egenskaper nämnligen, som ej antagas vara gemensamma för all materie. Den vigtigaste skilnaden emellan de rent astronomiska undersökningarne och dem, hvilka gå i den andra omnämnda riktningen, yttrar sig dock deri, att de resultat, man på de båda vägarne erhålla, i de flesta fall ej äro af någon omedelbar vigt för hvarandra. Det är t. ex. för månens rörelse fullkomligt likgiltigt, om dess yta är snöbetäckt, eller om densamma består af kala berg; å andra sidan torde kunna antagas, att hastigheten af dess rörelse kring jorden ej i någon mån vållat den brist på luft, som förmenas vara orsaken att ej något animaliskt lif der kan äga rum. Huru intressanta och lärorika således undersökningarne om himlakropparnas fysiska beskaffenhet än må vara, så är dock sammanhanget emellan dem och de rent astronomiska ej fastare, än att de förra sannolikt i en snar framtid komma att bilda en ny, för sig sjelf stående vetenskap. I afvaktan härpå kommer i det följande ej någon uppmärsamhet att vidare egnas dem.

Det har så varit i alla tider, att astronomin, eller åtminstone stjernkunskapen tillvunnit sig ett vida allmännare intresse, än blott dess egenskap af en exakt vetenskap kunnat väcka. Det allmänna föreställningssättet har i densamma velat se något helt annat än blott och bart en gren af det menskliga vetandet; har af stjernornas vetenskap fordrat någonting vida mer än endast kännedomen om deras rörelselagar. Stjernhimmelns prakt i all dess omätliga enslighet månde väl hafva väckt andra frågor till lif i det anande sinnet;

frågor, hvilka ligga utom vetenskapens gräns att besvara, men just derföre äro så mycket mer tilltalande för fantasin. Den stränga regelbundenhet, hvilken uppenbarar sig i de himmelska företeelsernas förlopp, i hvilket förhållande står denna till guddomens eviga vilja? Kan densamma väl endast betraktas såsom en sinnebild af denna viljas oföränderlighet, eller är härmed något annat för menniskan ofattligt ändamål förknippadt, från hvars efterforskning hon dock har så svårt att lösslita sig? Dylika frågor, understödda af den högstämda känsla af andakt och frid, som stjernhimmelns betraktande uppväcker, föranledde ett religiöst element vid sidan af den rent astronomiska forskningen, hvilket understundom utöfvat ett högst väsendtligt inflytande på denna vetenskap, ja till och med på de första astronomiska theorierna.

Kulturhistorien visar oss ock, huruledes i äldre tider en theogonisk-filosofisk verldsåskådning hvälfde sig kring astronomiska betraktelser och sammanhängde med dem. Derföre ansågs äfven astronomin af åtskilliga den gamla verldens folk vara en helig vetenskap och deras prester omhänderhade äfven utvecklingen af densamma. Antagligen hafva af sådana folk de gamla Babylonierna och Egyptierna, eller rättare deras prester hunnit ganska långt i den egentliga astronomin, ehuru spåren af deras vetenskapliga verksamhet för det mesta försvunnit i forntidens dunkel.

Den poetiska läran om sferernas harmoni, — utan tvifvel till sitt ursprung en dotter af en ideel uppfattning om naturen — innebar tillika grunddragen af en astronomisk theori, ehuru hon dertill ingalunda visade sig lämplig, då man fästade afseende på de astronomiska företeelserna, d. v. s. på beskaffenheten af himlakropparnas skenbara rörelser. Tvertom fordrade dessa, om man ville att theorin skulle motsvara det, hvad de omedelbara iakttagelserna otvifvelaktigt lade i dagen, sådana modifikationer af den ursprungliga föreställningen om ett system af kristallsferer, hvilka genom sin rotation föranledde planeternas rörelser på himlahvalfvet, att ett sådant icke kunde anses möjligt i naturen eller bestående i verkligheten. Ej heller är det sannolikt, att den gamla tidens mera framstående astronomer tillagt läran om himmelns architektonik någon verklig betydelse, ehuru de utbildat sina theorier, såsom om denna lära vore sann; deras bemödanden gingo endast ut på att *geometriskt* förklara planeternas skenbart invecklade lopp, ej att afgöra huruvida denna förklaring var fysiskt möjlig eller ej.

Under medeltiden utbildades en annan missriktning af astronomin, nämnligen den så mycket omtalade och förr i så högt anseende stående astrologin, ett arf från Babylon eller än äldre tider. Egentligen var astrologin ej någon vetenskapsgren, utan på sin höjd en vetenskaplig konst. Denna konst hade till ändamål att ur planeternas och fixstjernornas ställning till hvarandra och till horizonten i ett visst ögonblick — vanligen någon persons födelsetimma — se och förutsäga dennes tillkommande lefnadsöden. Medeltidens filosofiska åskådningssätt gynnade astrologernas oväsende i hög grad. Man antog, hufvudsakligen efter den grekiske filosofen Aristoteles från Stagira, att planeterna voro väsenden begåfvade med en subjektiv natur, eller att de åtminstone regerades af sådana väsenden. Dessa utöfvade åter, enligt det då allmänna föreställningssättet, ett godtyckligt inflytande på menniskornas öden.

Man ser att astronomin och astrologin aldrig borde kunna bestå samtidigt; ty astronomin förutsätter lagar, enligt hvilka himlakropparna röra sig, och lärer huru deras lägen på himmeln vid olika tider skola beräknas: astrologin åter, att sådana lagar ej finnas, utan att företeelserna på himmeln voro beroende af öfversinliga väsendens nycker. Likväl bortsåg man ända in i nya tiden från denna stridighet, och gick ända derhän, att man enligt astronomiska regler beräknade nativiteten eller himmelns utseende vid födelsetimmen i sådana fall, då detsamma ej var kändt genom direkta iakttagelser. Ett i historiskt hänseende märkvärdigt dokument af detta slag qvarfinnes af Kepler och är beräknadt för Wallenstein.

Astrologins utöfvande uteslöt således icke astronomiska undersökningar, utan gynnade tvertom sådana, åtminstone i en viss grad. Och på samma sätt hafva andra missriktningar, som tid efter annan gjort sig gällande i uppfattningen af de kunskaper, till hvilka studium af företeelserna på himmeln kunde leda, väl för någon tid kunnat tillbakahålla den astronomiska vetenskapens utveckling, men dock ej afklippa densamma. Sedan den tid, från hvilken historien först begynner att förtälja menniskoslägtets öden, finna vi spår af en astronomisk verksamhet, visserligen ringa och knappt förtjenande namn af vetenskap, men dock i grunden åsyftande samma mål, som äfven nu utgör astronomins kärna, nämnligen kännedomen om lagarne för himlakropparnes rörelser.

Men, om således äfven astronomin kan betraktas såsom den äldsta bland vetenskaper, om än hennes anor kunna sägas uppgå ända till tiden före den tillförlitliga historiska forskningen, så är detta likväl endast så till vida riktigt, som denna vetenskaps egentliga föremål förblifvit detsamma. Deremot har hennes behandling under tidernas lopp undergått ganska väsendtliga förändringar, och hon sjelf har med den stigande kulturen efterhand trädt i alldeles nya och förut oanade utvecklingsskeden. Methoderna, enligt hvilka man nu, medelst vetenskaplig forskning finner sanningen, hafva blifvit helt olika dem, man förut brukade, möjligheten att förmedelst iakttagelser förvärfva data för astronomiska undersökningar ojemförligt större; och framför allt, verldsåskådningen är vorden en helt annan, än på den tid, då filosofen från Stagira beskref naturen och förklarade företeelserna i densamma.

Emellertid gifves det ingen utvecklingsperiod i astronomins historia, deri denna vetenskap väsentligen hade utbildat sig, utan att fröet härtill blifvit lagdt i en föregående, eller utan att vara en nödvändig följd af föregående arbeten. De idéer och åsigter, hvilka numera äro allmänt antagna, så mycket de än strida mot dem, hvilka före

Newtons tid voro rådande, äro dock grundade på arbeten, hvilka före denna store tänkares tid blifvit afslutade. Ja, utan att i ringaste mån förringa hans förtjenst, kan man säga om den vigtigaste astronomiska upptäckt, som någonsin blifvit gjord, nämnligen den af den allmänna gravitationslagen, att densamma vid Newtons tid redan var att betrakta såsom en mogen frukt af föregående tiders forskningar, hvilken ej länge hade kunnat undgå vetenskapsmännens uppmärksamhet.

Om vi ock nu kunna anse oss stå på en mycket hög vetenskaplig ståndpunkt, jemförd med de gamle astronomernas, så böra vi dock ingalunda underskatta betydelsen af det arbete, som dessa undangjort för oss. Vi böra så mycket mindre låta förleda oss härtill, som det ingalunda är någon lätt sak för oss att bedöma längden af den väg, dessa banat, eller storleken af de svårigheter, som dervid blifvit undanröjda och hvilka måste uppskattas i förhållande till det dåvarande kulturtillståndet öfverhufvud. För oss, då vi veta att jorden rullar kring en axel, hvilken under kortare tider kan anses bibehålla sin riktning oförändrad i verldsrymden, är det ej svårt att inse, huruledes himlakropparnas skenbara dagliga rörelser, hvilka just äro en följd af denna rullning, måste gestalta sig alldeles på samma sätt, som om himlakropparne voro fästade på en sfer, hvilken svängde sig kring jordaxeln. Men då denna kunskap om jordens rullning ännu ej var tillkämpad, huru svårt var det ej under sådana omständigheter att upptäcka den geometriska lagen för himlakropparnas dagliga rörelser, och måste icke just denna upptäckt anses af allra största betydelse för astronomin? Före denna upptäckt då man ej ägde ens den ringaste föreställning om himlakropparnas verkliga storlek eller afstånd gafs det sannerligen ingen anledning att antaga jordens rotation; det är tvertom just denna upptäckt vi hafva att tacka för det vi slutligen blifvit ledda till insigt om jordens rullning.

Ej mindre vigtig är upptäckten om solens årliga rörelse bland stjernorna, hvaraf årets längd beror. Man kan säga, att med denna upptäckt astronomin tager sin början såsom vetenskap; ty för att göra denna upptäckt voro icke allenast verkliga iakttagelser nödvändiga, utan äfven ett vetenskapligt tankearbete, hvarigenom dessa kombinerades med hvarandra och sålunda ledde till nämnde upptäckt. Taga vi åter det högst enkla sätt i betraktande, hvarmed de astronomiska iakttagelserna ursprungligen anstäldes, samt att solens skenbara rörelse företer sig sammansatt af den dagliga och den årliga, så inse vi äfven huruledes de svårigheter voro hvarken få eller ringa, hvilka måste öfvervinnas för upptäckten af solens årliga rörelse. Så vidt vi veta, anstäldes de första astronomiska iakttagelserna derigenom att man observerade himlakropparnas s. k. heliakiska uppgång, d. ä. den tid, då en sådan först blef synlig i morgonskymningen. Genom sådana iakttagelser, fortsatta under sannolikt ett stort antal år, fann man att tiden, som förflöt emellan tvenne på hvarandra följande heliakiska uppgångar af samma fixstjerna var lika stor, hvilken fixstjerna man än hade utvalt för sina iakttagelser.

Sålunda bestämdes årets längd. Sådana bestämningar, ofta utförda med en förvånande grad af noggrannhet, lemna oss vitnesbörd om ett ganska högt kulturtillstånd från tider och hos folkslag, på hvilka historien endast ytterst sparsamt kastar sina strålar.

Att de gamla astronomerna förklarade himlakropparnas dagliga rörelser medelst antagandet af en kristallsfers faktiska tillvaro, hvilken under loppet af ett dygn svängde sig kring sin axel, bör ej förundra oss. Ett sådant antagande låg närmast till hands och motsades icke af de högst ofullständiga fysikaliska föreställningarne om naturen, hvilka herskade i äldre tider. Det motsatta antagandet af jordens rotation var således ej nödvändigt, utan kunde måhända hellre betecknas såsom förhastadt under tider, då man svårligen hade kunnat anföra tillräckliga skäl för detsamma. Detta oaktadt saknas ej antydningar om spekulationer i sådan riktning. Pythagoreen Philolaos antog en viss rörelse hos jorden, hvilken af någon nyare forskare i astronomins historia blifvit ansedd identisk med jordens rotation kring hennes axel. Likväl är detta ej alldeles riktigt. Philolaos' spekulationer synas ej endast hafva varit grundade på iakttagelser utan äfven till en viss grad på en alltför liflig fantasi. Han föreställde sig en annan jord än den af menniskoslägtet bebodda, hvilken dock aldrig kunde ses, enär den bortskymdes af marken. Denna imaginerade jord benämnde han motjord (*ἀντιχθων*) och antog att jorden och motjorden rörde sig kring en centraleld (*Ἑστια*). Äfven denna centraleld förblef osynlig för menniskorna, men återskenet föranledde solens glans. Medeltidens filologi hade ej fullständigt utredt Philolai satser, hvarföre dessa uppfattades i en ej alldeles riktig mening. Sålunda ansåg man Philolaos med Hestia hafva menat solen och Kopernikus vidhåller äfven detta antagande, hvarför han äfven anser sig endast upplifva en gammal åsigt, då han proklamerar jordens rörelse kring solen. Vi veta äfven om andra grekiska astronomer, att de ej uteslöto möjligheten af jordens rörelse, men någon egentlig lära härom synes ej hafva uppstått. Såsom redan blifvit nämndt, hade äfven en sådan varit förhastad, emedan densamma endast kunde bero på en divination, innan jordens form och storlek samt himlakropparnas afstånd voro bekanta, åtminstone i någon mån i enlighet med rätta förhållandet.

Ur det föregående torde framgå, att astronomin redan länge före den moderna vetenskapens tidsskede varit föremål för en vetenskaplig behandling och att de gamla astronomerna i densamma vunnit insigter, hvilka legat till grund för och möjliggjort hennes senare utveckling. Det är derföre ett ej alldeles obetydligt kunskapsmått, som är gemensamt för den gamla astronomin och astronomin i våra dagar. Ehuru det nu visserligen icke är meningen att i den följande framställningen afhandla astronomins historia, så har dock det, som sedan äldre tider bibehållit sig i astronomin, blifvit framstäldt från en historisk synpunkt. Det vill synas som om ett sådant framställningssätt bäst vore egnadt att framhålla astronomins ståndpunkt såsom vetenskap och såsom en produkt af menniskans kultur och tankearbete.

---

1 Kapitlet.

Historisk öfverblick ända till Newtons upptäckt af den allmänna gravitationslagen.

§ 1. Den äldsta observationskonsten.

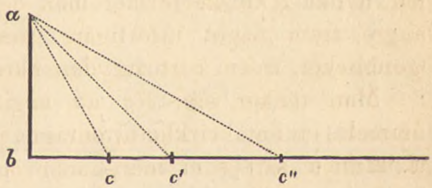
Det närmaste ändamålet med de astronomiska observationerna är att bestämma en himlakropps skenbara läge på himlahvalfvet i ett visst ögonblick. Huruledes sådana bestämningar nu utföras, huru man angifver sådana lägen och hvilka tekniska termer man dervid begagnar, skola vi längre fram något utförligare komma att beskrifva. För ögonblicket är en kort antydan härom tillfyllest.

Man tänker sig, för att angifva en stjernas läge på himmeln, ett antal cirklar uppdragna på himlahvalfvet, ungefär på samma sätt som meridianer och parallelcirklar tänkas uppdragna på jordklotet. Om en sådan cirkels medelpunkt sammanfaller med sjelfva sferens, så benämnes hon storcirkel. Den cirkel, som horisonten synes utskära på himlahvalfvet, är en sådan storcirkel och de mot denna vinkelräta storcirklar kallar man höjdcirklar. En stjernas afstånd från horisonten, räknadt på en höjdcirkel, benämnes höjd, och utgjorde ett vigtigt föremål för de äldre astronomiska bestämningarne.

Iakttagelserna af himlakropparnas heliakiska uppgångar voro på sätt och vis ett slag af höjdobservationer. Man observerade vid dessa uppgångar de tider, då stjernan först syntes vid horisonten i morgongryningen före solens uppgång, d. v. s. den tidpunkt då stjernans höjd var 0^{0} på samma gång som hennes afstånd från solen var nog stort att hon kunde varseblifvas. Efter den heliakiska uppgången blef detta afstånd allt större och större, d. v. s. stjernan syntes allt tidigare och tidigare på morgonen. Omsider uppnådde afståndet emellan solen och stjernan ett maximum (det möjligast största värde) och då syntes stjernan i meridian (eller i söder, om betraktaren befann sig på norra jordhalfvan) vid midnatt. Härefter begynte stjernans afstånd från solen åter att minskas, då stjernan slutligen syntes vid den vestra horisonten efter solens nedgång och der försvinner i solstrålarna.

Ett annat högst enkelt slag af höjdiakttagelser, hvilket dock vanligen endast användes för att bestämma solens höjd, då denna himlakropp befann sig i meridian, består i att mäta skuggan, som ett upprätt stående föremål, hvars liniera höjd var bekant, kastade. Uppställdes en stång ab, hvars längd blifvit uppmätt, så bestämdes solens höjd af skuggans längd såsom följande exempel utvisa. Var skuggans längd bc jemt hälften af linien ac, så var solens höjd 60°; om skuggans längd var lika med stångens, så var solens höjd 45°, om slutligen skuggan bc″ föll så, att linien ac″ var dubbelt så lång som stången, så var solens höjd 30°. Kastade stången alls ingen skugga, så var solen i den punkt, som sedermera benämndes zenith, d. ä. dess höjd var 90°. Man har äfven exempel på att sådana höjder af 90° helt enkelt derigenom uppmättes att man iakttog, det bottnen af en djup brunn belystes af solstrålarna.

Fig. 1.

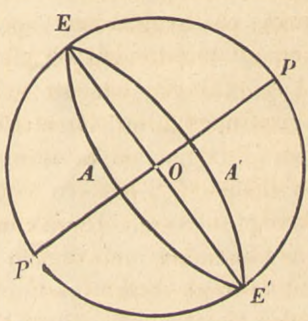


För att med någon större beqvämlighet vid alla tider kunna uppmäta skuggan, inrättade man ett instrument, som benämndes *Gnomon;* för att derjemte kunna finna höjden, beräknades en tabell, som omedelbart angaf höjden, då förhållandet emellan skuggans och stångens längder var gifvet.

Upprättandet af en sådan tabell erfordrar någon kännedom af den del af mathematiken, som benämnes trigonometri; de första satserna häraf voro dock ej obekanta för de gamla astronomerna. Sjelfva instrumentet bestod hufvudsakligen i den omnämnda stången eller öfverhufvud i ett upphöjdt föremål, hvars längd en gång för alla blifvit uppmätt och hvilken uppställdes vertikalt på ett horisontelt golf, der man lätt medelst en graderad lineal kunde uppmäta skuggans längd. Man använde vanligen höga byggnader till gnomon och iakttog, i stället för skuggans längd, afståndet af en i skuggan befintlig solbelyst fläck, hvilken bildades derigenom att man på byggnadens spets hade anbringat en plåt, i hvilken ett mindre hål blifvit utborradt.

I inledningen har det redan blifvit omnämndt, att man från urminnes tider föreställt sig himlakropparnas dagliga rörelser försiggå på samma sätt, som om de voro fästade på en ihålig sfer, hvilken under loppet af ett dygn svängde sig kring en axel. De tvenne punkter, der axeln träffade sferens yta, måste naturligtvis förblifva i hvila, men ju längre en himlakropp befann sig från dessa punkter, hvilka benämndes poler, desto större måste äfven hans rörelse blifva. Tänker man sig cirklar dragna på sferens yta genom de båda polerna, så sammanfalla deras medelpunkter med sjelfva sferens; de äro följaktligen storcirklar. Dessa cirklar blifva äfven tydligen delade i tvenne lika stora hälfter af ett plan, som genom sferens medelpunkt lägges vinkelrätt mot den axel, kring hvilken sferen svänger sig; ty en rät linie, som drages genom en cirkels medelpunkt, skär alltid cirkeln i tvenne lika stora delar och hvarje genom polerna dragen cirkel skäres af en sådan rät linie, hvilken sammanfaller med det omnämnda planet. Men efter planet är vinkelrätt mot svängningsaxeln, så måste äfven hvarje med planet sammanfallande rät linie vara det. Till hvarje genom polerna dragen cirkel hör således ett system af tvenne hvarandra korsande räta linier, nämnligen sferens axel och linien i planet, hvilka hvardera skära cirkeln i tvenne lika stora delar, emedan de hvardera gå genom cirkelns medelpunkt. Emedan dessutom dessa räta linier med hvarandra bilda fyra lika stora vinklar i korsningspunkten eller cirkelns medelpunkt och bågarne på cirkeln just uppmätas af dessa vinklar, så inses, att äfven cirkelns omkrets i genomskärningspunkterna med de tvenne räta linierna blifvit delad i fyra lika stora bågar. Den bifogade figuren (fig. 2) tjenar till att förtydliga detta. Densamma utvisar en af de omtalade storcirklarna, hvilken faller i papperets plan; O är sferens medelpunkt och PP′ sferens svängningsaxel. Tänkes nu ett plan lagdt genom O vinkelrätt mot axeln PP′, så är detsamma äfven vinkelrätt mot papperets plan och vi kunna i figuren ej på annat sätt försinliga detsamma än medelst den perspektiviskt antydda cirkeln EA E′A′, som planet utskär på sferens yta. Räta linien EE′, som sammanfaller med ifrågavarande plan, skär nu tydligen cirkeln EPE P′ sålunda att bågarne EP, PE′, E′P′ och P′E alla blifva lika stora med hvarandra. På samma sätt inses äfven, att hvarje annan genom polerna gående storcirkel skäres midt itu af tvenne punkter, som på cirkeln EA E′A′ ligga diametralt emot hvarandra. Hvarje sådan halfomkrets skäres tydligen i polen midt itu, så att vinkelafståndet från hvarje punkt på sistnämnda cirkel till hvardera polen påtagligen är detsamma eller 90°. Denna emot svängningsaxeln vinkelräta cirkel benämnes *eqvator* eller rättare det plan, hvars läge bestämmes af densamma. Anledningen till denna benämning gifver den omständigheten att, då solen är eqvatorn, så äro dag och natt öfverallt på jorden lika långa.

Fig. 2.



Genom att iakttaga stjernors heliakiska uppgångar och genom att uppmäta solens middagshöjder vid olika årstider fann man, att solen rör sig på en storcirkel, hvilken icke sammanfaller med eqvatorn, utan med densamma bildar en viss vinkel. Man märkte nämnligen, att solen vid sommarsolståndet var lika mycket aflägsen från eqvatorn åt norra polen, som hon vid vintersolståndet var åt den södra. Sedan insigten härom engång var vunnen, förefanns ingen synnerlig svårighet att medelst uppmätningar af solhöjder bestämma såväl eqvatorns höjd öfver horisonten, som den lutning, hvilken solbanan eller ekliptikan bildar med eqvatorn. Uppmätes nämnligen solens middagshöjder på en gifven ort vid sommar- och vid vintersolståndet, så ligger eqvatorns höjd tydligen midt emellan, d. v. s. man erhåller eqvatorns höjd genom att bilda det arithmetiska medeltalet af solens middagshöjder vid de båda solstånden. Ekliptikans lutning mot eqvatorn är åter tydligen densamma, som halfva skilnaden emellan dessa båda höjder.

Det gällde emellertid ej allenast att iakttaga solen, utan äfven andra himlakroppar. Månens höjder kunde man väl ännu bestämma med gnomon, men de öfriga himlakropparna voro ej nog starkt lysande att deras skugga hade kunnat blifva uppmätt. Man uttänkte derföre åtskilliga andra astronomiska instrument eller mätverktyg, af hvilka vi skola omnämna Astrolabium och Armillarsferen.

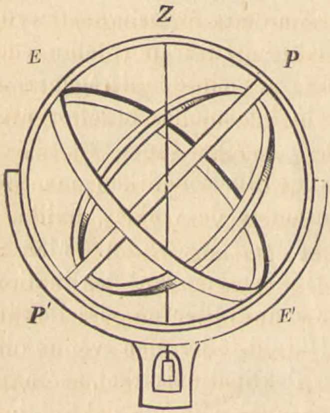
Astrolabium är ett instrument, hvars bestämning är att användas vid uppmätningen af himlakroppars höjder, och hvilket dervid i många afseenden är vida beqvämare än gnomon. Detta instrument består hufvudsakligen af en graderad ring, i hvars medelpunkt en viserlineal är fästad sålunda, att densamma endast kan vridas i den graderade ringens plan. Då instrumentet upphänges på en vidfogad ögla och linealen ställes horizontelt, utvisar ett märke på linealen (index) 0^0 på graderingen. Om vidare linealen riktas emot något föremål och instrumentet upphänges, så utvisar linealens index på graderingen omedelbart föremålets höjd i grader. Astrolabium var i anseende till beqvämligheten af dess begagnande mycket i bruk hos sjöfarande och utträngdes först i det sistförflutna seklet af den visserligen vida öfverlägsna *Hadleyska sextanten.*

Armillarsferen består af ett system af graderade ringar, af hvilka en kan vridas kring en diameter, den man ställer parallel med verldsaxeln, då dess ena ända motsvarar norra, och dess andra ända den södra verldspolen. På den vridbara cirkeln, som representerar en genom polerna gående storcirkel, kunde man, ungefär på samma sätt som med ett astrolabium uppmäta himlakropparnas höjd, dock icke öfver horisonten utan öfver eqvatorn. Höjden öfver eqvatorn benämnes *deklination*, och denna säges vara nordlig eller sydlig allt eftersom himlakroppen är norr eller söder om eqvatorn; den genom polerna och den ifrågavarande himlakroppen gående storcirkeln benämndes härefter äfven deklinationscirkel.

Förutom himlakropparnas deklinationer kan man förmedelst armillarsferen äfven uppmäta de vinklar, hvilka de olika deklinationscirklarna bilda med hvarandra. Man angifver oftast dock ej dessa vinklar emellan deklinationscirklar, hvilka som helst, utan man väljer en viss deklinationscirkel till utgångspunkt. Härvid följer man tvenne olika system. I det ena väljes den deklinationscirkel, som går genom ortens zenith, till utgångspunkt; denna deklinationscirkel är ingenting annat än ortens meridian, och de vinklar, som de öfriga deklinationscirklarne bilda med denna, benämnas *timvinklar.* Detta system är således beroende af iakttagarens ståndpunkt på jordytan; och en himlakropps timvinkel i ett gifvet ögonblick är olika vid olika geografiska punkter. Det andra systemet grundar sig på den deklinationscirkel, som går genom solen, då denna himlakropp går genom eqvatorn från södra halfklotet till det norra, eller genom den s. k. vårdagjemningspunkten. Vinklarna, som räknas från denna deklinationscirkel, benämnas *rektascensioner*, och timvinkeln för den genom vårdagjemningspunkten gående deklinationscirkeln benämnes *stjerntid.*

Den rörliga cirkel, hvilken vi redan omtalat, såsom hörande till armillasferen, är innesluten inom en annan, hvilken motsvarar eqvatorn; eqvatorcirkeln är slutligen innesluten inom en tredje, hvilken motsvarar meridianen och vid iakttagelser så noggrannt som möjligt inställes i denna. Instrumentets axel (motsvarande verldsaxeln) är fästad i dess meridiancirkel, så att instrumentets axel alltid är parallel med verldsaxeln, så snart instrumentets meridian sammanfaller med ortens. Instrumentets eqvatorcirkel kan äfven vridas, så att nollpunkten för dess gradering antingen motsvarar meridianen eller vårdagjemningspunkten, alltefter som man ville bestämma timvinklar eller rektascensioner. Hela instrumentets utseende angifves i fig. 3, hvarvid någon vidare förklaring ej torde vara nödig, då bokstäfverna hafva samma betydelse i hänseende till instrumentet som vid de föregående figurerna i anseende till himmeln. Man hade äfven andra slag af armillarsferer, hvilkas beskrifning här dock kan förbigås.

Fig. 3.



Emedan vårdagjemningspunkten blott är angifven medelst en definition, men ingalunda genom någon omedelbart bestämbar punkt, så kan icke heller armillarsferens eqvatorcirkel omedelbart riktas mot densamma. Men man vinner alldeles samma ändamål om man riktar denna cirkel mot en stjerna, hvars rektascension redan är bekant, ty om man med armillarsferen bestämmer rektascensionsdifferenser i stället för sjelfva rektascensionerna, så finner man dock uppenbarligen dessa senare omedelbart, endast man känner rektascensionen för en enda stjerna.

Det har redan blifvit sagdt, att rektascensionerna räknas från den punkt, der solen vid vårdagjemningen passerar eqvatorn. Solens rektascension är således 0° på samma gång som hennes deklination är 0°, i det denna öfvergår från sydlig till nordlig. Härpå grundar sig omedelbart det förfaringssätt, enligt hvilket himlakropparnas rektascensioner böra bestämmas. Man har nämnligen ej att göra annat, än att uppmäta rektascensionsskilnaden emellan solen och en stjerna i det ögonblick, då solens deklination öfvergår från sydlig till nordlig; den funna rektascensionsskilnaden är då detsamma som den med solen jemförda himlakroppens rektascension. Men lika enkelt som detta förfaringssätt synes i theoretiskt hänseende, lika svårt är det att tillämpa detsamma i praktiken. Den första svårighet, som mötte de gamle astronomerna var den, att de ej omedelbart kunde jemföra någon stjerna med solen, emedan ingen stjerna var synlig, då solen var uppe. De utförde derföre denna jemförelse förmedelst månen, då denna var synlig samtidigt med solen, hvilket såsom bekant ofta nog inträffar. Sedan solen var nedgången jemfördes månen med en stjerna, hvarigenom dennas rektascension slutligen framgick. Emellertid förorsakades härigenom ganska betydliga fel, ty månens rörelse under mellantiden kunde de gamle astronomerna ej med en tillräcklig noggrannhet beräkna, emedan dertill hade erfordrats kännedom af månens afstånd från jordens medelpunkt och af jordens dimensioner, tvenne saker, hvaröfver i den gamla tiden ännu mycken osäkerhet sväfvade.

§ 2. Astronomin hos de gamle kineserna, chaldeerna, egypterna och inderna.

Det äldsta pålitliga minnesmärke af astronomisk verksamhet har blifvit upptäckt af jesuiten *Gaubil* i Kina. Enligt ett gammalt manuskript förmäler denne att kejsaren *Tschu-Kong* år 1100 f. Kr. hade observerat solstånden medelst ett gnomon och dervid funnit ekliptikans lutning mot eqvatorn vara 23^0 $52'$*. Emellertid saknar man ej antydningar om ännu äldre iakttagelser. Sålunda omförmäles en solförmörkelse, hvilken enligt nyare beräkningar inträffade år 2128 f. Kr., och en komet, hvilken år 2296 under kejsar Jaos regering skall hafva visat sig. Kineserna synas redan vid dessa tider hafva bildat sig regler för förutberäkningen af sol- och månförmörkelser, hvilka spelade en vigtig rol vid deras religionskult: åtminstone sägas tvenne astronomer (Hi och Ho) hafva mistat lifvet emedan de icke riktigt förutsagt ofvannämnde förmörkelse. Deras regler berodde dock visst icke på någon astronomisk theori, eller på kännedomen af solens och månens verkliga rörelser och huru dessa rörelser presenterade sig från någon viss punkt på jordytan, utan voro endast härledda på rent empirisk väg. Emellertid måste underrättelsen härom emottagas med största försigtighet; den betviflas äfven af mången. Äfven säges årets längd under kejsar Jao blifvit bestämd till $365\frac{1}{4}$ dag, således ganska nära det sanna förhållandet.

Hos Chaldeerna** eller Babylonierna stod astronomin högt i anseende och det synes ej kunna betviflas att dessa hunnit ganska långt i himmelskunskapen. Enligt Aristoteles och Callisthenes hafva babyloniska prester meddelat Alexander den store, sedan denne eröfrat Babylon, att deras äldsta iakttagelser sträcka sig till året 1903 före deras tid, således till år 2230 f. Kr. f. Om Chaldeerna vet man med större säkerhet att de kunde förutsäga förmörkelser enligt empiriska regler. De synas nämnligen hafva märkt att förmörkelserna åter inträffa i nästan samma storlek efter en period af 18 år ($6585\frac{1}{3}$ dag eller 823 lunationer). På denna

---

* Man har sig nu bekant, att denna lutning ej är oföränderlig utan underkastad en liten förändring under årens lopp. För närvarande aftager denna lutning med 48″ under hvarje sekel. Då nu ekliptikans lutning för närvarande är 23^0 $27'$, så inses, att det af Gaubil meddelade kinesiska resultatet för denna lutning är funnet temligen nära sanningen.

** Enligt Grekiska historieskrifvare utgjorde Chaldeerna en särskild kast hos Babylonierna, hvilken motsvarade prestkasten i Egypten.

cykel, hvilken benämndes *Saros*, hafva deras regler antagligen grundat sig.

Chaldeernas kännedom af cykeln Saros bevisar, att deras tideräkning var bygd på eller åtminstone kunde vara bygd på sanningen ganska nära kommande värden af solens och månens omloppstider. Då tideräkningen eller kronologien var ett af de vigtigaste ändamål för de gamla folkens astronomiska forskningar, så torde det här vara på sin plats att i korthet framställa grunderna för densamma, åtminstone så mycket deraf, som sammanhänger med Chaldeernas astronomi.

Det i naturen närmast till hands liggande måttet för tiden utgör ett dygn, eller den tid, som förflyter emellan tvenne på hvarandra följande solkulminationer, d. ä. solens gång genom meridianen. Man kunde ganska lätt iakttaga kulminationsögonblicken, ty härtill erfordrades endast att lägga märke till när skuggan, som kastades af ett gnomon, var kortast; iakttog man äfven riktningen, i hvilken denna kortaste skugga kastades, så hade man äfven en för alla gånger bestämt meridianens riktning och behöfde derföre i framtiden endast observera när skuggan föll i denna riktning för att hafva kulminationstiden eller, såsom det äfven kallas, middagsmomentet.

Emellertid blef det besvärligt att räkna tiden i dagar; derföre nämnligen, att dagens korthet föranledde ganska stora tal redan för att beteckna ganska måttliga tidsperioder. Man såg sig af denna orsak om efter längre tidsenheter och fann sådana i månens och solens omloppstider. Det kom nu an på att afgöra huruvida dessa tidsperioder voro oföränderliga, d. v. s. om det ena solomloppet innehöll lika många dagar som det andra, och på samma sätt, om det ena månomloppet innehöll lika många dagar som det andra. För detta afgörande erfordrades visserligen först och främst kännedomen om, huruvida jordens rullning eller, enligt de gamles sätt att se, dygnets längd ständigt var densamma, dock synes det ej såsom om de gamla astronomerna sysselsatt sig med några undersökningar häröfver, eller att sådana ens för dem varit möjliga annat än på indirekt väg. För resten var föreställningen om de himmelska rörelsernas likformighet och oföränderlighet så djupt rotad i det gamla verldsåskådningssättet att egentliga undersökningar häröfver syntes för de gamla astronomerna obehöfliga. Deras undersökningar om årets och månadens längd i dygn innebära dock äfven indirekt en undersökning om dessas oföränderlighet, hvilken undersökning enligt våra begrepp bör föregå den förstnämnda.

Med anledning af frågan om solens och månens omloppstider skola vi belysa huru dessa angifvas och hänföras, dels till fixa dels till rörliga punkter. Om man tänker sig en i ekliptikan fullkomligt orörlig punkt, så kallas den mellantid, som förflyter emellan tvenne på hvarandra följande koincidenser eller sammanfallanden af solen och denna punkt, solens *sideriska omloppstid* eller ett *sideriskt år*. Vårdagjemningspunkten är icke orörlig i ekliptikan, utan rörer sig i densamma ungefär 50 sekunder årligen, hvilken rörelse benämnes *precession*.

Emedan vidare denna vårdagjemningspunktens rörelse är riktad emot solens, så är det tydligt att solen behöfver något mindre tid än det sideriska året att genomlöpa sin bana från vårdagjemningspunktens ögonblickliga läge till samma punkt följande år. Denna period kallas det *tropiska året*. För jemnförelsens skull meddelas här först de i senaste tider faststälda värden för de olika åren. Dessa äro:

Sideriska året = 365,256358 = 365 dagar 6 timmar 9 minuter 9,324 sekunder.

Tropiska året = 365,242201 = 365 dagar 5 timmar 48 minuter 46,166 sekunder.

På samma sätt talar man äfven om sideriska och tropiska månomlopp. Såsom vid solomloppen betecknar ett sideriskt månomlopp månens verkliga omloppstid, det tropiska månomloppet åter den med hänseende till den rörliga vårdagjemningspunkten afkortade verkliga omloppstiden. Enligt nyare bestämningar är månens

sideriska omloppstid 27 dagar 7 tim. 43 min. 11,5 sek.
tropiska » 27 » 7 » 43 » 4,7 »

Dessutom urskiljer man månens *synodiska*, *anomalistiska* och *drakonitiska* omloppstider, hvilka benämningar äfven här lämpligast skola förklaras.

Det har redan blifvit omnämndt, att solen rör sig i ett plan, som går genom jordens medelpunkt, och att detta plan på himlasferen utskär en storcirkel. Likaledes rör sig månen i ett genom jordens medelpunkt gående plan, hvilket äfven på himlasferen utskär en storcirkel. Månbanans plan sammanfaller dock icke fullkomligt med solbanans (jordbanans) eller ekliptikan, utan bildar med detta sednare en vinkel af 5°. Då tvenne plan bilda en vinkel med hvarandra, så skära de hvarandra längs en rät linie, hvilken i astronomin vanligen, då det ena planet är ekliptikan, benämnes *nodlinie*. De punkter åter, i hvilka de motsvarande storcirklarna skära hvarandra, benämnas *noder*. Afståndet från vårdagjemningspunkten till någon af noderna, naturligtvis räknadt på ekliptikan, benämnes den ifrågavarande nodens längd eller longitud. Månbanans nodlinie, och således äfven noder, äro ej till sitt läge oföränderliga i rymden, utan tvertom underkastade en temligen hastig rörelse; dessa noder fullända nämnligen ett helt omlopp i ekliptikan på $18\frac{2}{3}$ år.

Månens verkliga bana är ej en cirkel, hvars medelpunkt sammanfölle med jordens, utan en ellips, i hvars ena brännpunkt sistnämnde kropp har sitt läge. I följd af denna omständighet är afståndet emellan jorden och månan ej oföränderligt detsamma, utan ömsom något större, ömsom något mindre än medelafståndet. Den punkt, der månen är jorden närmast, benämnes i astronomin *perigeum*, den motsatta åter *apogeum*. Båda benämnes äfven med ett gemensamt namn *apsider* och den räta linie, som sammanbinder dessa, *apsidlinie*. Månbanans apsidlinie har icke ständigt ett och samma läge i rymden, utan denna vrider sig kring en viss punkt (banellipsens ena brännpunkt) och fullbordar ett helt hvarf på $8\frac{17}{20}$ år.

Sedan dessa begrepp blifvit faststälda, är det lätt att förklara betydelsen af de ofvan omnämnda månens olika omloppstider. Den synodiska omloppstiden är den tid, månen behöfver att fullända sin bana i afseende på solens föränderliga läge i ekliptikan, eller från ett solläge till det derpå följande sammanträffande med solen. Om t. ex. solen och månen vid en viss tidpunkt hafva samma läge i ekliptikan, så har solen efter en siderisk månad förflyttat sig något framåt under det månen intager samma läge som förut. Månen behöfver således ännu någon tid för att upphinna solen, hvaraf följer, att den synodiska månaden måste vara något längre än den sideriska; äfven befinnes den synodiska månaden vara

$$29^d\ 12^t\ 44^m\ 2^s{,}9.$$

Tiden, som förflyter emellan tvenne på hvarandra följande månens sammanträffanden med en och samma nod benämnes drakonitisk månad, och den anomalistiska räknas efter månens sammanträffande med apsiderna.

Den bekanta företeelsen, att månen visar faser, beror på månens olika ställningar i hänseende till jorden och solen. Emedan månen icke är en sjelflysande kropp, så kan dess yta endast då från jorden synas fullt belyst af solen, när solen och månen hafva ett motsatt läge i hänseende till jorden, d. v. s. när jorden befinnes emellan de båda andra kropparna. Månens fas benämnes då fullmåne. Nymåne inträffar åter då månen är emellan solen och jorden. Tiden emellan tvenne fullmåner eller tvenne nymåner benämnes äfven *lunation* och är tydligen detsamma som månens synodiska omloppstid. Förutom af full- och nymåne indelas lunationen af de s. k. första och sista qvarteren, eller de månfaser, vid hvilka man ser denna himlakropp till hälften belyst. Vid fullmåne säges månen stå i opposition till solen, vid nymåne åter vara i konjunktion med densamma; oppositioner och konjunktioner benämnas äfven zyzygier samt första och sista qvarteren qvadraturer.

Man märkte redan ganska tidigt, att månförmörkelserna endast inträffade samtidigt med fullmåne; solförmörkelserna deremot endast vid nymåne. Härigenom leddes man att inse orsaken till månfacerna, nämnligen att månen endast lyste med reflekteradt solljus. Då detta ljus bortskymdes af jorden, uppstod en månförmörkelse, hvilken derföre endast under det vilkor kunde inträffa, att solen, jorden och månen i det närmaste lågo i en rät linie. På samma sätt måste detta vilkor blifva uppfyldt för att en solförmörkelse skulle kunna inträffa, ty en sådan beror derpå, att månen träder emellan solen och jorden och bortskymmer den förra antingen delvis eller ock helt och hållet. Men för att månen skall kunna bilda en rät linie med jorden och solen, erfordras, att han skall befinna sig i grannskapet af någondera noden; ty endast i dessa punkter är månen i det plan, som går genom solens och jordens medelpunkter, nämnligen i ekliptikan.

Genom iakttagelser af förmörkelser upptäckte Chaldeerna den ofvan omnämnda perioden *saros*, hvars innehåll är följande *:

223 synodiska månader omfatta en tidrymd af 6,585 dagar 7 timmar och 43 minuter eller ungefär 18 år och 11 dagar (året räknadt till $365\frac{1}{4}$ dagar); denna tidrymd omfattar äfven i det närmaste 239 anomalistiska och 242 drakonitiska månader. Efter en sådan period återkomma månförmörkelserna i samma ordning och samma storlek.

Den längd, som Chaldeerna sålunda uppgåfvo för den synodiska månaden, var endast felaktig på $4\frac{1}{2}$ sekunder.

Vi böra ännu anmärka, att Babylon synes vara astrologiens vagga. Härifrån synes denna chimäriska konst hafva utbredt sig öfver österländerna och efter seklers förlopp vunnit fast fot i Europa, der hon under medeltiden spelade en så stor rol.

Egypternas astronomiska tidräkning synes hafva varit alldeles identisk med Chaldeernas, hvarföre äfven några

* Ideler, Handbuch der math. und. techn. Chronologie.

författare antaga, att Chaldeerna lånat från de förra; likväl är motsatsen sannolikare. Men förutom de vanliga kronologiska perioderna urskiljde man hos Egypterna en alldeles egendomlig, den de benämnde *sothis*. Denna benämning härrörde af stjernan Sirius, hvilken Egypterna kallade Soth, Seth och äfven Sothis. De hade märkt, att denna stjernas heliakiska uppgång inträffade någon tid före Nilflodens stigande och att de således i det första varseblifvandet af densamma ägde ett tillförlitligt tecken för inträffandet af den för dem så ytterst vigtiga Nilöfversvämningen. Tiden emellan tvenne heliakiska uppgångar är nu visserligen ett sideriskt år, men då de räknade året endast till 365 dagar, så måste naturligtvis Sirii heliakiska uppgång efterhand inträffa på alldeles olika årstider. För hvarje år ökades skilnaden således med ungefär en fjerdedels dag, men när denna skilnad uppgick till ett år, var en s. k. kanikularperiod (hundstjernperiod) eller sothis fullbordad, i det nu åter Sirii heliakiska uppgång inföll på samma årstid, som vid periodens början. Sothis-perioden omfattar således

$$4 \times 356 = 1460 \text{ år.}$$

Enligt Ideler vidtager den första sothisperioden 2782 f. Kr., så att år 139 e. Kr. tvenne sådana perioder voro tilländalupne.

Att de gamle Egypterna förstodo konsten att bestämma sin meridian, finna vi i de monumenter af deras byggnadskonst, hvilka ända till våra dagar motstått tidens inverkan och de härjningar, som tid efter annan öfvergått det urgamla kulturlandet. Utan att i likhet med Piazzy Smith på ett rent af barnsligt sätt vilja i pyramiderna se vittnesmål om att Egypterna stodo på en kulturställning, jemförlig med om ej öfverträffande vår, och anse deras dimensioner antyda källan till all visdom, behöfver man dock ej förneka, att vid deras uppförande astronomiska ändamål blifvit tagna i betraktande. Antingen äro pyramidens sidor eller ock diagonalerna emellan dess knutar så nära orienterade i söder och norr, öster och vester, att man ej kan undgå att förmärka en afsigt vid deras uppförande, hvilken förutsatte ej alldeles ringa insigter om huru astronomiska observationer böra anställas.

Likasom månen i sitt lopp ständigt förblifver i ekliptikans grannskap, så förmärktes äfven ett fåtal andra himlakroppar, hvilka ej likt stjernorna syntes oföränderligt fästade på himmelen, utan rörde sig i grannskapet af samma storcirkel på himlahvalfvet. Dessa himlakroppar benämndes planeter och den zon, inom hvilken de ständigt förblefvo och hvilken utbredde sig några grader på ömse sidor om ekliptikan, *zodiaken* eller *djurkretsen*. Emedan planeterna ständigt förblifva i ekliptikans grannskap, så föredrog man att angifva deras läge på himmeln i hänseende till detta plan i st. för till eqvatorn; d. v. s. i st. för rektascension och deklination angaf man deras längd och bredd. Längden mätes i ekliptikan alldeles på samma sätt som rektascensionen i eqvatorn och bredden motsvarar åter deklinationen. Af samma orsak äro planeternas bredder ständigt ganska små och uppgå endast till ett ringa antal grader *.

I ett annat afseende förmärkes dock hos planeternas rörelse en väsentlig olikhet emot solens och månens. Under det nämnligen att solen och månen i det närmaste genomlöpa sin bana på himmeln med likformig hastighet i en storcirkel, äro planeternas rörelser, sådana de visa sig för en åskådare på jorden, mycket mindre regelbundna. De synas ibland stå stilla, ibland gå tillbaka, men dock förnämligast framskrida i samma riktning som solen och månen. I denna riktning fullända de äfven hela omlopp, i likhet med dessa sistnämnda himlakroppar, och man kan äfven hos dem urskilja sideriska, tropiska och synodiska omloppstider. Då vi nu anföra dessa omloppstider, göra vi det i enlighet med

* Här menas endast de fem äldre sedan urminnes tider bekanta planeterna, nämnligen Merkurius, Venus, Mars, Jupiter och Saturnus. Till dessa ansluta sig de i nyare tider upptäckta Uranus och Neptunus i afseende på deras banors ringa lutning mot ekliptikan; af de emellan Mars och Jupiter finnas deremot åtskilliga med stark lutning.

nyare bestämningar af desamma och med hänseende dertill att deras verkliga rörelser ske kring solen; de äldre bestämningar, hvilka vi under fortgången af vår framställning komma att meddela, tjena då till bildandet af vårt omdöme om dessa bestämningars noggrannhet.

Planet.	Sid. omloppstid. Dagar.	Trop. omloppstid. Dagar.	Syn. omloppstid. År.	Dagar.
Merkurius	87,9693	87,9684	0.	115,8.
Venus	224,7008	224,6954	1.	218,7.
Mars	686,9798	686,9297	2.	48,9.
Jupiter	4332,5848	4330,5936	1.	33,6.
Saturnus	10759,2198	10746,9487	1.	12,8.

I en följande paragraf skola vi närmare redogöra för arten af de rörelser, som förmärktes hos planeterna inom djurkretsen, emedan kännedomen af dessa först hos det intelligenta grekiska folket uppnådde ett sådant stadium att detsamma för oss har intresse. Vi kunna visserligen ej förneka möjligheten deraf, att redan äldre folkslag i detta afseende höjt sig till samma ståndpunkt som grekerna, men vi sakna alla spår, hvilka skulle antyda något härom. Det enda, som från tider före den grekiska kulturperioden bibehållit sig, är bestämningen af planeternas omloppstider. Hos de gamla Inderna finner man t. ex. uppgifter, hvilka lätt leda till följande värden för de fem planeternas sideriska omloppstider kring solen, och hvilka ej betydligt afvika från nyare bestämningar.

Merkurius (Budha)	87,9697
Venus (Cukra)	223,9985
Mars (Mungala)	686,9808
Jupiter (Brihaspati)	4332,3206
Saturnus (Cani)	10765,7750

Inderna hafva förnämligast derigenom gjort sig förtjenta af efterverldens tacksamhet, att de uppfunno och införde decimalsystemet i arithmetiken. Fördelen af deras uppfinning bestod dock ej egentligen deri att de valde talet

10 till bas för sin arithmetiska canon, utan deri att hvarje ziffra tilldelades ett olika värde i förhållande till den plats, hon intog i ett tal. Utom Indernas uppfinning skulle man t. ex. skrifva talet 7956 på följande sätt

$$7000 + 900 + 50 + 6$$

och ej vidare kunna förenkla detsamma.

Djurkretsens indelning i stjernbilder är urgammal: man kan numera ej säga hvar densamma uppstått, men antagligen böra dock åtminstone grunddragen deraf sökas på ett enda ställe; ty de benämningar, som förekomma hos de olika folkslagen, äro alltför likartade att de ej häntyda på ett gemensamt ursprung. Man har på flera sätt och medelst klyftiga förutsättningar sökt förklara uppkomsten af de figurer, hvilka omslutit vissa stjerngrupper, men något egentligt resultat har härvid ej blifvit vunnet. Stjernornas gruppering inom de olika stjernbilderna häntyda nämnligen högst sällan på den figur, hvilken gifvit namn åt stjernbilden, hvarföre benämningen otvifvelaktigt bör tillskrifvas en annan orsak. Man har bland annat framkastat den åsigt, att benämningen af stjernbilderna inom djurkretsen skulle stå i något sammanhang med de årstider, då solen intog sin ställning i en sådan. Man har t. ex. tänkt, att benämningen *Vågen* uppstått vid den tid då solen vid höstdagjemningen befunnit sig i denna stjernbild och således jemnvigt emellan dagens och nattens längd sammanfallit med solens inträde eller vistande i vågens stjernbild.

Djurkretsen omfattar 12 stjernbilder, nämnligen *Väduren*, *Oxen*, *Tvillingarne*, *Kräftan*, *Lejonet*, *Jungfrun*, *Vågen*, *Skorpionen*, *Skytten*, *Stenbocken*, *Vattumannen* och *Fiskarne*. Hvar och en af dessa stjernbilder omfattade ungefär 30° på ekliptikan, hvarföre man äfven i rundt tal kunde angifva en himlakropps längd genom att nämna den stjernbild, i hvilken han befann sig. På grund häraf och för att göra dylika uppgifter något mera bestämda, indelade man ekliptikan i 12 lika stora delar, hvar och en omfattande 30 grader, och benämndes dessa delar tecken. Vädurens tecken räknades från vårdagjemningspunkten till 30° i längd, Oxens från 30° till 60°, o. s. v. Emellertid är vårdagjemningspunkten, såsom redan blifvit omnämndt, icke någon fast punkt på ekliptikan eller orörlig bland fixstjernorna, hvarföre det inträffade att de olika tecknen småningom flyttade sig från de stjernbilder, som gifvit anledning till deras benämning. För närvarande ligger t. ex. vårdagjemningspunkten i Fiskårnes stjernbild, Vädurens stjernbild sammanfaller åter med Oxens tecken o. s. v.

Himlahvalfvet på båda sidor om djurkretsen har man äfven indelat i stjernbilder. På norra hälften hafva vi först *stora* och *lilla björnen*, i hvilken norra verldspolen är belägen; vidare *Lyran*, *Svanen*, *Cepheus*, *Cassiopeja*, *Perseus*, *Auriga*, *Bootes*, m. fl. Eqvatorn går genom de praktfulla stjernbilderna *Orion* och *Örnen*, samt för öfrigt genom flere mindre påfallande, såsom *Hvalfisken*, *Lilla hunden* med den vackra stjernan *Procyon*, *Ormen* och *Ophiuchus*. I Fiskarnes och Jungfruns stjernbilder skära ekliptikan och eqvatorn hvarandra. På södra delen af himmeln hafva stjernbilderna för det mesta först i nyare tider erhållit namn; dock äro äfven här namn på åtskilliga stjernbilder kända från äldre tider, såsom t. ex. *Stora hunden* med *Sirius* och *Floden Eridanus* (af Egypterna benämnd Nilfloden). Södra verldspolen faller i den oansenliga stjernbilden *Oktanten*, men denna är omgifven af några stjernbilder, hvilka skola förete en utomordentligt praktfull anblick, hvaribland *Korset* bör nämnas i främsta rummet.

§ 3. **Den äldre grekiska astronomin.**

Man nämner Thales såsom den grekiske astronomins fader. Honom tillskrefs af hans landsmän icke allenast förutsägelsen af en solförmörkelse utan äfven upptäckten af solbanans sneda riktning mot eqvatorn. Thales föddes år 639 före Kr., således långt sednare än den tid, då astronomin hos andra folkslag redan uppnått en sådan utbildning, att ekliptikans lutning mot eqvatorn ej allenast var känd utan äfven hade blifvit uppmätt. Då man vidare vet att Thales ofta och länge vistats i Egypten. så torde det kunna antagas, att han i detta land inhämtat, åtminstone största delen af det, som grekerna tillskrefvo honom såsom hans egna upptäckter.

Thales utbildade åtskilliga lärjungar, bland hvilka nämnes Pythagoras och medelbart Anaxagoras. Pythago as blef stiftare af en efter honom benämnd filosofisk skola, hvars medlemmar synas i hög grad hafva utbildat den astronomiska vetenskapen. Om deras läror är dock föga bekant, emedan de höllo desamma hemliga. Af det, som häröfver dock bibehållit sig till efterverlden, synes framgå, att de antogo jorden vara klotformig och äfvenså solen och månen. Att de äfven tänkte sig jorden såsom stadd i rörelse, dock ej kring solen utan kring en för menniskorna osynlig centraleld, af hvilken solen blott var ett återsken, har redan blifvit omnämndt.

Anaxagoras är derföre märkvärdig, emedan hans åsigter om meteorstenar synas hafva kommit våra dagars ganska nära. Han ansåg nämnligen stjernorna vara stora i eldregionen glödande stenar, och synes hafva blifvit ledd till detta antagande genom en meteorsten, som nedföll vid Aegos Potamos 466 f. Chr. f.

Af större betydelse i rent vetenskapligt hänseende än de senast omnämnda, till större delen rent filosofiska spekulationerna, äro de sträfvanden att bringa reda i tideräkningen, som man ungefär vid denna tid finner hos Grekerna. Det problem, som här förelåg, var följande. Medan astronomerna eller de, hvilka sökte att använda astronomisk noggrannhet i tideräkningen, använde solåret såsom tidsenhet och bestämde längden af detta uttryckt i dygn, räknade folket i allmänhet tiden efter månomlopp. För att nu kunna jemföra dessa båda slag af tidsuppgifter, erfordrades att på ett passande vis angifva förhållandet emellan solomlopp och månomlopp. Detta skedde genom Meton 432 f. Chr. f. Den efter honom benämnda perioden eller cykeln grundar sig derpå att 19 år i det alldra närmaste motvara 235 lunationer. Den tid nämnligen, som omfattas af 19 år, är 9 timmar 35 minuter kortare än 6940 hela dagar; den tid åter, som omfattas af 235 lunationer, 7 timmar 29 minuter kortare än samma antal hela dagar. Om således 19 år fördelas efter månskiftena i 235 månader, så återkomma dessa efter periodens förlopp på samma årdagar. Genom en sådan fördelning komma en del månader att innehålla 30, en annan del 29 dagar och af de 19 åren innehålla 7 år 13 månader, men de öfriga endast 12.

Ungefär 100 år efter Meton blef hans cykel förbättrad af Calippus, hvilken sammanslog 4 metonska perioder, och från det antal dagar, som dessa tillsammans omfattade, bortlemnade han en. På detta sätt fästades afseende vid största delen af de ofvan omtalade timmarne, hvilka felades i de hela dagarnas antal.

Den Metonska perioden har varit i vidsträckt bruk och begagnas ännu för att bestämma tiden för påskfullmånen. Enligt ett beslut, som fattades på kyrkomötet i Nicæa år 325 e. Chr. f. skall påskdagen sammanfalla med första söndagen efter den på vårdagjemningen följande första fullmåne. Numera, då solens och månens lägen i förväg med mycket stor noggrannhet kunna angifvas, förefinnes det visserligen ingen svårighet att bestämma tiden, då påsken bör firas, men vid kyrkofädernas tider var detta ingalunda förhållandet. Man sökte derföre helt enkelt tiden för påskfullmånen medelst den Metonska cykeln. Emellertid är denna cykel, äfven efter den förbättring, som infördes genom Calippus, ingalunda fullkomligt riktig, emedan den förutsätter att 19 solomlopp precist motsvara 235 synodiska månomlopp. Att detta dock icke i all stränghet är fallet, har redan blifvit påpekadt. Skilnaden af endast ej fulla 2 timmar är visserligen i hvarje period ej af någon betydenhet, men detta fel växer med periodernas antal, så att detsamma omsider kan blifva ganska stort och t. ex. efter 312½ år stiger till en hel dag. Den omedelbart efter Metons period beräknade påskfullmånen skiljer sig således efter ofvannämnda antal år från den tid, man begynt att använda den ifrågavarande cykliska beräkningen, på en hel dag från den verkliga påskfullmånen. Vid den tid, då Gregorius den XIII satt på den påfliga stolen, hade detta fel stigit till 3 dygn och man var nu betänkt på att förbättra detsamma, hvilket äfven kunde ske på ett högst enkelt vis.

Med *gyllental* förstår man den ordningsnummer, som angifver årets ställe inom den metonska cykeln; man finner detta tal genom att lägga 1 till årets numeriska värde och dividera summan med 19; resten utvisar då årets nummer eller gyllentalet. Sålunda finner man, att gyllentalet för året 1874 är 13. Så snart gyllentalet är bekant, finner man tiden för påskfullmånen enligt en tabell, som vi här meddela, och hvilken gäller för den gregorianska kalendern och således begagnas i protestantiska och katolska länder. Dessa tider benämner man äfven påskterminer.

Gyllental	Påsktermin	Gyllental	Påsktermin
1	13 April	10	4 April
2	2 April	11	24 Mars
3	22 Mars	12	12 April
4	10 April	13	1 April
5	30 Mars	14	21 Mars
6	18 April	15	9 April
7	7 April	16	29 Mars
8	27 Mars	17	17 April
9	15 April	18	6 April
		19	26 Mars

Det bör dock anmärkas, att denna tabell endast gäller för åren från 1700 till 1900.

Första söndagen efter påskterminen är tillika första påskdagen. Påskdagen kan man äfven direkt härleda förmedelst en temligen enkel regel, hvilken blifvit uppställd af den berömda astronomen *Gauss*. Vi meddela densamma här med bortlemnandet af beviset för dess riktighet, emedan detta bevis endast har sitt intresse i arithmetiskt hänseende.

Årtalets numeriska värde divideras med tre särskilda tal, nämligen med 19, 4 och 7; härigenom uppkomma tre olika rester, hvilka i de händelser då divisionen går jemnt upp, sättas $= 0$. Dessa rester beteckna vi med a, b och c. Med m och n betecknas vidare tvenne hela tal, hvilkas numeriska värden nedanföre skola angifvas.

Man dividerar nu
$m + 19a$ genom 30 och kallar resten d
$n + 2b + 4c + 6d$ genom 7 och kallar resten e

då påsksöndagen inträffar på den

$(22 + d + e)$de Mars

eller den $(d + e - 9)$de April.

I den Julianska kalendern, som ännu är i bruk hos Ryssarne, är $m = 15$ och $n = 6$, men i den gregorianska kalendern antaga m och n olika värden under olika sekel. Sålunda är

från	1582—1699	$m = 22$;	$n = 2$
„	1700—1799	$m = 23$;	$n = 3$
„	1800—1899	$m = 23$;	$n = 4$
„	1900—1999	$m = 24$;	$n = 5$

Tidsperioden, i hvilken Calippus lefde, utmärkte sig genom flerfaldiga spekulationer öfver verldsaltets fysiska beskaffenhet. *Kosmos* är en grekisk benämning för verldsaltet eller den skapade naturen, och *kosmologi* benämndes vetenskapen härom, hvaraf vidare *kosmogonin* kunde anses utgöra en underafdelning — nämnligen vetenskapen om verldens uppkomst och skapelse. Spekulationer häröfver voro likaså talrika som olikartade, om man än i alla dem skulle kunna utleta några gemensamma drag. Det, som häröfver bibehållit sig till våra dagar, är oss bekant antingen i form af myther eller såsom resultat af bekanta filosofers tankeverksamhet, hvilken desse meddelat i sina skrifter. Till mytherna kunna vi räkna den mosaiska skapelsehistorien, grekernas säkerligen från andra folkslag antagna föreställningar om verldens daning, samt slutligen de gamle Skandinavernas sagor om jätten Ymir, som dräptes af gudarne och tjenade till materie vid verldens skapelse.

Af filosofer, hvilkas skrifter från tiden före Christi födelse bibehållit sig till våra dagar, intager Aristoteles från Stagira, född 384 f. Chr., det främsta rummet, åtminstone i naturvetenskapligt hänseende. Ej heller med orätt benämnes han naturhistoriens fader, ty så mycket, som vid hans tid var bekant öfver föremålen i naturen och deras egenskaper, sammanställde han i sina skrifter med stor omsorg och försökte till och med att finna förklaringar till företeelserna i naturen. Någon egentlig naturvetenskap kunde han dock icke grundlägga, hvartill orsaken hufvudsakligen bör sökas i hans filosofiska system, hvilket blef en absurditet, så snart man försökte att använda detsamma vid naturföreteelsernas förklaring. Hans filosofi bibehöll sig dock länge och var ett stort hinder för naturvetenskapernas uppblomstring, hvilken först inträdde genom Newtons arbeten.

Emellertid är Aristotelis naturfilosofi alltför märkvärdig att vi helt och hållet skulle kunna förbigå densamma, i synnerhet då dess inflytande varit så väsentligt under mer än ett och ett halft årtusende. Vi inskränka oss härvid dock derhän, att medelst några exempel antyda arten af hans sätt att filosofera och resultaten af hans resonemang. Dessa exempel låna vi från *Whewell's History of the inductive Sciences from the earliest to the present times*, öfversatt till Tyskan af J. J. v. Littrow.

„Genast i begynnelsen af sin skrift: De Coelo bevisar han verldens fullkomlighet på följande sätt: „Tingen, af hvilka verlden bestå, äro samtliga solida kroppar, och hafva således alla trenne dimensioner. Men af alla tal är tre det fullkomligaste, ty talet tre är det första af alla tal (nämnligen emedan *ett* ännu icke är något tal* och emedan man i stället för *två* ock kan säga *bägge*, då deremot tre är det tal, med hvilket vi äfven kunna uttrycka *allt*); dessutom har talet tre äfven en tydlig början, en midt och ett slut o. s. v.“ „Man ser, huru häraf omedelbart bör följa, att denna verlden är den fullkomligaste af alla möjliga verldar, och att hela bevisningssättet är byggdt på blotta meningar öfver betydelsen af enskilda ord i det alldagliga språket.“

„Det andra exemplet, ur samma bok, begynner med följande ord: “De enkla elementerna i naturen** måste äfven hafva enkla rörelser. Sålunda hafva äfven i sjelfva verket eld och luft sina naturliga rörelser uppåt, vatten och jord deremot nedåt, båda i rätlinig riktning. Men utom dessa (rätliniga) rörelser gifves det ännu en cirkelformig, som icke är naturlig för dessa element, ehuru hon är en mycket fullkomligare rörelse än den förra. Ty cirkeln är sjelf en fullkomlig linie, och en rät linie är detta icke. Det måste derföre äfven förefinnas något, för hvilket denna fullkomliga, cirkelformiga rörelse är naturlig.

* Här förvexlas uppenbarligen tal och antal. H. G.

** Aristoteles antog fyra sådana, nämnligen jord, vatten, eld och luft.

Men häraf följer klart och utan gensägelse, att det måste finnas en viss *essens* (*ἐσία*) af kroppar (materie), hvilken är alldeles olik de förra elementarkropparna, hvilken är guddomligare, och derföre äfven måste intaga ett högre rum än dessa. Ty om sådana ting, som röra sig i en cirkel, skulle vara försatta i en onaturlig rörelse, så vore det underbart, eller rättare, det vore absurdt, att just denna onaturliga rörelse tillika skulle vara den enda ständigt fortbestående och i sjelfva verket oändliga, ehuru dock alla onaturliga rörelser ganska snart måste taga en ända eller upphöra. Af allt detta följer — ty sålunda måste vi draga vår slutsats — att förutom de fyra elementer, dem vi på jorden hafva ikring oss, ännu ett annat element finnes fjerran från oss, hvilket är desto fullkomligare, ju längre detsamma är från oss aflägset." — „Detta femte och fullkomligaste af alla element i verldsrymden är då det, som senare latinska kommentatorer till Aristoteles hafva kallat *Quinta Essentia*, och tillika det, hvilket i alldagsspråket för hvar och en är bekant under benämningen Quintessens."

Tankegången och flere uttryck i den anförda framställningen påminna om de föreställningar, som kokade i medeltidens vetenskapliga hexkittel, ty så måste det kaos af fantasi och oförnuft benämnas, hvilket då benämndes vetenskap i vesterländerna. Andebesvärjare kunde ej undvara cirklar och trianglar och andra mathematiska figurer, hvilka i följd af sin fullkomlighet voro nog mägtiga att utöfva välde öfver elementarandar, o. s. v. Om äfven medeltidens skenvetenskaper och vilda konceptioner ingalunda få läggas Aristoteles till last, i synnerhet då hans skrifter voro vanställda genom arabiska bearbetningar, så kan dock ej förnekas, att de i hans filosofiska läror funnit ett ganska användbart stöd.

Att likväl medeltiden i bevisningens djerfhet vida kunde öfverträffa sin mästare Aristoteles, skola vi äfven visa genom ett exempel, hvilket vi låna från *Apelts* "die Reformation der Sternkunde". Detsamma utgöres af några satser ur ett verk „De docta ignorantia" af kardinalen *Nicolaus af Cusa*, hvilken äfven derigenom är märkvärdig att han tillskref jorden ett slags rörelse, ehuru denna rörelse dock ej var den kopernikanska. Dessa satser och bevis äro följande.

"1. Ju större en cirkels radie är, desto plattare, d. ä. desto mindre blifver omkretsens krökning. Den cirkels periferi, som är större än hvilken annan som kan gifvas, är derföre alldeles icke krokig, d. ä. densamma måste vara en rät linie. Om en linie af oändlig längd kan således icke sägas att hon är rät eller krokig, hennes krökning består tvertom i hennes räthet.

2. Emedan det största eller det oändliga ej kan vara en mångfald, utan endast ett, så kan en oändligt stor triangel ej bestå utaf flere, utan endast af en enda linie. Emedan en sådan likväl icke upphör att vara en triangel, d. v. s. att hafva trenne sidor, så är denna ena oändliga linie tre och dessa tre dock endast en enda."

Sådana motsägelser äro dock af betydelse för Cusas mystiska theologie. Ty såsom den största linien förhåller sig till andra linier, så skall öfverhufvud det största förhålla sig till allt. Derför är den omtalade oändligt stora triangeln, hvilken är ingenting annat, än den största räta linien, en symbol af den guddomliga treenigheten.

Treenigheten kan dock lika litet göras till föremål för en logisk bevisning, som t. ex. den första definitionen i *Euklids* geometrie, hvilken lyder, att en punkt är det, som ej har några delar. Det ena är en dogm, hvilken ej kan ledas i bevis, då benämningen i etymologiskt hänseende innebär en motsägelse; det andra är åter en definition eller språkuttrycket för ett begrepp, och i följd häraf hvarken kan eller behöfver blifva föremål för någon bevisförning.

Om nu satser, sådana som här blifvit anförda af Aristoteles och kardinalen af Cusa, numera ej kunna uppställas och ledas i bevis af någon förnuftig menniska, så tillkommer förtjensten häraf i ej ringa grad åt astronomin. Denna vetenskap är nämnligen, åtminstone ännu, i högre grad än någon annan naturvetenskap en produkt af såväl tankearbete, som af erfarenhet, vunnen genom iakttagelser. Dessa båda faktorer kontrollera ömsesidigt hvarandra och förhindra, om de hvardera framskrida likformigt, sådana grofva förseelser mot en sund logik och ett sundt vetande, som flydda dagar lemnat oss så många exempel på. Astronomin har så att säga varit en sten, och dertill ingalunda den minst vigtiga, mot hvilken det menskliga förnuftet blifvit skarpslipadt, ej till utletandet af spetsfundigheter, men till utforskandet af sanningen.

I den aristoteliska verldsbyggnaden är jorden förlagd i skapelsens medelpunkt; himmelen, de saliga andarnas uppehållsort, hvälfver sig deröfver och är indelad medelst åtta sferer eller hvalf af genomskinlig krystall. Öfver den åttonde sferen, kallad *primum mobile* (det första rörliga) tronar den högsta anden eller guddomen, men under månens sfer herska de fyra jordiska elementerna. Sferernas antal blef dock sedermera ganska betydligt förökadt i mening att bättre kunna förklara de astronomiska företeelser, hvilka man ej kunde undgå att bemärka, och hvilka på det bestämdaste motsade riktigheten af Aristotelis verldsbyggnad. De bättre af grekernas astronomer, om hvilkas arbeten vi nedanföre komma att tala, synas dock ej hafva antagit dessa krystallsferer såsom verkligt bestående, utan i dem endast sett geometriska begrepp, med hvilkas tillhjelp de sökte att förklara solens, månens och planeternas rörelser. Hvilka egendomligheter man varseblef i dessa rörelser, skola vi i nästföljande paragraf söka att framvisa. Vi mena naturligtvis då de rörelser, hvilka himlakropparne förete, betraktade från en punkt på jordytan, således dem, hvilka de omedelbara iakttagelserna bringa till vår kännedom.

§ 4. Solsystemet.

Ju mera den astronomiska observationskonsten blef utbildad, d. ä. med ju större noggrannhet och säkerhet man kunde uppfatta riktningen, i hvilken en himlakropp i ett gifvet ögonblick syntes från en punkt på jorden, desto mer kunde deras rörelser i sina enskildheter blifva föremål för forskning. Med den noggrannhet, hvarmed astronomiska iakttagelser nu kunna anställas, är man i stånd att vinna kännedom om en mängd egendomligheter i solens, månens och planeternas rörelser, hvilka af de grekiska astronomerna, ja, ända till Newtons tider ej kunde anas. En stor del af dessa egendomligheter, — sådana nämnligen, hvilka i följd af sin qvantitativa ringhet undgingo att direkt varseblifvas — blefvo äfven upptäckta på theoretisk väg, sedan den Newtonska gravitationslagen blifvit bekant. Det synes derföre lämpligast att vid den nu följande framställningen endast betrakta rörelsen, sådan den kunde uppfattas af en mindre utvecklad observationskonst, och detta så mycket mer, som de finare detaljerna först då vinna intresse, när de undersökas på en riktig theoretisk grundval.

Då nutidens observationskonst angifver himlakropparnas orter eller lägen på himmeln med en noggrannhet, som understiger en bågsekund, var man i äldre tider osäker på flere bågminuter och först Tyge Brahe lyckades det att inskränka observationsfelen inom en bågminut. Det följer häraf att de gamle astronomerna endast i grofva drag kunde känna rörelserna inom solsystemet, men äfven dessa voro af en nog invecklad natur att sätta hela deras skarpsinnighet på prof.

Vi anföra nu det väsentligaste af rörelselagarne för de himlakroppar, hvilka i äldre tider ansågos tillhöra och utgöra solsystemet eller rättare öfverhufvud vara rörliga.

1. Solen (☉)

Af alla dessa himlakroppar är solens rörelse den enklaste, ehuru densamma ej var den lättaste att undersöka; i följd af den omständighet nämnligen, att dess lägen på himmeln i hänseende till fixstjernorna eller, såsom man säger, dess relativa lägen ej direkt kunde vara föremål för de äldre iakttagelserna, då ingen fixstjerna var synlig, så länge solen var öfver horisonten. Är man i tillfälle att iakttaga en himlakropps relativa lägen vid olika tidpunkter, så är det tydligen lättare att vinna en föreställning om dess rörelse bland fixstjernorna, eller på himmeln, än om dessa lägen måste medelst räkning härledas ur de medelst iakttagelser omedelbart funna riktningarne vid vissa ögonblick. Denna olikhet i uppfattningen af företeelserna på himmeln karakteriserar de tvenne hufvudgrupperna af astronomiska observationer, nämnligen de relativa och de absoluta bestämningarne af himlakropparnas orter. Denna indelning är af största vigt att iakttaga i den praktiska astronomin eller observationskonsten, men är äfven nödvändig att hafva i minnet, då man vill bedöma tillförlitligheten af de resultat, hvilka blifvit ernådda medelst astronomiska undersökningar.

De relativa ortsbestämningarna hafva endast till föremål att leda till kännedom om himlakropparnas lägen på himmeln relativt till andra, d. v. s. att bestämma skilnaden af tvenne himlakroppars bestämningsstycken, d. ä. höjd, deklination, rektascension, o. s. v. En sådan bestämning är ofta ganska lätt utförd, isynnerhet om de tvenne himlakropparne skenbart äro i hvarandras grannskap, d. ä. om de på himmeln synas ligga nära hvarandra. Är nu t. ex. det ena föremålets rektascension och deklination bekant och har man dessutom genom iakttagelser bestämt skilnaden såväl i rektascension som i deklination från en annan till den första, så är den andras absoluta läge på himmeln äfven gifvet.

Medelst de s. k. absoluta observationerna söker man att omedelbart bestämma himlakropparnas lägen. Härvid möter en stor svårighet, nämnligen den att kunna frigöra resultatet, som består i en båge på himmeln, från beroendet af iakttagarens ståndpunkt på jordytan. En riktning angifves nämnligen alltid förmedelst tvenne vinklar och vid de absoluta observationerna är åtminstone den ena af dessa vinklar hänförd till en utgångspunkt, som är beroende af observationsortens geografiska läge. Detta läge kan man visserligen en gång för alla med stor noggrannhet bestämma, men härmed är icke nog; man måste äfven känna huru det astronomiska instrument, man begagnar, motsvarar detsamma. Om man t. ex. vill bestämma tiden, då en stjerna är i söder, så är det icke nog att känna meridianens riktning, utan man måste äfven i observationsögonblicket kunna rikta sitt instrument i detta plan. Ett fel i denna inriktning vore visserligen ännu ej så farligt, om man endast kunde antaga, att detsamma vore oföränderligt och förblefve sig lika vid alla observationer; ty då kunde inflytandet af detsamma lätt underkastas beräkning och sålunda göras oskadligt i resultatet. Men detta är alldeles icke händelsen. Hvarje ny orientering af instrumentet, d. ä. dess inriktande i ett bestämdt läge, medför en osäkerhet i sjelfva observationen, som ofta är vida större än den noggrannhet, hvarmed man med ögonen kan uppfatta riktningen af en himlakropp. Det är med andra ord vida säkrare att uppfatta en riktning än att angifva densamma, emedan utgångspunkten för vinkelräkningen endast med stor svårighet låter sig bestämmas. Man har sökt att öfvervinna dessa svårigheter medelst inrättandet af s. k. fasta instrument, d. ä. instrument, hvilka oförändradt bibehållas i samma orientering. Härmed har man visserligen vunnit mycket, men dock icke allt. Det enklaste slag af sådana fasta instrument är det redan omtalade gnomon. Skall detta instrument endast användas till höjdbestämningar öfverhufvud, så erfordras först och främst, att dess lineera höjd är noga bekant, och vidare, att planet, på hvilket skuggan uppmätes, är horisontalt. Om man äfven vill bestämma himlakroppars höjder, då dessa äro i meridian, så erfordras dessutom att riktningen af detta plan äfven noga är bekant och fixerad på planet, der skuggan uppmätes. Det synes väl nu, som om man en gång för alla skulle kunna bestämma dessa element, och detta skulle man i sjelfva verket äfven kunna om desamma vore oföränderliga. Men ehuru man i äldre tider ej funnit någon anledning att betvifla detta, så har man dock sedermera vunnit den erfarenheten, att ingalunda härvid kan litas på någon oföränderlighet, hvilken omständighet äfven hufvudsakligast bidragit dertill att användningen af gnonom kommit alldeles ur bruk. Hufvudorsaken till denna föränderlighet bör sökas i värmets inverkan, hvilken förorsakar att de flesta kroppar vid en högre temperatur antaga en större volym än vid en lägre.

Med de ringa anspråk, som i äldre tider ställdes på observationernas noggrannhet, betydde dylika förändringar ej så särdeles mycket, och sålunda fann man äfven medelst användning af gnomon ekliptikans lutning med en vida större grad af noggrannhet än den, som vanns vid bestämningen af andra element.

Det är visst en högst vigtig sak att på ett tillfredsställande sätt hafva bestämt ekliptikans lutning, ty härigenom var solbanans läge i förhållande till eqvatorn eller till jordens rotationsaxel gifvet, men det fordrades ännu att känna solens rörelse i denna sin bana, d. v. s. dess längd vid olika tidpunkter. Vi skola emellertid endast angifva huru dess rektascension bestämmes, emedan detta är vida enklare och nuförtiden uteslutande vanligt. När solens rektascension och ekliptikans lutning äro bekanta, finner man medelst en ytterst enkel trigonometrisk räkning dess längd. Om nu solen direkt kunde jemföras med fixstjernor, d. v. s. om man kunde bestämma dess relativa rektascension vid olika tider, så vore, såsom vi redan nämnt, ingen synnerlig svårighet förhanden. Bestämningen af fixstjernornas rektascensioner ske visserligen just medelst solobservationer, emedan vårdagjemningspunktens läge endast medelst dem kan fixeras, men för att undersöka solens rörelse i sin bana, kunde man lika så gerna välja hvilken annan punkt som helst till utgångspunkt.

Solens läge i hänseende till fixstjernorna kan man emellertid lätt angifva, om man förutom solens deklination (hvilken kan finnas medelst gnomon) känner den tid (naturligtvis stjerntid), då solen är i meridian; ty då är solens rektascension just angifven genom sjelfva stjerntiden. Numera, då man med tillhjelp af välgående ur när som helst kan hafva sig stjerntiden bekant, bestämmes äfven solens rektascension genom att observera vid hvilken urtid solen passerar meridian: före och efter observationen iakttager man åter urtiden, då några stjernor gå genom samma plan och kan sålunda, då deras rektascensioner äro bekanta, beräkna urets missvisning. I äldre tider kunde dock denna method ej användas, emedan man då ej hade ur med tillräckligt tillförlitlig gång. De försök man gjorde att mäta tiden, bestodo endast i konstruktion af sand- och vattenur, utan att likväl med dem kunna ernå en så säker och tillförlitlig indelning af tiden, som erfordrades för astronomiskt bruk. Hela methoden att begagna ur vid rektascensionsbestämningar blef derföre äfven mycket senare (i 17:de seklet) uppfunnen.

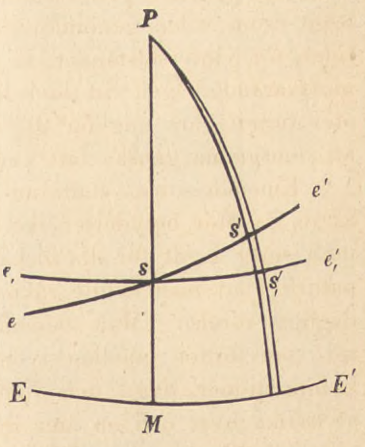
Denna method att bestämma solens och öfriga himlakroppars rektascensioner grundar sig på den omständigheten, att stjerntiden, då en himlakropp är i meridian, är detsamma som ifrågavarande himlakropps rektascension. Såsom i första paragrafen redan blifvit omnämndt, är nämnligen stjerntiden ingenting annat än vårdagjemningspunktens timvinkel. En himlakropps rektascension är vinkeln emellan tvenne deklinationscirklar, af hvilka den ena går genom vårdagjemningspunkten och den andra genom den ifrågavarande himlakroppens ort eller läge på himmeln; vårdagjemningspunktens timvinkel är åter vinkeln emellan meridianen och den förstnämnde deklinationscirkeln. Om nu den genom himlakroppens ort gående deklinationscirkeln sammanfaller med meridianen, så äro tydligen dessa båda vinklar (vårdagjemningspunktens timvinkel och himlakroppens rektascension) lika stora eller identiska. Stjerntiden växer likformigt från 0^{0} till 360^{0}, eller från 0^{t} till 24 timmar under den tid, jorden behöfver för att vrida sig kring sin axel; ett ur, som under samma tid angifver gången af 24 timmar, angifver således äfven stjerntiden i hvarje ögonblick.

Innan uren kommo i bruk såsom astronomiska instrument, försökte man att bestämma bågen emellan solen och fixstjernorna, men emedan en sådan bestämning ej direkt kunde utföras, förmedlade man densamma, såsom redan blifvit nämndt, medelst månen och sednare medelst planeten Venus. En enkel trigonometrisk räkning lärde sedermera att känna solens rektascension eller längd. I än äldre tid förfor man dock vida enklare, i det man hufvudsakligen iakttog stjernornas heliakiska uppgångar. Man märkte, att en stjerna, hvilken såsom aftonstjerna var synlig på den vestliga himmeln, efter solens nedgång allt mer och mer närmade sig denna himlakropp, i det stjernan allt kortare och kortare tid efter solens nedgång äfvenledes gick ned och slutligen försvann i solstrålarne. Efter någon tid förmärktes samma stjerna före solens uppgång såsom morgonstjerna på den östliga himmeln. Genom att följa dessa företeelser och genom att räkna dagarna, som förflöto under den tid stjernan var osynlig, slöt man till tiden, då solen hade samma rektascension som stjernan.

Genom att nu följa solens lopp länge och under alla årstider fann man först, att solen beskrifver en sluten bana från vester till öster, d. v. s. att hon fullbordar ett helt omlopp på himlahvalfvet och alltid efter ett sådant återkommer till samma punkter, der hon förut varit. Det visade sig vidare, att hastigheten i denna bana icke alltid var densamma; under vintern är denna rörelse nämnligen något hastigare än om sommaren. I början af Januari tillryggalägger solen dagligen ungefär $1^0\,1'$, men i början af Juli endast $57'$. Det kan synas, som om skilnaden emellan dessa båda hastigheter vore alltför liten att hafva kunna blifvit märkt i de gamla astronomernas bristfälliga iakttagelser, men detta var ej heller precist nödigt. Bestämde man t. ex. den båge, som solen genomlöpte under loppet af 10 dagar vid tiden för vintersolståndet, så befanns denna vara $10\frac{1}{5}{}^0$; den motsvarande bågen vid tiden för sommarsolståndet hade man åter funnit vara ungefär $9\frac{1}{2}{}^0$ och här är skilnaden stor nog att densamma ganska lätt kunde bemärkas.

Emedan solens ställning i hänseende till horisonten är af en så stor betydelse icke allenast i det borgerliga lifvet utan snart sagdt för alla förhållanden på jordytan, så var det naturligt att man skulle räkna dygnen och tiden efter solens dagliga rörelse. Man benämnde sålunda i allmänhet den tid, som förflöt emellan tvenne på hvarandra följande solkulminationer, dygn och indelade denna tid i 24 timmar, af hvilka hvar och en åter indelas i 60 minuter och dessa vidare i 60 sekunder. Till åtskilnad från den förr omnämnda stjerntiden benämnes den efter solens kulminationer räknade tiden *soltid*. Man åtskiljer dock äfven sann soltid och medelsoltid på följande grunder. Emedan solens rörelse sker från vester till öster eller tvertemot alla himlakroppars dagliga rörelse, så är tiden emellan tvenne solkulminationer något längre än ett stjerndygn. Under ett stjerndygn eller tiden för jordens rotation kring sin axel har nämnligen solen förflyttat sig något åt öster och kommer således vid en följande kulmination vid en något senare stjerntid i meridian än vid föregående kulmination. Detta tillskott, som uttrycker skilnaden emellan soldygnen och stjerndygnen, kan dock ej alltid vara detsamma och detta af tvenne orsaker. Såsom vi nämnligen redan sett, är solens rörelse i sin bana ibland något hastigare, ibland något långsammare; under loppet af ett stjerndygn har således solen vid olika årstider förflyttat sig ett mer eller mindre långt stycke åt öster, hvilken båge erfordrar en mer eller mindre lång tid att passera meridianen. Men för det andra sker solens rörelse icke i eqvatorn utan i ekliptikan; om således äfven solens rörelse i ekliptikan vore likformig, så skulle de under hvarje dygn genomlupna bågarne ej alltid motsvaras af lika stora bågar på eqvatorn eller af lika stora timvinklar; ty rörelsens riktning är af denna omständighet ibland parallel med eqvatorn, men sker ibland i sned riktning mot densamma, och i denna händelse motsvaras de verkligen genomlupna bågarne af mindre bågar på eqvatorn.

Fig. 4



Man vinner en tydligare insigt härom medelst vidstående figur.

I denna beteckna bågarne ee' och e,e', stycken af ekliptikan, bågen EE' ett stycke af eqvatorn samt P verldspolen. Vi antaga nu, att solen under loppet af ett soldygn förflyttat sig från s till s' och äfvenså i den andra händelsen från s till s,'; men vi förutsätta äfven, att på samma gång som denna båge ss' i båda fallen är lika stor, dess lutning mot EE' är olika. I förra fallet antages riktningen af solens rörelse vara sned mot eqvatorn, i senare fallet åter parallel med densamma. Om nu PM angifver riktningen af meridianen, så uttrycker tydligen vinkeln sPs' det tillskott, hvarmed soldygnet öfverskjuter stjerndygnet, och denna vinkel är i förra fallet uppenbarligen mindre än i det senare. Man inser äfven, att bågen på eqvatorn blifver mindre ju närmare densamma rörelsen försiggår.

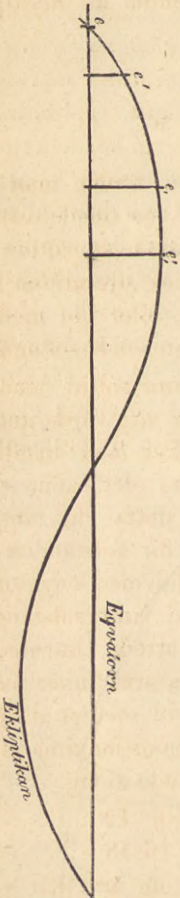


Fig. 5

Tänkes den zon på himlahvalfvet, som omfattar ekliptikan på båda sidor om eqvatorn, utskuren och utbredd på ett plan sålunda att eqvatorns utskärning på himlasferen blifver antydd medelst en rät linie, så antydes ekliptikan medelst en kroklinie enligt figuren 5.

Äfven här ser man omedelbart att de lika bågarne ee', e'e'', o. s. v. på ekliptikan motsvaras af olika bågar på eqvatorn.

De sanna soldygnen bestämmas nu af solens kulminationer och äro i följd af att dessa följa på hvarandra med ibland längre, ibland kortare mellantider, olika. I det borgerliga lifvet behöfver man dock dygn af lika längd, och för att erhålla sådana har man tänkt sig en s. k. medelsol likformigt genomlöpa eqvatorn på samma tid, som den verkliga solen genomlöper ekliptikan. Tiden emellan tvenne på hvarandra följande kulminationer af denna endast fingerade sol benämnes åter *medelsoldygn*, hvilka utgöra det oföränderliga måttet på den s. k. medelsoltiden. Emedan medelsoldygnen och stjerndygnen hvardera äro oföränderliga, så är äfven förhållandet dem emellan oföränderligt. Detta förhållande kan man ganska lätt angifva.

Det tropiska året innehåller jemt ett stjerndygn mer än medelsoldygn. Häraf följer, att man erhåller längden af ett stjerndygn, uttryckt uti samma soldygn, genom att multiplicera det sistnämnda med

$$\frac{365,\ 242201}{366,\ 242201}$$

eller med $1 - \frac{1}{366,\ 242201}$

Genom att utföra denna multiplikation finner man att

ett stjerndygn = ett medeldygn — $3^m\ 55^s,909$ (medeltid)

ett medeldygn = ett stjerndygn + $3^m\ 56^s,555$ (stjerntid);

under loppet af ett medeldygn växer således stjerntiden vid det ögonblick, då medelsolen kulminerar, eller vid medelmiddagen med det sistanförda antalet minuter och sekunder.

Skilnaden emellan medelsoltid och sann soltid benämnes tidseqvation, hvilken naturligtvis ändrar sitt värde under förloppet af de olika årstiderna. Eftertänker man de olika omständigheterna, hvilka bidraga att göra det sanna soldygnet föränderligt, så inser man lätt, att detta vid vintersolståndet måste vara längst. Vid tiden för solstånden är nämnligen solens rörelse i ekliptikan parallel med eqvatorn; för det andra är solens rörelse i banan vid vintersolståndet längst. Genom att vidare mathematiskt utreda, huruledes solens rörelse i ekliptikan motsvaras på eqvatorn, finner man, att den kortaste sanna soldagen inträffar vid medlet af September. Vidare finner man, att tidseqvationens maxima eller största numeriska värden inträffa vid följande tider

Febr. 12 + $14^m\ 31^s$; Juli 26 + $6^m\ 12^s$

Mai 14 — 3 53; Nov. 3 — 16 18

och slutligen, att tidseqvation fyra gånger om året har värdet 0, nämnligen den 15 April, den 14 Juni, den 31 Augusti och den 24 December.

2. Månen (☾)

Månens rörelse bland fixstjernorna är ganska lätt att iakttaga, hvarföre man redan ganska tidigt kunde bestämma dess sideriska omloppstid med en ganska hög grad af noggrannhet. Under ett omlopp, — om man ej vinnlade sig om någon djupare detaljundersökning, — kunde man äfven antaga månbanan vara en storcirkel på himlasferen, hvilken hade en lutning af något öfver 5^0 emot ekliptikan. Man märkte dock redan tidigt, att detta i all stränghet ingalunda var fallet, utan att månen, efter att hafva fulländat ett omlopp, ej återkom till samma punkt, derifrån han utgått. Man märkte med andra ord, att månbanans genomskärningspunkter med ekliptikan eller de s. k. noderna ej hade ett oföränderligt läge på himmeln, utan att de tvertom ganska hastigt förflyttade sig i ekliptikan från öster till vester. Under loppet af ett sekel fullborda de 5 hela omlopp och dessutom 134^0; deras omloppstid är således ungefär $18\frac{2}{3}$ år. Man förmärkte vidare, att månens rörelse ej var så alldeles obetydligt föränderlig under hvarje omlopp, sålunda nämnligen, att densamma varierade från mindre än 12^0 ända till 15^0. De punkter, der rörelsen var störst och minst hade ej heller något oföränderligt läge i månbanan, utan voro underkastade en temligen hastig omloppsrörelse: under ett sekel fullborda dessa punkter 11 hela omlopp och 109^0 (jemf. pag. 25).

Här förefanns således redan en stor olikhet i rörelsens natur, om man jemför densamma med solens. Om de lägen på himmeln, der solens rörelse var störst och minst, kunde man ej så lätt medelst blotta iakttagelser märka, att de voro föränderliga *, deremot var det omöjligt att ej varseblifva denna omständighet hos månen. Äfven är solbanans läge i rymden i det närmaste oföränderlig och de förändringar häraf, som senare tiders theoretiska undersökningar utvisa, voro antagligen helt och hållet obekanta i äldre tider. Men

* Dessa lägen ändra sig verkligen något, men endast 11 bågsekunder årligen.

månens rörelse företedde ännu andra egendomligheter, hvilka ej hade några motsvarande i solens. Dessa egendomligheters natur kunna vi lättast göra oss reda för, om vi först tänka oss månens längd i sin bana (d. ä. månens vinkelafstånd från en viss, vårdagjemningspunkten motsvarande punkt på dess bana), och denna längd sammansatt af flera, på olika sätt uppkomna delar eller mathematiska termer, som motsvarade desamma. Den första af dessa anse vi motsvara en fullkomligt likformig rörelse och benämna densamma medellängd; den andra uttrycker längdens förändring i följd af rörelsens olika hastighet i olika punkter af banan, och dessa båda termer förefunno vi redan hos solens rörelse. Denna andra term benämnes i astronomin vanligen *medelpunktseqvation*. Men för att uttrycka månens längd i öfverensstämmelse med observationerna, erfordras ännu andra termer. Dessa termer äro i så fall egendomliga, att de icke allenast äro beroende af månens ställning i sin bana, d. ä. förändras med denna, utan äfven visa sig bero af solens läge. Man urskiljer nu trenne sådana termer, hvilka kunna antaga ett ganska stort numeriskt värde.

Den första af dessa benämnes *Evektion* och kan uppgå till 1° 20′ 30″ och antager alla värden emellan + 1° 20′ 30″ och — 1° 20′ 30″. Denna term är dock alldeles af samma natur som medelpunktseqvationen vid tiderna för fullmåne och nymåne, således vid tiderna för mån- och solförmörkelser. Innan man utsträckte månobservationerna till andra tider, kunde man derföre ej heller upptäcka evektionens tillvaro, utan antog ett modifieradt värde för medelpunktseqvationen.

Den andra termen benämnes *Variation* och kan uppgå till + 35′ 42″ eller — 35′ 42″. Såväl vid fullmåne och nymåne, som vid första och sista qvarteren försvinner denna term, men erhåller sitt största värde vid oktanterna, d. ä. de punkter som ligga midt emellan de fyra förstnämnda.

Den sista af de tre stora termerna kallas *årlig eqvation* och är endast beroende af solens läge, d. v. s. densamma genomgår alla värden från 0 till + 11′ 12″ och från 0 till — 11′ 12″ under loppet af ett år; månen må derunder hafva hvilket läge som helst, så förändras beloppet af den årliga eqvationen ej deraf.

Förutom dessa stora termer eller, såsom de äfven benämnas, ojemnheter i månens rörelse, hvilka upptäcktes på rent empirisk väg förmedelst undersökningar af månens verkligt genomlupna banor och dess olika hastigheter vid olika tillfällen, hafva theoretiska undersökningar i nyare tider lärt känna en stor mängd mindre ojemnheter, hvilka göra månens rörelse till en af de mest invecklade i hela solsystemet.

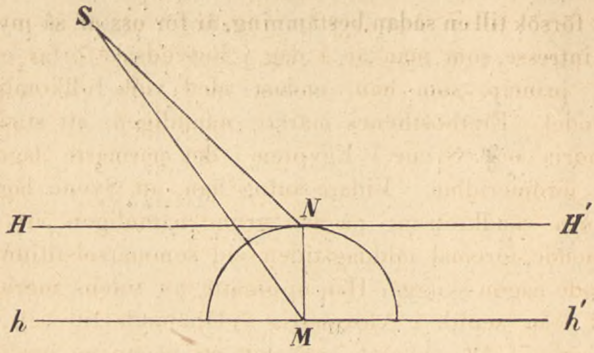
En synnerligen märkvärdig s. k. oregelbundenhet i månens rörelse skola vi dock ännu påpeka, en ojemnhet, som först då kunde varseblifvas, när månobservationerna sträckte sig öfver flera sekler. Vi hafva i det föregående sett huruledes först jordens rotation blef ett medel att mäta tiden, men att sedermera solens och månens omloppstider, i det man fastställde dessa såsom innehållande ett visst antal hela och dessutom en bråkdel af dygn, förrättade denna tjenst. Att så kunde ske berodde derpå, att alla dessa perioder visade sig vara oföränderliga. Ännu har man väl ej kunnat påvisa någon föränderlighet af solens omloppstid, åtminstone ingen af sekulär beskaffenhet — det ena omloppet kan visst vara en obetydlighet längre än det andra, men medeltalet af ett antal omlopps längd, tagna från något sekel, blifver alltid lika med medeltalet af ett annat antal omlopps längd, äfven om dessa senare ligga flere sekler från de förra. — Ej heller har man direkt kunnat påvisa någon föränderlighet i jordens rotationshastighet, ehuruväl förmodanden härom då och då blifvit uttalade. Men jemför man månens sideriska omloppstid, sådan denna framgår ur nyare observationer, med den i äldre tider funna omloppstiden, så förmärkes genast en ökning af månens medelhastighet eller en minskning af dess sideriska omloppstid. Månens medellängd har nämnligen sedan den äldsta oss med säkerhet bekanta förmörkelsen ändrat sig på hela 1^0 48′, och detta iföljd af den omtalade ökningen af dess medelhastighet, eller med andra ord: skulle man med den nu gällande sideriska omloppstiden räkna tillbaka till den omtalade förmörkelsen, så skulle man erhålla månens längd felaktig på det nämnda beloppet.

Slutligen skola vi omtala en skenbar ojemnhet i månens rörelse, öfver hvars rätta natur man dock redan tidigt gjorde sig riktiga föreställningar. Vi skola derföre ej nu, såsom vid framställningen af de förra termerna i månens längd, endast angifva det på empirisk väg funna resultatet, utan försöka att genast framlägga dess theoretiska nödvändighet. Den omständighet, att himlakropparnas dagliga rörelser på himmeln försiggå alldeles på samma sätt, som om de vore fästade på den inre sidan af en ihålig sfer, hvilken på ett stjerndygn svänger sig en gång omkring verldsaxeln, beror derpå, att himlakropparnas afstånd från jorden är mycket stort i förhållande till jordkroppens dimensioner. Från jordens medelpunkt presentera sig de dagliga rörelserna i alla händelser så, som ofvan blifvit beskrifvet; men från en punkt på jordytan något annorlunda, om den ifrågavarande himlakroppen är så nära jorden, att dennas diameter står i ett märkbart förhållande till himlakroppens afstånd. Vanligen äro dock dessa afstånd så stora, att jorden försvinner till en omärklig punkt bredvid dem, men månen gör ett undantag. Den vinkel, hvarunder jordens halfva diameter synes från en himlakropp, benämnes dennas *parallax* och månens parallax kan uppgå ända till en grad och något deröfver. Om parallaxen är märklig, så inverkar detta icke på tiden för himlakroppens gång genom meridian, men dess uppgång blifver fördröjd och dess nedgång påskyndad. Häruti består den s. k. *parallaktiska ojemnheten* i månens rörelse, hvilken ej undgick de gamla astronomernas uppmärksamhet.

Parallaxens tillvaro yttrar förnämligast sin verkan deri, att himlakropparnas höjd genom densamma blifver förminskad. Man inser detta lättast med tillhjelp af följande figur.

N är en punkt på jordytan, hvarifrån man iakttager himlakroppen S. HH' antyder det genom N lagda horisontalplanet,

Fig. 6



men hh' det genom jordens medelpunkt gående, hvilket äfven benämnes *geocentrisk horisont*. Om nu S vore oändligt långt aflägsen från N eller M, eller om förhållandet emellan NM och NS vore omärkligt litet, så skulle den observerade höjden SNH vara lika med den geocentriska höjden SMh. Skilnaden emellan dessa båda höjder är angifven af vinkeln NSM, hvilken benämnes himlakroppens *höjd-parallax*. Då himlakroppen synes i horisonten, är inflytandet af dess parallax störst eller lika med den vinkel, som ofvan blef benämnd parallax. Man kallar densamma af denna orsak vanligen *horisontal-parallax*.

Med tillhjelp af samma figur kan man äfven göra sig tydligt huru en himlakropp förr går upp öfver och senare ned under den geocentriska horisonten än för en åskådare på jordytan.

Då nu i följd af parallaxens inverkan månen är något kortare tid öfver horisonten än en annan himlakropp skulle vara, hvars verkliga läge på himmelsferen, sedt från jordens medelpunkt, vore detsamma som månens, men hvars afstånd från jorden vore vida större, så uppstod den redan nämnda skenbara ojemnheten i månens rörelse (den parallaktiska ojemnheten), hvilken för sin beräkning erfordrade kännedom af månens parallax vid olika tillfällen.

Man inser lätt, att parallaxen omedelbart kan beräknas, endast man känner himlakroppens afstånd från jordens medelpunkt, dess höjd öfver horisonten och slutligen jordklotets radie. Redan tidigt hade jordens klotform varit förmodad och antagen, och försök blifvit gjorda att bestämma detta klots storlek. Ett af Erathosthenes (ungefär 300 f. Chr.) utfördt försök till en sådan bestämning, är för oss af så mycket större intresse, som man än i dag i hufvudsak förfar enligt samma princip, som han, endast med vida fullkomligare hjelpmedel. Erathosthenes märkte nämnligen, att städerna Alexandria och Syene i Egypten i det närmaste lågo på samma jordmeridian. Vidare antog han, att Syene låg under norra vändkretsen; på den grund nämnligen, att upprätt stående föremål middagstiden vid sommarsolstitium der ej kastade någon skugga. Han uppmätte nu solens meridianafstånd från zenith i Alexandria vid nämnda tid och fann detta vara $7^0\ 12$, hvaraf han slöt, att bågen på jordmeridianen emellan Syene och Alexandria äfven var $7^0\ 12$. Då han nu visste, att afståndet emellan dessa båda städer var uppmätt till 5000 stadier, så beräknade han jordens hela omkrets ur denna analogie:

$$\text{jord. omkr.}: 5000 = 360^0 : 7^0\ 12'' = 360^0 : 7\tfrac{1}{5}^0$$

Häraf följer

jordens omkrets = 250000 stadier

och jordens radie = 39789 stadier,

eller i rundt tal, såsom den uppgifves af Erathosthenes, 40000 stadier.

Om noggrannheten af detta resultat kunna vi icke göra oss någon fullt klar föreställning, emedan längden af ett stadium ej är oss säkert känd. Får man emellertid antaga, att ett stadium innehåller 184,72 mètres, så vinnes för jordens omkrets följande värde:

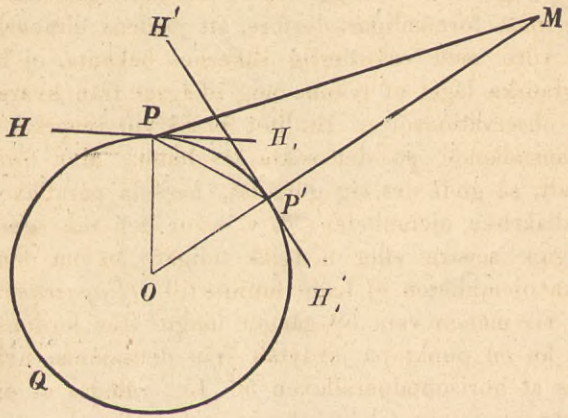
46,180,000 mètres,

då det sanna värdet i det närmaste är 40 millioner mètres.

Månens afstånd från jordens medelpunkt kunde nu visserligen ej direkt uppmätas, utan man var tvertom nödsakad att just bestämma detta genom en omedelbar uppmätning af dess parallax vid något visst tillfälle. För att verkställa en sådan uppmätning, har man samtidigt uppmätt månens meridianhöjder vid orter på jordytan, hvilka i anseende till sina geografiska bredder voro så aflägsna som möjligt från hvarandra, men hvilka på samma gång i det närmaste lågo på samma jordmeridian.

Huruledes månens afstånd och således äfven dess parallax genom en dylik mätning kunde bestämmas, inses af följande figur.

Fig. 7.



Cirkeln PQP' angifver en jordmeridian, på hvilken P och P' beteckna tvenne punkter, hvilkas läge antages vara bekant, äfvensom jordens dimensioner, d. v. s. jordens radie. De båda höjderna, som genom iakttagelser skola bestämmas, äro nu, om månen tänkes i punkten M, MPH, och MP'H'. Emedan vidare POP', äfvensom det liniera afståndet PP' antages vara bekant, så finner man vinklarne H,PP' och H'P'P medelst en enkel trigonometrisk räkning, hvarefter vinklarne MPP' och MP'P äfven äro funna; ty den första af dessa är tydligen lika med summan af den uppmätta MPH, och den beräknade HPP', den senare åter lika med summan af MP'H' och H'P'P. Vi hafva nu en triangel, deri en sida (PP') och tvenne vinklar (MPP' och MP'P) äro bekanta; enligt en enkel formel från trigonometrin kunna då de trenne obekanta sidorna MP och MP' finnas medelst räkning, och någon svårighet att beräkna afståndet MO förefinnes nu ej heller, d. v. s. afståndet emellan månens och jordens medelpunkter.

Genom dylika uppmätningar af månens höjder i Berlin, Paris och på Goda Hopps udden m. fl. orter, bestämdes månens horisontalparallax af åtskilliga observatörer till 57′ 5″, men nyare iakttagelser hafva något förminskat detta värde. Man antager nämnligen månens horisontalparallax vara 57′ 2″6 enligt beräkningar af den danska astronomen Olufsen.

I äldre tider kunde denna method att bestämma månens afstånd ej användas, dels emedan densamma förutsätter en temligen långt drifven noggrannhet vid iakttagelsernas anställande, men förnämligast derföre, att jordens dimensioner hvarken voro med erforderlig säkerhet bekanta, ej heller det geografiska läget af tvänne nog aflägset från hvarandra liggande observationsorter. Ett litet fel härvid inverkar dock högst vanställande på det sökta resultatet. Man försökte derföre att, så godt det sig göra lät, härleda parallaxen ur den parallaktiska ojemnheten, d. v. s. ur den tid, som månen uppgick senare eller nedgick tidigare än om den parallaktiska ojemnheten ej hade funnits till. *Hipparchus* fann på detta vis månen vara 59 gånger längre från jordens medelpunkt än en punkt på jordytan från densamma, hvilken motsvaras af horisontalparallaxen 58′ 15″, således af en något mer än en minut felaktig horisontalparallax.

Det anförda värdet för månens horisontalparallax gäller för dess medelafstånd från jorden, men emedan dess afstånd öfverhufvud ej så obetydligt förändrar sig inom hvarje omlopp, så är äfven horisontalparallaxen i motsvarande proportion föränderlig. Denna kan nämnligen blifva något mindre än 54′ och något större än 61′. Om man känner lagen, enligt hvilken månens afstånd från jorden förändras, så kan man äfven beräkna dess horisontalparallax för hvilken tidpunkt som helst, endast man känner densamma för en enda tidpunkt, eller ett enda värde af densamma, motsvarande ett visst afstånd. Men denna lag var obekant för de äldre astronomerna, hvarföre de äfven understundom kunde taga ganska felt vid beräkningen af den parallaktiska ojemnhetens belopp, och ehuru medelparallaxen var funnen temligen nära sanningen. Att de gamla astronomernas bestämning af vårdagjemningspunkternas läge under sådana omständigheter måste blifva ganska osäker, kan numera ej förundra oss (jemf. § 1).

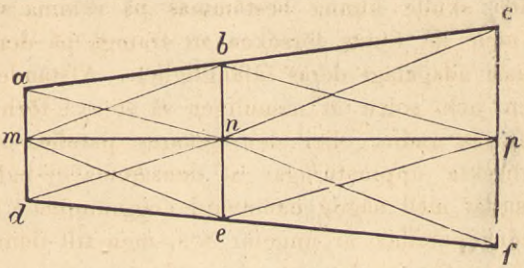
Det kan synas, såsom om solens parallax eller afstånd från jorden skulle kunna bestämmas på samma sätt som månens, men de första försöken att framgå på denna väg hafva genast ådagalagt deras fåfänglighet. Afståndet emellan jorden och solen är nämnligen så stort i förhållandet till den förras radie, eller den senares parallax så liten, att alla direkta uppmätningar af densamma ej hafva ledt till ett resultat med någon nämnvärd noggrannhet. Man vet nu att denna parallax är ungefär 8″9, men till denna kunskap har man först i det sista decenniet kommit. Ända in i senare hälften af detta århundrade har man nästan allmänt antagit denna parallax vara 8″57, således felaktig på mer än $\frac{1}{30}$ af dess värde, då de gamla astronomerna hade bestämt månparallaxen med ett fel af endast $\frac{1}{57}$ af hela beloppet. För de methoder, hvarigenom man omsider lyckats att finna detta för solsystemets kännedom så vigtiga tal med en, såsom det vill synas, tillräcklig noggrannhet, skola vi längre fram redogöra; här åtnöja vi oss med att antyda, huruledes man i äldre tider försökte att komma till kännedom af detsamma.

Man hade väl tidigt insett, att solen var vida mer aflägsen från jorden än månen, men huru liten solens parallax i sjelfva verket är, derom hade man svårt att göra sig en föreställning. Hiparchus insåg väl otillräckligheten af det förfaringssätt, som blifvit följdt vid bestämmandet af månparallaxen och uttänkte derföre ett annat, men äfven detta kunde ej leda till kännedomen af så liten qvantitet, som solparallaxen; och sålunda skedde, att solens afstånd från jorden blef antaget flerfaldiga gånger mindre än det verkligen är.

Hipparchus grundar sin method på följande geometriska konstruktion.

Om ad, be och cf äro trenne parallela räta linier, hvilka skäras itu af den räta linien mnp och hvilkas ändpunkter ligga på samma räta linier ac och df, så är ögonskenligen summan af vinklarne anm och cnp lika med summan af vinklarne nab

Fig. 8



och neb; men denna sistnämnda summa är i det allra närmaste lika med summan af vinklarne nmb och npb, och denna likhet blifver allt större i samma mon, som de tre linierna ad, be och cf äro aflägsna ifrån hvarandra i förhållande till deras olika storlek. Man kan derföre, utan att märkligt fela, d. v. s. utan att begå ett fel, som vid föreliggande fall är af någon betydelse säga, att summan af vinklarne anm och cnp är lika med summan af vinklarne nmb och npb.

Anses nu cf beteckna solkroppens genomskärning och be jordkroppens, så är ad en genomskärning af den skuggkagla, som jorden undanskymmer af solljuset. Antages vidare, att månen är i punkten m, så hafva de vinklar, hvilkas relationer till hvarandra ofvan blifvit fastställda, följande bemärkelser, nämnligen: nmb månens parallax, npb solens parallax, cnp solskifvans radie, sedd från jorden, och slutligen, om man tänker sig skuggkäglan afskuren medelst ett genom månens medelpunkt gående plan, så är anm radien af den cirkel, som af skuggan bildas på planet, nämnligen sådan denna cirkel ses från jorden. Om nu således denna radie är bekant och dessutom månens parallax och solens skenbara radie, så finner man solparallaxen medelst den anförda relationen; man har nämnligen, om skuggcirkelns radie betecknas med f, solens och månens parallaxer med π och p samt slutligen solradien med r,

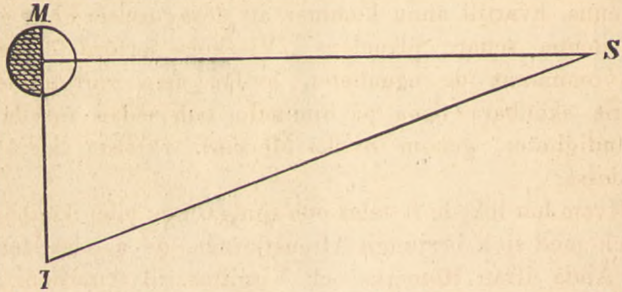
$$\pi = r + f - p,$$

skuggcirkelns radie försökte man att bestämma genom iakttagandet af den tid, som månen vid en månförmörkelse är fullständigt förmörkad. Att iakttaga detta vore dock alldeles icke lätt, ty skuggans gräns visar sig så obestämd, att man ej kan med en här erforderlig noggrannhet fixera tidpunkten, då den totala förmörkelsen börjar eller upphör. Af denna orsak blef det resultat, som Hiparchus erhöll, fullkomligt oriktigt.

En annan method att bestämma solparallaxen, hvilken är lika så riktig i theoretiskt hänseende, som den föregående, men i följd af praktiska svårigheter ej heller leder till säkra resultat, beror på följande enkla betraktelser.

Vid qvadraturerna, d. v. s. vid de tider, då månskifvan synes från jorden vara upplyst precist till hälften, är vinkeln, hvarunder jorden och solen synas från månens medelpunkt, såsom synes ur figuren, en rät vinkel. Uppmätes

Fig. 9



vid en sådan tidpunkt vinkeln emellan solen S och månen M från jorden I, så äro tvenne vinklar i triangeln MSI bekanta, och kan äfven detta förutsättas vara händelsen med sidan MI, eller månens afstånd från jorden, så finner man medelst en enkel trigonometrisk räkning sidan SI eller jordens afstånd från solen. Den vinkel, som för en sådan bestämning måste uppmätas, skiljer sig dock endast obetydligt från en rät, emedan solens afstånd från jorden är mångfaldiga gånger större än månens. Man hade således den uppgift sig förelagd att bestämma en liten vinkel (ungefär 9′) *

* Emedan månens afstånd från jorden innehåller ungefär 60 jordradier, så är vinkeln ISM äfven i det närmaste 60 gånger solparallaxen.

men häruti låg icke den enda svårigheten; det var nämnligen äfven nödvändigt att fixera tiden, då denna mätning skulle ske, eller tiden, då månen precist var till hälften upplyst. Detta var likväl ganska svårt, och sålunda förde denna method icke heller till någon tillförlitlig kunskap om solens afstånd från jorden.

3. Venus (♀) och Merkurius (☿)

Icke utan afsigt nämna vi Venus i främsta rummet, ehuru Merkurius vanligen, såsom den till solen närmaste planeten, plägar att begynna framställningar af planeterna i solsystemet. Merkurius är nämnligen vida mindre känd och af vida mindre intresse, isynnerhet för oss nordboar, än Venus, hvartill ännu kommer att dess rörelser i hög grad likna denna senare planetens. Vi skola derföre förnämnligast omnämna de egenheter, hvilka man varseblifver i Veneris skenbara bana på himmeln, och sedan antyda de omständigheter, genom hvilka Merkurii rörelser skilja sig från dessa.

Hvem har icke hört talas och sjungas om, eller kanhända till och med sjelf besjungit Aftonstjernan, de gamles Hesperus. Ända ifrån Homerus och Virgilius till Atterbom och Richard Wagner betyga poeterna, att denna stjerna i hög grad genom sin klara och på samma gång milda glans är egnad att väcka, ej så mycket beundran af dess praktfulla anblick, som ej mer en renare estetisk njutning. Aftonstjernans lugna sken på den mörkblå, men ännu endast halfdunkla himmeln, utöfvar helt visst ett annat intryck på sinnet än den i en ädelstens färgprakt flammande Sirius. Mer denna omständighet, mer detta milda och lugnande intryck, än den starkare ljusförnimmelse, som ögat erfar vid betraktandet af Venus, förklara den känsla af kärlek och tillgifvenhet, hvarmed aftonstjernan återhelsas på den skumma jorden.

Ej mindre praktfull är morgonstjernan på den östliga himmeln, der han bebådar dagens återkomst, och ej mindre har han varit känd och beundrad i alla tider. Länge synes man hafva ansett dessa båda stjernor för tvenne särskiljda himlakroppar; i Grekland skall först Pythagoras hafva påvisat deras identitet. Härigenom blef genast en ganska märkvärdig egendomlighet i planetens rörelse fastställd, nämnligen den, att han aldrig aflägsnar sig långt från solens grannskap, men att han ömsom synes i vester, ömsom i öster om denna senare himlakropp. Banan, i hvilken han derunder rör sig, synes, om man endast hänför planetens läge till solen, i det närmaste vara en rät linie, eller rättare en cirkelbåge på himlasferen, emellan hvilkens båda ändpunkter planeten rör sig fram och tillbaka. Hänför man dock rörelsen till fixstjernorna, så blifver banan af en helt annan och mycket mer invecklad beskaffenhet. Emedan nämnligen solen ständigt rör sig framåt i sin bana från vester till öster och Venus på samma gång rör sig i afseende på solen, ibland från vester till öster, ibland tvertom, så är det tydligt, att dess rörelse i afseende på fixstjernorna ibland måste vara hastigare än solens i riktningen från vester till öster, ibland långsammare eller till och med motsatt, d. v. s. riktad från öster till vester.

Rörelsen säges vara *direkt* eller *retrograd*, alltefter som densamma är riktad på samma sätt som solens eller tvertom. Då rörelsen ifrån att hafva varit direkt blifver retrograd, så synes han en kort tid vara stillastående på himmeln i afseende på fixstjernorna; de punkter, i hvilka detta stillestående synes äga rum, benämnas stilleståndspunkter.

I ingen punkt af sin bana aflägsnar sig Venus från ekliptikan, så att hennes bredd ständigt är mycket liten. Banan har således endast en ringa lutning emot solbanan, eller ligger i det närmaste i samma plan som denna. Planetens från jorden sedda vinkelafstånd från solen benämnes *elongation*, och denna vinkel kan uppgå till högst 40°.

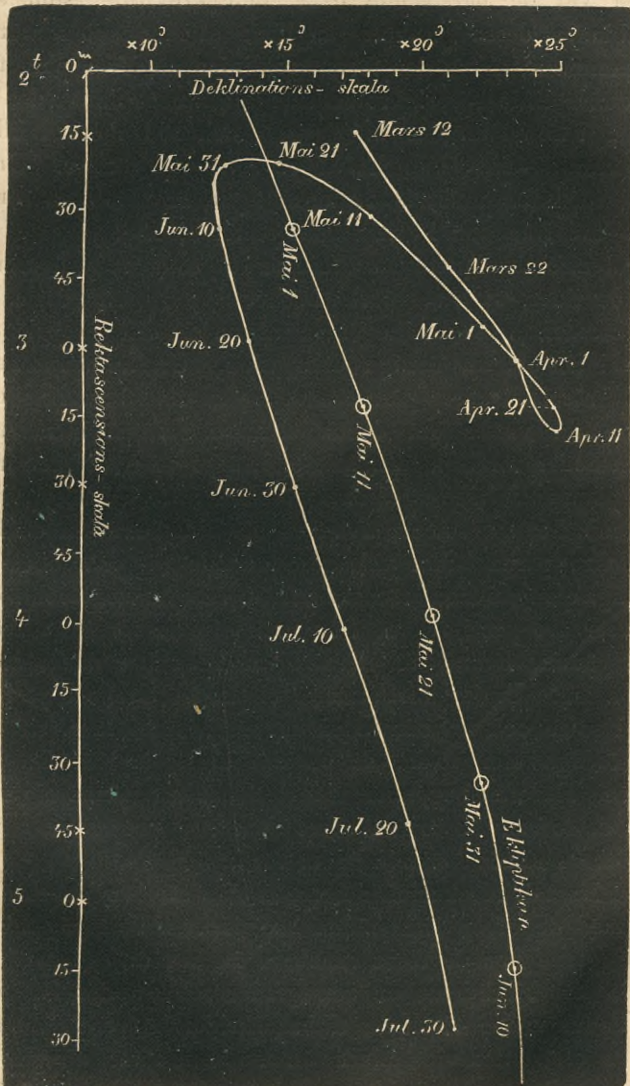
För att nu tydliggöra planetens skenbara bana på himmeln bland fixstjernorna och tillika lemna ett exempel huru en sådan bana utstakas, då planetens orter, d. ä. dess rektascensioner och deklinationer (eller längder och bredder) vid olika tidpunkter äro bekanta, skola vi anföra dessa tillika med solorterna för hvar tionde dag af året 1873, gällande för dagens medelmiddag vid Stockholms horisont, hvarvid Æ är en förkortning af ascensio rekta eller rektascension.

Datum		Æ ♀	Dekl. ♀	Æ ☉	Dekl. ☉
Jan.	1	21^t 40^m	— 15° 51′	18^t 42^m	— 22° 59′
„	11	22 25	— 11 23	19 32	— 21 45
„	21	23 8	— 6 30	20 15	— 19 50
„	31	23 49	— 1 22	20 57	— 17 17
Febr.	10	0 28	+ 3 47	21 37	— 14 14
„	20	1 5	+ 8 46	22 16	— 10 48
Mars	2	1 41	+ 13 25	22 53	— 7 4
„	12	2 14	+ 17 28	23 31	— 3 11
„	22	2 43	+ 20 51	0 7	+ 0 45
April	1	3 5	+ 23 21	0 43	+ 4 40
„	11	3 17	+ 24 41	1 20	+ 8 26
„	21	3 13	+ 24 24	1 57	+ 11 58
Mai	1	2 56	+ 22 6	2 35	+ 15 10
„	11	2 33	+ 18 16	3 13	+ 17 58
„	21	2 20	+ 14 44	3 53	+ 20 15
„	31	2 22	+ 12 41	4 33	+ 21 58
Juni	10	2 36	+ 12 39	5 14	+ 23 3
„	20	2 59	+ 13 39	5 56	+ 23 27
„	30	3 30	+ 15 20	6 38	+ 23 10
Juli	10	4 5	+ 17 14	7 19	+ 22 13
„	20	4 45	+ 19 1	7 59	+ 20 38
„	30	5 27	+ 20 23	8 39	+ 18 28
Aug.	9	6 13	+ 21 7	9 17	+ 15 47
„	19	7 0	+ 21 3	9 55	+ 12 42
„	29	7 48	+ 20 5	10 32	+ 9 16
Sept.	8	8 36	+ 18 13	11 8	+ 5 36
„	18	9 24	+ 15 29	11 44	+ 1 46
„	28	10 11	+ 12 1	12 20	— 2 8
Okt.	8	10 57	+ 7 57	12 56	— 6 0
„	18	11 43	+ 3 27	13 33	— 9 44
„	28	12 28	— 1 16	14 11	— 13 14

Datum	Æ ♀	Dekl. ♀	Æ ⊙	Dekl. ⊙
Nov. 7	13ᵗ 14ᵐ	— 6° 2	14ᵗ 51ᵐ	— 16° 23
„ 17	14 1	— 10 37	15 31	— 19 5
„ 27	14 49	— 14 49	16 14	— 21 12
Dec. 7	15 39	— 18 23	16 57	— 22 39
„ 17	16 31	— 21 9	17 41	— 23 33
„ 27	17 25	— 22 53	18 25	— 23 20

Dessa orter hafva visserligen blifvit beräknade sedan solens och Veneris' rörelser redan i förväg varit bekanta; men ingenting hindrar att anse dem vara direkt hemtade ur iakttagelser. Såsom sådana skola vi äfven betrakta dem och nu se till huruledes planetens skenbara lopp på himmeln gestaltar sig. För detta ändamål skola vi använda ett medel, som ganska ofta användes i astronomin, nämnligen en s. k. grafisk konstruktion. Denna består deruti, att man på ett med parallela vinkelräta linier genomkorsadt papper inför punkter, hvilkas afstånd från tvenne mot hvarandra vinkelräta skalor motsvara de gifna talvärdena för planetens rektascensioner och deklinationer. Den å följande sida intagna figuren är afsedd att tydliggöra ett sådant förfarande, på samma gång, som hon framställer planetens lopp under månaderna Mars, April, Mai, Juni och Juli af året 1873. I denna figur utmärka punkterna planetens lägen på himmeln vid de olika tidpunkter, som angifvas af det vidstående datum. Genom att sammanbinda alla dessa punkter medelst en kroklinie, erhåller man en bild af planetens rörelse under den ifrågavarande tiden och äfven planetens lägen vid tidpunkter, som falla emellan dem, vid hvilka dessa lägen antogos vara bekanta och tjenade till grund för den grafiska konstruktionen; man behöfver för detta ändamål endast uppmäta de vinkelräta afstånden från den ifrågavarande punkten på kroklinien till rektascensions- och deklinationsskalorna, då de sålunda erhållna längderna omedelbart motsvara den ifrågavarande punktens deklination och rektascension.

Fig. 10.


×10°
×15°
×20°
×25°
2
t
0m
Deklinations- skala
Mars 12
15
Mai 21
Mai 31
30
Jun. 10
Mai 11
Mai 1
45
Mars 22
Rektascensions- skala
3
0
Jun. 20
Mai 1
Apr. 1
Apr. 21
Apr. 11
15
Mai 11
30
Jun. 30
45
4
0
Jul. 10
Mai 21
15
30
Jul. 20
Mai 31
Ekliptikan
45
5
0
15
Jun. 10
Jul. 30
30

De med tecknet ⊙ antydda punkterna motsvara solens lägen vid de närstående data; den kroklinie, som sammanbinder dessa punkter, angifver således solens rörelse på samma sätt, som den förra kroklinien angifver planetens. På denna linie rör sig solen ständigt framåt under det planeten, såsom antydes af figuren och redan ofvan blifvit omnämndt, äfven kan hafva en retrograd rörelse. Under den tid, som omfattas i denna figur, är planetens rörelse retrograd från den 11 April till slutet af Maj.

Jemföras planetens ställningar till solen med hvarandra vid de tider, då dess rörelse blifver retrograd, så förmärkes lätt, att denna rörelse begynner någon tid efter det planeten varit i sin största östliga elongation. Under denna retrograda rörelse mötes planeten af solen och förmärkes efter någon tid vester om denna sednare. Härpå inträder ett stillestånd i rörelsen, som åter efterföljes af en direkt rörelse hos planeten. Denna direkta rörelse är dock i början ringa och mindre än solens, hvarföre afståndet emellan de båda himlakropparna ännu tilltager; omsider uppnår dock den vestliga elongationen ett maximum, i det planetens och solens rörelser äro precist lika. Planetens direkta rörelse tillväxer dock ännu, hvaraf följer, att densamma åter måste närma sig solen. Under fortfarande direkt rörelse går planeten förbi solen och uppnår under det rörelsen minskas, sin största östliga elongation, då denna rörelse åter är lika med solens. Härefter begynner planeten åter att närma sig solen och de ofvan beskrifna företeelserna upprepas på samma sätt och i samma ordning som förut.

Planeten Merkurius företer i sina rörelser en stor likhet med de ofvan framställda hos planeten Venus; dock äro vexlingarne hos de förra snabbare än hos de sednare. Sålunda har Merkurius en retrograd rörelse under 17 dagar, då Venus under 41 dagar tillbakaskrider. Äfven är Merkurii största elongation vida mindre än den, som ofvan uppgafs för Venus, eller endast vid pass 23°. I följd häraf inträffar det endast sällan, att denna planet är synlig för blotta ögat i nordligare trakter. På orter, som ligga längre bort från jordeqvatorn, bildar nämnligen ekliptikan en temligen sned vinkel med horisonten; och då Merkurii rörelse i det närmaste försiggår i ekliptikan, så kan planetens höjd straxt efter solnedgången eller före soluppgången ej någonsin blifva betydlig. Innan det blifvit nog mörkt att denna ej synnerligen lysande himlakropp kan blifva bemärkbar, är densamma derföre oftast så nära horisonten, att dunster nu åter bortskymma dess strålar.

I likhet med Venus rör sig äfven Merkurius ständigt i ekliptikans grannskap.

4. Mars (♂), Jupiter (♃) och Saturnus (♄)

Dessa tre planeter förete i sina rörelser så mycken likhet, att vi kunna utvälja en af dem såsom typ för hela gruppen. För detta ändamål utvälja vi Mars, dels emedan vissa egenheter i rörelsen af denna planet uttala sig tydligare än i de båda andras, dels emedan denna planet vida hastigare än de andra förändrar sitt läge bland fixstjernorna och öfverhufvud företer hastigare vexlingar i sin rörelse.

Genast är man i tillfälle att bemärka en ganska väsentlig åtskilnad i naturen af Mars' banrörelse och af de båda föregående planeternas. Dessa aflägsnade sig nämnligen ej utöfver en viss gräns från solen: Mars deremot intager alla möjliga ställningar till solen; likväl så, att han ständigt förblifver i ekliptikans grannskap. Sålunda står Mars ibland i opposition till solen, d. ä. då skilnaden i de båda himlakropparnas längd är 180°, hvilket aldrig kan inträffa med Merkurius och Venus. Deremot återfinna vi hos Mars en egendomlighet, som visade sig hos Merkurius och Venus, men alldeles icke förefinnes hos Solen och Månen; den nämnligen, att rörelsen understundom är retrograd, ehuru planeten dock i det stora hela beskrifver en bana inom hela djurkretsen i samma direkta riktning, som de båda sistnämnda himlakropparna. Förloppet af och vexlingarna i

Mars' rörelse gestalta sig ungefär på följande sätt. Efter att hafva varit i solens grannskap framskrider planeten i direkt rörelse, hvilken dock är mindre än solens och dessutom ständigt aftager, samt blifver en kort tid stillastående, då dess vestliga elongation är omkring 137°. Härefter inträder den retrograda rörelsen, hvarunder planeten kommer i opposition till solen, eller i en elongation af 180°. Den retrograda rörelsen aftager nu, och öfvergår efter en kort tids stillestånd i en direkt, som dock är mindre än solens, hvarföre planeten omsider upphinnes af denna himlakropp. Härefter vidtaga de beskrifna rörelseföreteelserna på samma sätt som förut.

För att än mer förtydliga det skenbara loppet af den ifrågavarande planeten, meddelas i den å följande sida stående figuren en grafisk framställning af detsamma. Denna figur är dock utkastad efter en något annan plan än den, genom hvilken en del af planeten Veneris bana framställdes; här tänker man sig nämnligen åskådaren betrakta den kring eqvatorn liggande zonen, i hvilken den skenbara rörelsen försiggår, från norra polen. Sjelfva zonen är framställd utbredd på papperet ungefär såsom en gummiring, hvars inre och yttre omkretsar ej äro lika stora, men som dock kan uttänjas i form af en cylinder. Tänker man sig i analogi härmed den inre begränsningen af vår figur utvidgad till samma storlek, som den yttre, så skulle den ring, figuren nu utvisar, bilda den yttre ytan af en ihålig cylinder, på hvilken eqvatorialzonen vore afbildad. Efter denna förklaring torde figurens betydelse i öfrigt vara lätt att inse. Den mellersta cirkeln, som föreställer eqvatorn, är indelad i 24 delar, hvilka motsvara rektascensionstimmarna, och utgör sålunda skalan. Någon deklinationsskala har här deremot icke blifvit utsatt, utan planetens lägen äro helt enkelt efter ögonmått utsatta, hvarvid antogs att afstånden från den mellersta cirkeln såväl till den yttre, som till den inre motsvarade ungefär $23\frac{1}{2}{}^{0}$ (ekliptikans lutning mot eqvatorn). Någon stor noggrannhet kan man derföre icke vänta af denna figur, och denna var ej heller i öfrigt möjlig att ernå i anseende till figurens små dimensioner.

Fig. 11.

Oaktadt de små dimensionerna utvisar dock figuren tydligen det, som med densamma åsyftas. Man ser nämnligen huru den skenbara banan bildar öglor, och huru dessa öglor uppstå då planeten står i en viss ställning till solen. Sådana öglor på den skenbara banan, hvilken för öfrigt i det allra närmaste åtföljer ekliptikan, antyda vexlingar i rörelsen eller att densamma från att hafva varit direkt blifver retrograd och tvertom; de hafva alltid ett sådant läge, att solen vid tiden för deras inträffande intager ett emot desamma diametralt läge.

En annan äfven ganska vigtig omständighet kan dock ej skönjas på figuren, utan måste vi, för att vinna kännedom om densamma, taga vår tillflygt till numeriska uppgifter om planetens rörelse. Dylika uppgifter skola vi dock uppskjuta till litet längre fram, och här endast antyda, att desamma leda till det resultat, att planetens rörelse äfven visar ett beroende af dess läge bland fixstjernorna. Redan förr hafva vi varit i tillfälle att lära känna dylika egendomligheter i himlakropparnes rörelser, nämnligen då frågan var om solen och månen. Det blef då anfördt att såväl solens som månens hastighet är något olika i olika punkter af deras respektiva banor; att sådana punkter af solbanan, der hastigheten var störst eller minst ej kunde förmärkas ändra sitt läge relativt till fixstjernorna, men att deremot de motsvarande punkterna af månbanan tydligen visade en ganska betydlig omloppsrörelse. I det mathematiska uttryck, som representerar himlakroppens längd, benämndes den emot ifrågavarande hastighetsändringen svarande termen *medelpunktseqvation*.

Planeten Mars företer i sin rörelse tillvaron af en liknande term, men här är det vida svårare, att ur observationer bestämma densamma, emedan planetens rörelse redan förutom denna term är nog invecklad. Emellertid visade dock redan ganska ofullkomliga iakttagelser af planetens omlopp, att dess rörelse ej saknade den antydda egendomligheten.

Såsom man finner af fig. 11 genomlöper Mars hela djurkretsen för det mesta med en direkt rörelse; genom denna rörelse fullbordar han ett helt omlopp under en tid af något mindre än 2 år. Denna omloppstid visar sig visserligen ej alltid vara lika stor, men afvikelserna från ett medelvärde böra dock ej anses synnerligen stora, då man öfverväger att planetens rörelse under hvarje sideriskt omlopp kan vara en längre eller kortare tid retrograd, hvilket åter beror på dess ställning till solen. Här torde några numeriska uppgifter vara upplysande.

Från början af	1863		till	Juni 25	1864	var omloppstiden		1,48	år
„	Juni 25	1864	„	Juni 1	1866	„	„	1,93	„
„	Juni 1	1866	„	Mai 10	1868	„	„	1,93	„
„	Mai 10	1868	„	April 20	1870	„	„	1,94	„

Under det första af dessa omlopp var rörelsen oafbrutet direkt, men under alla de andra någon tid retrograd, nämnligen:

från	1864 Okt. 27	till	1865 Jan. 6	eller	71	dagar
„	1866 Dec. 3	„	1867 Febr. 16	„	75	„
„	1869 Jan. 5	„	1869 Mars 27	„	81	„

Tiderna för oppositionen inträffade derunder

1864 den 28 Nov.
1867 „ 10 Jan.
1869 „ 13 Febr.

Tiden, som förflyter emellan tvenne på hvarandra följande oppositioner, är emellertid detsamma som planetens synodiska omloppstid; de anförda data leda således till följande värden för denna period:

2 år 43 dagar
2 „ 34 „

Det har redan blifvit anfördt (sid. 30) att Mars' synodiska omloppstid i det närmaste omfattar 2 år och 49 dagar, således något mer än hvad ur ofvan anförda bestämmelser framgår. Att dessa bestämmelser så mycket afvika från det värde, som blifvit angifvet såsom det riktiga, beror dock ingalunda på någon felaktighet i de uppgifter, på hvilka vår räkning blifvit grundad, utan helt enkelt derpå, att detta värde endast är att anse såsom ett medelvärde, men att hvarje enskildt synodiskt omlopp i sjelfva verket mer eller mindre afviker från detta. Orsaken härtill är åter hufvudsakligen att söka i tillvaron af medelpunktseqvationen eller i den omständighet, att planetens rörelse i olika punkter af dess bana är olik, äfven oberoende af dess ställning till solen.

Planeterna Jupiter och Saturnus förete i sina rörelser en fullkomlig analogi till Mars; deras sideriska omloppstider äro dock vida större, nämnligen respektive 11,87 och 29,46 år. Äfven äro medelpunktseqvationerna hos dem i märklig mon mindre än hos Mars, hvadan deras rörelser i olika punkter af banorna förete mindre olikheter. De åtfölja ock ekliptikan ganska nära, så att deras bredder ständigt förblifva inneslutna inom trånga gränser.

5. Ojemnheter i planeternas rörelser.

Naturligtvis beror det på en öfverenskommelse, hvad som man förstår med normalrörelse eller regelbunden rörelse, men har man en gång fastställt detta begrepp, så benämnes i astronomin hvarje afvikelse från en sådan rörelse ojemnhet (inégalité, inequality, Ungleichheit). Desslikes benämner man, ehuru kanske mindre egentligt, den motsvarande termen i det mathematiska uttrycket för rörelsen eqvation (Gleichung). Sålunda representerar månens medelpunktseqvation en ojemnhet i månens rörelse, förutsatt att man såsom normalrörelse antager den rent cirkelformiga och likformiga. I fullkomlig öfverensstämmelse med då herrskande åsigter, antogs äfven af de grekiska astronomerna rörelsen enligt regeln böra vara sådan; de ansågo icke allenast att alla himlakroppars rörelser i sjelfva verket och i det stora hela äro likformiga och försiggå i cirklar, utan äfven att detta slag af rörelse var det enda, som kunde förekomma i de himmelska regionerna. I öfverensstämmelse härmed benämndes hvarje afvikelse från den cirkelformiga banan ojemnhet, och sådana ansåg man äfven, såsom vi längre fram skola framhålla, kunna förklaras utan att frångå hypothesen om den cirkelformiga och likformiga rörelsen.

Man urskiljde tvenne väsentligen olika slag af ojemnheter i planeternas rörelser, och en sådan indelning grundade sig på sakförhållanden, hvilka i det föregående blifvit belysta. Såsom vi nämnligen hafva sett, inträffar en afvikelse från den direkta rörelsen hvarje gång planeterna intaga en viss ställning i hänseende till solen; vidare är hastigheten af rörelsen olika i olika punkter af planeternas banor eller med andra ord i olika riktningar. Den förra af dessa omständigheter hänfördes af de grekiska astronomerna under benämningen *den andra ojemnheten*. Den andra ojemnheten bestod således deri, att planeterna i vissa ställningar till solen under någon tid tillbakaskredo i sina banor, hvilka vid samma tillfällen bildade kroklinier i form af öglor på himlasferen. *Den första ojemnheten* yttrade sig i en större eller mindre hastighet i vissa punkter af banan, men var oberoende af planetens ställning till solen.

I månens rörelse bemärktes ojemnheter af annat slag. Den s. k. andra ojemnheten bortföll alldeles här liksom i solens rörelse, men i stället för denna förefunnos evektionen, variationen och den årliga eqvationen. Dessa ojemnheter äro visserligen beroende af månens ställning till solen, men yttra sig icke i något tillbakaskridande eller i bildandet af öglor på banan.

Här är platsen att visa, eller åtminstone att antyda, huruledes de båda ojemnheterna i planeternas rörelser kunna förmärkas bredvid hvarandra genom iakttagelser och huru desamma kunna frånskiljas och till sitt belopp bestämmas. Såsom man ur det föregående varit i tillfälle att inhämta, föreligger alldeles ingen svårighet att varsna tillvaron af den s. k. andra ojemnheten, då denna gör sig i påfallande grad bemärkbar i den skenbara banans slingringar och i vexlingarne från direkt till retrograd rörelse eller tvertom. Ej heller erfordras det mycken skarpsinnighet för att upptäcka, huruledes denna ojemnhet är beroende af planetens ställning till solen och isynnerhet gifver sig tillkänna, då planeterna Mars, Jupiter och Saturnus befinna sig i opposition till solen eller då planeterna Merkurius och Venus gå förbi solen i retrograd rörelse. Man kunde derföre förutsätta, att planeternas rörelse, hvarje gång desamma intogo en viss ställning till solen, på ungefär samma sätt var modifierad i följd af den andra ojemnhetens tillvaro. Jemfördes således en planets rörelse vid olika tillfällen, då planetens ställning till solen var väl densamma, men då han befann sig i olika lägen på himmeln i hänseende till fixstjernorna eller till vårdagjemningspunkten, så borde man städse hafva funnit lika värden för dessa rörelse-belopp, såvida afvikelserna från den regelbundna rörelsen endast hade varit bundna vid den andra ojemnheten. En sådan jemförelse leder dock ganska lätt till kännedomen af en ojemnhet, som är beroende af planetens läge bland fixstjernorna, eller den ojemnhet, hvilken blifvit benämnd den första. Följande tabell innehåller en sammanställning af planeten Mars' rörelser vid sådana tillfällen, då densamma kulminerade antingen 6 timmar efter eller 6 timmar före solen. Planetens lägen på himlasferen äro dock olika, hvilket synes af de utsatta längderna. Uppgifter om rörelsebelopp angifvas genom de qvantiteter, med hvilka planetens rektascension och deklination eller längd och bredd under en viss tidrymd blifvit ändrade. I nedanstående tabell är denna tidrymd bestämd till fyra dagar, och endast ändringarne i längden utsatta; planetens bredd ändrar sig jemförelsevis högst obetydligt, och uppgifter härom äro här ej af något intresse.

a) *Planeten kulminerar 6 timmar efter solen.*

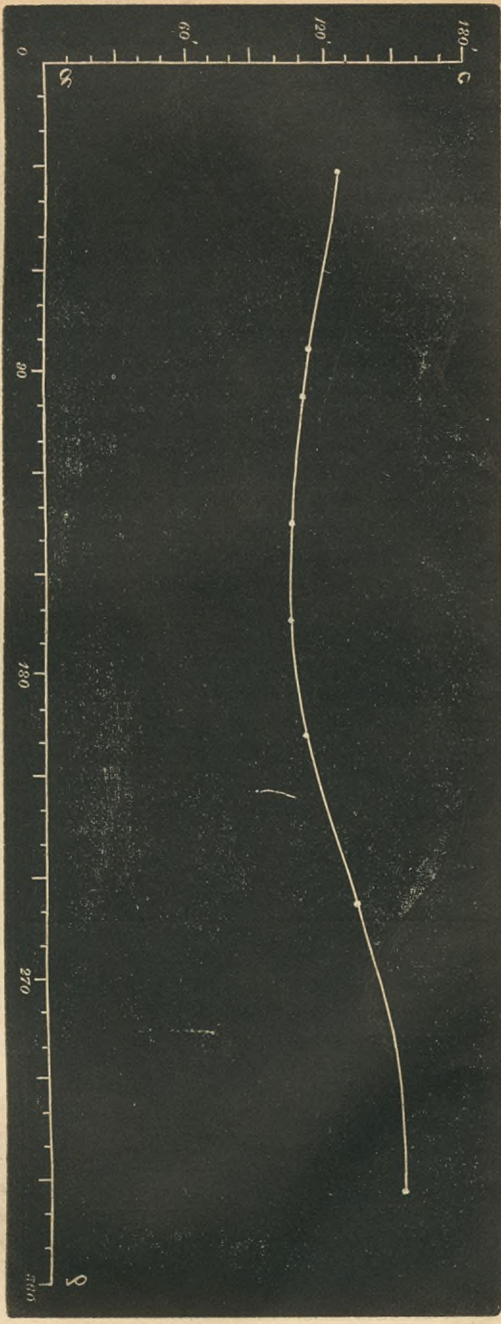
Datum.			Längd.	Ändring i längden under 4 dagar.	
1850	Mars	31	97°	1°	52′
1852	Mai	6	132	1	47
1854	Juni	7	165	1	46
1856	Juli	9	198	1	52
1858	Aug.	26	247	2	15
1860	Nov.	26	335	2	34
1863	Jan.	22	33	2	8
1865	Mars	11	80	1	53

b) *Planeten kulminerar 6 timmar före solen.*

1851	Okt.	25	121°	1°	49′
1853	Nov.	30	157	1	41
1855	Dec.	28	188	1	46
1858	Jan.	30	221	1	54
1860	Mars	19	268	2	10
1862	Juni	7	344	2	35
1864	Aug.	10	52	2	21
1866	Okt.	9	106	1	53

Redan ett flygtigt ögonkast på talen i dessa sammanställningar visar huruledes rörelsen i grannskapet af den punkt, hvars längd är ungefär 340°, är vida starkare än i den diametralt motsatta delen af himlahvalfvet. Detta resultat visar sig med ganska stor öfverensstämmelse framgå ur de båda af hvarandra oberoende talserierna, af hvilka den ena angifver planetens rörelse, då densamma kulminerar 6 timmar efter solen, och den andra hänför sig till rörelsevärden, då planeten kulminerar lika många timmar före solen. Just på grund af denna öfverensstämmelse kan man sluta dels, att en ojemnhet i rörelsen i olika punkter af planetens bana verkligen äger rum och att denna ojemnhet ej är beroende af planetens förändrade ställning till solen, dels ock till sjelfva lagen för förloppet af den ifrågavarande ojemnheten, hvilken just är densamma, som i det föregående blifvit benämnd *den första*.

För att ur dylika taluppgifter, som de ofvan anförda, härleda den lag, de samma följa, begagnar man sig nu af tvenne medel, af hvilka vi redan lärt känna det ena. Detta består nämligen i en grafisk konstruktion af de gifna nummeriska uppgifterna. Den anmärkningen bör här icke bortglömmas, att man i sådana fall, som i det föreliggande, med lag helt enkel

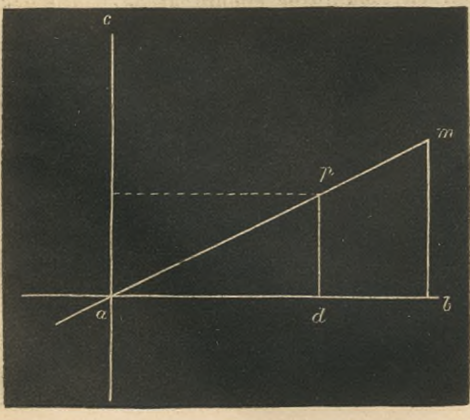


förstår den regel, hvilken på ett eller annat sätt leder icke allenast till de taluppgifter, som äro gifna, utan äfven till dem, som antagas ligga emellan de förra. Vi skola medelst grafisk konstruktion härleda en sådan regel ur de anförda rörelsevärdena och dervid endast hålla oss till serien a. För att utföra ifrågavarande konstruktion uppdrages först en horisontal rät linie ab (fig. 12) och denna indelas i 36 lika stora delar, af hvilka hvar och en antages motsvara 10° i längd; vidare drages i punkten a en annan rät linie ac vinkelrät emot ab; denna linie är indelad i 18 olika stora delar. Efter denna skala införas rörelsebeloppen, i det hvarje af de 18 delarne antagas utgöra 10'.

Den kroklinie, som i ofvanstående figur sammanbinder de i enlighet med de gifna taluppgifterna införda punkterna, kan betraktas såsom angifvande den sökta regeln eller lagen. Man behöfver nämnligen endast, för att finna rörelsens belopp vid en gifven längd, i den punkt på längdskalan ab, som motsvarar denna längd, uppdraga en rät linie parallel med skalan ac, och på denna skala uppmäta det stycke af ifrågavarande linie, som ligger emellan längdskalan och kroklinien. Resultatet af en dylik operation blifver det sökta rörelsebeloppet.

Det andra medlet att angifva lagen, enligt hvilken rörelsen är beroende af planetens längd, är analytiskt, d. v. s. man använder en mathematisk formel för att angifva detta beroende. Möjligheten att för sådant ändamål använda mathematiska uttryck beror derpå, att hvarje linie, vare sig rät eller krokig, kan representeras medelst ett sådant uttryck. De methoder, som härvid användas, äro af alltför stor betydelse för astronomin, att vi skulle kunna lemna detta tillfälle obegagnadt att anföra något litet om det vigtigaste af dem.

Fig. 13.



Vi beteckna i allmänhet en längd på den horisontala skalan ab, räknad från punkten a åt b, med x samt en annan längd, uppmätt på den vertikala skalan ac, med y; läget af punkten p är nu tydligen fullständigt bestämdt, om man känner beloppen af x och y, som motsvara denna punkt, d. v. s. längden af linierna ad = x och dp = y. Vi antaga vidare att man har sig bekant denna relation emellan x och y:

$$y = \tfrac{1}{2} x$$

Det kan nu visas, att denna eqvation innehåller samma lag, som den räta linien am representerar; tilldela vi nämnligen åt x efterhand värdena: 1, 2, 3, o. s. v., så erhålla y de motsvarande värdena: $\frac{1}{2}$, 1, $\frac{3}{2}$, o. s. v., och uppgör man en grafisk konstruktion med dessa hvarandra motsvarande x- och y-värden, i det x-värdena afsättas på linien ab och y-värdena på linien ac, så uppstår en följd af punkter, hvilka alla ligga på den räta linien am. I detta fall säges eqvationen $y = \frac{1}{2} x$ vara den ifrågavarande räta liniens *eqvation*. Linien ab benämnes vanligen *x-axel* och linien ac *y-axel*. Tvenne till hvarandra hörande värden af x och y benämnes åter *koordinater* för den punkt, hvars läge de bestämma, eller än bestämdare: *vinkelräta koordinater*. Punkten a benämnes slutligen *koordinaternas begynnelsepunkt* eller *origo*.

På ett liknande sätt kan man grafiskt konstruera hvilken eqvation som helst emellan tvenne obekanta eller föränderliga storheter; man tilldelar åt den ena af dessa obekanta, som då benämnes den *oberoende föränderliga storheten*, eller kortare endast den *oberoende föränderliga*, numeriska värden, ofta de hela talen 1, 2, o. s. v., och söker förmedelst den gifna eqvationen de motsvarande y-värdena. Härefter företages konstruktionen på samma sätt, som blifvit följdt i det föregående. Man finner genom sådana konstruktioner, att hvarje eqvation af första graden alltid representerar någon rät linie och omvändt låter sig äfven bevisas, att hvilken rät linie som helst kan angifvas medelst en eqvation (likhet) af första graden.

För jemförelsens skull, vända vi oss nu till en eqvation af andra graden, d. v. s. till en sådan, der endera af de båda föränderliga x och y, eller ock båda två förekomma upphöjda till andra digniteten, eller multiplicerade med hvarandra. Med en *dignitet* eller *potens* menas då en produkt af ett visst antal faktorer; andra digniteten af 2 är t. ex. produkten af tvenne faktorer, hvar ock en lika med två, eller $2 \times 2 = 4$. Sålunda är $y = x^2$ eller $y = x \times x$ en eqvation af andra graden; äfvenså $xy = 1$, o. s. v. Den eqvation, vi här närmare skola betrakta, är denna

$$x^2 + y^2 = 1$$

För att konstruera densamma äro vi nödsakade att i minnet återkalla några satser, som läras i begynnelsegrunderna af geometrin och algebran. Dessa satser äro för öfrigt af den enkla natur, att vi alldeles icke draga i betänkande att förutsätta desamma såsom fullkomligt bekanta af enhvar.

1. Uti en rätvinklig triangel är qvadraten, som uppritas på den emot den räta vinkeln stående sidan, lika stor till sitt innehåll, som summan af qvadraterna på de båda, den räta vinkeln omfattande sidorna. Denna sats är bekant under namnet af den *pythagoreiska*. Ytinnehållet af en qvadrat erhålles genom att multiplicera längden af dess sida med sig sjelf, d. ä. genom att upphöja längden af denna sida till andra digniteten; betecknas således längden af den emot den räta vinkeln stående sidan uti en rätvinklig triangel med a och de båda andra sidornas längd med b och c, så är enligt den anförda satsen:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

2. I algebran eller den allmänna arithmetiken läres att produkten af tvenne positiva tal blifver positiv; att produkten af tvenne negativa tal likaledes blifver positiv, men att produkten af ett negativt tal och ett positivt tal blifver negativ. Häraf följer omedelbart, att produkten af ett jemnt antal negativa faktorer alltid är positiv, men produkten af ett udda antal sådana faktorer alltid är negativ.

I enlighet med det, som redan blifvit nämndt, kallas produkten af n lika stora faktorer n^{te} digniteten af en sådan faktor; man betecknar en sådan dignitet genom att utsätta bokstafven n något till höger öfver den bokstaf, som beteknar den ifrågavarande faktorn. Betydelsen af följande eqvation är numera fullt klar:

$$a = b^n;$$

densamma utsäger nämnligen att om n stycken faktorer, hvar och en lika med b, multipliceras med hvarandra så blifver produkten lika med talet a. För att återigen kunna angifva storleken af b, för den händelse att a är bekant, begagnar man sig af ett beteckningssätt, som numera är allmänt antaget i mathematiken; man säger nämnligen antingen, att b är lika med a upphöjd till digniteten $\frac{1}{n}$ eller ock, att b är lika med n^{te} roten ur a. Om man således fasthåller denna öfverenskommelse, så följa eqvationerna

$$b = a^{\frac{1}{n}}$$

och $$b = \sqrt[n]{a},$$

der $\sqrt{}$ utmärker rottecknet, omedelbart ur eqvationen $a = b^n$

Den händelse, då $n = 2$, skola vi litet närmare betrakta. Man utsätter först och främst icke 2 öfver rotmärket, utan betecknar helt enkelt med $\sqrt{a}$ andra roten ur a eller, såsom ock säges, qvadratroten ur a, emedan a uttrycker innehållet af den qvadrat, hvars sida är lika med $\sqrt{a}$. Om man nu undersöker betydelsen af eqvationen $a = b^2$, och lägger märke dertill att produkten af tvenne negativa tal blifver negativ, så inses att hvardera af de tvenne följande händelserna kunna ega rum, nämnligen

$$1{:}o \quad a = (+b)(+b)$$

d. v. s. a lika med produkten af tvenne faktorer, hvar och en lika med $+ b$, eller

$$2{:}o \quad a = (-b)(-b)$$

d. v. s. a lika med produkten af tvenne faktorer, hvar och en lika med $-$ b. Ur eqvationen $a = b^2$ följer derföre, att såväl $+ b = \sqrt{a}$, som ock att $- b = \sqrt{a}$. Denna dubbla betydelse, som alltid återfinnes då frågan är om qvadratrötter, utmärkes derigenom att man utsätter dubbeltecknet $\pm$ framför rotmärket. Upplösningen till eqvationen $a = b^2$ är sålunda

$$b = \pm \sqrt{a},$$

d. v. s. att såväl värdet $b = + \sqrt{a}$ som värdet $b = - \sqrt{a}$ uppfyller det vilkor, som uttryckes medelst likheten $a = b^2$. Till den allmännare eqvationen $a = b^n$ finner man n stycken värden för b, som uppfylla det genom ifrågavarande eqvation uttryckta vilkoret; läran om huru dessa värden finnas och angifvas afhandlas i algebran, men är för oss nu af underordnad betydelse.

3. Om en eqvation innehåller en enda obekant storhet, så kan värdet för denna härledas ur sjelfva eqvationen. Taga vi såsom ett exempel denna eqvation

$$5x + 3 = 4,$$

så finner man genast, att x ej kan hafva annat värde än $\frac{1}{5}$. Ur en eqvation af mera allmän beskaffenhet, d. ä. en sådan, i hvilken de såsom bekanta förutsatta talen äro på ett allmänt sätt betecknade medelst bokstäfver, finner man äfven ett allmännare uttryck för den obekanta. Så finner man t. ex. ur eqvationen

$$ax + b = c:$$

$$x = \frac{c - b}{a}$$

Det värde, man ur en eqvation härleder för den obekanta, benämnes *rot* till ifrågavarande eqvation. Innehåller den ifrågavarande eqvationen, såsom i det senast anförda fallet, endast den första digniteten af den obekanta, så kallas hon en *eqvation af första graden*. Med en *eqvation af andra graden* förstår man åter en sådan eqvation, i hvilken den andra digniteten af den obekanta ingår, och i analogie härmed klassificeras eqvationerna af högre grader. Ur en eqvation af första graden kan man aldrig finna mer än ett värde för den obekanta, men detta värde kan alltid angifvas medelst vanliga tal eller bokstäfver och är till sitt tecken antingen positivt eller negativt. En eqvation af andra graden kan deremot alltid lösas på tvenne sätt, ehuru dessa lösningar understundom kunna vara alldeles lika. Såsom ett exempel på en eqvation af andra graden anföra vi denna

$$x^2 = 1,$$

ur hvilken man finner såväl $x = + 1$, som $x = - 1$; hvardera af dessa värden tillfyllestgöra nämnligen det vilkor, som uttryckes medelst den ifrågavarande eqvationen, eller göra den ifrågavarande eqvationen identisk, hvilket består deruti att densamma, efter det man infört värdet för x, öfvergår till identiteten

$$1 = 1.$$

Eqvationen

$$x^2 = - 1$$

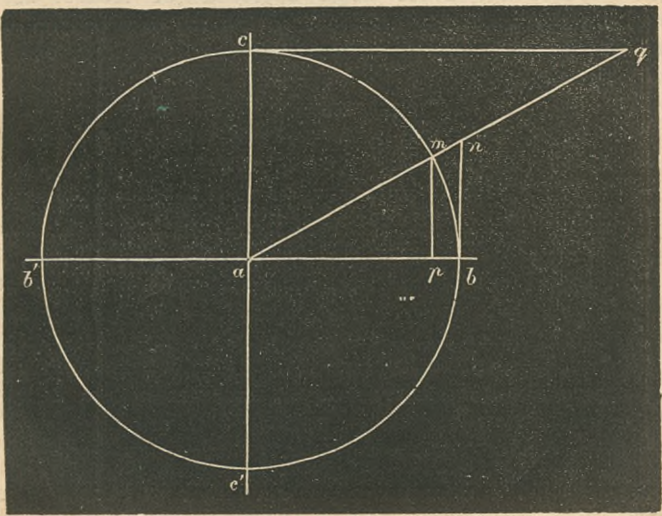
kan äfven lösas på tvenne sätt, men dessa lösningar äro väsendtligen olika de föregående. Vi kunna nämnligen ej uttrycka dessa lösningar medelst vanliga tal och tecknen + eller —; ty det gifves intet sådant tal, hvars andra dignitet vore — 1. De ifrågavarande lösningarne kunna derföre endast uttryckas medelst symbolen

$$\pm \sqrt{-1}$$

hvarmed förstås en qvantitet, hvars andra dignitet är lika med — 1.

De vanliga positiva och negativa talen kunna grafiskt framställas såsom längder på en och samma räta linie; räknas de positiva talen t. ex. åt höger från en gifven punkt, så räknas de negativa talen åt venster. Sålunda antagas x på figuren 13 hafva positiva värden till höger om punkten a, d. v. s. i riktningen åt b, men negativa i motsatt riktning, och på samma sätt antages y positivt i riktningen åt c, men negativt i den motsatta riktningen. Men i denna talserie, äfven om densamma utsträckes huru långt som helst på båda sidor om nollpunkten, finnes ingen plats för symbolen $\sqrt{-1}$; om derföre en eqvation innebär en lösning, som endast kan angifvas medelst en sådan symbol, så bevisar detta, att en sådan lösning ej motsvarar något resultat, som sammanhänger med frågan, d. v. s. lösningen utvisar att den gifna eqvationen innebär en absurditet. Frågar man t. ex. hvilket tal är så beskaffadt, att detsamma multipliceradt med sig sjelf gifver till produkt den negativa enheten eller — 1, så innebär en sådan fråga en motsägelse, sedan begreppen af positivt och negativt eller af betydelsen af tecknen + och — en gång blifvit fastställda, såsom är antaget i algebran. Men uppställes denna fråga i en eqvation, så måste denna nödvändigt leda till ett resultat, der symbolen $\sqrt{-1}$ förekommer. Den ifrågasatta uppgiften leder äfven ögonblickligen till eqvationen $x^2 = -1$, hvilken, såsom vi redan sett, endast innebär en symbolisk lösning. Emedan en sådan lösning ej har någon reel betydelse såsom svar på en förelagd fråga, så benämnes densamma äfven en *imaginär lösning*, och i analogi härmed benämner man $\sqrt{-1}$ den *imaginära enheten*, ehuru denna benämning ej är fullt egentlig.

Fig. 14.



Vi återgå nu till konstruktionen af eqvationen

$$y^2 + x^2 = 1$$

och upprita för den skull i fig. (14) tvenne räta linier, som korsa hvarandra i räta vinklar. På linien b ab afsätta vi x-värdena, hvilka räknas positiva från a åt b, men negativa från a åt b'; på linien c'ac afsätta vi åter y-värdena, positiva uppåt från a och negativa nedåt. Slutligen beskrifva vi en cirkel kring punkten a såsom medelpunkt, hvars radie vi antaga vara lika med enheten. Denna cirkel går genom punkterna b, c, b' och c', så att linien ab representerar $x = +1$, linien ab': $x = -1$ och på samma sätt motsvara ac och ac': $y = +1$ och $y = -1$.

Eqvationen $x^2 + y^2 = 1$ visar i enlighet med det ofvan framställda, att följande x- och y-värden höra tillsammans, d. v. s. äro koordinatvärden för punkter på den linie, som representeras af den anförda eqvationen,

$$x = 0;\ y = +1$$
$$x = 0;\ y = -1$$
$$x = +1;\ y = 0$$
$$x = -1;\ y = 0.$$

Denna linie går således genom punkterna b, c, b' och c'. För att finna andra punkter på samma linie, drager man genom punkten a en rät linie i godtycklig riktning och afsätter på densamma stycket am, hvars längd oberoende af tecknet är 1. Drages nu mp vinkelrät emot ab, så äro $mp = y$ och $ap = x$ koordinaterna för punkten m, och emedan dessa linier omfatta en rät vinkel, så är

$$\overline{am}^2 = \overline{ap}^2 + \overline{pm}^2$$

eller

$$1 = x^2 + y^2;$$

punkten m hör således till den linie, som representeras af vår gifna eqvation. På samma sätt befinnes, att hvarje punkt, hvars afstånd från punkten a är lika med am eller med enheten, äfven är en punkt på denna linie, eller med andra ord, att denna linie just är cirkeln bcb'c'. Eqvationen $1 = x^2 + y^2$ är således eqvationen för en cirkel, hvars medelpunkt ligger i koordinaternas begynnelsepunkt, och hvars radie är 1; eqvationen för en kring samma punkt beskrifven cirkel, hvars radie är r, befinnes på samma sätt vara

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

De rätvinkliga koordinaterna för punkter på en med radien 1 kring origo beskrifven cirkel stå i rätt anmärkningsvärda relationer till hvarandra och hafva äfven erhållit särskilda benämningar, då de angifvas såsom beroende af cirkelbågarne eller dessas motsvarande vinklar vid cirkelns medelpunkt. Då dessa linier spela en ytterst vigtig rol vid flera tillfällen och ej minst i astronomin, så torde några meddelanden om desamma här ej kunna undvikas. Vi skola först redogöra för den härvid brukliga terminologin.

Om linien b'b för korthetens skull benämnes x-axel och cirkelbågarna räknas från punkten b i riktning åt c, b', o. s. v.

så benämnes det vinkelräta afståndet från en båges ändpunkt till x-axeln: *Sinus* för den ifrågavarande bågen. Sålunda är pm Sinus för bågen bm eller för vinkeln bam. Afståndet från punkten p till cirkelns medelpunkt benämnes åter *Cosinus* för samma båge bm eller vinkel bam. Cosinus och Sinus för en båge äro således ingenting annat än de rätvinkliga koordinaterna för bågens ändpunkt, förutsatt att bågen hör till en kring origo med radien 1 beskrifven cirkel.

Såsom bekant är, angifves storleken af en cirkelbåge eller den motsvarande vinkeln vid cirkelns medelpunkt i grader, minuter och sekunder. Man indelar hela omkretsen i 360^0 (grader), hvarje grad i 60' (minuter) och hvarje minut i 60'' (sekunder); vill man angifva än mindre delar af en båge än en sekund, så utsätter man bråkdelar af sekunden, nämnligen i decimaler. Hela omkretsen eller 360^0 motsvara fyra räta vinklar; fjerdedelen häraf eller 90^0 motsvarar således en rät vinkel. På grund af det, som redan blifvit anfördt om koordinatvärdena för de fyra punkterna b, c, b' och c', hvilka ligga 90^0 från hvarandra, inses nu lätt, att

Sinus för 0^0 eller Sin. $0^0 = 0$; Cosinus för 0^0 eller Cos. $0^0 = +1$

Sin. $90^0 = +1$; Cos. $90^0 = 0$
Sin. $180^0 = 0$; Cos. $180^0 = -1$
Sin. $270^0 = -1$; Cos. $270^0 = 0$
Sin. $360^0 =$ Sin. 0^0; Cos. $360^0 =$ Cos. 0^0
o. s. v. o. s. v.

Sedan de äldsta tider har man fäst synnerlig uppmärksamhet vid problemet att upprita en qvadrat, hvars ytinnehåll vore lika stort med en gifven cirkels; och detta ej utan orsak, då lösningen af detta problem är af största vigt för mångfaldiga andra undersökningar. Denna uppgift sammanhänger emellertid på det allra närmaste med en annan, nämnligen med den, att finna längden af en cirkels periferi eller omkrets, då längden af dess radie är bekant. Båda dessa frågor utgöra kärnan uti det berömda problemet, som blifvit kalladt *quadratura circuli*, och på hvars lösning så mången i förgångna tider tänkt sig vansinnig. Man vet nu att det numeriska förhållandet emellan cirkelns omkrets och dess radie ej kan angifvas medelst ett exakt tal, utan endast medelst ett decimalbråk, hvilket fortgår oändlighet utan att någonsin afbrytas. Man har sig dock nu så många af dessa decimaler bekanta, att det ifrågavarande förhållandet emellan cirkelns omkrets och dess radie är mer än tillräckligt noga bekant för alla händelser, då kännedomen af detsammas numeriska värde är behöflig. Vanligen betecknar man med bokstafven π längden af cirkelns halfva omkrets, då radien är 1; för denna längd har man funnit följande värde

$$\pi = 3.14159265358979\ldots$$

Förutom de här utsatta decimalerna äro ännu flera hundrade beräknade och kända. Likväl är kännedomen af desamma ej särdeles gammal. År 1596 utgaf *Ludolph* ett verk, deri talet π för första gången var uträknadt med 20 decimaler; före hans tid angaf man detsamma oftast under formen af ett vanligt bråk, hvilket dock alltid mer eller mindre afvek och måste afvika från det verkliga värdet. Då den noggrannhet, hvarmed man i olika tider och hos olika folkslag kunnat uppgifva ifrågavarande numeriska storhet, är ett ej alldeles ovigtigt kännemärke på det då herrskande kulturtillståndet, så anföra vi här några uppgifter härom. För att derjemte på ett beqvämt sätt vinna en insigt om den noggrannhet, hvarmed uppgifterna i vanlig bråkform angifva talet π, skola vi äfven anföra deras värden uttryckta i decimalbråk.

Uppgiften: $\pi = \frac{22}{7} = 3.1429$ är urgammal och det torde vara svårt att afgöra ursprunget till densamma. I anseende till det särdeles enkla sätt, hvarpå π angifves, är afvikelsen i tredje decimalen från det riktiga värdet ej att anse för synnerligen stor. Vid många tillfällen är denna uppgift derföre af stort värde.

Den berömde Archimedes bevisade att talet π måste ligga emellan

$$\tfrac{22}{7} = 3.1429$$

och

$$\tfrac{223}{71} = 3.1408$$

Medeltalet af dessa uppgifter afviker emellertid redan i 4:de decimalen från det rätta.

Den redan omtalade kardinalen Nicolaus af Cusa har på mångfaldigt sätt försökt att bestämma π; af hans uppgifter häröfver är värdet $\pi = 3.1423$ det, som närmast öfverensstämmer med sanningen.

Då vi nu se huru sent detta tal med någon större noggrannhet blef kändt i vesterlanden oaktadt mångfaldiga bemödanden att bestämma detsamma ej fattades, så synes det i hög grad förvånande att de gamla Inderna redan kände till det särdeles noggranna värdet

$$\pi = \tfrac{3927}{1250} = 3.14160000\ldots$$

hvilket endast med 0.00000735 skiljer sig från det rätta.

En särdeles beqväm och på samma gång noggrann form för π synes hafva först blifvit angifven af en viss Metines i Holland ungefär samtidigt som Ludolphs verk offentliggjordes. Denna form är

$$\pi = \tfrac{355}{113} = 3.14159292$$

och, såsom man ser, angifver densamma det verkliga värdet så när som på 0.00000027. Detta enkla uttryck för π är således ej allenast vida noggrannare än de öfriga ofvananförda, utan äfven sanningen så nära kommande att man nästan alltid vid numeriska räkningar kan betjena sig af detsamma, utan att dessa i väsendtlig mon häraf blifva felaktiga.

Sedan längden af halfva periferien uti den cirkel, hvars radie är $= 1$, engång blifvit funnen, förelåg ingen svårighet att angifva såväl längden af hvilken cirkelbåge som helst, utan äfven cirkelns ytinnehåll. Sålunda är, om man med bokstafven r betecknar en cirkels radie, längden af hela dess omkrets:

$$2\pi\ r,$$

samt innehållet af dess yta:

$$\pi\ r^2.$$

Längden af den qvadrats sida, hvars ytinnehåll är lika med cirkelns, finner man genom att söka qvadratroten ur det tal, som angifver ifrågavarande ytinnehåll, eller just ur $\pi\ r^2$. Denna qvadratrot befinnes då vara:

$$r\sqrt{\pi} = r.\ 1,77245\ldots$$

eller ungefärligen $= r.\ \frac{904}{510}$.

I denna enkla formel ligger lösningen af det beryktade problemet att finna cirkelns qvadratur eller ytinnehåll.

Längden af den cirkelbåge, som motsvarar en grad, finner man genom att dividera hela omkretsens längd med antalet af grader, som hela omkretsen innehåller; således är

$$\text{längden af } 1^\circ = \frac{\pi.\ r}{180} = r.\ 0.0174533$$

och på samma sätt finner man

$$\text{längden af } 1' = \frac{\pi.\ r}{180.\ 60} = r.\ 0.000290889$$

$$\text{längden af } 1'' = \frac{\pi.\ r}{180.\ 60.\ 60} = r.\ 0.000004848$$

Återgå vi efter denna framställning om huru cirkelbågar uppmätas på räta linier, till betraktelsen af de linier, som benämndes Sinus och Cosinus, så kunna vi numera vinna en föreställning om betydelsen af desamma, äfven om argumentet, som förut antogs vara en cirkelbåge, nu åter förutsättes vara en lineer storhet. Såsom vi nämnligen hafva sett, motsvarar talet π, hvilket uttrycker längden af en linie, cirkelbågen eller vinkeln 180^0; likaså motsvarar 2π vinkeln 360^0, 3π vinkeln 540^0, eller 180^0 o. s. v.; vi hafva derföre

$$\text{Sin. } \pi = \text{Sin. } 2\pi = \text{Sin. } 3\pi = \ldots = 0.$$

Deremot är

$$\text{Sin. } \tfrac{1}{2}\pi = \text{Sin. } 90^0 = +1$$
$$\text{Sin. } \tfrac{3}{2}\pi = \text{Sin. } 270^0 = -1$$
$$\text{Sin. } \tfrac{5}{2}\pi = \text{Sin. } 450^0 = \text{Sin. } 90^0 = +1$$

o. s. v.

Om vi derföre i allmänhet med x beteckna ett argument *, så är Sin. x en storhet, som aldrig antager värden utom gränserna + 1 och — 1, argumentet x må variera huru som helst, men dessa gränsvärden, äfvensom alla derimellan liggande antager Sin. x upprepade gånger, om x antages växa mer och mer utan afbrott.

Tänka vi oss nu denna eqvation emellan de båda föränderliga x och y:

$$y = \text{Sin. } x,$$

samt x och y uppmätta på tvenne mot hvarandra vinkelräta linier, så kan den kroklinie, som denna eqvation representerar, grafiskt konstrueras, alldeles på samma sätt, som cirkeln ofvan blef framställd i enlighet med dess eqvation. För att likväl kunna konstruera sinuseqvationen, erfordras kännedom af de numeriska värden af Sin. x, som motsvara hvilka numeriska värden som helst af argumentet. Det skulle dock föra oss alltför långt att här intaga en redogörelse för, huru beräkningen af sådana värden utföres, hvarföre här endast må anföras följande:

$$\text{Sin. } \frac{\pi}{6} = \text{Sin. } (2\pi + \frac{\pi}{6}) = \text{Sin. } (4\pi + \frac{\pi}{6}) = \ldots = \text{Sin. } 30^0 = \tfrac{1}{2}$$

$$\text{Sin. } (\pi - \frac{\pi}{6}) = \text{Sin. } (3\pi - \frac{\pi}{6}) = \text{Sin. } (5\pi - \frac{\pi}{6}) = \ldots =$$
$$\text{Sin. } 450^0 = \tfrac{1}{2}$$

$$\text{Sin } (\pi + \frac{\pi}{6}) = \text{Sin. } (3\pi + \frac{\pi}{6}) = \text{Sin. } (5\pi + \frac{\pi}{6}) = \ldots =$$
$$\text{Sin. } 210^0 = -\tfrac{1}{2}$$

$$\text{Sin. } (-\frac{\pi}{6}) = \text{Sin. } (2\pi - \frac{\pi}{6}) = \text{Sin. } (4\pi - \frac{\pi}{6}) = \ldots =$$
$$\text{Sin. } 330^0 = -\tfrac{1}{2}$$

---

* Man benämner den föränderliga, af hvilka Sinus och Cosinus äro beroende, vanligen argument, emedan man efter detsamma kan uppslå numeriska värden för dessa linier i trigonometriska tabeller.

$$\text{Sin.}\ \frac{\pi}{4} = \text{Sin.}\ (2\pi + \frac{\pi}{4}) = \ldots = \text{Sin.}\ 45^\circ = \sqrt{\tfrac{1}{2}} = 0.7071$$

$$\text{Sin.}\ (\pi - \frac{\pi}{4}) = \text{Sin.}\ (3\pi - \frac{\pi}{4}) = \ldots = \text{Sin.}\ 135^\circ = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

$$\text{Sin.}\ (\pi + \frac{\pi}{4}) = \text{Sin.}\ (3\pi + \frac{\pi}{4}) = \ldots = \text{Sin.}\ 225^\circ = -\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

$$\text{Sin.}\ (\ -\frac{\pi}{4}) = \text{Sin.}\ (2\pi - \frac{\pi}{4}) = \ldots = \text{Sin.}\ 315^\circ = -\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

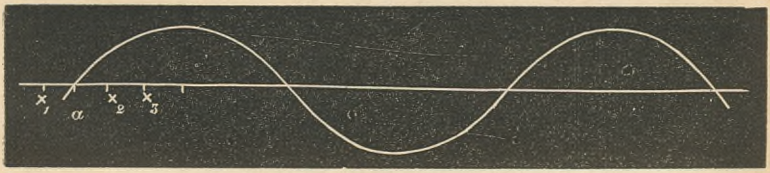
Dessa värden äro tillräckliga, för att vi med dem skola kunna erhålla en föreställning om förloppet af den s. k. sinuslinien, d. ä. den linie, hvars eqvation är $y = \text{Sin.}\ x$. Taga vi nämnligen i nedanstående figur punkten a till begynnelsepunkt samt afsätta på linien b b styckena $x_1a = -\frac{1}{6}\pi = -0.5236$, $ax_2 = +\frac{1}{6}\pi = +0.5236$.., $ax_3 = +\frac{1}{4}\pi = +0.7854$, $ax_4 = +\frac{1}{2}\pi = +1.5708$, o. s. v., så blifva de motsvarande y-värdena

$$\begin{aligned} y_1 &= -\tfrac{1}{2} \\ y_0 &= \ \ 0 \\ y_2 &= +\tfrac{1}{2} \\ y_3 &= +0.7071 \\ y_4 &= +1 \end{aligned}$$

o. s. v.

Sedan de sålunda bestämda punkterna blifvit fixerade på figuren, finner man den ifrågavarande linien, som här blifvit antydt.

Fig. 15.



I analogi härmed konstrueras cosinuslinien, hvars eqvation är $y = \text{Cos.}\ x$; densamma är af alldeles samma utseende som sinuslinien, och skiljer sig från denna endast genom sitt läge. Flyttas origo till punkten x_4, så representerar den uppritade linien den sistanförda eqvationen.

Innan vi gå att visa den särdeles vigtiga betydelse, som de sednast anförda linierna eller andra till samma klass hörande hafva, då man vill angifva lagarna för ojemnheter i himlakropparnes rörelser, skola vi ej underlåta att påpeka en användning af helt annat slag af samma linier. Den användning, vi härmed åsyfta, utgör föremålet för en särskild disciplin af mathematiken och denna benämnes trigonometri. Naturligtvis kan här ej lemnas någon framställning af denna afdelning inom mathematiken, men det torde dock låta sig göra, att med stöd af det föregående medelst ett exempel göra äfven dem bekanta med trigonometrins ändamål och huru detta vinnes, som ej af annan anledning funnit sig föranlåtna att taga kännedom om denna vetenskapsgren.

Afsätter man på sidan ab uti en rätvinklig triangel (fig. 13, pag. 76) punkten d och drager från densamma den räta linien dp vinkelrätt mot ab, så läres i elementargeometrin, att stycket ad innehålles lika många gånger i ab, som dp i bm, eller som ap i am. Med tecken uttryckes denna sats sålunda:

$$\frac{ad}{ab} = \frac{dp}{bm} = \frac{ap}{am}$$

Antages ap såsom enhet hvarmed de här ifrågakommande längderna uppmätas, och betecknas vinkeln mab för korthetens skull med bokstafven P, så är

$$ad = \text{Cos. } P; \; dp = \text{Sin. } P$$

och de ofvan angifna eqvationerna antaga nu följande utseende

$$\frac{\text{Cos. } P}{ab} = \frac{\text{Sin. } P}{bm} = \frac{1}{am}$$

eller

$$ab = am \text{ Cos. } P; \; bm = am \text{ Sin. } P.$$

Om således vinkeln P är bekant, äfvensom sidan am, så kan medelst en numerisk räkning enligt dessa formler finnas längden af sidorna ab och bm. Är åter bm bekant, så framgår längden af ac ur formeln

$$am = \frac{bm}{\text{Sin. } P}$$

Enligt denna formel finner man t. ex. månens afstånd från jorden om dess horisontalparallax är 57 30′ och jordens radie antages vara 859 geogr. mil. Ur trigonometriska tabeller finner man nämnligen

$$\text{Sin. } 57' \; 30'' = 0.016725$$

man erhåller derföre:

$$\text{månens afstånd} = \frac{859}{0.016725} \text{ geogr. mil} = \frac{1}{0.016725} \text{ jordradier}$$

$$= 51359 \text{ geogr. mil} = 59{,}79 \text{ jordradier.}$$

I anseende till den betydelse, som qvantiteterna Sinus och Cosinus hafva för trigonometrin, benämnas desamma äfven trigonometriska linier eller trigonometriska funktioner*, men dessa båda storheter äro icke de enda, som sammanfattas under denna benämning. Man begagnar nämnligen åtminstone för fyra andra linier särskilda benämningar och dessa äro i figuren (14) linierna bn och an, cq och aq. De förra båda benämnes *tangent* och *cotangent* och de båda senare *secant* och *cosecant*. Dessa liniers egenskaper äro dock särdeles lätt härledda ur sinus och cosinus, hvarföre vi endast högst flygtigt skola uppehålla oss vid dem. Ur trianglarne amp och anb (fig. 14) finner man, då radien am tages till enhet och vinkeln map betecknas med P

$$1)\ \frac{mp}{ap} = \frac{nb}{ab}, \text{ d. v. s. } \frac{\text{Sin. P}}{\text{Cos. P}} = \frac{\text{tang. P}}{1} = \text{tang. P}$$

$$2)\ \frac{am}{ap} = \frac{an}{ab}, \text{ d. v. s. } \frac{1}{\text{Cos. P}} = \frac{\text{Sec. P}}{1} = \text{Sec. P}$$

och på samma sätt befinnes $\frac{\text{Cos. P}}{\text{Sin. P}} = \frac{1}{\text{tang. P}} = \text{Cotang. P};$ $\frac{1}{\text{Sin. P}} = \text{Cosec. P.}$

Efter denna digression på det rent mathematiska området återvända vi till framställningen om lagen för planeternas andra ojemnhet. Redan ett flygtigt betraktande af fig. 12 visar att denna ojemnhet på något sätt sammanhänger med sinus- och cosinusfunktionerna; ty linien, som representer densamma, visar tydligen en analogi med sinus- och cosinus-kurvorna. För att nu närmare bestämma, huruledes den ifrågavarande ojemnheten är beroende af sinus- och cosinusfunktionerna, förfar man på följande sätt. Man gör sig först reda för det argument (oberoende variabel) hvaraf ojemnheten, betraktad såsom en annan föränderlig eller funktion, är beroende; i föreliggande fall, då planetens ställning till solen antogs vara densamma, beror fenomenet i sjelfva verket endast af ett argument, eller är en funktion af endast en föränderlig, och denna är planetens längd, hvilken vi skola beteckna med bokstafven λ. De numeriska värden, som i det föregående blifvit anförda för planetens rörelsebelopp, äro nu tillika att betrakta såsom numeriska värden af den funktion, hvars allmänna beskaffenhet vi skola försöka

---

* I allmänhet benämnes en storhet funktion af en annan, om den förra medelst några mathematiska operationer, för öfrigt hvilka som helst, kan härledas ur den sednare. Sålunda är t. ex. uttrycket $2x + 1$ en funktion af x och äfvenså $\sqrt{x^2 - 1}$, o. s. v. På samma sätt säges y vara en funktion af x, om en eqvation emellan x och y blifvit satt under denna form y = ett uttryck, deri x ingår.

att bestämma. För detta ändamål förutsätta vi att densamma har formen

$$h = a + b \text{ Cos. } \lambda + c \text{ Sin. } \lambda$$

der h betecknar rörelsens belopp, men a, b och c storheter, hvilka ännu äro obekanta. Orsaken hvarföre vi förutsätta just denna form, är af det föregående klar; fenomenets uppenbara analogi med en sådan form gör densamma här antaglig och i alla händelser skall resultatet af vår undersökning visa, huruvida denna föutsättning var berättigad eller ej.

Af de numeriska värden, hvilka äro bekanta, utvälja vi tre, hvilkas argument (längd) skilja sig på ungefär 120^0. Dessa värden leda till följande eqvationer

$$\begin{aligned} &1865 \text{ Mars } 11 \quad 1^0\ 53' = a + b \text{ Cos. } 80^0 + c \text{ Sin. } 80^0 \\ &1856 \text{ Juli } 9 \quad 1^0\ 52' = a + b \text{ Cos. } 198^0 + c \text{ Sin. } 198^0 \\ &1860 \text{ Nov. } 26 \quad 2^0\ 34' = a + b \text{ Cos. } 335^0 + c \text{ Sin. } 335^0 \end{aligned}$$

eller

$$\begin{aligned} 1^0\ 53' &= a + 0.174\, b + 0.984\, c \\ 1\ \ 52 &= a - 0.951\, b - 0.309\, c \\ 2\ \ 34 &= a + 0.906\, b - 0.423\, c \end{aligned}$$

Ur dessa trenne eqvationer kan man bestämma de tre obekanta storheterna a, b ech c, och finner efter en ganska kort räkning:

$$\begin{aligned} a &= +\ 2^0\ 7' \\ b &= +\ 21' \\ c &= -\ 18' \end{aligned}$$

Beräknar man nu härpå ur formeln

$$h = 2^0\ 7' + 21' \text{ Cos. } \lambda - 18' \text{ Sin. } \lambda$$

med alla de argumentvärden för λ, som blifvit anförda under a) pag. 74, de motsvarande värdena för h, så befinnes dessa vara följande:

λ	h
97^0	$1^0\ 47'$
132	1 40
165	1 42
198	1 52
247	2 15
335	2 34
33	2 15
80	1 53

Jemföras dessa ur den mathematiska formeln beräknade värden med verkliga, så visar sig visserligen här och der någon skiljaktighet, men öfverhufvud angifver dock ifrågavarande formel naturföreteelsens förlopp, åtminstone ungefär. Hade man önskat en större öfverensstämmelse emellan formeln och den följd af numeriska värden, densamma skall återgifva, så hade äfven sådant låtit sig göra; man hade för detta ändamål endast behöft antaga ett större antal periodiska termer, t. ex. förutom de redan i formeln befintliga d Cos. 2λ + e Sin. 2λ. I allmänhet kunna naturföreteelser af periodisk natur alltid angifvas medelst formler, som innehålla en följd af cosinus- och sinustermer, förutsatt att fenomenet öfverhufvud kan underkastas mathematisk behandling. I föreliggande fall skulle man dock ej vinna mycket genom att utsträcka undersökningen i denna riktning; ty inflytendet af den s. k. andra ojemnheten kan möjligtvis ännu i någon ringa mån utöfva inflytande. Emellertid kan man dock förmedelst den funna formeln beräkna det ungefärliga inflytande, som den första ojemnheten utöfvar på planetens längd, naturligtvis under förutsättning att planetens ställning till solen är densamma, som vid de tillfällen för hvilka serien a gäller. Men på samma vis kan man äfven för hvarje annan ställning bestämma inflytandet af den första ojemnheten, hvarefter den andra ojemnheten kan undersökas under förutsättning att den första alldeles icke förefinnes.

Det har i den föregående framställningen blifvit lemnadt ett exempel på användningen af de trigonometriska linierna vid en astronomisk undersökning. Betraktad endast såsom ett sådant exempel var dock denna framställning ej ändamålet alldeles motsvarande, emedan uttrycket, som skulle representera de gifna numeriska värdena, ej var af den enklaste beskaffenhet, och således äfven de få termer, som blifvit bestämda, ej voro nog att fullständigt uppfylla sin bestämmelse. Emellertid spela de ifrågavarande funktionerna en så betydelsefull rol vid snart sagdt hvarje tillfälle, då frågan är af astronomisk beskaffenhet, och äfven vid många andra undersökningar inom den mathematiska fysiken, att ett ytterligare exempel på deras användning ej synes öfverflödigt. Såsom ett sådant skola vi anföra härledningen af en formel, enligt hvilken solens längd kan beräknas. Nedanstående schema innehåller således de för en sådan härledning nödiga data, jemte en sammanställning af de längdvärden, som medelst räkning erhållas ur formeln, hvilken utgör undersökningens resultat. De längdvärden, som anföras såsom observerade, äro visserligen ej omedelbart tagna ur observationer, men derföre icke mindre tjenliga för vårt ändamål; ty desamma bero på ett mycket stort antal observationer och äro resultat af en på theoretisk grund utförd undersökning af dessa. Vi kunna derföre anse dessa längdvärden vara direkte hämtade ur observationer, sedan alla observationsfel blifvit frånskiljda.

Datum.			Solens obs. längd,	längd enl. form.	t.
1867	Jan.	1	280° 38'.0	280° 38'.0	0.0000
	Febr.	1	312 11 .1	312 9 .9	0.0848
	Mars	1	340 26 .4	340 25 .2	0.1615
	Apr.	1	11 16 .1	11 15 .7	0.2464
	Mai	1	40 35 .6	40 35 .6	0.3285
	Juni	1	70 27 .0	70 25 .9	0.4134
	Juli	1	99 5 .7	99 3 .1	0.4956
	Aug.	1	128 41 .2	128 37 .2	0.5804
	Sept.	1	158 30 .9	158 30 .8	0.6655
	Okt.	1	187 48 .0	187 44 .2	0.7474
	Nov.	1	218 35 .1	218 34 .1	0.8333
	Dec.	1	248 50 .2	248 50 .9	0.9145

Talen i den sista kolumnen äro ingenting annat än bråkdelar af året; samma kolumn har blifvit öfverskrifven med bokstafven t, hvarmed vi öfverhufvud beteckna någon del af tiden. Såsom enhet eller såsom mått för tiden antaga vi det tropiska året, hvaraf följer att solens längd ändrar sig med 360° under hvarje sådan tidsenhet. Om nu ändringen af solens längd vore proportionell emot tiden, så borde man t. ex. finna samma längd för den 1 Jan., om man från de öfriga längderna subtraherade bort t. 360°. Utföres denna operation, så befinnas följande resultat träda i dagen:

Jan.	1	280° 38'.0
Febr.	1	281 38 .1
Mars	1	282 17 .4
Apr.	1	282 33 .5
Mai	1	282 18 .8
Juni	1	281 37 .2
Juli	1	280 41 .7
Aug.	1	279 43 .5
Sept.	1	278 56 .1
Oct.	1	278 43 .2
Nov.	1	278 57 .3
Dec.	1	279 37 .6

Det visar sig dock tydligen i dessa tal tillvaron af en ojemnhet, hvilken gör längderna något större om våren och något mindre om hösten än de skulle vara i händelse solens rörelse vore fullkomligt likformig. Äfven synes, att denna ojemnhet är af periodisk natur, hvarföre det ligger nära till hands att mathematiskt uttrycka densamma medelst cosinus- och sinusfunktioner. I det vi således, såsom i det föregående, med λ beteckna längden öfverhufvud, sätta vi:

$$\lambda = a + 360^\circ t + b \operatorname{Cos.} 360^\circ t + c \operatorname{Sin.} 360^\circ t,$$

och skola bestämma de ännu obekanta storheterna a, b och c ur trenne af de förhandenvarande observerade värdena för λ. För detta ändamål utvälja vi följande:

Jan. 1 $\quad 280^\circ\ 38'.0 = a \qquad + b$

Mai 1 $\quad 360^\circ + 40^\circ\ 35'.6 = a + 118^\circ\ 16'.8 + b \operatorname{Cos.} 118^\circ\ 16'.8 + c \operatorname{Sin.} 118^\circ\ 16'.8$

Sept. 1 $\quad 360^\circ + 158^\circ\ 30'.9 = a + 239^\circ\ 34'.8 + b \operatorname{Cos.} 239^\circ\ 34'.8 + c \operatorname{Sin.} 239^\circ\ 34'.8$.

Dessa trenne eqvationer leda till följande värden för de sökta qvantiteterna:

$$a = 280^\circ\ 36'.9$$
$$b = +\ 1'.1$$
$$c = +1^\circ\ 56'.3$$

Såsom jemförelsen emellan de ur formeln
$\lambda = 280^\circ\ 36'.9 - 360^\circ t + 1'.1 \operatorname{Cos.} 360^\circ t + 1^\circ\ 56'.3 \operatorname{Sin.} 360^\circ t$
beräknade värdena för λ och de observerade utvisar, angifver denna formel längderna ganska öfverensstämmande med verkliga förhållandet. De här förekommande differenserna af några minuter äro allt för små att hafva kunnat blifva bemärkta af de gamla astronomerna, och bero dessutom derpå att hela räkningen ej är förd så noggrannt, att minuterna blifvit fullt riktiga. Ofvanstående formel kan emellertid fullt ut anses motsvara noggrannheten af den äldre observationskonsten; och i händelse man då hade funnit samma formel eller någon konstruktion, som motsvarade densamma, så hade man uppfyllt alla fordringar, som från astronomisk synpunkt kunde ställas. Nu för tiden skulle deremot den ifrågavarande formeln ingalunda motsvara observationernas noggrannhet och således ej heller sitt ändamål. Den riktigare formeln innehåller flere termer, af hvilka dock de ofvanstående nära nog ingå såsom de väsentligaste; densamma är nämnligen

$$\lambda = 280^\circ\ 38'.0 + 360^\circ t + 1^\circ\ 55'.1 \operatorname{Sin.} 360^\circ t + 1'.2 \operatorname{Sin.} 2\,(360^\circ t) + \text{flere mindre.}$$

Summan af de båda första termerna benämnes *medellängd*, och summan af de öfriga — så när som på ett större antal ganska små termer, hvilka endast uppgå till några sekunder — *medelpunktseqvation*.

Ojemnheterna i månens rörelse kunna äfven angifvas medelst cosinus- och sinus-funktioner. Betecknar man nämnligen månens medellängd med m, längden af månbanans perigeum med π, samt sättes

$$m - \pi = g,$$

så är medelpunktseqvationen i månens längd uttryckt medelst denna formel:

$$\text{medelp.-eqv.} = 6^\circ\, 17'.3 \text{ Sin. } g + 12'.8 \text{ Sin. } 2\, g + 0'.6 \text{ Sin. } 3\, g + \ldots$$

Betecknas vidare solens medellängd med m'; solbanans perigeum med π', samt sättes

$$m' - \pi' = g',$$

så blifver

$$\begin{aligned} \text{Evektionen} &= 1^\circ\, 20'.5 \text{ Sin. } [2\,(m - m') - g] \\ \text{Varitionen} &= 35'.7 \text{ Sin. } 2\,(m - m') \\ \text{årliga eqvation.} &= 11'.2 \text{ Sin. } g \end{aligned}$$

Alla dessa exempel bevisa hvilken ytterst utbredd användning sinus- och cosinusfunktionerna finna i astronomin; utan att hafva gjort sig förtrogen med dessa funktioner, är det alldeles omöjligt att vinna någon insigt i nämnda vetenskap.

§ 5. Grekernas förklaring af ojemnheterna i solens, månens och planeternas rörelser.

I det föregående hafva vi sett, huruledes icke allenast solen och månen, utan äfven planeterna, då endast de allmänna dragen af deras rörelser blifvit iakttagna, syntes beskrifva cirklar kring jorden såsom medelpunkt. Äfven planeterna Merkurius och Venus, ehuru desamma aldrig aflägsnade sig långt från solen, deltogo dock med denna sednare himlakropp i den allmänna rörelsen. Det var således det närmast till hands liggande att antaga det såsom regel, hvilket den omedelbara iakttagelsen syntes utvisa, och hvilket för öfrigt alltför väl öfverensstämde med det gängse föreställningssättet om verldsbyggnaden. I det man således tänkte sig himlarymden afdelad medelst kristallsferer, erhöll man en ganska naturlig förklaring öfver planeternas rörelser genom att tänka sig dem fästade vid en sådan sfer, hvilken på mer eller mindre lång tid svängde sig kring solen. Efter denna svängningstid uppskattade man äfven de rörliga himlakropparnes afstånd och tänkte sig sålunda dessa rangerade i följande system:

1:sta	sferen	Månen
2:dra	„	Venus
3:dje	„	Merkurius
4:de	„	Solen
5:te	„	Mars
6:te	„	Jupiter
7:de	„	Saturnus

Denna anordning är redan antagen af Aristoteles, men ligger äfven till grund för det ptolemeiska verldssystemet, så benämndt, emedan det framställes i ett stort arbete af Ptolemeus (i medlet af andra århundradet efter Chr. föd.). Ifrågavarande arbete, hvars grekiska titel är μεγάλη σύνταξις, är dock mera bekant under den arabiska benämningen *Almagest*, och har en lång tid utgjort källan för allt astronomiskt studium. Det är äfven kändt, att detta system i hufvudsaken varit antaget redan länge före den tid, då Ptolemeus lefde; åtminstone voro de allmänna dragen af detsamma fullkomligt i öfverensstämmelse med den då herrskande verldsåskådningen. I Ptolemei framställning finner man dock ytterligare fyra sferer, af hvilka den sista är identisk med Aristotelis *primum mobile.* Den 8:de sferen utgör fixstjerneregionen: den 9:de och den 10:de blefvo tillfogade i mening att förklara precessionsfenomenet, hvilket redan blifvit omnämndt och till hvilket vi snart skola återkomma.

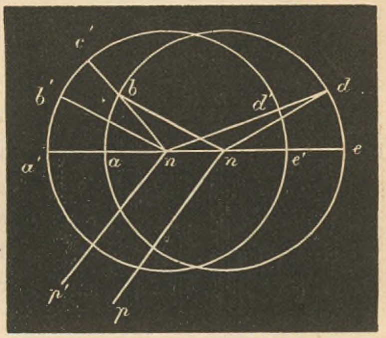
När man begynte att medelst omsorgsfullare iakttagelser undersöka himlakropparnas rörelser, kunde man ej undgå att bemärka de ojemnheter, som i det föregående blifvit omtalade, och hvilka i det aristoteliska systemet, sådant detta ofvan blifvit framställdt, ingalunda funno någon förklaring. Det, som afgjordt visade sig i de omedelbara iakttagelserna, kunde dock ej förnekas, huru mycket detsamma än stred emot det gängse föreställningssättet: en åtminstone geometrisk förklaring måste finnas och borde kunna utletas öfver de, såsom det tycktes, så invecklade rörelserna, derom var intet tvifvel; och bland de intelligenta Grekerna uppstodo män, hvilka med sällsynt snille arbetade på lösningen af den förelagda uppgiften, dock utan att nå sitt mål fullständigt. Felet var dock mindre deras än hela tidsandans, hvilken lade ett oöfverstigligt hinder i vägen för en fullständig lösning. Detta hinder bestod likväl visst icke förnämligast deri, att man antog jorden intaga verldsalltets midt, utan hufvudsakligast i det föreställningssätt, att alla rörelser i de himmelska regionerna skulle försiggå i cirklar och med likformig hastighet. I afseende på jordens läge i hänseende till de olika sferernas medelpunkter tillät man sig tvertom ganska olika antaganden, såsom vi snart blifva i tillfälle att se, och äfvenså tillgrep man hypotheser om sammansatta rörelser kring punkter, hvilka sjelfva voro i rörelse. Men i afseende på rörelsens likformighet och banans cirkelform höll man strängt på den häfdvunna åsigten, hvarföre det problem, som ställdes till Greklands astronomer, hade följande lydelse: *att medelst ett system af likformiga rörelser i cirkelformiga banor förklara ojemnheterna i solens, månens och planeternas skenbara rörelser.*

Väl hade detta problem redan blifvit framställdt vid den tid, då Plato och Aristoteles lefde, och man vet äfven, att redan då försök blifvit gjorda att lösa detsamma, men det var dock först *Hipparchus* (omkring 150 före Chr. föd.), som gaf en vetenskaplig lösning härtill.

Hvad först och främst den s. k. första ojemnheten vidkommer, den enda, som synes hafva blifvit undersökt af Hipparchus, så kunde densamma förklaras på tvenne sätt, hvilka skenbart oberoende af hvarandra, under ett sednare tidskede visades vara identiska. Man kunde nämnligen förklara denna ojemnhet antingen genom hypothesen om en s. k. *excentrisk cirkel* eller genom att antaga rörelsen försiggå i en *epicykel.*

Hypothesen om den excentriska cirkeln bestod helt enkelt deri, att man antog rörelsens medelpunkt ej sammanfalla med jorden. Afståndet emellan jorden och denna medelpunkt benämndes *excentricitet* och utgjorde ett s. k. element, hvilket man sökte att bestämma medelst observationer. Vidstående figur är afsedd att förtydliga denna hypothes. Vi antaga i densamma att t. ex. solen rör sig med likformig hastighet längs periferin af cirkeln abde, men att jordens läge inom denna cirkel är angifvet genom punkten m. Om man nu begynner att undersöka rörelsen från punkten a, der solen är närmast jorden, så visar sig omedelbart, att ändringen af solens längd skenbart antyder en starkare rörelse än solen verkligen har. Under det nämnligen, att solen förflyttat sig från a till b, har dess längd ändrat sig med vinkeln a'mc', emedan solen då synes i rikningen mbc'. Solens längd har således icke allenast ökats med vinkeln a'mb', hvilken är lika stor med vinkeln amb, utan dertill med vinkeln b'mc', hvars storlek tydligen är beroende såväl af vinkeln amb som af excentriciteten mn eller, med andra ord, är en funktion af sistnämnde vinkel och af excentriciteten. Det kan nu medelst högst enkla geometriska betraktelser ådagaläggas att solens rörelse skenbart är starkast i närheten af punkten a, men svagast i den motsatta. Hypothesen om den excentriska cirkeln motsvarar således åtminstone deri det iakttagna förhållandet, att densamma förklarar solens största och minsta hastighet i diametralt motsatta punkter af banan, men äfven öfver hela förloppet af solens årliga rörelse lemnade samma hypothes en förklaring, som i anseende till de äldre observationernas

Fig. 16.



bristfällighet måste anses vara fullt nöjaktig. Om nämligen excentriciteten är mycket liten, så kan man utan att begå något i de äldre iakttagelserna bemärkligt fel, antaga att $b'c' = \overline{mn}$ Sin. (amb); och en analog relation gäller i alla punkter af banan. Betecknas således bågen ab = a'b' med g, excentriciteten mn med e, solens längd med λ, dess medellängd med m, så befinnes, om vårdagspunktens riktning antages gifven genom linien mp' eller np, $\lambda = p'c'$; m = pb = p'b', så ledes äfven

$$\lambda = m + b'c' = m + e \text{ Sin. } g$$

Jemföres detta uttryck med det, som blef angifvet i slutet af föregående §. för solens längd, så befinnes

$$m = 280^{\circ}\ 38'.5 + 360^{\circ}\ t$$
$$g = 360^{\circ}\ t$$
$$e = 1^{\circ}\ 55'.1 = 115'.1$$

då tiden t skall räknas från det ögonblick när solen är i punkten a. Excentriciteten har här blifvit funnen uttryckt i båge, men vanligen angifves detta element såsom ett bråk, då radien tages till enhet. Man vet emellertid, att längden af en 180 graders cirkelbåge angifves medelst talet π; längden af 1' är således, såsom redan förut blifvit angifvet: 0.0002909. Således blifver

$$e = 115.1 \times 0.0002909 = 0.03348$$

Dels emedan densamma är temligen enkel, dels för en ganska intressant jemförelse skola vi meddela den mathematiska utvecklingen af theorien för rörelsen i den excentriska cirkeln. Emedan de räta linierna b'm och bn å fig. 16 äro parallela, så är vinkeln b'mc' = vinkeln mbn. Denna vinkel skola vi kalla B. Ur triangeln mbn finner man dock med stöd af en bekant trigonometrisk formel

$$\text{Sin. } B = \frac{e \text{ Sin. } g}{\sqrt{1 - 2e \text{ Cos. } g + e^2}}$$

I denna eqvation är B den obekanta, som sökes, och densamma kan ur eqvationen lätt härledas under formen af en följd af termer eller serie, i hvilken en följande term alltid är mindre än den föregående och slutligen blifva alldeles omärkliga. Anser man nu redan tvenne termer vara nog att angifva B med tillräcklig noggrannhet, så blifver

$$B = e \,\mathrm{Sin.}\, g + \tfrac{1}{2} e^2 \,\mathrm{Sin.}\, 2g$$

Med det anförda värdet för e finner man, om $\frac{1}{2} e^2$ uttryckes i minuter

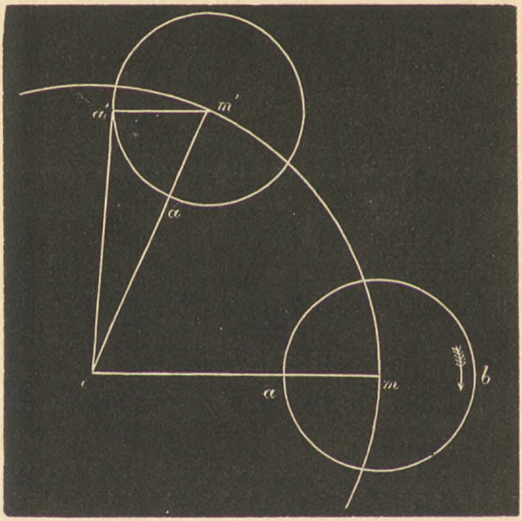
$$\tfrac{1}{2} e^2 = \tfrac{1}{2} \frac{0.001121}{0.0002909} = 1'.97$$

Den andra termen är således vid hypothesen om den excentriska cirkeln befunnen vara något större än i solens verkliga rörelse, men då skilnaden omöjligen kunde urskiljas i de gamla observationerna, så motsvarade denna hypothes i fullt tillfredsställande grad de fordringar, som man med hänseende till iakttagelsernas noggrannhet kunde ställa på densamma. Och något mer kan i ingen händelse fordras, då en hypothes, sådan som den omtalade, omöjligen kan bedömas annorlunda än på grund af det, som genom erfarenheten blifvit bekant, såvida densamma ej är logiskt omöjlig.

Den epicykliska hypothesen leder till samma resultat, som den i det föregående betraktade, nämnligen att med hänseende till iakttagelsernas noggrannhet motsvara de genom sådana vunna fakta i afseende på solens rörelse. I denna hypothes föreställer man sig en punkt med likformig hastighet röra sig i en cirkel kring jorden såsom medelpunkt; men denna rörliga punkt utgjorde åter medelpunkten för en annan cirkel, på hvars omkrets solens rörelse med likformig hastighet försiggick. Huruledes denna hypothes förklarar solens rörelse, visas lätt medelst figuren å föregående sida. Man tänker sig i densamma solen röra sig med likformig hastighet längs omkretsen af den mindre cirkeln, samt vidare dennas medelpunkt äfvenledes med likformig hastighet röra sig längs omkretsen af den större cirkeln. Begynner man med att betrakta rörelsen från punkten a eller m, så synes solen och den mindre cirkelns medelpunkt i detta ögonblick sammanfalla. Antages nu härtill, att solen fulländar ett omlopp i denna cirkel på samma tid som dennas medelpunkt genomlöper den större cirkeln, så synes solen i riktningen oa′ då den mindre cirkelns medelpunkt är i m′, i det vinkeln om′a′ är lika med vinkeln mom′. Vinkeln a′om′ utgör således öfverskottet i längd af solens verkliga rörelse utöfver rörelsen af punkten m. Detta öfverskott tilltager sålänge till dess vinkeln mom' uppnått 90°; härefter aftager detsamma. Följer man vidare rörelsens förlopp, så befinnes, att densamma i öfverensstämmelse med solens verkliga, är starkast, då solen befinner sig i punkten a, men i den diametralt motsatta svagast.

Vid den förklaring, som nu blifvit gifven, antogs att punkten a ständigt är närmast jorden (o); solens rörelse betraktas då relativt till föreningslinien emellan jorden och den mindre cirkelns medelpunkt. Men resultatet blifver

Fig. 17.



precist detsamma, om man antager solen vara oföränderligt fästad vid en punkt af denna cirkels omkrets, samt att denna cirkel ej heller vore försatt i någon rotationsrörelse, eller någon annan rörelse än den, som dess medelpunkt var underkastad. Linien am förflyttade sig under denna förutsättning parallelt med sig sjelf i rymden och sålunda uppkommo precist samma företeelser som de förut beskrifna. Enär dessa båda förutsättningar således leda till samma resultat, så var det omöjligt att afgöra hvilkendera af desamma, som borde anses såsom den rätta, men detta var äfven, och just i följd af den omständighet att hvardera gjorde samma tjenst, fullkomligt likgiltigt.

Utvecklar man mathematiskt theorin för solens rörelse i den epicykliska hypothesen, så visar det sig, att resultatet ej det ringaste afviker från det, vi erhöllo i den excentriska cirkeln. Det var således ej heller möjligt att afgöra, hvilkendera af dessa båda hypotheser borde föredragas, och sålunda finner man äfven hvardera betraktelsesättet användt.

I slutet af den sednaste paragrafen anfördes följande uttryck för månens medelpunktseqvation eller enligt den gamla terminologin, dess första ojemnhet,

$$6^0\ 17'.3 \text{ Sin. } g + 12'.8 \text{ Sin. } 2g + \ldots$$

Beräknas excentriciteten ur koefficienten för den första termen, så befinnes denna vara

$$e = 0.10975$$

och beräknar man med detta värde den andra termen uti den epicykliska hypothesen, så finner man denna vara

$$20'.70,$$

således betydligt större än hvad som iakttagelserna gifva vid handen.

För att förklara denna skilnad, tog man sin tillflygt till en ytterligare epicykel. Den i kretsrörelse varande punkten på den rörliga cirkeln antog man såsom medelpunkt för en tredje cirkel, på hvars omkrets månen beskref sin bana. Genom dylika konstgrepp lyckades man äfven att återgifva månens medelpunktseqvation, men nu skulle än ytterligare evaktionen finna en liknande förklaring. Härtill blef en fjerde epicykel nödvändig, så att hela systemet blef ytterligt kompliceradt.

Men om man äfven lyckades att temligen nära återgifva månens verkliga rörelse i längden medelst denna konstgjorda byggnad, så förefanns dock en omständighet, hvilken, om de gamla astronomerna hade kommit att tänka på densamma, omedelbart hade visat dem ohållbarheten af deras system. Denna omständighet består deri, att månens olika rörelse i olika punkter af banan åtföljes af ändringar i dess afstånd från jorden, hvilka i den epicykliska hypothesen ej motsvaras af det verkliga förhållandet. Det kan nämnligen ganska lätt bevisas, att såväl om månen rör sig i en epicykel eller i en excentrisk cirkel, dess hastighet i olika punkter af banan förhåller sig omvändt såsom dess afstånd från jorden. Vidare inses omedelbart, att månens skenbara diameter ökas eller minskas proportionelt såsom afståndet från jorden aftager eller tilltager. Sammanställer man dessa tvenne förhållanden, och betecknar man ändringar af månens längd under loppet af t. ex. en dag, vid ett tillfälle med v och vid ett annat med v', samt de motsvarande diametrarne med d och d', så borde i enlighet med de omtalade hypotheserna följande likhet äga rum

$$\frac{v}{v'} = \frac{d}{d'}$$

eller

$$d' = \frac{v'}{v} d.$$

Denna formel skola vi pröfva på ett verkligt exempel. Den 6 Maj 1865 var $d = 29'.5$ och under samma dag tillväxte månens längd med $11^0 48'.6$ eller med $707'.6$. Den 22 Maj samma år hade dessa qvantiteter åter följande värden: $d' = 32'.9$; $v' = 14^0 38'.3 = 878'.3$. Om man nu beräknar d' ur formeln

$$d' = \frac{878.3}{708.6} \cdot 29'.5,$$

så finner man

$$d' = 36'.56$$

således $3'.66$ större än det verkliga beloppet. Hade man deremot haft att tillgå en hypothes, som på samma gång hon på ett tillfredsställande sätt förklarade månens rörelse i längd, hade fört till eqvationen

$$\frac{v}{v'} = \left(\frac{d}{d'}\right)^2$$

eller

$$d' = d \sqrt{\frac{v'}{v}},$$

så skulle man äfven hafva haft en förklaring till ändringarne i månens diameter; ty enligt den sistanförda formeln finner man

$$d' = 32'.84$$

således i det aldra närmaste öfverensstämmande med det faktiska förhållandet.

Det är svårt att afgöra, huru mycket man får lägga de gamle astronomerna till last, att de ej insågo nödvändigheten af en hypothes i den riktning, som sednast blifvit antydd. Skilnaden af närmare fyra minuter eller omkring $\frac{1}{8}$ af månans diameter hade väl ej kunnat undgå deras uppmärksamhet, om denna en gång hade blifvit fäst vid det anmärkta förhållandet. Men å andra sidan låg det alltför mycket i tidens sätt att utföra vetenskapliga undersökningar utan att mer än till det allra nödvändigaste rådföra sig med empiriska data, och sålunda synes oss detta förbiseende förklarligt om ej ursäktligt.

Vi hafva i det föregående varit i tillfälle att se, huruledes den s. k. första ojemnheten i planeternas rörelser kunde förklaras medelst endera af tvenne geometriska hypotheser, nämnligen medelst den excentriska cirkeln eller medelst epicykeln. Det tyckes, som om den förra förklaringen blifvit allmännare antagen, och detta sannolikt af den orsak, att epicykeln kunde användas för ett annat ändamål, nämnligen att förklara den andra ojemheten. För att inse huruledes denna förklaring åvägabragtes, betjena vi oss åter af fig. (17). Man inser ur densamma omedelbart, att rörelsen, sedd ifrån punkten o, under en begränsad tid, som dock ökas i mon epicykelns radie antages större, kan antaga hvilken hastighet som helst, endast hastigheten af rörelsen i i epicykeln bestämmes nog stor. Om sålunda hastigheten af rörelsen i epicykeln är större än hastigheten af epicykelns medelpunkt i dess bana, så gifves det uppenbarligen tillfällen, då den skenbara rörelsen är retrograd; och dessa tillfällen inträffa naturligtvis då, när planetens rörelse i epicykeln är riktad emot rörelsen af epicykelns medelpunkt i dess bana, såsom t. ex. då planeten befinner sig i punkten b (fig. 17).

I Almagest finner man uppgifter af Ptolemeus öfver de särskilda planeternas hastigheter i deras respektiva epicykler, samt vidare om hastigheterna af deras medelpunkter på de defererande eller excentriska cirklarna, samt slutligen öfver förhållandet emellan epicyklarnas och de excentriska cirklarnas radier. Deremot kunde några uppgifter om dessa radiers absoluta storlek ej bestämmas, enär man från en stillastående punkt, som jorden antogs vara, ej kunde bestämma några afstånd utan endast riktningar. Deferenternas excentriciteter äro äfven angifna, men här äro dessa uppgifter utan intresse.

I det ptolemeiska systemet antogs planeternas omloppstider i epicykeln vara lika stora med deras synodiska omloppstider; epicyklernas medelpunkter antogos åter fullända sina omlopp på tider, som för planeterna Merkurius och Venus var ett år, men för planeterna Mars, Jupiter och Saturnus dessas sideriska omloppstider. Förhållandet af epicykelns radie till den defererande cirkelns var i detta system mindre, ju längre den ifrågavarande planeten antogs kretsa bortom solen; sålunda var detta förhållande mindre hos Saturnus än hos Mars. Detta förhållande var äfven mindre hos Merkurius än hos Venus. Betecknas epicykelns radie med f, samt den defererande cirkelns med d, så ernåddes den bästa öfverensstämmelse med iakttagelserna genom att antaga följande värden för förhållandet $\frac{f}{d}$:

	$\frac{f}{d}$
Merkurius	0.3838.
Venus	0.7196.
Mars	0.6579.
Jupiter	0.1917.
Saturnus	0.1083.

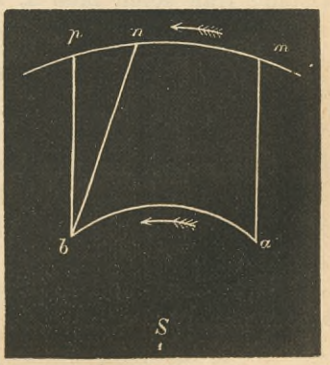
Vi skola längre fram blifva i tillfälle att se en annan betydelse i dessa tal, och ur desamma härleda en högst vigtig lag.

§ 6. Det kopernikanska verldssystemet och Keplers lagar.

Det tillkommer astronomins historia att redogöra för de förbättringar, som man under loppet af ett årtusende sökte att bibringa det ptolemeiska systemet. För astronomin äro desamma deremot af mindre vigt. Dessa bemödanden att bringa det ptolemeiska systemet i öfverensstämmelse med iakttagelserna ledde nämnligen till ingen annan vinst för denna vetenskap, än att man omsider insåg, huruledes man alltmer och mer inveckslades i en labyrinth af cirklar, hvilken svårligen kunde anses motsvara det sanna verldssystemet.

Förtjensten att åtminstone i ett afseende hafva visat möjligheten af att ersätta en del af de ptolemeiska cirklarne medelst en enklare hypothes tillkommer Copernicus (1473—1543). Han visade nämnligen i sitt ryktbara arbete. "De revolutionibus orbium coelestium", att ojemnheterna i planeternas rörelse kunde förklaras utan den härtill förut brukliga epicykeln, endast man antoge att planeterna rörde sig i excentriska cirklar kring solen, samt att jorden äfven hade en sådan rörelse.

Fig. 18.



Det är mycket lätt att inse huruledes den andra ojemnheten blifver förklarad medelst de rörelser, Copernicus antog hos planeterna och hos jorden. Vi tänka oss härvid för enkelhetens skull, att de excentriska cirklarnas medelpunkter sammanfalla med solens (fig. 18), och är vår uppgift nu endast den att visa, huruledes en planet, som under en gifven tid rör sig från punkten m till punkten n, från jorden, hvilken under samma tid rör sig från a till b, i sjelfva verket tyckes hafva gått tillbaka, d. v. s. rört sig i motsatt riktning mot dess vanliga eller allmänna. Om jorden hade förblifvit stillastående i punkten a, så hade planeten ögonskenligen förflyttat sig framåt, dess längd hade ökats med vinkeln m a n. Men nu har jorden förflyttat sig till b, hvarifrån planeten synes i riktningen b n; planetens längd har derigenom minskats med vinkeln n b p, d. ä. dess rörelse har skenbart varit tillbakagående. Hade planeten åter förflyttat sig ända till punkten p, så hade densamma från den rörliga jorden synts stå stilla på himmelen.

För att kunna beräkna planeternas rörelser i det kopernikanska systemet, är det framför allt nödigt att känna planeternas och jordens omloppstider kring solen, samt förhållandet emellan planetbanornas radier till jordbanans. Copernicus antog dessa element för det mesta i öfverensstämmelse med Ptolemeus. Visserligen förekommer det sistnämnda förhållandet ej i det ptolemeiska systemet, men deremot ett annat, som med detta sammanhänger ganska nära, nämnligen förhållandet emellan epicykelns och deferentens radier. Detta sammanhang är lätt att angifva; bibehållas de i slutet af föregående § använda beteckningarna för epicykelns och deferentens radier, samt betecknas en planets medelafstånd från solen med a' och jordens medelafstånd från solen med a, så är:

a) för de nedre planeterna Merkurius och Venus

$$\frac{f}{d} = \frac{a'}{a}$$

b) för de öfre planeterna Mars, Jupiter och Saturnus

$$\frac{f}{d} = \frac{a}{a'}$$

Uttryckes nu alla afstånd i jordens afstånd från solen såsom enhet d. v. s. sättes a = 1, så erhållas följande värden för a', hvilka i det närmaste öfverensstämma med dem, som ligga till grund för första, i enlighet med det kopernikanska systemet upprättade planettabeller.

	a'
Merkurius	0.3838.
Venus	0.7196.
Mars	1.5200.
Jupiter	5.2165.
Saturnus	9.2336.

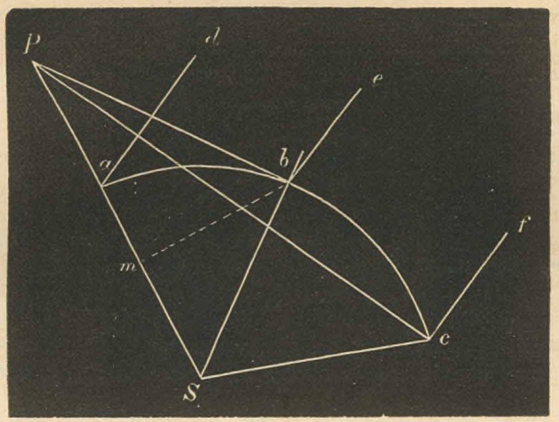
Det kopernikanska verldssystemet är direkt af större betydelse i kulturhistorien än för astronomin; ty rörelserna på himmelen hade äfven kunnat blifva förklarade under antagande af jordens stillastående, endast man tänkte sig de öfriga planeternas rörelse hänförd till solen, och ett sådant system blef äfven uppstäldt efter Copernicus af Tyge Brahe, utan att detta dock kom till något synnerligt anseende, dels emedan det kopernikanska syntes mer öfverensstämmande med de naturfilosofiska åsigter, som nu småningom började göra sig gällande, dels emedan antagandet af detta system medförde vissa indirekta fördelar för astronomin. Förtjensten att hafva uppfattat dessa fördelar och gjort dem fruktbärande för astronomin tillkommer *Kepler*, som äfven härigenom beredde sig ett kraftigt forskningsmedel, hvarigenom han förde astronomin så långt, som ske kunde före upptäckten af den allmänna attraktionslagen.

För att mäta ett föremåls afstånd, till hvilket man ej kan komma, bestämmer man parallaxen (pag. 56) af ett föremål, hvars dimensioner äro bekanta. Ofta är jorden detta föremål vid astronomiska undersökningar och då man säger att månens parallax är 58', så förstår man dermed att jordens halfdiameter under denna vinkel synes från månen. Men denna måttstock blifver alltför liten, då frågan är om planeterna; ty från dem synes jordkroppen under mycket små vinklar, hvilka i bästa fall för Venus och Mars, hvilka planeter komma jorden närmast, kunna uppnå $\frac{1}{2}$ minut. Man hade således innan observationskonsten inträdt i sin nuvarande fullkomning, föga utsigt att kunna bestämma planeternas afstånd genom att uppmäta deras parallaxer, och om sådana försök i äldre tider blifvit gjorda, så hafva de ej kunnat leda till något säkert resultat.

Men om det kopernikanska systemet befanns riktigt, så hade man i den omständigheten att jorden sjelf var i rörelse ett medel att förskaffa sig en större grundlinie för uppmätningen af planeternas afstånd. Man behöfde för detta ändamål endast iakttaga planeternas riktningar från olika punkter af jordbanan. Tvenne svårigheter måste dock först öfvervinnas innan man kunde komma till det äskade resultatet eller till kännedom om planetens afstånd från jorden och från solen. Dessa båda svårigheter öfvervunnos af Kepler, som i och med detsamma ernådde en föreställning om planetbanornas natur, hvilken var vida riktigare än de föregående. Vi skola nu försöka att till en viss grad följa gången af hans undersökning, hvilken är af de märkvärdigaste, som någonsin blifvit utförda.

Den första svårigheten, som måste öfvervinnas, bestod deruti att planeten och ej allenast jorden är i rörelse; att man således ej omedelbart kunde frånskilja det skenbara, af jordens rörelse härrörande, och det verkliga rörelsebeloppet. Men om det antagande var riktigt att planeternas banor voro slutna kroklinier, d. v. s. att de efter ett siderikt omlopp kring solen återkommo till samma absoluta punkt i rymden, så behöfde man ej länge söka efter en möjlighet att kringgå denna svårighet. Utvaldes nämnligen tvenne observationer, hvilka blifvit anställda efter hvarandra med en mellantid af jemt ett siderikt omlopp, så hade jorden derunder fulländat ett visst antal hela omlopp och dessutom tillryggalagt ett mer eller mindre stort stycke af sin bana. Man hade således från tvenne särskilda punkter af jordbanan iakttagit planetens riktning, då han befann sig i samma punkt i rymden. Kännedomen af dessa tvenne riktningar är tillräcklig för att medelst räkning finna förhållandet emellan planetens afstånd från solen eller från jorden och jordens afstånd från solen. Samman-

Fig. 19.



hanget emellan dessa riktningar å ena sidan och det omnämnda förhållandet å den andra inses ganska lätt med tillhjelp af vidstående figur. I densamma tänkes planeten i punkten P, solen i punkten S samt jorden vid tre olika observationstillfällen i punkterna a, b och c. För att förenkla framställningen har dessutom det antagande blifvit gjordt, att planeten vid den första iakttagelsen befann sig i opposition mot solen, d. v. s. att jorden befann sig på den räta linie, som sammanbinder planeten med solen, och derjemte emellan dessa båda himlakroppar. De parallela räta linierna ad, be och cf antyda vårdagjemningspunktens riktning, sedd ifrån jordens olika lägen. Om vi nu beteckna planetens från jorden iakttagna trenne längder med λ, λ' och λ'', så är tydligen λ = Pad, λ' = Pbe och λ'' = pcf; betecknas vidare solens från jorden sedda längder med $\odot$, $\odot'$ och $\odot''$, så är $\odot = 180^\circ$ + Pad$=180^\circ+\lambda = 360^\circ$— Sad, $\odot' = 360^\circ$—Sbe och $\odot''$ = Scf.

Vi skola nu först bestämma förhållandet emellan planetens afstånd från solen (PS = r) och jordens afstånd från solen (Sb = R'). Detta förhållande finnes omedelbart med tillhjelp af ett mycket bekant trigonometriskt theorem, hvilket lyder, *att i hvarje triangel förhålla sig tvenne sidor till hvarandra likasom sinerna för de motstående vinklarna.*

Beviset för denna sats är ytterst enkelt, och vi kunna, för att anföra detsamma, begagna oss af en triangel i figuren 19. Fälla vi således från punkten b en rät linia vinkelrätt mot linien PS, så inses genast, att längden af denna linie eller bm = Pb. Sin. SPb = Sb. Sin. PSb, hvaraf följer

$$\frac{Pb}{Sb} = \frac{\text{Sin. } SbP}{\text{Sin. } PSb}$$

Alldeles på samma sätt inses nu äfven att

$$\frac{PS}{Sb} = \frac{r}{R'} = \frac{\text{Sin.} PbS}{\text{Sin.} SPb}.$$

Men påtagligen är

$$\text{Vinkeln } PbS = 360^0 - Sbe - Pbe, \text{ d. ä.}$$

$$PbS = \odot' - \lambda',$$

och, emedan summan af de tre vinklarna i en triangel städse är lika med tvenne räta vinklar eller med 180^0, så är

$$\text{Vinkeln } SPb = 180^0 - PbS - PSb.$$

Vinkeln PSb är dock lika med Sbe—Sad, d. ä. $= \odot - \odot'$.

Med detta värde för PSb och det och det ofvanstående för PbS finner man

$$SPb = 180^0 + \lambda' - \odot,$$

och resultatet blifver nu

$$\frac{r}{R'} = \frac{\text{Sin.}(\odot' - \lambda')}{\text{Sin.}(180^0 + \lambda' - \odot)}.$$

Af en orsak, som genast skall inses, hafva vi tagit tre riktningar i betraktande i st. för endast tvenne, hvilka, såsom vi sett äro tillräckliga att bestämma förhållandet $\frac{r}{R'}$. Denna tredje riktning leder på samma sätt, som ofvan blifvit förklaradt, till relationen

$$\frac{r}{R''} = \frac{\text{Sin.}(\odot'' - \lambda'')}{\text{Sin.}(180^0 + \lambda'' - \odot)}.$$

På samma väg, som i det föregående blifvit beträdd, skulle man kunna beräkna förhållanden emellan olika planetafstånd och jordafstånd, men vid tillgodogörandet af dylika resultat möter oss den andra svårigheten, som ofvan blifvit antydd. Det är nämnligen vår afsigt att hänföra alla planetafstånd till ett enda mått eller ett enda jordafstånd; och för att kunna göra detta, sedan förhållanden emellan planetafstånd till olika jordafstånd blifvit funna, är det erforderligt att känna förhållanden emellan jordens afstånd från solen vid olika tider. I det föregående finnes emellertid redan ett medel förberedt att genom detsamma komma till kännedom om dessa förhållanden. Vi sågo huruledes tvenne riktningar ledde till bestämning af förhållandet $\frac{r}{R'}$, samt huru förhållandet $\frac{r}{R''}$ framgick då den tredje riktningen tillkom. Genom att följa planeten än längre och efter hvarje siderikt omlopp åter iakttaga dess riktning från jorden, skulle man således finna allt flere och flere af förhållanden $\frac{r}{R'''}, \frac{r}{R^{IV}}$, o. s. v. Divideras nu alla de följande af dessa förhållanden med det första $\frac{r}{R'}$, så erhålles $\frac{R'}{R''}, \frac{R'}{R'''}$, o. s. v. hvarigenom man blifver i tillfälle att efter hand angifva alla jordafstånd från solen, om ett enda, men bestämdt afstånd tages till måttstock; och om äfven endast ett mindre antal afstånd på detta sätt hade blifvit direkt bestämda, så skulle man alltid finna de mellanliggande medelst någon af de methoder, som blifvit i det föregående antydda (pag. 75).

Det torde ej vara öfverflödigt att medelst ett nummeriskt exempel visa, huruledes man medelst de utvecklade formlerna kan bestämma dels planetens afstånd från solen i förhållande till ett visst jordafstånd, dels förhållandet emellan olika jordafstånd. För detta ändamål utvälja vi riktningar af planeten Mars, densamma hvars lopp äfven ledde Kepler till hans upptäckter. För oss är det deremot ej nödvändigt att lägga verkligen observerade riktningar till grund för vår räkning, utan det är tvertom fördelaktigare att stödja vår räkning på redan beräknade riktningar, emedan vi då omedelbart kunna se huru de talförhållanden, vi komma att finna, öfverensstämma med de från observationsfel befriade. Vi utvälja således följande tre planet- och sollägen:

1. 1864 Nov. 30,80*. $\lambda = 69^{0}\ 22'.3$, $\odot = 249^{0}22'3$ (opposition).
2. 1866 Okt. 18,78. $\lambda' = 109\ 53.6$, $\odot' = 205\ 33.1$.
3. 1868 Sept. 4,76. $\lambda'' = 103\ 51.0$, $\odot'' = 162\ 46.9$.

---

* I stället för timmar och minuter angifver man ofta i astronomin decimaldelar af dygnet.

Emedan mellantiden omfattar ett siderikt omlopp, så är naturligtvis planetens afstånd från solen vid alla dessa tre tillfällen detsamma, och om jordens medelafstånd från solen antages till enhet, så angifves det ifrågavarande afståndet emellan Mars och solen medelst talet 1.5247. Uttryckta i samma enhet äro $R' = 0.9954$ och $R'' = 1.0076$.

Först och främst skola vi nu härleda värdet för $\frac{R'}{R''}$, emedan förhållandena emellan jordafstånden måste anses vara bekanta, innan man kan afgifva planetafstånden, uttryckta medelst ett och samma jordafstånd såsom måttstock. Ur de båda, ofvan anförda uttrycken för $\frac{r}{R'}$ och $\frac{r}{R''}$ erhålles medelst division

$$\frac{R'}{R''} = \frac{\text{Sin.}(\odot'' - \lambda'')}{\text{Sin.}(\odot' - \lambda')} \cdot \frac{\text{Sin.}(180^0 + \lambda' - \odot)}{\text{Sin.}(180^0 + \lambda'' - \odot)}$$

och denna formel skola vi först beräkna. Medelst de anförda uppgifterna öfver planetens och solens riktningar finner man

$$\begin{aligned} \odot'' - \lambda'' &= 58^0 55'.9 \\ \odot' - \lambda' &= 95\ 39'.5 \\ 180^0 + \lambda' - \odot &= 40\ 31'.1 \\ 180^0 + \lambda'' - \odot &= 34\ 28'.7. \end{aligned}$$

Ur trigonometriska tabeller erhålles vidare

$$\begin{aligned} \text{Sin.}(\odot'' - \lambda'') &= 0.85652 \\ \text{Sin.}(\odot' - \lambda') &= 0.99510 \\ \text{Sin.}(180^0 + \lambda' - \odot) &= 0.64968 \\ \text{Sin.}(180^0 + \lambda'' - \odot) &= 0.56610 \end{aligned}$$

Härmed finner man

$$\frac{R'}{R''} = \frac{0.85652 \times 0.64968}{0.99510 \times 0.56610} = 0.98782$$

hvilket i det aldra närmaste öfverensstämmer med det riktiga förhållandet

$$\frac{R'}{R''} = \frac{0.99542}{1.0076} = 0.98790.$$

Orsaken till afvikelsen beror derpå att ofvanstående formler endast under den förutsättning äro riktiga, att såväl jorden som planeten röra sig i ett och samma plan. I verkligheten inträffar detta väl ganska nära, men dock icke fullkomligt; af denna omständighet härleder sig den lilla skiljaktighet, som det beräknade värdet utvisar från det verkliga. Det skulle visserligen ej medföra någon väsentlig svårighet att utveckla ett uttryck för $\frac{R'}{R''}$, der afseende vore fästadt vid planetbanans och jordbanans lutning mot hvarandra, men då denna lutning ej är större än i föreliggande fall, så synes den enklare formeln här fullständigt motsvara sitt ändamål. Vi se nämnligen utan svårighet, huruledes det är möjligt att bestämma ifrågavarande förhållande, och således äfven, huru man på den beträdda vägen kommer till insigt om naturen af jordens bana, eller huru man kan finna den regel, enligt hvilken alla värden för jordens afstånd kunna beräknas, endast man känner ett enda af dessa värden.

Antages för detta värde samma enhet, som förut, så gälla äfven de redan angifna värdena för R′ och R″; med dessa skola vi nu äfven härleda tvenne värden för r, hvilka naturligtvis ej allenast böra öfverensstämma sinsemellan utan äfven med det redan anförda värdet 1,5247.

Enligt de redan utvecklade formlerna finna vi emellertid

$$r = R' \frac{0.99510}{0.64968} = 1.5247$$

$$r = R'' \frac{0.85652}{0.56610} = 1.5246,$$

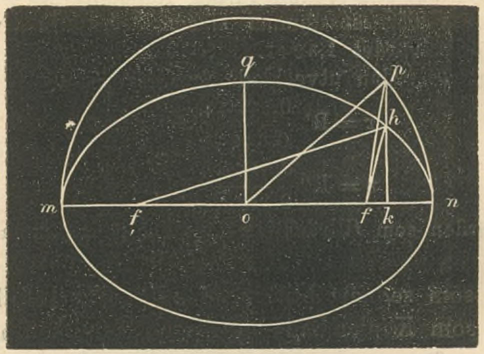
således värden som tillräckligt nära öfverensstämma och befinnas riktiga.

Det, som sednast blifvit anfördt, torde tillfyllest förklara den väg, som Kepler hade valt, och på hvilken han lyckades göra sina, för astronomin så särdeles vigtiga upptäckter. Han kunde genom att kombinera hvarje observerad opposition med riktningen, som blifvit iakttagen ett visst antal sideriska omlopp före eller efter oppositionsmomentet, härleda planetens afstånd från solen vid ifrågavarande moment, och då planetens från solen sedda längd, eller den *heliocentriska längd* då var lika med dess *geocentriska längd*, eller den omedelbart från jorden sedda längden, så var planetens läge i rymden fullkomligt bestämdt. På samma sätt kunde nu flera punkter af banan bestämmas, hvarefter det ej var svårt att finna banans form. Upptäckten af denna form angifver den första Keplerska lagen, hvilken lyder sålunda.

I. *Planeterna röra sig i elliptiska banor, hvilkas ena brännpunkt sammanfaller med solens medelpunkt.*

Likväl var det icke nog, att hafva bestämt banornas allmänna form; det fordrades äfven, för att kunna angifva planetens läge i sin bana, att känna den lag, hvilken planetens hastighet i olika delar af banan är underkastad. För att härleda denna lag, blifver det nödvändigt att anföra några af ellipsens vigtigaste egenskaper, hvilka i alla händelser, då denna kroklinie spelar en så framstående rol i astronomin, ej kunna förbigås.

Fig. 20.



Tänker man sig tvenne punkter f och $f_{,}$ på en rät linie mn, hvars längd må kallas 2a; och detta sålunda att afståndet $f_{,}m = fn$; då benämner man den kroklinie *ellips*, som har den egenskapen, att afstånden från hvarje punkt på densamma till punkterna f och $f_{,}$ tillsammantagna äro lika stora med mn eller 2a. Sålunda är t. ex. summan af linierna hf och $hf_{,}$ lika med 2a. Punkterna f och $f_{,}$ kallas ellipsens *brännpunkter;* linien mn den *stora axel;* punkten o, hvars afstånd från m och n eller f och $f_{,}$ äro lika stora, ellipsens *medelpunkt.* Den räta linie, som genom medelpunkten drages vinkelrätt mot stora axeln och begränsas af ellipsens omkrets, benämnes ellipsens *mindre axel*. Slutligen kallar man förhållandet emellan längderna of och on ellipsens *excentricitet* och betecknar detta förhållande vanligen med bokstafven e. Efter dessa allmänna bestämmelser skola vi nu härleda de egenskaper, som i astronomin äro nödvändiga att känna.

1. *Ellipsens eqvation.* För att härleda ellipsens eqvation, hänförd till rätvinkliga koordinater (se pag. 77), tänka vi oss ett system sådana koordinater uppdraget i ellipsens medelpunkt såsom begynnelsepunkt och sammanfallande med ellipsens axlar, sålunda att stora axeln sammanfaller med koordinaternas x-axel, och den mindre axeln med koordinaternas y-axel. För punkten h äro sålunda koordinaterna: ok=x och hk=y.

Emedan fhk är en rätvinklig triangel, så är qvadraten på sidan fh lika stor med summan af qvadraterna på fk och hk. Innan vi uppställa den motsvarande eqvationen, skola vi erinra oss, att fk=ok—of=x—ae (emedan $\frac{of}{on} = e$); och dessutom beteckna linien fh med bokstafven r. Vår eqvation blifver således:

(1) $$r^2 = (x - ae)^2 + y^2 = x^2 - 2aex + a^2e^2 + y^2.$$

Alldeles på samma sätt finner man, om linien f,h betecknas med r' och emedan f,k=x+ae,

(2) $$r'^2 = (x + ae)^2 + y^2 = x^2 + 2aex + a^2e^2 + y^2.$$

Subtraheras nu eqvationen (1) från eqv. (2), så återstår

(3) $$r'^2 - r^2 = 4aex.$$

Men såsom man vet eller med största lätthet kan finna, är;

$$r'^2 - r^2 = (r' + r)(r' - r);$$

vidare är

(4) $$r' + r = 2a$$

emedan punkten h är en punkt på ellipsen. Om detta värde för r'+r insättes i den föregående eqvationen, så befinnes

$$r'^2 - r^2 = 2a(r' - r).$$

Jemföres åter detta värde för $r'^2 - r^2$ med det, som eqv. (3) angifver, så inses att

$$4aex = 2a(r' - r)$$

eller

(5) $$r' - r = 2ex.$$

Genom att nu addera eqvationerna (4) och (5) erhåller man

(6) $$r' = a + ex,$$

samt genom att subtrahera (5) från (4),

(7) $$r = a - ex.$$

Upphöjes härpå detta uttryck för r till qvadrat, så erhålles

$$r^2 = a^2 - 2aex + e^2x^2.$$

Det nyssfunna uttrycket för r^2 måste dock nödvändigt hafva samma värde, som det i eqv. (1) angifna, hvarföre dessa båda uttryck för r^2 kunna sättas lika med hvarandra. Vi erhålla härigenom

$$a^2 - 2aex + e^2x^2 = x^2 - 2aex + a^2e^2 + y^2$$

eller, emedan termen $-2aex$ på hvardera sidan om likhetstecknet utgår, och om de termer, som innehålla gemensamma faktorer, sammanslås:

(8) $$a^2(1-e^2) = x^2(1-e^2) + y^2.$$

Denna relation äger rum emellan de rätvinkliga koordinaterna för alla punkter af ellipsen, hvars medelpunkt sammanfaller med koordinaternas begynnelsepunkt, och således är eqv. (8) ellipsens eqvation. Vanligen gifver man denna eqvation dock en något annan form. Qvantiteten $a^2(1-e^2)$ är tydligen ingenting annat än qvadraten på ellipsens mindre axel, eller på oq. Ty tänker man sig räta linier dragna från n till f och till f, så äro dessa tydligen lika stora med hvarandra, och emedan deras summa är lika stor med den stora axeln eller med 2a, så är hvardera af dessa linier lika stor med a. Med stöd af det pythagoreiska theoremet finner man derföre att

$$a^2 = a^2e^2 + oq^2,$$

eller, om linien oq betecknas med b,

$$b^2 = a^2 - a^2e^2 = a^2(1-e^2)$$

hvarigenom vårt påstående blifvit bevisadt.

Multipliceras nu eqvationen (8) med a^2, och fästes afseende vid det sednast angifna värdet för $a^2(1-e^2)$, så antager ellipsens eqvation följande form:

$$a^2b^2 = x^2b^2 + y^2a^2$$

eller

$$1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

För härledningen af en vigtig sats längre fram skola vi upplösa denna eqvation i afseende på y, och erhålla då

(9) $$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Polära koordinater. Man angifver ej punkters läge endast medelst dess afstånd från tvenne mot hvarandra vinkelräta koordinater, utan man använder härtill i astronomin än oftare s. k. polära koordinater. Dessa bestå uti en längd eller afståndet från koordinaternas begynnelsepunkt, som nu kallas pol, samt i den vinkel, som af detta afstånd bildas med en gifven rät linie eller grundriktning. Detta afstånd har man benämnt med ett eget namn; man kallar detsamma *radius-vektor*. Den eqvation, som angifver sammanhanget emellan radius-vektor och den omnämnda vinkeln, eller med andra ord, som för hvarje värde af denna vinkel angifver ett motsvarande värde af radius-vektor, representerar derföre äfven en linie, och benämnes denna linies polar-eqvation. Antages ellipsens ena brännpunkt f till pol (fig. 20.), samt dess stora axel till grundriktning, så är fh = r radius-vektor för punkten h samt nfh vinkeln vid polen, som räknas i riktningen från n till m, och derifrån vidare till n. Denna vinkel skall i det följande betecknas med f, och kallas i astronomin *sann anomali*.

Relationen emellan r och f erhålles omedelbart ur eqv. (7). Erinra vi oss, att $x = of + fk$; $of = ae$ och $fk = r\text{Cos. } f$, således

$$ex = ae^2 + er\text{Cos. } f,$$

så befinnes

$$r = a - ae^2 - er\text{Cos. } f$$

eller

$$r(1 + e\text{Cos. } f) = a(1 - e^2)$$

hvaraf slutligen följer:

(10) $$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\text{Cos. } f}$$

hvilket är ellipsens polareqvation under den form, densamma vanligen användes i astronomin.

Man kan ännu enklare uttrycka radius-vektor medelst en annan vinkel, nämnligen den, som bildas om kh utdrages till punkten p på den cirkel, hvilken kring medelpunkten o är uppritad med radien a, och om punkterna o och p sammanbindas. Vinkeln pon benämnes *excentrisk anomali* och betecknas med grekiska bokstafven ε. Man inser nu omedelbart att

$$x = a\text{Cos. } \varepsilon.$$

Insättes detta värde i eqv. (7), så erhålles

(11) $$r = a(1 - e\operatorname{Cos.} \varepsilon)$$

hvilken eqvation äfven hör till ellipsen.

Man erhåller vidare genom att likställa de olika uttryck vi funnit för x

(12) $$a\operatorname{Cos.} \varepsilon = r\operatorname{Cos.} f + ae.$$

3. *Förhållandet emellan ellipsens och den omskrifna cirkelns y-koordinater, som höra till samma punkter på x-axeln.*

Den omskrifna cirkelns eqvation är

$$a^2 = x_{,}^2 + y_{,}^2$$

der vi skrifvit $x_{,}$ och $y_{,}$ för att åtskilja cirkelns koordinater från ellipsens. Ur denna eqvation erhåller man

$$y_{,} = \pm\sqrt{a^2 - x_{,}^2}$$

Om nu x antagas lika med $x_{,}$, och tänker man sig att denna x-koordinat representeras af linien ok, så är $y = kh$ och $y_{,} = kp$ (fig. 20). Förhållandet emellan y och $y_{,}$ finnes nu helt enkelt derigenom att eqvationen (9) divideras med den sistuppställda eqvationen. Emedan $x_{,} = x$, och således äfven $\sqrt{a^2 - x_{,}^2} = \sqrt{a^2 - x^2}$, så finner man

(13) $$\frac{y}{y_{,}} = \frac{b}{a}$$

d. v. s. att ellipsens y-koordinat förhåller sig till cirkelns y-koordinat såsom ellipsens mindre axel förhåller sig till dess större axel.

Af denna sats kan man begagna sig för att uttrycka y medelst den excentriska anomalin. Man finner nämnligen först med stöd deraf att

$$y_{,} = a\operatorname{Sin.} \varepsilon,$$

$$y = \frac{b}{a} a\operatorname{Sin.} \varepsilon;$$

eller, emedan $\frac{b^2}{a^2} = 1 - e^2$ och således äfven $\frac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2}$ (emedan a och b äro positiva qvantiteter behöfves minustecknet framför rotmärket ej utsättas),

$$y = a\sqrt{1 - e^2}\operatorname{Sin.} \varepsilon.$$

Jemföres detta värde med följande, hvars riktighet omedelbart inses

$$y = r\operatorname{Sin.} f,$$

så vinner man följande relation

(14) $$a\sqrt{1 - e^2}\operatorname{Sin.} \varepsilon = r\operatorname{Sin.} f,$$

hvilken tillsammans med eqv. (12) innehåller ellipsens polareqvation och dessutom en relation emellan ε och f. Emedan denna relation finner ett ständigt bruk i astronomin, så skola vi härleda densamma under en form, der r ej förekommer. Vi vinna lättast vår afsigt om vi härleda ifrågavarande relation ur eqvationerna (11) och (12). Skrifva vi den sednare på följande sätt:

$$(15)\qquad r\text{Cos.}f = a\text{Cos.}\varepsilon - ae$$

och addera densamma till eqv. (11) eller till

$$(16)\qquad r = a - ae\text{Cos.}\varepsilon$$

så erhålles

$$(17)\qquad r(1+\text{Cos.}f) = a(1-e)(1+\text{Cos.}\varepsilon).$$

Subtrahera vi deremot eqv. (15) från eqv. (16) så befinnes

$$(18)\qquad r(1-\text{Cos.}f) = a(1+e)(1-\text{Cos.}\varepsilon).$$

Nu låna vi från trigonometrin följande sats:

$$\text{Cos.}2M = \text{Cos}M^2 - \text{Sin.}M^2 \, {}^*)$$

der M betecknar hvilken vinkel som helst. Ur denna eqvation följa omedelbart tvenne andra, nämnligen

$$\text{Cos.}2M = 1 - 2\text{Sin.}M^2,$$
$$\text{Cos.}2M = 2\text{Cos.}M^2 - 1$$

eller

$$1 - \text{Cos.}2M = 2\text{Sin.}M^2.$$
$$1 + \text{Cos.}2M = 2\text{Cos.}M^2.$$

Använda vi nu dessa formler på eqvationerna (17) och (18), i det vi i stället för 2M sätta f och ε, så ernå vi följande resultat

$$2r\text{Cos.}\tfrac{1}{2}f^2 = 2a(1-e)\text{Cos.}\tfrac{1}{2}\varepsilon^2$$
$$2r\text{Sin.}\tfrac{1}{2}f^2 = 2a(1+e)\text{Sin.}\tfrac{1}{2}\varepsilon^2.$$

Häraf erhålles vidare, om den sednare eqvationen divideras med den förra,

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}f^2 = \frac{1+e}{1-e}\text{tang.}\tfrac{1}{2}\varepsilon^2$$

eller efter qvadratrotens utdragning

$$(19)\qquad \text{tang.}\tfrac{1}{2}f = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,\text{tang.}\tfrac{1}{2}\varepsilon.$$

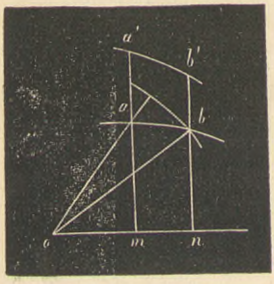
4. *Beräkning af ellipsens ytinnehåll.* I det föregående hafva vi sett huruledes ellipsens y-koordinater förhålla sig till

---

* Beteckningen $\text{Cos.}M^2$ är i analogi med de vanliga algebraiska beteckningarna, således $\text{Cos.}M^2 = \text{Cos.}M.\text{Cos.}M$, på samma sätt är $\text{sin.}M^2 = \text{Sin.}M\,\text{Sin.}M$ o. s. v.

den omskrifna cirkelns y-koordinater såsom b förhåller sig till a. Nu är visserligen en punkts linieera koordinater, såsom linier endast längder utan någon bredd; men den anförda satsen upphör ej att bibehålla sin giltighet om man ock tänker sig de ifrågavarande längderna äfven hafva någon viss bredd, endast denna är oändligt liten. Så mycket kan inses på grund af de aldra enklaste geometriska betraktelser och med stöd af en sats, som utgör en af den högre mathematikens fundamentalsatser. För att belysa denna sats tänka vi oss a b vara ett stycke af en kroklinie, hvilken som helst; m a är y-koordinaten för punkten a samt n b y-koordinaten för punkten b. Drages nu genom a och b räta linier, som äro parallela med on eller med x-axeln, så inser man ögonblickligen, att ytinnehållet af figuren mnba är större än rektangeln mn × ab men mindre än rektangeln mn × an. I mon som mn blifva mindre, desto närmare omsluta dessa gränsrektanglar den af kroklinien begränsade figuren; och om slutligen mn blifver oändligt liten, så är ytinnehållet af figuren mnba = mn × am, eller = mn × bn Betecknas således den oändligt lilla differensen emellan x-koordinaterna med δ, så har man denna sats, *att ytinnehållet af en figur, som begränsas af tvenne oändligt nära hvarandra stående y-koordinater, den oändligt lilla differensen* δ *samt det oändligt lilla bågstycket ab, är i all stränghet* $= \delta . y$*;* ty felet, som här skulle kunna tänkas, är oändligt litet i förhållande till det redan oändligt lilla ytinnehållet, och kan derföre helt och hållet lemnas åsido.

Fig. 21.



Med stöd af denna sats inser man att, om ab är en båge på ellipsen, a'b' en båge på den omskrifna cirkeln, figuren mnba förhåller sig till figuren mnb'a' såsom bn förhåller sig till b'n, eller, med stöd af eqv. (13), såsom ellipsens halfva större axel förhåller sig till den mindre.

Summerar man emellertid ihop ett oändligt antal sådana oändligt små figurer, så erhåller man ändliga figurer, hvilka stå i samma förhållande till hvarandra, som de oändligt små, och sålunda finna vi att (fig. 20)

$$\frac{\text{figuren hnk}}{\text{figuren pnk}} = \frac{\text{ellipsens hela yta}}{\text{cirkelns hela yta}} = \frac{b}{a}.$$

Cirkelns yta är dock πa^2; således är

$$\text{ellipsens hela ytinnehåll} = \pi ab.$$

5. *Yt-innehållet af en elliptisk sektor.* Man finner ytinnehållet af cirkelsegmentet kpn genom att subtrahera triangeln opk från sektorn opn. Emedan längden af bågen $pn = a\varepsilon$, så är ytinnehållet af denna sektor $\frac{1}{2}a^2\varepsilon$. Ytinnehållet af triangeln opk är åter $= \frac{1}{2}ok \times pk$, d. är $= \frac{1}{2}a^2 \text{Sin.}\varepsilon \text{Cos.}\varepsilon$. Vi hafva således

$$\text{segm. kpn} = \tfrac{1}{2}a^2(\varepsilon - \text{Sin.}\varepsilon \text{Cos.}\varepsilon).$$

Emedan vidare segm. khn förhåller sig till segm. kpn såsom b förhåller sig till a, så inses genast, att

$$\text{segm. khn} = \tfrac{1}{2}ab(\varepsilon - \text{Sin.}\varepsilon \text{Cos.}\varepsilon).$$

Yt-innehållet af triangeln fkh är tydligen angifvet genom uttrycket

$$\tfrac{1}{2}r^2 \text{Sin.f.Cos.f.}$$

Insättes häri värdena för rSin.f och rCos.f enligt eqvationerna (14) och (15), så befinnes

$$\text{triang. fkh} = \tfrac{1}{2}a^2\sqrt{1-e^2}\,\text{Sin.}\varepsilon(\text{Cos.}\varepsilon - e);$$

men emedan sektorn fhn = triang. fhk + segm. khn, och $a\sqrt{1-e^2} = b$, så erhåller man såsom resultat:

$$\begin{aligned} \text{Sektorn fhn} &= \tfrac{1}{2}a^2\sqrt{1-e^2}(\varepsilon - \text{Sin.}\varepsilon\text{Cos.}\varepsilon) \\ &\quad + \tfrac{1}{2}a^2\sqrt{1-e^2}\,\text{Sin.}\varepsilon(\text{Cos.}\varepsilon - e) \\ &= \tfrac{1}{2}a^2\sqrt{1-e^2}(\varepsilon - e\text{Sin.}\varepsilon) \end{aligned} \tag{20}$$

Yt-innehållet af en sektor i allmänhet, som innesluter en oändligt liten vinkel, angifves medelst ett vida enklare uttryck. Detta uttryck härledes medelst figuren 21 alldeles på samma sätt, som uttrycket för ytan mnba. Betecknas vinkeln nob med f, vinkeln noa med f', radien ob med r och radien oa med r', så är ytinnehållet af sektorn abo mindre än $\frac{1}{2}r^2(f'-f)$ och större än $\frac{1}{2}r'^2(f'-f)$. I mån som differensen $f'-f$ blifver mindre, angifver äfven uttrycket

$$\tfrac{1}{2}r^2(f'-f)$$

sektorns yt-innehåll med större noggrannhet.

Det anförda sätter oss i stånd att fatta betydelsen af den andra keplerska lagen, samt att inse huruledes densamma kunde härledas ur iakttagelserna, sedan den första lagen var känd. Den andra lagen har afseende på hastighetens beroende af afståndet från solen; för att finna densamma bör man således undersöka planetens hastigheter i olika afstånd. Hastigheten under en gifven tid angifves medelst den vinkel, som utgör ändtligen af den sanna anomalin under den gifna tiden, således medelst den qvantitet, som ofvan blifvit betecknad med $f'-f$. Om hastigheten under mellantiden likväl ej hade varit oföränderlig, så skulle genom sådana uppgifter ej vinnas någon bestämd föreställning om densamma; man bör derföre tillse, att mellantiden är nog liten för att rörelsen under densamma må kunna anses vara likformig eller, hvilket är detsamma, hastigheten oföränderlig.

Då vi nu åter välja Mars såsom exempel, anföra vi värden af $f'-f$, hvilka gälla för ett dygn såsom mellantid eller tidsenhet. Den tredje kolumnen innehåller värden för r och de sednare skola längre ned blifva förklarade.

Datum.			$f'-f$		r	r^2	$r^2(f'-f)$
1867	Jan.	1	28′ 0″	=1680″	1.6116	2.5972	4363″
	Febr.	1	27 7	=1627	1.6378	2.6824	4364
	Mars	1	26 34	=1594	1.6544	2.7372	4363
	April	1	26 15	=1575	1.6643	2.7700	4363
	Mai	1	26 14	=1574	1.6649	2.7718	4363
	Juni	1	26 30	=1590	1.6561	2.7427	4362
	Juli	1	27 3	=1623	1.6390	2.6862	4361
	Aug.	1	27 55	=1675	1.6132	2.6023	4360
	Sept.	1	29 5	=1745	1.5803	2.4921	4359
	Okt.	1	30 28	=1828	1.5440	2.3840	4359
	Nov.	1	32 7	=1927	1.5039	2.2617	4359
	Dec.	1	33 50	=2030	1.4656	2.1478	4360
1868	Jan.	1	35 33	=2133	1.4300	2.0449	4362
	Febr.	1	36 59	=2219	1.4022	1.9661	4363
	Mars	1	37 51	=2271	1.3862	1.9214	4363
	April	1	38 5	=2285	1.3817	1.9092	4363
	Mai	1	37 36	=2256	1.3906	1.9337	4362.

Ur dessa hastighetsvärden finner man omedelbart, att ju större afståndet från solen är, desto mindre är hastigheten; men ett enda försök är äfven tillräckligt att visa, huruledes hastigheten ej är omvändt proportionell mot afståndet. Ty utvälja vi t. ex. qvantiteterna $f'-f$ och r från den 1 Jan. och den 1 Dec. 1867, så befinnes

$$\frac{1680}{2030}=0.8276\,;\quad \frac{1.4656}{1.6116}=0.9095,$$

således icke öfverensstämmande. Men emedan deremot qvadraten af det sednare förhållandet, eller

$$\left[\frac{1.4656}{1.6116}\right]^2 = 0.8272,$$

ganska nära öfverensstämmer med det förra, så tyckas våra numeriska uppgifter antyda, *att hastigheten förhåller sig omvändt såsom afståndets qvadrat.* Denna sats uttryckes således medelst följande proportion:

$$\frac{f'-f}{f'_{,}-f_{,}} = \frac{r_1^{\,3}}{r}$$

eller

$$r^2(f'-f) = r_1^{\,2}(f'_{,}-f_{,}) = r_2^{\,2}(f'_2-f_2) = \text{o. s. v.}$$

der r_1, r_2, f_1, o. s. v. beteckna värden för r och f, som gälla i olika punkter af banan. Ofvanstående likheter utvisa nu att, om hastigheten i en punkt af banan förhåller sig till hastigheten å en annan punkt omvändt såsom qvadraterna af de motsvarande afstånden från brännpunkten, så har produkten $r^2(f-f')$ i hvarje punkt af banan ett och samma värde. Af ofvananförda taluppgifter innehåller den sista kolumnen värden för denna produkt, beräknade ur de verkliga hastigheterna och de motsvarande verkliga solafstånden, hvilkas qvadrater äro angifna i den nästsista kolummen. Det utvisar sig i denna sammanställning, att ifrågavarande produkter i sjelfva verket äro så nära lika hvarandra, att den antydda lagen i det alldra närmaste synes motsvara det faktiska förhållandet. De afvikelser, som på Keplers tid kunde förmärkas från densamma, syntes då helt och hållet böra tillskrifvas fel i observationsdata. Efter upptäckten af den Newtonska gravitationslagen vet man visserligen att produkten af hastigheten med qvadraten på afståndet från solen ej i all stränghet är oföränderlig, men i alla händelser äro afvikelserna från en konstant, då frågan är om kroppar inom solsystemet, så obetydliga, att den s. k. andra Keplerska lagen eller lagen om oföränderligheten af nämnda produkt utgör en ganska stor tillnärmelse till sanningen.

Den andra keplerska lagen uttryckes vanligen i en form, som något afviker från den i det föregående framställda. Produkten $\frac{1}{2}r^2(f'-f)$ är nämnligen ingenting annat — förutsatt att $f'-f$ är en mycket liten vinkel — än den sektor, som begränsas af tvenne närbelägna solafstånd och den under tidsenheten, här ett dygn, tillryggalagda bandelen. Under tidsenheten beskrifver således förbindningslinien emellan planeten och solen ständigt samma yta, rörelsen må dervid försiggå i hvilken punkt af banan som helst. Under tvenne dygn beskrifver således denna förbindningslinie en dubbelt så stor yta, som under ett dygn; under tre dygn en tre gånger så stor, o. s. v. I allmänhet kan man således säga.

II. *Den yta, som förbindningslinien eller radius-vektor beskrifver, växer proportionelt mot tiden.*

Detta är innehållet af den andra keplerska lagen.

I eqvationen (20) hafva vi funnit uttrycket för en elliptisk sektor; med stöd af de båda Keplerska lagarna bör nu detta uttryck sättas proportionelt mot tiden, hvarvid tiden räknas från det ögonblick, då planeten är i sitt perihelium eller närmast solen, emedan sektorns yta i detta ögonblick är noll. Betecknar man emellertid den obestämda och fortlöpande tiden med t, samt tiden för perihelium med t_0 så uttrycker differensen $t - t_0$ den tid, som förflutit sedan planeten var i sitt perihelium. Multiplicera vi denna tid med en ännu obestämd oföränderlig qvantitet K, så äga vi att sätta

$$K(t-t_0) = \tfrac{1}{2}a^2\sqrt{1-e^2}(\varepsilon - e\mathrm{Sin}.\varepsilon)$$

eller om $\dfrac{2K}{a^2\sqrt{1-e^2}}$ betecknas med n,

$$n(t-t_0) = \varepsilon - e\mathrm{Sin}.\varepsilon. \tag{21}$$

Denna likhet är en följd af de båda Keplerska lagarne samt uttrycker att radius-vektor genomlöper en mot tiden proportionelt växande yta, då denna yta begränsas af en elliptisk båge. Konstanten n benämnes planetens *medelrörelse* och står i närmaste sammanhang med planetens omloppstid. Efter ett helt omlopp har nämnligen ε vuxit med 360^0 och betecknas nu omloppstiden med T, så blifver

$$n(t + T - t_0) = 360^0 + \varepsilon - e\mathrm{Sin}.\varepsilon;$$

subtraheras den föregående eqvationen från den sednaste, så qvarblifver

$$nT = 360^0$$

eller

$$n = \frac{360^0}{T}.$$

Angifves tiden i dygn, så uttrycker således n den båge, som en med likformig hastighet i en cirkelformig bana rörlig kropp under ett dygn tillryggalägger. $n(t-t_0)$ angifver åter den båge, som denna kropp tillryggalagt sedan tiden för perihelium, och denna båge benämnes planetens *medelanomali*.

Det anförda uttrycket för medelanomalin eller $n(t-t_0)$ angifver att densamma växer proportionelt mot tiden; för att medelst räkning finna medelanomalin för en tidpunkt t, hvilken som helst, erfordras derföre endast kännedom af medelrörelsen n, samt af den tid *(Epok)* t_0, då planeten var i sitt perihelium. I stället för denna tid kan man äfven angifva planetens medelanomali för en viss annan fixerad tidpunkt t_1, och om denna medelanomali, som naturligtvis är en konstant, betecknas med c, så finnes medelanomalin vid tiden t, den vi beräkna med g, ur formeln

$$g = c + n\,(t-t_1)$$

För beräkningen af sanna anomalin och radius-vektor, gällande för tiden t, erfordras förutom kännedomen af medelanomalin ännu att excentriciteten e och halfva stora axeln a äro bekanta*). Planetens läge i banan synes der-

* Vid dylika beräkningar ligger den största och enda svårigheten i upplösningen af eqv. 21, hvarigenom den excentriska anomalin blifver funnen. Man har för detta ändamål många upplösningsmethoder, af hvilka här blott må anföras en för små excentriciteter passande. Enär eqv. (21) ej direkt kan upplösas, så är man tvungen att tillnärmelsevis beräkna ε, hvarvid man dock kan ernå all den noggrannhet, som åstundas. Man sätter i en första tillnärmelse

$$\varepsilon = g$$

hvarefter i den andra tillnärmelsen erhålles

$$\varepsilon = g + e \operatorname{Sin} g.$$

Detta värde beteckna vi med ε_1 och hafva då i den tredje tillnärmelsen

$$\varepsilon = g + e \operatorname{Sin}.\varepsilon_1.$$

Betecknas detta resultat åter med ε_2, så blifver.

$$\varepsilon = g + e \operatorname{Sin}.\varepsilon_2.$$

På samma sätt bör man fortsätta så länge till dess tvenne på hvarandra följande resultat blifva alldeles lika.

Ett exempel må tydliggöra detta förfarande. I detsamma antages $g = 50^0$, $e = 0{,}05431$. Man finner med tillhjelp af trigonometriska tabeller $e\operatorname{Sin}g. = 0{,}04160$, hvilket tal, för att förvandlas i minuter, bör multipliceras $\frac{180 \times 60}{\pi}$ (sid. 85). Härefter befinnes $e\operatorname{Sin}.g. = 143',_0 = 2^0 23',_0$ hvarefter $\varepsilon_1 = 52^0 23',_0$. På samma sätt finner man $\varepsilon_2 = 52^0 27'9$, $\varepsilon_3 = 52^0 28',1 = \varepsilon$.

före förutsätta bekantskapen af fyra konstanter eller, såsom de i astronomin vanligen benämnas, element, nämnligen c, n, e, och a; men vi skola genast blifva i tillfälle att se huruledes konstanterna n och a äro på sådant sätt beroende af hvarandra att den ena af dem omedelbart kan härledas medelst räkning, endast den andra är bekant. Sålunda qvarstå endast tre element, hvilkas kännedom erfordras, men äfven är tillräcklig för härledningen af planetens läge i sin bana vid hvilken tidpunkt, som helst.

Men läget i banan bestämmer ännu icke planetens läge på himmeln eller ens i det plan, hvari banan ligger. Antaga vi först, för att förenkla framställningen, att ifrågavarande plan sammanfaller med ekliptikan, samt att man önskar veta planetens från solen sedda läge på himmeln, så kommer det oss endast derpå an att bestämma den längd, sådan denna presenterar sig från solen, eller, såsom man säger, den *heliocentriska längden*. Denna längd är dock tydligen ingenting annat än planetens sanna anomali ökad med den vinkel, som banans stora axel bildar med vårdagsjemningspunktens riktning från solen. Denna vinkel benämnes *perihelii längd* och utgör ett element på samma sätt som de föregående tre.

---

* Genom en mathematisk behandling af relationerna emellan den sanna anomalin och medelanomalin finner man äfven följande uttryck:

$$f = g + 2\,e\ \mathrm{Sin.}\ g + \frac{5}{4}\,e^2\ \mathrm{Sin.}\ 2g + \ldots$$

Detta resultat af den Keplerska planettheorien skola vi nu jemföra med den motsvarande utvecklingen för den epicykloidiska hypothesen. Vi finna dervid att skilnaden $f - g$ motsvarar den vinkel, som förut (pag. 98) betecknades med B. Insättes i uttrycket för denna vinkel (pag. 99) 2e i st. för e, då naturligtvis e numera betyder hälften af excentriciteten i den gamla theorien, så erhålles

$$B = 2\,e\ \mathrm{Sin.}\ g + 2e^2\ \mathrm{Sin.}\ 2g$$

hvaraf synes att den andra termen erhölls för stor. För månen erhölls (pag. 101) qvantiteten $2e^2 = 20'.\ 70$, deremot befinnes $\frac{5}{4}e^2 = 12'',\ 9$, således nästan fullkomligt riktigt. Häraf framgår ögonskenligt företrädet af den elliptiska planettheorien framför den äldre.

Iakttagelserna hafva emellertid utvisat äfven en ojemnhet i bredden, och denna vinner en nöjaktig förklaring genom det antagandet, att banans plan ej sammanfaller med ekliptikan, ehuru den vinkel, som dessa båda planer bilda med hvarandra. befinnes vara ganska liten. Läget af plantbanans plan i hänseende till ekliptikan angifves medelst tvenne element, nämnligen 1:o vinkeln emellan de båda planen och 2:o vinkeln, som genomskärningslinien bildar med vårdagsjemningspunktens riktning. Den förra vinkeln benämnes vanligen *lutning* eller *inklination* och den sednare *nodens längd;* men emedan tvenne noder finnas (jemf. pag. 25), så räknar man ifrågavarande vinkel vanligen till den uppstigande noden. — Benämningen perihelii längd har nu en något annan betydelse än i den händelse, då båda planen sammanföllo; densamma betecknar nu summan af nodens längd och vinkeln emellan noden och perihelium. Det är uppenbart att nodens längd räknas i ekliptikan, men att den sednare vinkeln ligger i planetbanans plan. Ofta angifver man äfven denna vinkel såsom element, och denna kallas då *perihelii afstånd från noden;* i så fall bortfaller elementet perihelii längd såsom öfverflödigt.

Sedan planetens läge i sin bana blifvit bestämdt och banans läge i rymden är gifvet medelst de trenne elementerna, lutning, Nodens längd och perihelii afstånd från noden, förefinnes ingen svårighet vid att härleda planetens heliocentriska längd och bredd. De formler, som härvid begagnas, skola vi anföra utan att framvisa deras härledning: icke derföre, att denna härledning vore förenad med vidlyftiga mathematiska utvecklingar, utan tvärtom, emedan ifrågavarande formler omedelbart följa ur grundformlerna i den s. k. sferiska trigonometrin. Denna vetenskapsgren kan viserligen här ej förutsättas såsom bekant, men emedan densamma är både lätt tillgänglig och för ett djupare inträngande i den astronomiska vetenskapen nödvändig, så meddelas grunddragen deraf, äfvensom några andra härmed sammanhängande frågor i ett bihang till denna bok.

Vanligen betecknar man den heliocentriska längden och bredden med bokstäfverna l och b, lutningen med i, den uppstigande nodens longitud med Ω samt perihelii afstånd från noden med ω. Begagnar man sig af elementet perihelii längd, så betecknas detta med π. Summan af den sanna anomalin och perihelii afstånd från noden benämnes *argument för bredden* och betecknas vanligen med u. Emellan l och b å ena sidan, samt i och u å den andra förefinnas nu ibland många andra följande tvenne eqvationer

$$\text{tang.}\,(l-\Omega) = \text{Cos. i tang. u}$$

$$\text{tang. b} = \text{tang. i Sin.}\,(l-\Omega)$$

der

$$u = f+\omega = f+\pi-\Omega$$

Sedan planetens heliocentriska läge blifvit beräknadt och om man dertill känner jordens heliocentriska läge eller, hvilket kommer på ett ut, solens geocentriska, så finner man genom särdeles enkla geometriska betraktelser, dem vi dock nu förbigå, planetens geocentriska längd och bredd, d. v. s. planetens läge bland stjernorna, sedd från jorden. Bland det stora antal formler, som grundar sig härpå och hvilka tjena till att numeriskt öfverga från det heliocentiska systemet till det geocentriska, må här endast anföras följande trenne, i hvilka R betecknar solens afstånd från jorden, $\odot$ solens geocentriska längd, Δ planetens afstånd från jorden samt λ och β planetens geocentriska längd och bredd. I det, såsom förut, r betecknar planetens afstånd från solen eller dess radius-vektor, gälla följande eqvationer

$$\Delta\ \text{Cos.}\,\beta\ \text{Cos.}\,\lambda = \text{r Cos. b Cos. l} + \text{R Cos.}\,\odot$$

$$\Delta\ \text{Cos.}\,\beta\ \text{Sin.}\,\lambda = \text{r Cos. b Sin. l} + \text{R Sin.}\,\odot$$

$$\Delta\ \text{Sin.}\,\beta = \text{r Sin. b},$$

ur hvilka man efter några lätta analytiska transformationer finnes

$$\text{tang.}\,(\lambda-\odot) = \frac{\text{r Cos. b Sin.}\,(l-\odot)}{\text{R} + \text{r Cos. b Cos.}\,(l-\odot)}$$

medelst hvilken formel λ med största lätthet kan beräknas.

I det föregående hafva vi försökt att framvisa, huruledes en fördomsfri och riktigt anlagd undersökning af planeternas iakttagna rörelser ledde och måste leda till kännedom af deras verkliga banor, samt till insigt om de lagar, hvilka rörelsen i dessa banor lydde. Det visade sig sålunda att banorna befunnos vara ellipser, i hvilkas ena brännpunkt solen var belägen, samt att planeternas hastighet i olika punkter af den elliptiska banan följde den lag, som lyder att radius-vektor på lika tider genomlöper lika ytor. Med tillhjelp af dessa satser kunde planetens läge i hvarje ögonblick finnas medelst räkning, endast man kände de konstanter eller element, som bestämma banans storlek och form (halfva stora axel och excentricitet), planetens läge i densamma vid ett enda gifvet ögonblick (medelanomali vid epoken) samt slutligen banans läge i rymden (de trenne vinkelelementen: lutning, nodens längd och perihelii afstånd från noden). Till dessa sex element skulle egentligen ett sjunde böra tillkomma, nämnligen planetens medelrörelse eller medelhastighet under ett visst tidsmoment, eller ock, hvilket är af samma betydelse, planetens omloppstid. Det har dock redan blifvit antydt att detta element på sådant sätt är beroende af den halfva stora axeln eller planetens medelafstånd från solen, att detsamma derigenom omedelbart är gifvet. Detta beroende uttryckes medelst den tredje keplerska lagen, som lyder:

III. *Tvenne planeters omloppstider, man må utvälja hvilka som helst, förhålla sig till hvarandra på samma sätt som deras banors halfva stora axlar upphöjda till digniteten* $\frac{3}{2}$ eller ock, *att omloppstidernas qvadrater förhålla sig såsom kuberna på medelafstånden.*

I tecken lyder denna lag i enlighet med följande eqvation

$$\frac{T^2}{T_1^{\,2}} = \frac{a^3}{a_1^{\,3}}$$

der T och T_1 beteckna tvenne planeters omloppstider, samt a och a_1 deras banors halfva stora axlar. Denna eqvation kan äfven skrifvas, såsom följer

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{T_1^{\,2}}{a_1^{\,3}}$$

hvaraf det visar sig, då denna eqvation gäller för alla planetkombinationer, att förhållandet $\frac{T^2}{a^3}$ eller $\frac{T}{a^{\frac{3}{2}}}$ är en inom hela planetsystemet gällande konstant. Kepler, som var öfvertygad om att någon relation emellan medelafstånden och omloppstiderna ägde rum och sökte en sådan, fann densamma på rent empirisk väg.

På denna väg, nämnligen den empiriska, är det äfven ganska lätt att öfvertyga sig om riktigheten af den tredje keplerska lagen. För sådant ändamål meddelas i den andra kolumnen af nedanstående tabell de ptolemeiska värdena för de olika planeternas medelafstånd, upphöjda till digniteten $\frac{3}{2}$, i den tredje deras omloppstider och i den fjerde de tal, som erhållas genom division af de i de föregående kolumnerna meddelade tal.

	$a^{\frac{3}{2}}$	T	$\frac{T}{a^{\frac{3}{2}}}$
Merkurius	0.2378	0.2408	1.013.
Venus	0.6104	0.6151	1.008.
Jorden	1.0000	1.0000	1.000.
Mars	1.8740	1.8810	1.004.
Jupiter	11.914	11.8674	0.996.
Saturnus	28.058	29.4605	1 050.

Ehuruväl talen i sista kolumnen ej äro hvarandra alldeles lika, så äro de detta dock så nära, som man har rätt att vänta på grund af ofullkomligheten af de iakttagelser, hvilka legat till grund för bestämningen af ofvanstående medelafstånd. Ifrågavarande talserie kan man derföre anse innehålla ett empiriskt bevis för riktigheten af den tredje keplerska lagen. Det ligger i naturen af dylika bevis att de ej hafva absolut bindande kraft, utan endast ådagalägga en sak med mer eller mindre stor sannolikhet. Så är äfven förhållandet med ofvanstående och med dem, som kunde föras på Keplers tid, men sednare undersökningar och säkrare iakttagelser hafva ständigt bestyrkt de Keplerska lagarne, oafsedt att desamma genom upptäckten af Newtonska gravitationslagen vunnit en säker theoretisk grundval och att deras betydelse kunnat blifva uppfattad i en skarpare dager.

Kepler föddes 1571 i staden Weil i Würtemberg och dog efter ett lif fullt af vedermödor 1630.

§ 7. Precession.

Dagjemningspunkterna eller de punkter, i hvilka eqvatorn och ekliptikan, betraktade såsom storcirkeln på himlahvalfvet, skära hvarandra, skulle hafva ett oföränderligt läge om jordens rullningsaxel ständigt förblefve parallel med sig sjelf. Eqvatorn är egentligen ett plan, som genom jordens medelpunkt drages vinkelrätt emot jordaxeln, men hvilket, om detsamma tänkes utdraget till den skenbara himlasferen, på denna utskär en storcirkel, hvilken äfvenledes bär namnet eqvator. Läget af detta plan i rymden såväl som af eqvatorcirkeln på himlahvalfvet är nu tydligen beroende af jordaxelns riktning och ändras med denna. Man inser på grund häraf genast möjligheten af att eqvinoktialpunkterna kunna ändra sitt läge, hvilket åter skulle hafva till följd att himlakropparnas lägen, hänförda till vårdagjemningspunkten vid olika tider vore olika, äfven deras egna rörelser oafsedt.

Iakttagelserna hafva visat att en sådan föränderlighet i sjelfva verket förefinnes. Redan långt innan man kunde förklara orsaken till ett sådant fenomen, förmärktes att stjernornas längder ökades, ungefär i proportion till tiden. För att åtminstone erhålla en geometrisk framställning af ifrågavarande företeelse eller för att åskådliggöra densamma, antog man, såsom det ofvan blifvit anmärkt (pag. 95) tvenne sferer utöfver de eljest behöfliga, och på så sätt lyckades man äfven att till en viss grad följa fenomenets förlopp. Detsamma består hufvudsakligen deri, att eqvinoktialpunkterna tillbakaskrida i ekliptikan i motsatt riktning till solens årliga rörelse, ungefär 50'' årligen, I följd häraf blifva alla längder under hvarje år ökade med 50'' under det att bredderna förblifva oförändrade. Häraf uppstod benämningen precession (framskridande relativt till vårdagjemningspunkten.)

Precessionen är till sitt belopp alltför betydlig att förblifva obemärkt äfven i de råaste iakttagelser. Under loppet af ett sekel uppgår dess belopp till närmare $1\frac{1}{2}^{0}$, således till en qvantitet, som är omöjlig att förbise, endast astronomiska iakttagelser öfverhufvud utföras och jemföras med hvarandra. Sålunda upptäcktes precessionen af Hipparchus i det han jemförde sina egna observationer med äldre.

Sedan föreställningen om jordens rörelse börjat vinna insteg, tvekade man ej att förklara eqvinoktialpunkternas tillbakaskridande genom det antagande att jordens axel ej förblef parallel med sig sjelf utan småningom ändrade sin riktning i rymden. Förklaringen var rent geometrisk såsom Keplers planettheori, men företeelsens förlopp utvisades riktigt genom densamma. Jordaxeln eller dess förlängning verldsaxeln beskrifver en konisk yta, hvars spets sammanfaller med jordens medelpunkt. Under denna rörelse beskrifver verldsaxeln på den skenbara himlasferen tvenne cirklar, en på den norra och en på den södra hemisferen. Medelpunkterna till dessa cirklar ligga åter på den räta linie, som genom jordens medelpunkt drages vinkelrätt mot ekliptikan; man inser derföre lätt, att bågen på himmeln emellan ofvannämnde cirklars medelpunkter och deras periferier är lika stor med den, som mäter eqvatorns lutning mot ekliptikan. Längs periferien af dessa cirklar röra sig verldspolerna och fullända sin bana på inemot 26000 år; de komma under denna rörelse i grannskapet af olika stjernor och aflägsna sig åter från dem. Den stjerna, vi nu benämna Polaris eller polstjerna, förlorar omsider rättigheten till denna benämning i det densamma efter årtusenden intager lägen som äro ganska aflägsna från polen, men andra stjernor intaga dess plats. Efter 12000 år kommer Vega, den mest lysande stjerna på norra himlahalfvan att vara nära den norra verldspolen, och förtjenar då namnet polstjerna.

2 Kapitlet.

Newtons allmänna gravitationslag.

§ 8. Galileis upptäckt af lagarna för kroppars fall och för pendelns svängningar.

Ungefär vid samma tid, som Kepler upptäckte lagarne för planeternas rörelse kring solen, undersökte *Galilei* (född i Pisa 1564) huruledes kroppar, om de obehindradt lemnas att falla mot jordytan, förhålla sig i denna rörelse. Han fann, att de härvid följde några oföränderliga och allmänt giltiga lagar, hvilkas natur han äfven lyckades uppdaga på experimentel väg. Undersökningarna härom skedde i Pisa, der han vid den tiden innehade en profession i mathematiken. Man berättar att han ofta, i det han lät kroppar nedfalla från tornet i nämnda stad, förevisat huruledes fallhastigheten ingalunda ökades i samma grad, som kroppens vigt tilltog, något som man förut med Aristoteles hade antagit. Vi veta nu att fallhastigheten vid sådana försök i och för sig alldeles icke är beroende af den nedfallande kroppens tyngd, utan att tvertom alla kroppar nedfalla med fullkomligt samma hastighet, endast nedfallandet sker i lufttomt rum. Luften utöfvar nämnligen något motstånd vid kroppens rörelse, hvilket är desto större, ju större kroppens dimensioner äro i förhållande till dess vigt. Detta motstånd kunde Galilei visserligen icke i sina experiment undanrödja eller till dess inflytande beräkna, men hans försök visade dock otvetydigt huru oriktigt det äldre antagandet var.

I afseende på lagen för hastighetens ökande under fallet ledde hans försök till säkrare resultat. Han fann nämnligen, att hastigheten under hvarje sekund, eller öfverhufvud under någon tidsenhet, ökades med samma konstanta qvantitet, eller att *fallhastigheten tilltager proportionelt mot tiden*. Denna sats benämnes den första galileiska lagen.

Har en kropp vid slutet af den första sekunden, efter det densamma begynte nedfalla, uppnått en hastighet, den vi beteckna med g (man angifver g i något längdmått), så är dess hastighet vid slutet af andra sekunden 2 g, vid slutet af tredje sekunden 3g, o. s. v.

Då kroppen begynner att falla, är dess hastighet o samt vid slutet af den första sekunden g; densamma har dock under den första sekunden endasts genomlupit väglängden $\frac{1}{2}$g: i medeltal har dess hastighet således varit $\frac{1}{2}$ g, emedan resultatet af kroppens rörelse är detsamma, som om han under en sekund nedfallit med den konstanta hastigheten $\frac{1}{2}$ g. — I allmänhet skulle ett sådant resonemang ej vara alldeles oriktigt, men detsamma vinner desto mer gällande kraft, i mon falltiden är liten; detsamma blifver fullkomligt strängt om denna tid antages så liten, att hastighetens ökning derunder får antagas proportionell mot tiden. I ofvanstående fall, der hastigheten ständigt ökas proportionelt mot tiden, är derföre den genomlupna väglängden under en viss tid lika med produkten af medelhastigheten under samma tid och antalet tidsenheter på densamma.

Efter t sekunder sedan kroppen begynnt att falla är fall hastigheten t.g och medelhastigheten M under dessa t sekunder är således

$$M = \frac{o + g.t}{2} = g\tfrac{1}{2}.t;$$

enligt hvad som ofvan blifvit framstädt är således den väg S, som kroppen under t sekunder nedfallit:

$$S = M.t = \tfrac{1}{2}gt^2$$

Det resultat, som den sednast funna eqvationen innebär, har äfven blifvit funnet af Galilei och benämnes den andra galileiska lagen. Denna lag utsäger således, *att fallrymden ökas proportionelt mot tidens qvadrat.* — En kropp, som under första sekunden nedfaller väglängden 1, nedfaller under de tvenne första sekunderna väglängden 4, under de tre första väglängden 9, o. s. v.

Konstanten g har i nyare tider blifvit underkastad mycket noggranna undersökningar, såväl i afseende å dess numeriska värde, som ock i afseende å dess theoretiska betydelse och sammanhang med andra tal. De förra hafva ledt till resultatet

$$g = 9{,}80896 \text{ metres};$$

de sednare åter att detta värde är något föränderligt. Dock är denna föränderlighet på intet sätt beroende af den nedfallande kroppens fysiska beskaffenhet, utan endast af den orts geografiska läge, der fallförsöken anställas. Ofvanstående värde gäller för observatorium i Paris; mot polerna ökas detsamma något, hvaremot något mindre värden gälla i mon fallförsöken anställas närmare eqvatorn.

Genom en tillfällighet lärer Galilei blifvit ledd till att undersöka lagarna för pendelns svängningar. Närvarande vid en religiös ceremoni i Kathedralen i Pisa, varseblef han en framför altaret hängande lampa — ett mästerverk af Benvenuto Cellini —, hvilken, genom någon tillfällighet bragdt ur sitt jemnvigtsläge, svängde fram och åter. Måhända förmärkte han redan nu, att tiden för hvarje svängning förblef densamma änskönt svängningsamplituden småningom förminskades. Sednare försök ledde i alla händelser till denna lag, *att tiden, under hvilken pendelkulan fullbordar en svängning, är oberoende af sjelfva svängningsbågens storlek.* Sednare tiders theoretiska undersökningar hafva dock visat att denna lag endast tillnärmelsevis är riktig, men att densamma, om svängningsbågen öfverhufvud ej är alltför stor, dock endast obetydligt afviker från sanningen.

Deremot är pendelns svängningstid beroende af dess längd, och detta beroende uttryckes tillnärmelsevis äfven genom en af Galilei funnen lag, hvilken säger *att pendellängderna förhålla sig omvändt som svängningstidernas qvadrater*, eller att svängningstidens qvadrat dividerad med pendelns längd är ett konstant tal.

Egenskapen af att dess svängningstid är oberoende af svängningsbågens eller den s. k. utslagsvinkelns storlek, har gjort pendeln till ett af de vigtigaste instrument för den observerande astronomen. Han kan nämnligen bibehålla densamma vid så små svängningar, att den galileiska lagen i afseende å svängningstidens oberoende af utfallsvinkeln kan anses fullkomligt riktig. Den ena svängningstiden blifver då precist lik den andra och man kan således säga att tiden för en svängning är t. ex. precist $\frac{1}{10}$ af tiden för 10 svängningar. I pendeln har man således ett förträffligt instrument att mäta tiden. — Vanligen förbinder man pendeln med ett urverk, hvilket dels tjenar att bibehålla pendeln i svängning, dels till att angifva antalet svängningar, som förflutit sedan något visst ögonblick.

§ 9. Satser ur mekaniken.

Flertalet af de i det föregående omnämnda undersökningarne hafva i grunden varit rent geometriska, d. v. s. man har med desamma endast åsyftat att finna en geometrisk bild af de rörelselagar, som planeterne i sina rörelser följa. Framgången af dylika undersökningar berodde i främsta rummet på iakttagelsernas tillförlitlighet och hade i följd häraf endast ett relativt värde, — en theoretisk grundval för astronomin var härmed ännu icke vunnen. Man kunde visserligen på grund af geometriska betraktelser, sedan de keplerska lagarna voro bekanta och planetbanornas elementer ur iakttagelserna blifvit bestämda, beräkna planeternas lägen vid olika tider, och jemförelsen emellan dessa beräknade lägen och de iakttagna kunde dels tjena till att förbättra elementernas numeriska värden, dels till att bestyrka de keplerska lagarnas riktighet; men dessa angåfvo dock på sin höjd endast något faktiskt bestående, utan att på ringaste vis antyda orsaken dertill. Utan att likväl känna deras theoretiska grund, kunde man aldrig vara säker på att ej ytterligare iakttagelser skulle fordra deras öfvergifvande på samma sätt, som Kepler sett sig föranlåten att lemna hypothesen om den likformiga rörelsen i cirkelformiga banor. Den keplerska astronomin var således i sjelfva verket ännu en rent induktiv vetenskap, och om Kepler i densamma ansåg sig hafva hunnit vetandets gräns, så var denna åsigt begrundad i en verldsåskådning, som i honom räknade en af sina sista koryfeer. Enligt hans tanke voro nämnligen de af honom på empirisk väg upptäckta lagarne för planeternas rörelser omedelbart emanerade ur det högsta väsendets vilja, hvilket älskade att manifestera sig geometriskt; någon vidare orsak till de funna lagarne kunde det således ej komma i fråga att efterforska. Endast deras öfverensstämmelse med föreställningarne om sferernas harmoni sökte han med otrolig möda att framvisa. Det öfverensstämde alltför väl med Keplers ideella verldsuppfattning att anse planeternas olika hastigheter motsvara olika toner i enlighet med vissa akustiska talförhållanden, samt att vissa kombinationer af de olika planeterna under vissa omständigheter representera musikaliska harmonier. Sådana harmonier ansåg han skaparen hafva åsyftat och trodde sig således genom sina upptäckter hafva uppdagat skapelsens mysterium, den gudomliga afsigten med verldssystemet och med lagarna för rörelserna i detsamma.

I Keplers verldsåskådning hade visserligen rörelsernas harmoni på sätt och vis karakteren af en hypothes, med hvilken rörelselagarna borde öfverensstämma: denna harmoni, en omedelbar manifestation af den gudomliga viljan, skulle återfinnas i planeternas rörelser och upptäckten häraf således stadfästa riktigheten af de på induktiv väg funna rörelselagarna; men någon theoretisk astronomi i nyare mening kunde härpå dock icke grundläggas. En sådan astronomi förutsätter nämnligen en hypothes af den beskaffenhet, att ur densamma med nödvändighet följa just de rörelselagar, och tillika endast de, som öfverensstämma med de faktiska. Man inser dock först och främst, att antagandet af en gudomlig vilja såsom rörelsens orsak ännu på intet sätt förklarar dess beskaffenhet; ty denna vilja måste ju, såsom varande absolut fri, kunna gifva anledning till hvilken rörelse som helst. Ej heller ur vilkoret af harmoni kunna rörelselagarna reduceras, emedan harmoni kan uppstå på många olika sätt. Det hade derföre varit nödvändigt att i förväg utsätta just sådana harmonier, som erfarenheten hade visat kunna motsvaras af de verkliga rörelserna; men under sådana förutsättningar ligga lika många olika hypotheser förborgade, hvarföre desamma i sjelfva verket ej föra förklaringen af det faktiska ett steg framåt.

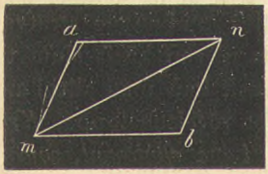
Eftersinnar man emellertid huruledes en förklaring af de för solsystemet funna rörelselagarna må kunna bringas å bane, så finner man snart, att början måste göras med att undersöka verkningarne af orsaker till rörelser i allmänhet. — Hvarje sådan orsak, som antingen frambringar en rörelse eller förändrar en redan förhandenvarande, eller ock endast sträfvar att åstadkomma dylika verkningar, har man benämnt *kraft*, dervid man i äldre tider antog hvila och rörelse såsom hvarandra motsatta begrepp. Den slutsats skulle nu tyckas ligga nära till hands, att hvarje rörelse antyder tillvaro af kraft, men denna slutsats är endast skenbart riktig; dess riktighet skulle bero på föreställningssättet om rörelsen såsom hvilans motsats. Det gifves åtskilliga ganska enkla rön, hvilka antyda att rörelse förekommer utan att någon kraft verkar på den i rörelse varande kroppen, såsom t. ex. den omständighet att en uppkastad sten fortfar att stiga äfven sedan densamma lemnat handen, d. v. s. sedan kraften, som gifvit upphof åt rörelsen, upphört att verka. Svårigheten att förklara detta förhållande beror helt och hållet på föreställningen att hvarje rörelse är betingad af en fortverkande kraft, eller att hvarje kropp vid frånvaron af krafter skulle befinna sig i hvila. På samma gång man tänker sig rörelsen lika naturlig för en kropp, som att hon befinner sig i hvila, bortfaller deremot svårigheten af en sådan förklaring fullständigt; hvilken i händelse då inga krafter inverkade på rörelsen, oafbrutet skulle fortgå i en rät linie och med likformig hastighet, emedan ingen orsak förefunnes, som sträfvade att ändra riktningen eller hastigheten. — Stenen, som kastades af handen, skulle med likformig hastighet fortskrida i rymden, såvida ej krafter funnos, hvilka sträfvade att draga honom till jorden. Men en sådan kraft förefinnes i sjelfva verket och benämnes i dagligt tal kroppens tyngd. Tyngden sträfvar fortfarande att neddraga stenen till jorden eller att ändra arten af dess rörelse, och denna rörelse öfvergår äfven i följd häraf från ett uppåtstigande till ett nedfallande. Under uppstigandet minskas stenens hastighet alltjemt till dess stenen uppnått sin högsta höjd, men härefter begynner hastigheten under nedfallandet att mer och mer ökas. Detta och andra liknande rön, der rörelser visade sig utan att krafter voro verkande, hafva ledt till det föreställningssätt *att en kropp, som en gång blifvit genom någon kraft försatt i rörelse, fortfarande bibehåller denna rörelse oförändrad äfven sedan kraften upphört att verka; men att ändringar i rörelsens riktning och hastighet antyda tillvaron af nya krafter.* Denna sats gäller såsom en princip i läran om kroppars rörelse och rörelsernas beroende af krafter, eller den afdelning af mekaniken, som benämnes dynamik; densamma satsen har i alla afseenden vunnit erfarenhetens bekräftelse.

Vi hafva sett på hvilka grunder man blifvit ledd till antagandet att rörelsens tillvaro ännu icke antyder tillvaron af någon verksam kraft. Deremot ligger det i sjelfva begreppet af kraft, att en sådan antingen måste ändra en redan förhanden varande rörelse eller åtminstone sträfva dertill; man kan derföre alltid af en gifven kraft sluta till en bestämd rörelse, och af denna orsak kan man alltid angifva kraftens storlek medelst ett visst rörelsebelopp. *Kraftens storlek mätes sålunda af den rätliniga väglängd, som en af densamma angripen kropp tillryggalägger under en viss tidsenhet, t. ex. en sekund.* Oftast mäter man dock kraften medelst den hastighet, som under tidsenheten blifvit tilldelad den rörliga kroppen, d. v. s. medelst den hastighet, hvarmed kroppen efter tidsenhetens slut skulle framskrida om kraften upphörde att verka.

Rörelserna i naturen äro merendels uppkomna eller beroende af två eller flere samverkande krafter eller af krafters inflytande på redan förhandenvarande rörelser; det är derföre i främsta rummet af vigt att känna huruledes den af två eller flere krafter härrörande eller resulterande rörelsen blifver, eller huruledes en gifven rörelse ändras i följd af en ny krafts tillkomst. Man vinner denna kunskap med stöd af en mycket bekant sats, den s. k. parallelogramsatsen, hvilken man fösökt att bevisa på rent metafysiska grunder, men hvars riktighet i alla händelser, äfven om de spekulativa bevisen ej skulle befinnas hållbara, tillräckligt blifvit bestyrkt genom erfarenheten. Denna sats lyder: *om tvenne krafter angripa en kropp, så är den i följd häraf uppkommande rörelsen gifven till storlek och riktning medelst diagonalen i den parallelogram, hvars sidor utgöras af de väglängder, hvilka kroppen hade tillryggalagt, då hvar och en af de båda krafterna ensam hade verkat.*

I enlighet med denna sats finner man att en kropp, som tänkes i punkten m (fig. 22) underkastad inflytandet af tvenne krafter, af hvilka den ena under tidsenheten tillskyndar samma kropp rörelsen m a samt den andre under samma tid rörelsen mb, i sjelfva verket erhåller en rörelse, hvars storlek och riktning angifves af diagonalen mn. Samma rörelse hade äfven kunnat åvägabringas genom en enda kraft, nämnligen genom en sådan, som under tidsenheten hade sträfvat att bibringa kroppen rörelsen mn. Denna, här endast imaginerade kraft benämner man *resultant* till de båda sidokrafterna, hvilka åter benämnas *komponenter*.

Fig. 22.



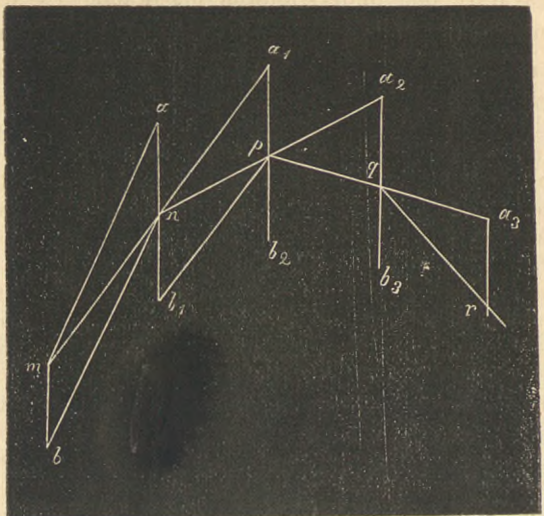
På samma sätt som man alltid medelst konstruerandet af kraftparallelogrammen kan finna resultanten till gifna komponenter, så kan man äfven, om resultanten och en komponent dertill är gifven, bestämma den andra komponenten. Vore t. ex. endast en kraft bekant och hade denna sträfvat att under tidsenheten föra kroppen från m till a, men hade rörelsen i sjelfva verket försiggått från m till n, så vore man fullt berättigad att sluta till tillvaron af en annan kraft, hvilken hade sträfvat att under samma tid föra kroppen från m till b.

I stället för att tänka sig en kropp angripen af tvenne krafter kan man äfven föreställa sig att kroppen ifrån början hade haft en egen rörelse, och denna sådan, att kroppen i densamma skulle förflytta sig just det vägstycke, som den ena kraften sträfvade att åvägabringa. Man finner då enligt kraftparallelogrammens theori det inflytande, som en kraft utöfvar på den redan förhandenvarande rörelsen hos en kropp. Om t. ex. en kropp befinner sig i rörelse och i följd af denna under tidsenheten skulle förflytta sig från m till a, men derunder vara angripen af en kropp, som ensam sträfvade att förflytta kroppen från m till b, så skulle den af denna kraft modifierade rörelsen ske till punkten n.

Tillkommer en tredje kraft till tvenne andra, så finner man resultanten af alla tre genom att först medelst kraftparallelogrammen konstruera resultanten till de tvenne och sedan på samma sätt en ny resultant till denna resultant såsom den ena komponenten och den tredje kraften såsom den andra.

Det är nu ganska lätt att med stöd af de anförda mekaniska satserna härleda stenens bana, som genom någon kraft, t. ex. muskelkraften, uppkastades i luften. Härvid skola vi i närmaste öfverensstämmelse med verkliga förhållandet antaga att stenens tyngd neddrager densamma med samma kraft i alla punkter af banan, äfvensom att riktningarne, i hvilka denna kraft verkar, städse äro parallela med hvarandra. Slutligen skola vi helt och hållet bortse från luftens motstånd vid rörelsen. Om nu stenen uppslungas med en kraft, som under den första sekunden sträfvar att föra densamma från punkten m (fig. 23) till punkten a, men tyngden samtidigt hade neddragit stenen till punkten b, om denna kraft hade verkat ensam, så är det verkligen genomlupna vägstycket angifvet genom linien mn. Tänka vi oss vidare, dock endast för ett ögonblick, att tyngden upphörde att verka, så funne vi att stenen i följd af sin förut uppnådda hastighet under nästa sekund skulle röra sig till

Fig. 23.



punkten a_1. Tyngden sträfvar dock att neddraga stenen vägstycket nb_1 hvadan densamma i sjelfva verket under den andra sekunden förflyttar sig från n till p. På samma grunder kan man följa stenens rörelse genom punkterna q, r, o. s. v. under de återstående sekunderna till dess han nedfaller.

Såsom det ofvan blifvit framhållet, antyder en rörelse, hvilken ej är likformig och rätlinig, att krafter äro verksamma på den i rörelse varande kroppen; det kan då i andra rummet blifva fråga om att medelst konstruktion eller beräkning bestämma dessa krafter. Vanligen gäller det dock ej endast att bestämma kraftens ögonblickliga värde och riktning, utan man vill fastmer lära känna den allmänna lag, hvarunder de vid enskilda tillfällen gällande kraftyttringarne lyda. Sålunda följer t. ex. tyngdens inverkan på stenen den lag, att stenen i följd af densamma under hvarje sekund neddrages mot jordytan samma vägstycke, samt att alla dessa vägstycken äro parallela med hvarandra. — Understundom är härledningen af sådana lagar mycket lätt, densamma ligger så att säga genast vid handen; i andra fall åter svårare och understundom måste härvid svårigheter öfvervinnas, hvilka sätta den största skarpsinnighet på prof.

I föregående paragraf har det redan blifvit omnämndt att Galilei på experimentel väg funnit lagarne för kroppens rätliniga fall mot jordytan; vi skola nu försöka att utreda naturen af den kraft, som gifver anledning till dessa lagar. Härvid är först och främst den anmärkning nödig, att om de båda komponenterna i kraftparallelogrammen sammanfalla med hvarandra, så blifver resultanten helt enkelt lika stor med deras summa. Man öfvertygar sig ytterst lätt om riktigheten af denna utsago genom att tänka sig vinkeln emellan komponentena blifva allt mindre och mindre och slutligen helt och hållet försvinna.

Om en kropp låtes nedfalla utan att dervid erhålla någon annan rörelse än den som föranledes af dess egen tyngd, så erhåller densamma vid slutet af första sekunden en hastighet, hvilken i det föregående blifvit betecknad med g. Skulle nu tyngden upphöra att verka, så fortsatte den fallande kroppen detta oaktadt sin väg, men med den konstanta hastigheten g under hvarje sekund. Hastigheten har visserligen under den första sekunden ej bibehållit sig oförändrad; densamma var i början o och vid slutet g. Vi kunna dock här antaga att kroppen nedfallit med den konstanta medelhastigheten $\frac{1}{2}g$. Under den andra sekunden nedfaller kroppen vägstycket $\frac{3}{2}g$ $(=\frac{1}{2}g.2^2-\frac{1}{2}g.1^2)$, således ett större stycke än om han endast hade fortsatt sin väg utan påverkan af någon kraft. Men det är just denna kraft, vi önska lära känna. Vi hafva nu resultanten lika med $\frac{3}{2}g$ och dessutom veta vi att till denna resultant hör den ena komponenten g, hvilken uttrycker den väg, kroppen endast i följd af sin vid slutet af första sekunden uppnådda hastighet hade tillryggalaggt under den andra. Kalla vi den sökta andra komponenten x, så är

$$x+g=\frac{3}{2}g$$

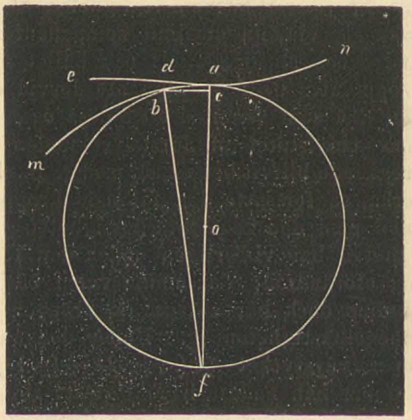
eller

$$x=\frac{1}{2}g,$$

hvilket vill säga att den nedfallande kroppen under den andra sekunden varit påverkad af en kraft, hvilken allena hade tilldelat honom medelhastigheten $\frac{1}{2}g$, således samma medelhastighet, som under första sekunden. På samma sätt finner man att den påverkande kraften yttrar sig alldeles lika under hvarje sekund, hvadan man slutar att kroppens tyngd verkar oberoende af dess afstånd från jordytan och af den tid, kroppen redan varit i rörelse. Tyngden yttrar sig här, med andra ord, såsom en konstant kraft. *

I en mängd fall kan man beräkna den verkande kraften på följande omväg. Man tänker sig i den punkt af den krokliniga banan, der man vill undersöka den verkande kraftens belopp, en cirkel anpassad så nära som möjligt krokliniens böjning. Vi antaga sålunda att den mycket lilla bågen ab är gemensam

Fig. 24.



både för cirkeln kring o såsom medelpunkt samt kroklinien nm. Radien af denna cirkel, som angifver krokliniens krökning i anslutningspunkten, kallas krökningsradie, och densamma beteckna vi med r. En kropp, som tänkes röra sig utefter linien nm, kommer till punkten a med en sådan hastighet att, om ingen kraft verkade på honom, han under den följande sekunden skulle förflytta sig utefter den mot radien vinkelräta räta linien ae till punkten d, hvarvid vi antaga att stycket ad = bc; men i sjelfva verket förflyttas han till punkten b, det frågas: huru stor är den kraft, som förorsakat denna afvikelse från den rätliniga

* Detta resultat är ej fullt riktigt, men dess oriktighet kan först då varseblifvas, när kroppen genomlöper högst betydliga sträckor. Egentligen kan man dock först medelst än finare iakttagelsemedel märka någon skilnad hos tyngdkraften i olika höjder.

rörelsen? Denna kraft utmärkes på figuren af linien ac, hvilken då utgör ett stycke af radien och är vinkelrät mot ae; det kommer nu endast an på att angifva detta stycke medelst ett mathematiskt uttryck. För detta ändamål göra vi bruk af några bekanta satser från den elementära geometrin, hvilka, tillämpade på vårt fall, leda till följande proportion *.

$$\frac{ac}{ab}=\frac{ab}{af} \text{ eller } ac=\frac{\overline{ab}^2}{2\,R}$$

Vi hafva antagit en sekund till tidsenhet, men dervid har blifvit förutsatt, att den rörliga kroppens bana under densamma, utan märkbart fel, kan antagas sammanfalla med en cirkelbåge: man kan dock äfven tänka sig tidsenheten nog liten, att rörelsen under densamma till sin längd blifver lika stor med den räta linien ab. Under detta antagande erhåller man för ac följande uttryck, i hvilket v betecknar längden af *bågen* emellan punkterna a och b,

(1) $$ac=\frac{v^2}{2R}$$

Emedan under dessa förutsättningar — och om omloppstiden i cirkeln betecknas med T, d. v. s. om T tidsenheter erfordras på det att en kropp med den konstanta hastigheten v under desamma skulle fullborda ett helt omlopp i cirkeln, — denna hastighet kan uttryckas medelst formeln

$$v=\frac{2\pi R}{T},$$

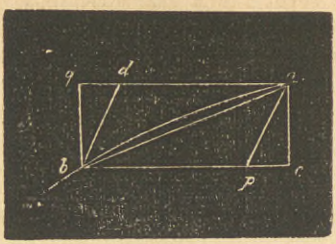
så har man äfven

(2) $$ac=\tfrac{1}{2}\,\frac{4\pi^2R}{T^2}$$

Vi se, huruledes den verkliga rörelsen ab blifvit sönderdelad i tvänne komponenter ad och ac, och man inser äfven lätt, att komponenten ac representerar hela den under tidsenheten verkande kraften, i händelse kroppens egen hastighet representeras af linien bc, såsom ofvan blifvit antaget. Det allmännare fallet, då kraften icke verkar i krökningsradiens riktning, kan dock underkastas en nära nog liknande behandling. Vi tänka oss linien ad representera kroppens egen hastighet, samt ab resultaten

* Dessa satser äro: 1) Om en triangel inskrifves i en halfcirkel, så är vinkeln, som står emot diametern, en rät; 2) Uti trianglar med lika stora motsvarande vinklar förhålla sig sidorna i den ena såsom de motsvarande sidorna i den andra. Trianglarne abc och bcf äro likvinkliga och gifva således anledning till ofvanstående proportion.

Fig. 25.



af denna hastighet och en yttre kraft, hvilken under tidsenheten ensam hade bibringat kroppen rörelsen ap. Denna rörelse kan dock sönderdelas i tvenne andra, nämnligen i ac och cp = dq. Resultanten ab kan således tänkas vara uppkommen af komponenterna aq och ac. Den sednare komponenten är äfven nu bestämd medelst uttrycket (1) eller (2), då vi med v beteckna bågen ab, men komponenten aq är sammansatt af kroppens egen rörelse ad och komponenten dq, således äfven beroende af den verkande kraften. Detta tillskott dq kan man äfven beräkna, om man känner riktningen ap, i hvilken kraften verkar, d. v. s. vinkeln pac. Beteckna vi denna vinkel med P, så blifver

$$ac = ap \text{ Cos } P; \; dq = cp = ap \text{ Sin } P,$$

således

$$dq = ac. \text{ tang } P,$$

och sjelfva kraften ap kunna vi finna ur formeln

$$ap = \frac{ac}{\text{Cos } P},$$

eller ur formeln

$$ap = \sqrt{\overline{ac}^2 + \overline{qd}^2} = ac\sqrt{1 + \text{tang} P^2}$$

Denna formel utvisar, att i de händelser, då P har ett litet värde, skilnaden emellan ap och ac är i vida högre grad liten; ty om redan tang P har ett nummeriskt värde, så är qvadraten deraf än mindre. Vore t. ex. tang P $= \frac{1}{10}$, så hade man tang P$^2 = \frac{1}{100}$. Det gifves många fall i naturen, der P verkligen har ett så litet värde, att man, åtminstone i en första tillnärmelse, kan sätta:

$$ap = ac.$$

Såväl ac som dq kunna betraktas såsom medelhastigheter, dem den rörliga kroppen erhållit i följd af den verkande kraften; vill man dock använda de vid tidsenhetens slut uppnådda sluthastigheterna såsom mått för kraften, så har man endast att multiplicera de förut funna uttrycken med 2. Beteckna vi således den i krökningsradiens riktning verkande kraftkomponenten med ϱ, samt den deremot vinkelräta med u, så hafva vi

$$\varrho = \mathrm{ac} = \frac{v^2}{\mathrm{R}} = \frac{4\pi^2\mathrm{R}}{\mathrm{T}^2}$$

$$\mathrm{u} = \frac{v^2}{\mathrm{R}} \operatorname{tang} \mathrm{P};$$

och betecknas hela kraften med φ, så är denna

$$\varphi = \frac{v^2}{\mathrm{R}}\sqrt{1 + \operatorname{tang} \mathrm{P}^2} = \frac{4\pi^2\mathrm{R}}{\mathrm{T}^2}\sqrt{1 + \operatorname{tang} \mathrm{P}^2} = \frac{v^2}{\mathrm{R} \operatorname{Cos} \mathrm{P}}$$

Om dessutom P har ett mycket litet värde, så kan tang P^2 såsom en i förhållande till enheten mycket litet qvantitet bortlemnas, hvarföre man då helt enkelt får sätta:

$$(3) \qquad \varphi = \frac{v^2}{\mathrm{R}} = \frac{4\pi^2\mathrm{R}}{\mathrm{T}^2}$$

Vi kunna med stöd häraf uppställa följande sats:

Om en kropp rör sig i en bana, som mycket litet afviker från en cirkel, och är den dervid verkande kraften ständigt riktad mot grannskapet af denna cirkels medelpunkt, så är den i hvarje punkt verkande kraften uttrycket medelst formeln (3), der v betecknar den i samma punkt gällande totala rörelsen under tidsenheten, samt R krökningsradien. Inträffar det nu dessutom att kroppens medelhastighet äger rum i sådana punkter af dess bana, der krökningsradien har sitt medelvärde, så kunna vi använda följande vigtiga uttryck

$$(4) \qquad \varphi = \frac{4\pi^2\mathrm{a}}{\mathrm{T}_0^2}$$

der a betecknar krökningsradiens medelvärde och T_0 den verkliga omloppstiden, som motsvarar en medelhastighet v_0.

Komponenten ϱ benämnes vanligen *centripetalkraft* och u *tagentialkraft;* denna sednare har erhållit sin benämning på grund deraf att hon verkar i den riktning, som bestämmes af en till den krokliniga banan i kraftens angreppspunkt lagd tangent *.

En till sin storlek med centripitalkraften fullkomligt lika, men till riktning motsatt kraft benämnes *centrifugalkraft;* vi

* En mycket liten del af en kroklinie, denna må för öfrigt vara hvilken som helst, kan med få undantag betraktas såsom en mycket liten rät linie. Tänkes denna räta linie utdragen, så bildar hon en s. k. tangent till kroklinien. Denna tangent bör ej förvexlas med den trigonometriska tangenten till en vinkel eller en båge, hvarom blifvit afhandladt pag. 89.

skola se till under hvilka omständigheter densamma kan uppträda. Man kan tänka sig saken på följande sätt. Om en kropp, hvilken vi helt enkelt skola betrakta såsom en materiell punkt, någon tid varit försatt i cirkelformig rörelse med likformig hastighet, och kraften, som härvid varit verksam, plötsligen skulle upphöra att verka, så skulle den materiella punkten fortsätta sin rörelse längs tangenten till cirkeln i den punkt, der detta upphörande skedde. Vända vi oss till fig. (24), så inse vi ögonblickligen att den materiella punktens afstånd från cirkelns medelpunkt under den på kraftens upphörande följande första tidsenheten ökas med ett stycke, som i anseende dertill att vinkeln aob måste anses vara mycket liten, är lika stort med ac. Den materiella punkten skulle således erhålla en rörelse, hvilken kan anses uppkomma genom en kraft af den beskaffenhet, att densamma under tidsenheten sträfvar att tilldela punkten en hastighet af centripetalkraftens storlek, men i motsatt riktning. Om den i rörelse varande punkten är fast förbunden med medelpunkten o, så kan den rörelse, centrifugalkraften sträfvar att åstadkomma, visserligen ej komma till stånd, men denna kraft sträfvar städse att lösslita sambandet emellan de ifrågasatta punkterna, och det gifves många fall, der centrifugalkraften blifver nog intensiv att kunna öfvervinna denna konnexion, då den rörliga materiella punkten bortslungas i radiens riktning. Man kan ganska lätt öfvertyga sig härom genom att medelst ett ej alltför starkt snöre försätta en blyklump i cirkelformig rörelse i det man med handen fasthåller snörets andra ända. Vid stark rörelse växer centrifugalkraften så mycket att snöret omsider sönderslites och blyklumpen bortslungas. — Emedan jorden roterar kring en axel, så äro alla kroppar på dess yta i mer eller mindre grad underkastade en centrifugalkraft. Vid polerna är verkningen häraf naturligtvis noll emedan dessa båda punkter ej deltaga i rotationsrörelsen, men vid eqvatorn är centifugalkraften störst; denna skola vi beräkna. Härtill behöfva vi jordens rotationstid, samt längden af eqvatorns radie; vi skola dock icke beräkna centrifugalkraften för sig utan dess förhållande till tyngden, hvilken, betraktad såsom kraft, i det föregående betecknades med g.

Jorden fulländar sin rotation på 86164 sekunder medeltid; detta värde hafva vi att använda för T. Då vi hafva angifvit g i mètres, så bör man äfven uttrycka r i samma längdmått. Emedan $2\pi r$ uttrycker jordens omkrets, så har man i enlighet med mèterns definition $2\pi r = 40{,}000{,}000$, hvilket värde, ehuru ej fullt jemförbart med det faktiska mètermåttet (mètre des archives i Paris), dock i föreliggande fall är fullt användbart. Man finner nu

$$\frac{4\pi^2 r}{gT^2} = \frac{1}{289},$$

hvilket vill säga att kropparnas tyngd under eqvatorn i följd af centrifugalkraften är minskad med $\frac{1}{289}$. Skulle jorden plötsligen stanna i sin rotation, så blefve alla kroppar tyngre, och under eqvatorn skulle tillskottet vara just $\frac{1}{289}$ af den ursprungliga tyngden.

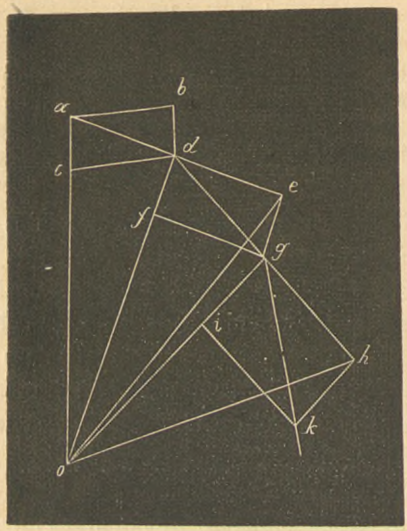
De af Galilei funna lagarne för pendelns svängningar skulle man kunna deducera medelst lika enkla betraktelser, som dem, hvilka ledt till de i det föregående funna satserna; man skulle dervid hafva att utgå från det antagande att den enda verkande kraften är pendelkulans tyngd. Omvändt skulle man äfven ur dessa lagar kunna härleda att kraften är oberoende både af utslagsvinkeln (såvida denna öfverhufvud är liten) samt af pendellängden; man skulle med andra ord finna, att denna kraft ej är något annat än pendelkulans tyngd. Emedan dock dessa deduktioner ej vid framställningen af de astronomiska theorierna och deras utveckling hafva något omedelbart intresse, så kunna vi förbigå desamma och åtnöja oss med att endast anföra följande formel, som angifver en relation emellan pendelns svängningstid (t), dess längd (l), samt den genom tyngdens inverkan förorsakade fallhastigheten vid slutet af den första sekunden (g). Denna formel, i hvilken π såsom förut betecknar det Ludolfska talet, är:

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

dervid utslagsvinkeln förutsättes vara mycket liten.

Med *centralrörelse* förstår man en sådan, der kraften verkar från en och samma punkt (kraftcentrum); för öfrigt kan kraften hafva hvilken natur som helst. I afseende å sådana rörelser förefinnes ett theorem, hvilket för framställningen i det följande blifver af vigt, och lämpligast torde meddelas i sammanhang med de redan anförda satserna ur mekaniken.

Fig. 26.



I punkten o föreställa vi oss ett kraftcentrum samt i a en kropp, hvilken är ditkommen med hastigheten ab, d. v. s. hvilken, om kraften i o upphörde att verka, under tidsenheten skulle förflytta sig till b. Kraften i o sträfvar dock äfven att bibringa den rörliga kroppen en rörelse, och detta i riktningen ao; denna rörelse tänka vi oss angifven medelst linien ac. Under den första tidsenheten förflyttar sig kroppen således till d, samt skulle, i händelse centralkraften upphörde att verka, under den andra förflytta sig till e, då ad = de, och i följd häraf är, hvilket inses på grund af en lärosats från elementargeometrin:

triang. ado = triang. deo.

Under den andra tidsenheten sträfvar dock centralkraften att bibringa den rörliga kroppen en ny rörelse, hvilken vi tänka oss angifven af linien df; resultanten blifver då diagonalen dg i parallelogrammen degf. Emedan räta linien eg är parallel med räta linien do, så finner man, i öfverensstämmelse med samma geometriska lärosats, att

triang. dgo = triang. deo,

och jemföres denna likhet med den föregående, så inses ögonblickligen att

triang. ado = triang. dgo.

På samma sätt kan man bevisa likheten med de följande trianglarna och kommer sålunda till den sats: *att alla trianglar, som bildas af tvenne afstånd från den rörliga kroppen till kraftcentrum, och der den mellanliggande vinkeln motsvarar rörelsen under en tidsenhet, äro lika stora.* Rörelsen sker dock i sjelfva verket icke efter den brutna linien adgk..., utan efter en kroklinie, som går genom dess punkter; men om tidsenheten antages tillräckligt liten, så blifver skilnaden emellan de ifrågavarande trianglarne och de motsvarande sektorerne omärklig (jem. pag 121), hvarföre man äfven kan uppställa följande i all stränghet gällande sats. *Om en kropp rör sig under inflytande af en centralkraft, så beskrifver radius-vektor (d. ä. kroppens afstånd från kraftcentrum) under lika tider lika ytor.*

Härmed hafva vi afslutat framställningen af de mekaniska lärosatser, hvilkas kännedom erfordras för att kunna följa de vägar, på hvilka Newton upptäckte den allmänna gravitationslagen.

§ 10. Newtons upptäckt af den allmänna gravitationslagen.

Emellan Keplers upptäckt af lagarne för planeternes rörelse och Newtons theoretiska härledning af densamma ur den allmänna gravitationsprincipen ligger en tidrymd af mer än ett halft sekel. Under denna tid utvecklades mer och mer föreställningen om att från solen, hvilken i det Koperikanskt-Keplerska systemet utgjorde centrum inom den planetariska verlden, tillika den kraft skulle utgå, som föranledde planeternas rörelse. Redan Kepler hade tänkt sig något ditåt; dock voro hans spekulationer baserade på den oriktiga föreställningen, att en sådan kraft endast hade till ändamål att framdrifva planeten i sin bana, eller att denna kraft vred planeterna kring solen, ungefär såsom de periferiska delarne af ett svänghjul kringvrides af en kraft, som verkar nära centrum. Han tänkte sig med andra ord, att kraften verkade i rörelsens riktning och ej i riktning till solen. Att detta föreställningssätt icke kunde leda till förklaring af rörelselagarne är tydligt; men detsamma stod icke ens i det ringaste sammanhang med den sednare theorin. Det var först i sednare hälften af 1600-talet, som man begynte att uppställa läran om centralkraften och dess verkningar, och på denna bas kunde naturen af de inom solsystemet verkande krafterna undersökas. Uppgiften var nu endast den, att finna naturen af den kraft, hvilken från solen, såsom kraftcentrum, föranleder de genom Keplers lagar bestämda rörelserna; proportionaliteten emellan de af radius-vektor beskrifna ytorna och tiden gaf nämnligen tillkänna, att detta kraftcentrum nödvändigt måste sammanfalla med solkroppens medelpunkt. På lösningen af denna uppgift arbetades af flere vetenskapsmän kort innan Newton delgaf resultaten af sina arbeten åt kungl. societen i London, och möjligtvis upptäckte Hook nära nog samtidigt med honom, att den ifrågasatta kraften verkade i indirekt proportion mot afståndens qvadrater. Newtons undersökningar sträckte sig dock vida längre, och resultaten af desamma hafva en vida högre betydelse. Den efter honom benämnda lagen: *att hvarje molekyl eller materiell punkt attraherar hvarje annan i direkt proportion till dess massa och i indirekt till det ömsesidiga afståndets qvadrat* innebär nämnligen följande fem satser. *

I. *Kraften, hvarmed solen attraherar de olika planeterna, är indirekt proportionell mot qvadraten på de respektiva afstånden.*

Riktigheten häraf inses tillnärmelsevis ganska lätt, om den tredje Keplerska lagen kombineras med uttrycket (4) i föregående paragraf. Planetbanorna äro nämnligen ellipser med vanligen mycket liten excentricitet och planeternas medelhastigheter motsvara deras medelafstånd, hvarför ifrågavarande uttryck ganska nära angifver kraftens verkliga belopp. Insätta vi således i eqvationen

$$\varphi = \frac{4\pi^2 a}{T_0^2}$$

värdet för T_0^2 enligt den tredje Kepplerska lagen, eller

$$T_0^2 = ka^3,$$

der k betecknar ett för alla planeter gällande konstant tal, så befinnes

$$\varphi = \frac{4\pi^2}{k} \frac{1}{a^2},$$

hvilken eqvation innehåller den anförda satsen.

* I denna indelning har Whewell (History of the inductive Sciences) i det allra närmaste blifvit följd.

II. *Samma planet attraheras i olika punkter af sin bana af solen sålunda, att den attraherande kraften är indirekt proportionell mot qvadraten på radius-vektor.*

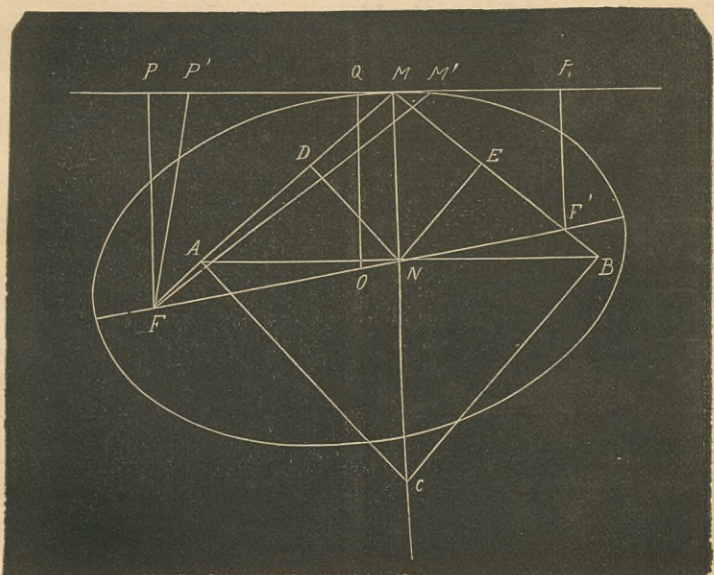
Denna sats följer af den första Keplerska lagen, eller af den omständigheten att kraften verkar från banellipsens ena brännpunkt. Sammanhanget emellan premissen och resultatet är dock här icke så alldeles lätt att framvisa; men, i ansende till dess vigt, torde en kort antydan härom ej böra utelemnas

Vi erinra oss härtill först och främst uttrycket

$$\varphi = \frac{v^2}{\text{R Cos P}},$$

hvilket blef funnet i föregående paragraf. De i denna formel förekommande qvantiteterna böra alla uttryckas medelst r eller afståndet från planeten till solen, för hvilket ändamål några

Fig. 27.



konstruktioner, som beröra ellipsens theori, här blifva behöfliga. Den rörliga kroppen antages befinna sig i punkten M, hvarest en tangent PP_1 till ellipsen är dragen. Kraften verkar från brännpunkten F, men centripetalkomponenten i riktning af krökningsradien, hvilken sammanfaller med den mot tangenten vinkelräta linien MN. Vinkeln emellan dessa båda kraftriktningar är FMN, densamma som i det föregående blifvit betecknad med P. Antages nu planeten under en mycket liten tidsenhet beskrifva bågen MM', hvilken utan märkligt fel får anses såsom en rät linie, samt afsättes på linien PP_1 stycket $PP' = MM'$ från Punkten P, derifrån PF är dragen vinkelrätt mot PP_1, så är triangeln PFP' lika stor med den yta MFM', som radius-vektor beskrifver under tidsenheten. Men denna yta är en konstant storhet på grund af den omständighet att kraften verkar från ett centrum; vi hafva således, i det vi med C beteckna denna konstant,

$$\tfrac{1}{2}\, \overline{PP'} \times \overline{PF} = C.$$

Här åter är PP' enligt det gjorda antagandet lika med hastigheten under tidsenheten, hvilken blifvit betecknad med v, och linien PF kan lätt uttryckas medelst radius-vektor $FM = r$. Det är nämnligen

$$PF = r. \operatorname{Sin} PMF = r \operatorname{Cos} P;$$

vi hafva således

$$vr \operatorname{Cos} P = 2C$$

eller

$$v = \frac{2C}{r. \operatorname{Cos} P}$$

Med detta värde erhålla vi

$$\varphi = \frac{4C^2}{r^2. R \operatorname{Cos} P^3}$$

Krökningsradien R finner man genom följande konstruktion, då kroklinien, såsom här är fallet, är en ellips. Genom punkten N, der räta linien MN skär ellipsens halfva stora axel, drages linien ANB parallel med tangenten PP_1. Från de Punkter A och B, i hvilka denna linie skär radii-vektores eller deras förlängningar, drages vinkelräta linier mot dessa. Ifrågavarande räta linier skära nu hvarandra i en punkt C, genom hvilken äfven förlängningen af linien MN går, och stycket MC är just den sökta krökningsradien, hvilken vi betecknat med R. Man finner vidare på grund deraf att vinkeln MAC är rät, att

$$\overline{AM} = R \operatorname{Cos} P,$$

samt vidare, emedan äfven ANM är en rät vinkel, att

$$\overline{MN} = \overline{AM} \operatorname{Cos} P = R \operatorname{Cos} P^2.$$

Fällas från punkten N perpendiklar mot radierna FM och F'M, så afskäras stycken MD och ME, hvilka icke allenast sinsemellan äro lika stora utan äfven alldeles oberoende af läget af punkten M på ellipsens omkrets. Den konstanta längden af dessa stycken skola vi beteckna med K, då vi hafva

$$DM = \overline{MN}. \operatorname{Cos} P = K.$$

Insättes det ofvananförda värdet för MN i detta uttryck, så befinnes

$$K = R \operatorname{Cos} P^3;$$

och härmed finna vi slutligen

$$\varphi = \frac{1}{r^2} \frac{4C^2}{K},$$

hvilket uttryck innehåller detsamma, som satsen II utsäger, emedan faktorn $\frac{4C^2}{K}$ är oberoende af r och P.

III. *Samma orsak, som föranleder kroppars tyngd vid jordytan, utöfvar äfven den kraft, hvilken verkar på månens rörelse, och den förra kraften förhåller sig till den sednare omvändt såsom qvadraten på jordklotets radie förhåller sig till månbanans radie.*

Äfven denna sats framgår med lätthet ur empiriska data. Kraften, hvarmed jorden inverkar på månens rörelse, kunna vi beräkna enligt formeln för centripetalkraften, eller

$$\varphi = \frac{4\pi^2 a}{T^2},$$

der T betecknar månens omloppstid och a dess medelafstånd från jorden. Såsom ofvan uppgafs (pag. 25) är månens sideriska omloppstid = 27 dag. 7^t 43^m = 39343 minuter, eller = 60 × 39343 Sekunder. Månens medelafstånd är åter i det närmaste 60 gånger jordklotets radie. Beteckna vi denna radie med R, så är

$$\varphi = \frac{4\pi^2 R}{60(39343)^2};$$

eller, emedan $2\pi R = 40000000$ mètres, så är

$$\varphi = \frac{4000000 \, \pi}{3. \, (39343)^2}$$

Utföres beräkningen af denna formel, så befinnes

$$\varphi = \frac{1}{369{,}52}$$

Denna kraft skola vi nu jemföra med tyngden vid jordytan, hvilken angifves medelst talet g = 9, 81. Vi erhålla då

$$\frac{g}{\varphi} = 3565,0 = (59,7)^2$$

Såsom ofvan uppgafs, är dock i det närmaste

$$\frac{a}{R} = 60,$$

hvarefter vi sluta att

$$\frac{g}{\varphi} = \left(\frac{a}{R}\right)^2$$

såsom innehållet af satsen III utsäger.

IV. *Solen inverkar icke allenast på planeterna med en attraherande kraft utan ock på alla öfriga kroppar, hvarhelst dessa än må befinna sig, således äfven på månan. På samma sätt attrahera äfven planeterna hvarandra och solen i omvändt förhållande till qvadraterna på deras ömsesidiga afstånd.*

Bevisen för de tvenne första satserna hafva ådagalagt att de Keplerska lagarna leda till antagandet af en kraft, hvilken från solens medelpunkt såsom kraftcentrum verkar i omvänd proportion till afståndens qvadrater. Säkerheten af detta resultat beror i sista rummet på iakttagelsernas noggrannhet; ty de Keplerska lagarne äro genom en induktion härledda ur sådana, hvarföre dessa lagar ej nödvändigt behöfva vara absolut riktiga. Men skulle omvändt den Newtonska lagen vara riktig, så följa de Keplerska lagarne omedelbart ur densamma såsom fullkomligt stränga, dock endast under den förutsättning att ingen annan kraft förutom solens attraktionskraft inverkar på planeternas rörelse. Vår fjerde sats utsäger dock att detta icke är händelsen, utan att solen inverkar på månens rörelse, hvilken, i händelse denna endast vore underkastad jordens attraktionskraft, skulle försiggå i en ellips i enlighet med Keplers lagar. Äfven kunna Keplers lagar på grund af den fjerde satsen i öfrigt ej vara fullkomligt riktiga, alldenstund hvarje planet inverkar på hvarje annan med en kraft, som sträfvar att i någon mon rubba eller störa rörelsen, sådan denna skulle vara om solen inverkade ensam. Den fjerde satsen kan derföre icke äga sin riktighet samtidigt med de Keplerska lagarne, men detta hindrar dock icke, att dessa lagar kunna vara ganska nära i öfverensstämmelse med de verkliga rörelselagarne, emedan planeternas inflytande på rörelserna kan vara ganska litet, ehuru detsamma derföre icke behöfver vara absolut noll. Det kommer nu an på att på grund af iakttagelsernas vitnesbörd afgöra, hvilketdera är det riktiga, de Keplerska lagarne eller den sednast anförda satsen af Newtons gravitationslag.

Keplers lagar, såsom härledda ur observationer af planeternas rörelser, borde åtminstone i främsta rummet motsvara dem, men äfven månans rörelse böra desamma bestämma, i händelse man kunde tillerkänna dem en fullkomligt allmän betydelse. Vid granskning af månans rörelse visar det sig visserligen, att antagandet af en elliptisk bana, samt en rörelse i densamma i enlighet med lagen om ytornas proportionalitet mot tiden lemnar en förklaring för den största ojemnheten, hvilken förut blifvit benämnd medelpunktseqvation (jfr. pag. 94). Detta antagande lemnar dock de ojemheter oförklarade, hvilka benämndes Evektion, Variation och årlig eqvation.

De ifrågavarande ojemnheterna kunna, såsom det blifvit anfördt i slutet af § 4, uttryckas medelst konstanta, numeriska koefficienter, multiplicerade med vissa sinus-funktioner. Man kan betrakta dessa resultat såsom oberoende af all theori och ernådda endast på grund af iakttagelsernas omedelbara vittnesbörd. Men om det visade sig att solens inverkan på månens elliptiska bana kring jorden, — då denna inverkan sker i enlighet med Newtons gravitationslag, — skulle föranleda just sådana ojemnheter, som iakttagelserna bragt i dagen, då skulle man i denna omständighet hafva ett bevis för riktigheten af den fjerde satsen, åtminstone såvida denna sats hänför sig till solen, jorden och månan. Detta bevis har emellertid Newton afgifvit. Han har visat att de omnämnda ojemnheterna låta beräkna sig på grund af solens attraherande inverkan, samt att deras numeriska värde öfverensstämmer med iakttagelserna, endast solens attraktionskraft i ett visst afstånd, jemförd med jordens i samma afstånd, blifvit bestämd på grund af dessa. Detta vill med andra ord säga, att den theoretiska beräkningen af Evektionen, Variationen och den årliga eqvationen erfordrar endast kännedomen af solens medelafstånd från jorden jemfördt med månens, samt af solens massa jemförd med jordens, förutom öfriga elementer af såväl månens som jordens elliptiska rörelser. Huruledes beräkningen af dessa ojemnheter utföres, skola vi i nästföljande paragraf försöka att lemna några antydningar om; någon fullständigare framläggning af detta ämne kan deremot här ej komma i fråga, emedan dertill serdeles vidsträckta mathematiska förstudier skulle förutsättas.

Solens inverkan på månens rörelse är serdeles märklig, deremot äro planeternas inverkan på hvarandra i allmänhet vida mindre; men äfven här, ju mer man bemödat sig att med stöd af den Newtonska lagen beräkna dessa inverkningar och ju mer iakttagelsernas noggrannhet tilltagit, desto mer har öfverensstämmelsen emellan theori och observation visat, att hvarje planet inverkar i proportion till sin massa på de öfrigas rörelser.

V. *Den allmänna attraktionskraften, hvarmed alla kroppar inverka på hvarandra, utgår från hvarje molekyl hos dessa kroppar och verkar på hvarje molekyl; om en del af en kropp skulle frånskiljas, skulle det återstående inverka på de öfriga med en mindre kraft än förut.*

Det var ej lätt att finna direkta bevis för denna sats, emedan härtill erfordras att kunna undersöka den särskilda inverkan, som delar af himlakropparne utöfva på andra delar af desamma, eller på andra himlakroppar, eller ock på delar af dem. På jorden skulle man visserligen kunna anställa härtill lämpliga experiment, men alldenstund man härvid i alla händelser endast kunde anställa försök med mycket små delar i förhållande till hela jordkroppen, så hade erfordrats ytterst fina instrument eller särdeles sinnrika iakttagelsemethoder för att kunna varsna den ringa inverkan af sådana små delar. I sednare tider har likvisst dylika experiment lyckats. Man har härvid förfarit på följande sätt. En metallstång upphängdes medelst en fin otvinnad tråd, hvilken fästades vid stångens midt, sålunda att stången i sitt jemnvigtsläge intog ett fullkomligt horisontelt läge. Vid stångens hvardera ända var dessutom en blykula upphängd, hvilka båda hade samma vigt och således icke rubbade stångens horisontala jemnvigtsläge. Om nu en större blykyla närmades den ena af de upphängda, dock icke i stångens förlängning, så visade sig en ganska tydlig inverkan i det stången försattes i en sådan rörelse, som skulle närma den ena af de upphängda blykulorna till den större. Lät man den större blykulan bibehålla sitt läge i grannskapet af den ena af de upphängda blykulorna, så utförde stången pendellika rörelser kring sin upphängningspunkt, alldeles som den vanliga pendeln utför sina oscillationer i följd af hela jordmassans inverkan. Vi hafva sett i det föregående (pag. 149) att denna inverkan kan uppmätas genom den tid, pendeln behöfver för att fullborda en oscillation, och på samma sätt kan man äfven ur den upphängda stångens svängningstid sluta till den kraft, hvarmed den större kulan attraherar den mindre. På denna väg kan man således finna förhållandet emellan jordens och blykylans attraherande inverkan. Då nu denna inverkan, reducerad till lika afstånd, enligt Newtons lag antages proportionell mot massan, så leder experimentet med blykulorna till kännedom om förhållandet emellan jordens och den större blykulans massa.

I stället för förhållandet emellan tvenne kroppars massor angifver man oftare, då frågan är om terrestra kroppar, förhållandet emellan deras täthet eller deras specifika vigt. Man kan nämnligen föreställa sig en kropp sammansatt af ett mycket stort antal molekyler eller masselement, och säger i öfverensstämmelse härmed, att massan är större i mon af antalet sådana molekyler, eller att massan är proportionell mot molekylernas antal. Men dessa molekyler kunna vara utbredda inom en mer eller mindre stor volym, och tydligen förekomma dessa mindre nära hvarandra, ju större den volym är, inom hvilken de äro utbredda. Man säger då, att materien inom den ifrågavarande kroppen är mindre tät än om samma materie vore fördelad inom en mindre volym. Tvenne mycket olika stora volymer kunna derföre hafva alldeles samma massa; materien i den ena volymen är endast annorlunda fördelad än i den andra. Kroppar med enahanda massa och samma volym hafva äfven samma täthet eller specifik vigt, men tätheten aftager i mon som volymen blifver större under det att massan förblifver oförändrad, och omvändt. På grund häraf har man faststält följande relation emellan massa (m), volym (v) och specifik vigt eller täthet (d)

$$m = v.\ d.$$

Om nu således förhållandet emellan blykulans och jordens massor blifvit bestämdt förmedelst försök, så finner man med stöd af ofvanstående relation äfven förhållandet emellan blykulans täthet och jordens medeltäthet, emedan förhållandet emellan dessa kroppars respektiva volumina äfven får antagas vara bekant. Antages vattnets specifika vigt till enhet, så är blyets 11,35 och för jordens medeltäthet har man funnit åtskilliga, sinsemellan något afvikande värden, hvilka dock alla häntyda på att jordens specifika vigt i det närmaste är 5,5.

Genom försöken med blykulorna har det således otvifvelaktigt blifvit ådagalagt, att icke allenast jorden i sin helhet utöfvar en attraherande inverkan, utan att äfven vissa delar af densamma inverka på samma sätt i proportion till deras massor. Men äfven genom andra rön har man funnit bevis för denna vigtiga sats. — Om jorden vore ett fullkomligt klot och massan inom detsamma vore fullkomligt likformigt fördelad, så skulle den attraktionskraft, som utöfvas af jorden i sin helhet, städse vara riktad mot dess medelpunkt. Detta inträffar nu visserligen icke i all stränghet. Noggranna uppmätningar af jordens figur hafva utvisat, att densamma är en vid polerna afplattad sferoid, d. v. s. en figur, hvars genomskärningar medelst ett plan äro cirklar, om dessa skett parallelt med eqvatorn, men ellipser, om det skärande planet är vinkelrätt mot eqvatorn. Man kan dock äfven nu beräkna tyngdens riktning i hvarje punkt af den sferoidiska jordytan. Men låter man ett lod nedhänga i närheten af ett betydligare och helst fristående berg, så kan man förmärka att lodets riktning ej är precist sådan, som den sferoidiskt formade jordmassan borde föranleda. Försök på ömse sidor om berget kunna leda till visshet derom, att bergets attraktionskraft föranleder afvikelsen från den normala tyngdriktningen. Man benämner dylika afvikelser vanligen *lokalattraktion*. Lokalattraktioner kunna förmärkas på många ställen, äfven om berg icke finnas i grannskapet. Man är dock nu så fullkomligt öfvertygad om den Newtonska lagens riktighet, att man ej drager i betänkande att förklara dessa afvikelser antingen genom antagandet af betydliga underjordiska berg, hvarmed vi förstå sammanhopningar af materie med större täthet än den normala vid jordytan, eller ock af underjordiska hålor, allt beroende derpå huru lodliniens afvikelser förhålla sig i grannskapet. Om lodet i flere punkter kring ett visst ställe afvek åt detta ställe, så antog man ett underjordiskt berg, men afvek lodet från detta ställe, så var en konkavitet indicerad. Frånvaron af materie verkar nämnligen i detta fall, då materie finnes i grannskapet, såsom om en repellerande kraft skulle utgå från tomrummet. Sålunda har man genom att undersöka lodliniens riktning i olika punkter kring staden Moskva funnit, att i grannskapet eller under sjelfva staden betydliga underjordiska hålor äro tillfinnandes; äfvenså vet man att Himalayabergen resa sig öfver dylika konkaviteter.

Vid Newtons tid voro dylika försök och rön, som sednast blifvit beskrifna, ännu hvarken utförda eller utförbara, emedan härtill erfordrats serdeles fint utförda mätinstrument och apparater; men icke desto mindre kunde Newton dock, åtminstone till någon del, framvisa riktigheten deraf att hvarje materielt element var underkastadt den allmänna gravitationslagen. Han kunde nämnligen visa, att solen och månen icke allenast attraherade jorden såsom en enda massa, utan fastmer hvarje särkild molekyl af densamma, den der genom sin rörlighet möjliggjorde upptäckandet af ifrågavarande egenskap hos attraktionskraften. Vattnet i oceanen utgör genom sin mängd och sin rörlighet den beståndsdel af jordkroppen, hvilken kunde tjena till detta prof. Vid en endast flygtig eftertanke skulle man kunna ledas till den föreställning att vattnet, såsom varande underkastadt såväl månens som den fasta jordkroppens tilldragningskraft, borde företrädesvis samla sig kring den geografiska ort, öfver hvilken månen i ett gifvet ögonblick befinner sig, emedan denna punkt af alla punkter på jorden är månen närmast. Saken förhåller sig dock icke så, och felet i ett sådant föreställningssätt skulle bero på förbiseendet af den omständighet, att såväl månen som den fasta jordkroppen ej äro fixa i verldsrymden, utan tvertom hvardera underkastade inverkan af hvarandras attraktion. Den vattenmassa, som ligger på den åt månen vända hälften af jordytan, attraheras nu visserligen af nämnda himlakropp mera än den fasta jordkroppen, hvarföre äfven denna del af oceanen bör bilda ett vattenberg eller en stor våg, hvars topp är riktad mot månen. Men den öfriga delen af vattnet attraheras åter mindre emedan densamma är längre aflägsen från månen än den fasta jordkroppen. Följden af denna skilnad i attraktionen kan naturligtvis icke vara någon annan än den, att den fasta jordkroppen något mera närmas till månen än vattnet i den från månen bortvända delen af oceanerna. Detta vatten bör derföre sträfva att bilda en våg, hvars topp är riktad från månen: resultatet af denna månens inverkan på jordens vatten är derföre följande. Såväl i den punkt, i hvars zenith månen står, som i den diametralt motsatta höjer sig toppen af en vattenvåg, och enär, i följd af jordens rullning, efterhand olika punkter af jordytan komma under månen, d. v. s. komma att ligga på förbindningslinien emellan jordens och månens medelpunkter, så fortskrida dessa vågor i samma riktning som månens skenbara rörelse, eller i motsatt till jordens rullning. Ett sådant fenomen är välbekant under namnet *ebb och flod.* I följd af de omtalade vågornas analkande stiger vattnet i oceanerna eller vid kustorter tvenne gånger om dygnet och tvenne gånger sjunker det tillbaka. Vore här inga biomständigheter förhanden, så skulle vattnets största höjd sammanträffa med det ögonblick, då månen passerar meridianen, antingen i söder, då han — förutsatt att den ifrågavarande orten ligger på norra halfklotet — är närmast denna punkt, eller i norr, då han är längst bort. Åtskilliga omständigheter vålla dock att detta oftast icke inträffar, åtminstone ej annat än tillnärmelsevis. Hafsbotten och kusternas konfiguration lägga hinder i vägen för vågens regelmässiga framåtskridande, hvarföre de olika facerna af ebb och flod vanligen inträffa något sednare än månens meridianpassage. Skilnaden är olika för olika orter, men förblifver deremot densamma för en och samma ort, såvida ej tillfälliga störingar inträffa, såsom t. ex. en storm i grannskapet m. m. Har man derföre en gång iakttagit högvattnets försening, så kan man för all framtid förutsäga tiderna, då detsamma åter bör inträffa, och detta sker äfven i nautiska kalendrar för de vigtigaste hamnplatser. Den ifrågavarande föreningen benämner man vanligen *hamntid.*

Men ebb och flod uppstå icke allenast i följd af månens attraherande inverkan på jordens vatten; solen föranleder en fullkomligt analog företeelse, ehuru qvantitativt vida mindre. Det kan ett ögonblick synas paradoxt, att solen, hvars attraktionskraft på jorden är ojemnförligt större än månens, likväl ej skall åstadkomma större flodvågar än månen, men förklaringen härtill är dock lika så enkel som lätt funnen. Man behöfver nämligen endast ihågkomma att ebb och flod uppstår endast i följd af en himlakropps olika inverkan på vattnet och på den fasta jordkroppen, och utför man beräkningen af denna olikhet, så finner man lätt att solarfloden är mindre än lunarfloden. Allt detta är äfven noggrannt bekant genom iakttagelser. Då solen och månen samtidigt kulminera, vare sig i norr eller i söder, eller den ena i söder och den andra i norr, så är floden högre än då ifrågavarande himlakroppar passera meridianen sex timmar efter hvarandra. Genom att jemföra högvattnen vid olika tillfällen kan man således särskilja de båda arterna af flod och har dervid funnit att solarfloden endast är omkring $\frac{2}{5}$, eller 0,4255 af lunarfloden. Det är svårt att genom iakttagelser af ebb och flod vinna en säkrare bestämning för detta förhållande, men äfven det anförda värdet leder till en approximativ bestämning af månens massa i förhållande till solens.

Beteckna vi med r månens afstånd från en punkt på jordytan, hvilken vi för enkelhetens skull tänka oss belägen midt under månen, d. v. s. på den räta linie, som sammanbinder månens och jordens medelpunkter; vidare jordkroppens halfdiameter med a och månens massa med m, så är månens attraherande inverkan på vattnet i den ifrågavarande punkten i enlighet med Newtons lag:

$$\frac{m}{r^2}$$

samt på den fasta jordkroppen:

$$\frac{m}{(r+a)^2}$$

Skilnaden emellan dessa båda attraktioner är

$$m\left(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{(r+a)^2}\right)=m\,\frac{a\,(2\,r+a)}{r^2\,(r+a)^2}$$

Emedan dock a är mycket liten i förhållande till r, så kan man i ofvanstående uttryck bortlemna a bredvid r utan att resultatet derföre blifver i väsentlig mon felaktigt; man erhåller sålunda det enklare uttrycket

$$2 \frac{ma}{r^3}$$

mot hvilket lunarfloden är proportionell.

På samma sätt finner man, i det solens massa betecknas med M och dess afstånd från en punkt på jordytan, öfver hvilken solen står, med R, att solarfloden är proportionell mot uttrycket

$$2 \frac{Ma}{R^3}$$

Förhållandet emellan lunar- och solarfloden erhålles nu genom att dividera de båda funna uttrycken med hvarandra, och man finner således, emedan detta förhållande blifvit befunnet vara 0,4255,

$$0{,}4255 = \frac{M}{m} \frac{r^3}{R^3}$$

Tager man jordens massa till enhet, så är $M = 319455$;* vidare är enligt nyare bestämningar $\frac{R}{r} = 385.05$. Härmed erhåller man

$$m = \tfrac{1}{76},$$

hvilket värde ganska nära öfverensstämmer med exaktare, rent astronomiska bestämningar. Dessa gifva nämnligen $\frac{1}{80}$ såsom värde för månmassan, då jordmassan tages till enhet.

Emedan ebb och flod är beroende af månens afstånd från jorden, så böra flodhöjderna då månen är i sitt perigeum, vara olika med dem, hvilka uppkomma, då månen är i den motsatta punkten af sin bana eller i sitt apogeum. Detta kan äfven tydligen förmärkas, om iakttagelse öfver ebb och flod fortsättes under en längre tid; och på samma sätt kan man i förloppet af hafsvattnets periodiska stigande och fallande återfinna en stor del af egendomligheterna i solens ooh månens rörelse återspeglade; desto fler ju omsorgsfullare iakttagelserna anställas. Det är derföre intet tvifvel derom, att orsaken till ebb och flod är att söka i solens och månens attraktionskraft i enlighet med den Newtonska lagen.

Men äfven att den fasta jordkroppen i sina skilda delar är underkastad den allmänna gravitationslagen, kunde Newton

* Detta värde för solmassan afviker betydligt från äldre bestämningar, men står i full harmoni med det i nyare tider antagna värdet för solparallaxen, eller för solens afstånd från jorden. Den anförda bestämningen härrör af astronomen Hansen.

lägga i dagen på följande grunder. Om jorden vore ett homogent klot, så skulle månens inverkan på henne endast bestå i en sträfvan att förminska det ömsesidiga afståndet alldeles som om jordens massa vore sammanhopad i en enda punkt. Förhållandet skulle deremot blifva ett annat, i händelse jordmassan vore fördelad inom en ej klotformig volym, hvars dimensioner i förhållande till månens afstånd hafva ett märkligt eller mätbart värde. Såsom ofvan redan blifvit omnämndt är emellertid denna figur icke ett fullkomligt klot, ehuru afvikelsen från ett sådant ej är synnerligen stor. Man har nämnligen funnit denna figur vara något afplattad vid polerna, d. v. s. att den räta linie som från den ena polen genom jordens medelpunkt drages till den andra, är något kortare än en diameter i eqvatorns plan. En eqvatorialdiameter utgör 12757431 mètres, den polära diametern endast 12713725 m. Skilnaden är således 43706 mètres eller omkring 4 svenska mil. Så liten denna skilnad än är i förhållande till jordens dimensioner öfverhufvud, så är den dock nog stor att månens attraherande inverkan på särskilda delar af jordkroppen blifver märkbar, hvilken inverkan ej skulle kunna skönjas i händelse jordmassan vore fullkomligt klotformig, och öfverhufvud ej förefinnas, om månen endast attraherade jorden i sin helhet och ej hvarje särskild del af densamma.

Beräkningen af denna månens inverkan sker enligt rent mekaniska regler och grundsatserna för dessa hafva redan till största delen i föregående paragraf blifvit anförda. I afseende å en kropp, som består af flera materiella punkter måste dock åtskilliga tillägg göras. Dessa skola vi nu framställa, dock i största korthet och endast antydningsvis, emedan den elementära härledningen af desamma till en del endast på långa omvägar skulle kunna ernås. Utgångspunkten är härvid likväl ej mindre enkel och sjelfklar än i det föregående, utan utgör fastmer endast en utvidgning af de redan anförda principernas giltighet; men det mathematiska sammanhanget emellan en kropps rörelselagar och principerna för desamma är mera inveckladt än emellan rörelselagarna för en materiell punkt och orsaken dertill.

Huruledes en fast kropp eller ett fast system af materiella punkter än är beskaffadt, så finnes inom detsamma alltid en punkt med den egenskap, att om endast denna enda punkt af hela systemet vore fixerad i rymden och paralella samt lika stora krafter inverkade på hvarje materiell punkt af detsamma, så skulle systemet detta oaktadt befinna sig i jemnvigt, de parallela krafterna må dervid inverka i hvilken riktning som helst. Denna punkt kallas systemets *tyngdpunkt*. Om åter någon annan punkt af systemet vore fast, men de öfriga i sina gifna och oföränderliga afstånd vore oförhindrade att röra sig kring densamma, så skulle hela systemet intaga ett sådant läge att tyngdpunkten komme att ligga på en rät linie, som genom den fixa punkten tänkes dragen parallel med krafterna. Härvid kunna tvenne särskilda fall inträffa. I det ena ligger tyngdpunkten i den riktning från den fasta punkten, i hvilken de parallela krafterna sträfva att draga hela systemet: en liten rubbning af systemets jemnvigtsläge skulle i detta fall endast föranleda en liten, till jemnvigtsläget återgående rörelse, i händelse systemet åter lemnades åt sig sjelf och åt de gifna krafterna. Befinner sig deremot tyngdpunkten på den motsatta sidan om den fasta punkten, så blifver förhållandet ett helt annat; en liten rubbning af jemnvigtsläget skulle nu föranleda att tyngdpunkten, och med honom alla öfriga delar af systemet beskrefve halfcirklar kring den fasta punkten, hvarefter ett sådant jemnvigtsläge, som i första händelsen skulle komma till stånd. Man kallar det första slaget af jemnvigt *stabil* och det andra *labil jemnvigt.*

Såsom exempel på dessa båda slag af jemnvigt kan man tänka sig en vanlig trissa, hvilken upphänges på ett, genom någon punkt på densamma emellan medelpunkten och periferin genomborradt stift, som dock — på det att friktion må undvikas — bör vara finare än borrhålet. Man kan nu visserligen balancera trissan sålunda, att jemnvigt äger rum äfven under det att dess medelpunkt, hvilken vi antaga äfven sammanfalla med tyngdpunkten, ligger öfver upphängningspunkten. Jemnvigten är härvid labil. Men den minsta rubbning, som tillstöter detta jemnvigtsläge, upphäfver äfven detsamma helt och hållet. I det nya och stabila jemnvigtsläget intager medelpunkten sitt läge under upphängningspunkten.

I afseende å en kropp, som är i rörelse, har man framförallt fastställt den vigtiga sats, att tyngdpunktens rörelse är alldeles oberoende af de särskilda masspartiklarnes rörelse kring honom, samt omvändt, att dessa rörelser åter äro oberoende af tyngdpunktens. Giltigheten af denna sats har dessutom blifvit utsträckt derhän, att densamma äfven äger bestånd, om det rörliga systemet ej är fast i form af en enda kropp utan föränderligt eller bestående af flere i olika rörelse varande kroppar. — Sålunda har den omständighet att planeterna äro i rörelse, ej det ringaste inflytande på läget af hela systemets tyngdpunkt i rymderna. Planeternas olika lägen kunna endast hafva den inverkan att solen intager ett motsvarande läge i hänseende till samma tyngdpunkt. Planetsystemets tyngdpunkt är, då man bortser från den möjliga rörelse i rymden, i hvilken solen och alla planeter skulle deltaga, fast; solen och planeterna deremot rörliga med hänseende till densamma.

Å andra sidan äro rörelserna inom solsystemet alldeles oberoende af den rörelse, som systemets tyngdpunkt måhända kan hafva i rymden. Denna rörelse kan endast hafva ett indirekt inflytande, nämnligen om solsystemet i densamma skulle föras till grannskapet af större massor, hvilka då kunde begynna att inverka på rörelserna inom systemet.

Ej heller äro de krafter, som kunna vara verksamma inom ett system, detsamma må vara fast eller fritt, i någon mon af inflytande på rörelsen af dess tyngdpunkt. Jorden skulle kunna undergå de för dess form och för dess öfriga beskaffenhet mest genomgripande förändringar; dess tyngdpunkt fortfore ändå att beskrifva samma bana kring solen som förut.

Såsom tyngdpunkten rör sig i rymden, så rör sig äfven hela systemetet. Hvarje kropp rör sig således i rymden, som om densamma vore en materiell punkt, d. v. s. rätlinigt och med likformig hastighet, så länge ej några yttre krafter inverka densamma. Men denna rörelse är icke den enda. Kring tyngdpunkten kunna kroppens olika delar äfven vara i rörelse eller, rättare, böra vara i rörelse, alldenstund hvilan endast är att betrakta såsom ett specielt fall af rörelsen, hvilket i och för sig har en högst ringa sannolikhet. Men, emedan läget af hvarje till kroppen hörande punkt är oföränderligt i hänseende till tyngdpunkten — i annan händelse vore icke kroppen fast — så kunna endast cirkelartade rörelser kring tyngdpunkten äga rum. Det är i sammanhang härmed tydligt att hvarje särskild punkts rörelse är bekant, så snart man känner rörelsen af en enda.

En kropps rörelse kring sin tyngdpunkt benämner man i allmänhet *rotationsrörelse;* ett särskild slag af sådan rörelse är den, då kroppen roterar kring en genom tyngdpunkten gående axel, hvars läge inom kroppen har ett oföränderligt läge. — Länge åtnöjde man sig med att endast taga sådana rotationsrörelser i betraktande och ansåg att jordens rotationsaxel hade ett oföränderligt läge inom sjelfva jordkroppen. Mera djupträngande mathematiska undersökningar af rotationsrörelsens beskaffenhet hafva dock bragt i dagen, att detta alldeles icke nödvändigt är händelsen, utan att rotationsrörelsen i allmänhet, och således äfven då inga särskilda förutsättningar göras, är af en vida mera komplicerad beskaffenhet. Resultatet af dylika undersökningar består i korthet deri, att man visserligen under en mycket liten tid kan anse hvarje kropp rotera kring en fast axel, men att denna axel åter kan beskrifva en viss rörelse inom kroppen, beroende dels af massfördelningen inom kroppen, dels af rotationsaxelns läge vid någon viss, men godtycklig tidpunkt. Rotationsaxelns läge inom den roterande kroppen kan nämnligen vara hvilket som helst, utan att man derföre behöfver tänka sig någon särskild kraft här hafva varit verksam; men är detta läge för någon viss tidpunkt bestämdt och känner man massfördelningen inom kroppen, så kan man genom mathematisk analys härleda detta läge för hvarje annan tidpunkt.

Emellertid kan rotationen kring en punkt äfven vara sådan att rotationsaxeln under en viss ändlig tid bibehåller sitt läge inom kroppen oförändradt, och i denna händelse förblifver äfven i all evighet läget af denna axel såväl inom kroppen detsamma, som i rymden parallelt med sig sjelf, i händelse tyngdpunkten är rörelse, allt under förutsättning att inga yttre krafter härvid äro verksamma, samt att kroppens fasthet ej lider någon rubbning.

Sådant är äfven förhållandet med jordens rotation. I enlighet med det, som ofvan blifvit anfördt, kan man i förväg omöjligen afgöra, huruvida dess rotationsaxel bibehåller ett oföränderligt läge inom densamma eller ej; det sednare vore sannolikare. Men de noggrannaste iakttagelser hafva hitintills ej med säkerhet kunnat utvisa annat, än att jorden ständigt roterar kring samma axel, hvilken derföre, i händelse inga yttre krafter här voro verksamma, skulle förblifva parallel med sig sjelf. Visar det sig dock att denna axels riktningar vid olika tillfällen ej äro parallela med hvarandra, så måste nödvändigt yttre krafter vara orsaken dertill.

Det har redan blifvit omnämndt huruledes jordens massfördelning är sådan, att månens inverkan på dess rotation kan blifva bemärkbar. För att finna den under inflytande af månens attraherande kraft försiggående rotationsrörelsen, är det först och främst nödvändigt att beräkna detta inflytande på de särskilda delarna af den roterande massan. En sådan beräkning erfordrar dock icke, att man särskildt behöfver utföra densamma för hvarje molekyl, eller ens för ett mycket stort antal sådana, utan det är tillfyllest att härleda ett allmänt uttryck för ifrågavarande inverkan, der molekylens läge inom kroppen förblifver obestämdt, d. v. s. kan vara hvilket som helst. Genom ett sådant allmänt uttryck är tydligen inverkan på hvarje särkild molekyl bestämd; ty man behöfver i densamma endast införa de numeriska tal, som angifva molekylens läge inom kroppen, för att erhålla värdet för inverkan på ifrågavarande molekyl. Härledningen af ifrågavarande uttryck sker på grund af principerna för sammansättning af olika rörelser, d. v. s. en materiell punkts rotationsrörelse med den, som den yttre kraften sträfvar att tilldela samma punkt.

Sedan man sålunda bestämt månens inverkan på hvarje särskild molekyl, finner man den häraf föranledda ändringen af hela kroppens rotationsrörelse genom att addera alla de särskilda inverkningarna på masselementen, dervid man dock ej får förbise den omständigheten, att alla dessa element äro fast förbundna med hvarandra, så att rörelsen hos ett enda sådant bestämmer alla de öfrigas. I följd af denna omständighet upphäfves en stor del af den omtalade inverkan; ty under det att månen sträfvar att öka rotationshastigheten hos ett element af jordkroppen, sträfvar han att minska det diametralt motsatta elementets rotation, och resultatet af inverkan på dessa båda element blefve lika med noll, i händelse båda attraherades med samma kraft. Om dock månens afstånd till de båda elementen är olika stort, så är äfven den absoluta storleken af dess inverkan olika och resultatet af denna kan nu blifva märkligt, ehuru detsamma derföre icke behöfver blifva serdeles stort.

Det kunde synas, som om additionen af alla dessa partiella inverkningar skulle föranleda ett öfver alla gränser mödosamt arbete, emedan de påverkade molekylernas antal är oändligt stort; men detta är dock icke händelsen. Den högre matematiken erbjuder methoder, genom hvilka dylika additioner eller summationer kunna verkställas medelst några få och ofta ganska enkla operationer endast summandernas allmänna uttryck är bekant; ett exempel på en dylik summation hafva vi redan i det föregående haft tillfälle att taga kännedom om, nämnligen då frågan var att beräkna ellipsens ytinnehåll.

Det har nu blifvit antydt, huruledes man bör förfara vid beräkningen af månmassans inflytande på jordens rotation, men sjelfva räkningen måste vi dock förbigå. Densamma kan icke meddelas i korthet och förutsätter dessutom i enlighet med det, som ofvan blifvit antydt, ej ringa insigter i den högre mathematiken. En omständighet dervid bör dock äfven här ihågkommas. Den ofvannämnda summationen synes egentligen erfordra att fördelningen af massan inom den roterande kroppen är bekant; men om äfven detta icke är händelsen, så kan formen af resultatet dock likaväl erhållas. Man finner då detsamma multipliceradt men en konstant koefficient eller faktor, hvilken tillsvidare är obekant och hvilken beror af nämnde fördelning. Men sedan resultatet en gång blifvit funnet under sådan form, återstår alltid möjligheten att bestämma ifrågavarande faktor medelst iakttagelser af stjernornas lägen på himmelen vid olika tider. Man kan likväl förskaffa sig en ungefärlig föreställning om beloppet af ifrågavarande faktor genom att förutsätta jordmassans täthet öfverallt vara densamma. Man funne då på grund af jordens, såsom bekant antagna ellipsoidiska form, ett visst värde för denna faktor, och således äfven för månens inverkan på jordens rotation. En sådan hypothes är likväl icke byggd på några faktiska förhållanden och kan vara vida skild från verkligheten.

Newton undersökte solens och månens förenade inverkningar på den roterande jordkroppen, visserligen icke fullständigt men dock så, att hans resultat i hufvuddragen öfverensstämde med det, som blifvit vunnit i nyare tider. Detta resultat är i korthet följande. Jordens rotationshastighet kring sin axel (hvilken iakttagelserna visat vara i det närmaste oföränderlig inom jordkroppen, men hvilken *kunde* ändra sitt läge inom densamma enligt en viss lag) förblifver oförändrad, äfven under inverkan af solens och månens attraherade massor. Deremot föranleda dessa att rotationsaxeln ändrar sitt läge i rymden, d. v. s. att densamma ej förblifver parallel med sig sjelf under olika tider. Dessa ändringar äro i afseende på sitt förlopp af tvänne väsentligen olika slag. Först och främst åstadkommer solens och månens förenade inverkan en långsam vridning af jordens rotationsaxel kring en genom dess tyngdpunkt gående och mot ekliptikan vinkelrät linie. Emedan jordens rotationsaxel är vinkelrät mot eqvatorplanet, så följer att äfven detta plan under olika tider intager olika lägen med hänseende till ekliptikan. Under den omtalade vridningen fortfar jordaxeln att i det närmaste bilda samma vinkel med den mot ekliptikan vinkelräta linien, hvarföre äfven vinkeln mellan ekliptikan och eqvatorn i det närmaste blifver oberörd af solens och månens inverkan på jordens rotation. De båda planens läge med hänseende till hvarandra ändrar sig derföre endast derigenom, att deras genomskärningslinie vrider sig omkring jordens tyngdpunkt och i ekliptikans plan med samma hastighet, som jordaxeln vrider sig kring den mot ekliptikan vinkelräta linien. Denna hastighet är äfven i det närmaste likformig.

Linien, utefter hvilken ekliptikan och eqvatorn skära hvarandra, benämnes dagjemningslinie, coh himlakropparnas längder och rektascensioner räknas från en af de punkter, der denna linie råkar den skenbara himlasferen. I följd häraf måste dessa bestämningsstycken undergå motsvarande förändringar. Företeelsen att dagjemningspunkterna tillbakaskrida i ekliptikan hafva vi redan i det föregående varit i tillfälle att lära känna under benämningen precession; den allmänna gravitationslagen möjliggör således en fysisk förklaring af denna företeelse, om denna lag äfven innebär att solen och månen icke allenast attrahera jordmassan i sin helhet utan ock särskildt hvarje del af densamma. Den omständighet att vi icke i förväg kunna beräkna precessionens belopp, utan måste härleda detta ur iakttagelser öfver stjernornas längder eller rektascensioner vid olika tider, får man icke lägga den Newton'ska lagen till last. Med stöd af denna lag skulle nämnligen en sådan beräkning mycket väl låta utföra sig, endast man kände huru tätheten förändrade sig i jordens inre, men härtill finnes föga utsigt.

Precessionen är icke den enda följd af solens och månens inverkan på jordens rotation, utan denna föranleder äfven ett annat slag af ändringar af jordaxelns läge i rymden, ehuru dessa till sitt belopp äro af vida mindre betydenhet. För att lättare erhålla en beskrifning öfver den nu ifrågakommande ändringen, skola vi tänka oss en rät linie, hvilken går genom jordens medelpunkt och utför samma rörelse, som i det föregående blifvit anförd om jordaxeln. En sådan linie kan betraktas såsom en medelaxel; den verkligen oscillerar kring densamma under vissa perioder. Kring de punkter, der medelaxeln råkar den skenbara himlasferen, beskrifver nämligen den verkliga axeln en liten ellips under tiden för månadernas omlopp, således under vid pass $18\frac{2}{3}$ år. Härigenom uppkommer således icke allenast en periodisk förändring af dagjemningspunkternas lägen, och derföre äfven af himlakropparnes längder och rektascension, utan äfven en af samma period bunden förändring af eqvatorns lutning mot ekliptikan. Företeelsen benämnes *nutation* och högsta beloppet af detta inflytande på ekliptikans lutning kallar man vanligen *nutationskonstant*. Såsom periodiska företeelser uttryckes nutationens inflytande på himlakropparnes längder och på ekliptikans lutning medelst trigonometriska termer. Sålunda angifves ändringen af himlakropparnes längd medelst formeln

$$-\ 17''.\ 24 \ \mathrm{Sin}\ \Omega,$$

der Ω betecknar längden för månbanans uppstigande nod, och ändringen af ekliptikans lutning medelst

$$+\ 9''.\ 22 \ \mathrm{Cos}\ \Omega.$$

De båda konstanta faktorerna i dessa uttryck äro sålunda beroende af hvarandra, att den ena medelst en högst enkel räkning kan härledas, så snart den andra är bekant. Betecknas den första koefficienten med N_1 och den sednare med N, samt ekliptikans lutning med Θ, så är relationen dem emellan följande:

$$N_1 = 2\ \mathrm{Cotg.}\ 2\ \Theta . N.$$

I följd af precessionen tillväxa alla himlakroppars längder med $50.'' 376$ årligen. Detta belopp skola vi beteckna med P, samt anföra en lika så enkel som vigtig relation emellan P och N, hvilken erhålles på grund af rent theoretiska betraktelser. Vi beteckna dervid den redan vid frågan om ebb och flod förekommande qvantiteten $\frac{M}{m} \frac{r^3}{R^3}$ med x, samt den ofvan omtalade, af jordens massfördelning beroende faktorn med y; den åsyftade relationen finner man då ur följande tvenne eqvationer

$$N = 0{,}24356.x.y$$

$$P = (0{,}91769 + 0{,}91006.x)\ y$$

Genom divisionen af dessa eqvationer erhåller man nämnligen omedelbart

$$N = \frac{0{,}24366.\ x}{0{,}91769 + 0{,}91006.x}.\ P.$$

Man ser af detta uttryck, huruledes N kan bestämmas utan direkt kännedom af massfördelningen i jordens inre, endast man känner precessionens årliga belopp; antager man för x det värde, som blifvit funnit medelst iakttagelserna öfver ebb och flod, så befinnes

$$N = 0{,}1930\ P$$

$$= 9''.\ 22$$

då vi för P infört värdet $50''.\ 376$. Det värde, vi sålunda funnit för N, öfverensstämmer med det riktigare $9''.\ 2365$ nästan fullkomligt, ja närmare än man kunde vänta på grund af den ur ebb och flod härledda, temligen osäkra bestämningen af x.

Nutationen innehåller för öfrigt åtskilliga andra periodiska termer, hvilka dock äro mycket mindre än den anförda och sålunda här sakna allt intresse. Desamma hafva blifvit funna på theoretisk väg, och kunna till sitt numeriska värde beräknas så snart man känner qvantiteterna x och y eller N och P. Har man medelst iakttagelser bestämt dessa sednare storheter, så finner man de båda förra medelst räkning; af dessa innebär åter qvantiteten x en bestämning af månmassan, förutsatt att såväl förhållandet emellan solmassan och jordmassan, samt emellan solens och månens medelafstånd från jorden äro bekanta. På denna väg har man funnit att månmassan är $\frac{1}{79{,}667}$ af jordmassan.

Vid Newtons tid var ej ens hufvudtermen af nutationen bekant, hvarföre hans antydande af dess tillvaro innebar en upptäckt, hvilken först framtiden fullständigt kunde göra sig tillgodo. Genom iakttagelse framvisades densamma mot medlet af 1700-talet af den engelske astronomen Bradley. Vi skola längre fram återkomma till denna upptäckt.

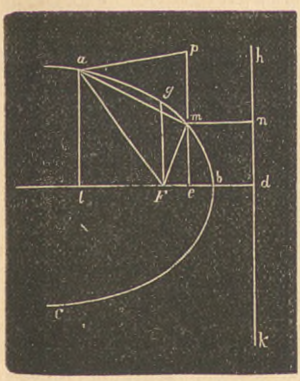
Isaak Newton, om hvilken det blifvit sagdt, att han på en gång var den störste och lyckligaste vetenskapsman, emedan det endast gafs ett verldssystem att upptäcka, föddes den 25 Dec. gaml. st. 1642 i Woolstorpe, en liten by i England. Född af fattiga föräldrar erhöll han först såsom uppväxt, tillfälle att tillegna sig någon egentlig undervisning. Men sedan gick det raskt undan. År 1660 vinner han inträde vid universitetet Cambridge och nio år derefter är han professor vid samma universitet. I följd af en utbruten epidemi i staden begaf han sig till landet år 1666 och vid denna tid skall den bekanta tilldragelsen hafva inträffat, då nedfallandet af ett äpple i trädgården bibringat honom den första idéen om att här samma kraft vore verksam, som föranleder månens bana kring jorden. Slutligen blef Newton kallad till London för att reglera myntväsendet och dog såsom föreståndare för det kungl. myntet år 1727. Han blef begrafven i Westminster-kathedralen bland Englands främste män; i rummet, der han föddes, finnes en marmortafla infattad i muren med följande inskrift af Pope:

Nature and nature's law lay hid in night;
God said: »Let Newton be», and all was Light.

§ 11. Vidare följder af Newtons gravitationslag.

Den första uppgift, som astronomin efter upptäckten af den allmänna gravitationslagen ställde till mekaniken, var den att finna tvenne materiella punkters rörelse, hvilka, i öfrigt fullkomligt fria och oförhindrade att röra sig huru som helst, attrahera hvarandra i enlighet med Newtons lag. Man kunde på förhand förmoda, att dessa i sina rörelser skulle följa Keplers lagar, emedan dessa lagar tjenade såsom ett bland bevisen för den allmänna gravitationslagen. Denna förmodan är ej heller oriktig, ehuru de keplerska lagarne ej fullständigt angifva alla de olika slag af rörelse, som under ofvannämnda vilkor kunna ega rum. Enligt den första keplerska lagen röra sig planeterna i ellipser, men den mathematiska utredningen af ifrågavarande problem visar, att banorna likasåväl hade kunnat vara några andra, med ellipsen nära beslägtade kroklinier, dem man benämner parabel och hyperbel. Den omständigheten att banorna äro ellipser, måste här betraktas såsom rent tillfällig och beror på planeternas ringa hastighet i förhållande till solens attraherande kraft. Om en planets hastighet i ett gifvet afstånd från solen af en eller annan orsak skulle ökas till en viss gräns, så skulle banan blifva en parabel, ökades hastigheten utöfver denna gräns, blefve banan en hyperbel.

Fig. 28.



Ellipsen, Parabeln och hyperbeln benämnas med ett gemensamt namn *koniska sektioner*. Anledningen till denna benämning beror derpå att ifrågavarande kroklinier uppkomma om ytan af en kon skäres af ett plan. Är det skärande planet vinkelrätt mot konens axel, så afskäres en cirkel; minskas det skärande planets lutning mot konens axel, så afskäras ellipsen ända till dess planet blifver parallelt med konens sida. I denna händelse afskäras en parabel. Blifver planets lutning mot axeln än mindre, så uppstå hyperbler. Man kan likväl på en kortare väg komma till insigt om de trenne krokliniernas natur, än genom deras egenskap att vara koniska sektioner.

Dessa trenne kroklinier hafva nämligen äfven den gemensamma egenskap, att afståndet från hvarje punkt på kroklinien till en gifven punkt (brännpunkt), som icke ligger på densamma, står till afståndet från punkten på linien till en gifven rät linie (directrix) i ett konstant förhållande. Låt abc (fig. 28) föreställa en konisk sektion, samt m en punkt på densamma; låt vidare F vara dess brännpunkt, samt hk dess directrix; enligt den angifna egenskapen skall då, om vi med e beteckna ett konstant värde,

$$\overline{Fm} : \overline{mn} = e : 1,$$

eller

(1) $$\overline{Fm} = e \times \overline{mn}$$

Ur denna likhet kan man med största lätthet härleda eqvationen för den ifrågavarande kroklinien; vi inskränka oss här till polareqvationen. Betecknas linien Fm med r, samt vinkeln mFb med f, så är tydligen

$$eF = r \operatorname{Cos} f.$$

men

$$\overline{mn} = \overline{dF} - \overline{eF},$$

Derföre är äfven

$$\overline{mn} = \overline{dF} - r \operatorname{Cos} f$$

Eqvationen (1) gifver oss nu

$$r = e\,(\overline{dF} - r \operatorname{Cos} f)$$

d. ä.

$$r = \frac{e\,\overline{dF}}{1 + e \operatorname{Cos} f}$$

Antaga vi att $f = 90^0$, samt beteckna det, denna vinkel motsvarande värde af r med p, så är, emedan $\operatorname{Cos} 90^0 = o$,

$$p = e.\overline{dF} = \overline{Fg}$$

och vi hafva slutligen

(2) $$r = \frac{p}{1 + e \operatorname{Cos} f}$$

såsom eqvation för kroklinien med den omtalade allmänna egenskapen. Man benämner härvid den oföränderliga linien $\overline{Fg} = p$ *parameter* och förhållandet e *excentricitet.*

Jemföres nu den ofvan funna eqvationen (2) med ellipsens polareqvation [eqv. (10) § 6], så befinnas dessa eqvationer vara alldeles lika, endast man bestämmer parametern ur eqvationen

(3) $$p = a\,(1 - e^2)$$

Härvid erfordras dock såsom ett nödvändigt vilkor att e är mindre än enheten, emedan exentriciteten hos en ellips städse är mindre än 1; det erfordras med andra ord, emedan

$$e = \frac{\overline{Fb}}{\overline{bd}},$$

att afståndet från punkten b till linien hk är större än afståndet från samma punkt till brännpunkten F.

Vi betrakta nu parametern p såsom oföränderlig och skola derunder undersöka huru ellipsen omgestaltas då excentriciteten ökas och slutligen blifver lika med enheten.

Ur eqv. (3) inses först och främst att ellipsens stora axel växer i mon som e närmar sig enheten; denna eqvation gifver oss nämnligen

$$a = \frac{p}{1 - e^2}$$

hvaraf det sagda omedelbart framgår. Ty ju närmare e kommer gränsvärdet 1, desto mindre blifver differensen $1 - e^2$ och desto större blifver derföre a. När slutligen e uppnår detta gränsvärde, så blifver a oändligt stor, emedan en ändlig storhet, dividerad med noll, ej kan hafva något ändligt värde. I och med detsamma upphör äfven kroklinien att hafva den för ellipsen karakteristiska egenskapen att vara sluten, utan densamma vidgar sig mer och mer och benämnes nu *parabel.* Huruledes parabelgrenarne verkligen ständigt mer och mer aflägsna sig från axeln eller linien, det är äfven mycket lätt att inse; man behöfver härföre endast framvisa att afståndet från någon punkt på parabeln till dess axel ständigt växer i mon som afståndet af denna punkt från parabelns topp (d. ä. punkten b) blifver större.

Emedan e = 1, så är ock

$$p = \overline{Fg} = \overline{Fd} = \overline{Fb} + \overline{bd}$$

men af samma orsak är äfven

$$\overline{Fb} = \overline{bd}$$

Således har man

$$p = 2\,\overline{bd} = 2\overline{bF}$$

eller

$$\overline{bF} = \overline{bd} = \tfrac{1}{2}\,p$$

Beteckna vi nu linien bl med x samt afståndet al med y, så hafva vi ur den rätvinkliga triangeln alF följande relation mellan x och y

$$\overline{aF}^2 = y^2 + (x - \overline{bF})^2$$

eller, emedan

$$\overline{aF} = \overline{ld} = x + \tfrac{1}{2}p,$$

$$(x + \tfrac{1}{2}p)^2 = y^2 + (x - \tfrac{1}{2}p)^2$$

d. ä.

$$y^2 = 2px$$

eller

$$y = \pm\sqrt{2px}$$

Denna eqvation utvisar att y ständigt växer i det x blifver större, samt att de båda grenarne ligga symmetriskt i afseende på axeln.

Erhåller e värden, som äro större än 1, så uppstå s. k. *hyperbler*. Dessa vidga sig än mer än parabeln, hvilket man kan se deraf, att vinkeln f aldrig kan blifva fullt 180°. Det ligger nämnligen i sakens natur, att r aldrig kan erhålla negativa värden, men detta skulle inträffa för $f = 180°$. Det är (pag. 83) Cos $180° = -1$, således

$$r = \frac{p}{1 - e},$$

hvilket värde är negativt så ofta e är större än 1, något som dock alltid är händelsen vid hyperbeln. Många andra intressanta och anmärkningsvärda egenskaper hos denna kroklinie lemna vi här åsido, emedan hyperboliska banor endast undantagsvis förekomma vid de astronomiska undersökningarne. En kropp, som rör sig i en parabolisk eller hyperbolisk bana med solen till brännpunkt kan endast endast en gång komma i solens grannskap; derefter aflägsnar hon sig ständigt.

Såsom redan blifvit omnämndt, beror banans beskaffenhet, så ofta endast tvenne kroppar attrahera hvarandra, på ett visst förhållande emellan den ena kroppens relativa hastighet i hänseende till den andra, gällande i ett visst ögonblick, och de båda kropparnas samtidiga ömsesidiga afstånd. Härvid menas dock ej såsom sid. 122 endast den hastighet, som motsvaras af den med f betecknade vinkelns ändringar, och hvilken vanligen benämnes *vinkelhastighet*, utan hela den under tidsenheten försiggångna ortsförändringen hos den ena kroppen relativt till den andra. Under en mycket liten tid kan denna ortsförändring betraktas såsom rätlinig, hvaraf följer, såsom man med tillhjelp af fig. 21

lätt kan öfvertyga sig, att hastigheten, hvilken vi beteckna med v, erhålles ur följande formel

$$v = \sqrt{r^2 (f' - f)^2 + (r' - r)^2}$$

der f', f, r' och r hafva samma betydelse, som pag. 121.

Om banan är en ellips med mycket liten excentricitet, så är skilnaden $r' - r$ städse mycket liten och man kan då tillnärmelsevis sätta

$$v = r (f' - f)$$

Vi skola här infläta tvenne anmärkningar. Den första har afseende på kroppars attraherande inverkan på hvarandra, då de i och för sig icke kunna betraktas såsom materiella punkter. Om en massa är likformigt eller homogent fördelad inom en klotformig volym, så är, såsom det läres i mekaniken, dess attraherande inverkan på andra kroppar alldeles sådan, som om all massa vore koncentrerad i dess tyngdpunkt. Det andra fallet, då man får betrakta en kropp såsom en materiell punkt, d. v. s. dess massa såsom förenad i tyngdpunkten, äger då rum, när kroppens dimensioner öfverhufvud äro mycket små i förhållande till de afstånd, i hvilka hon verkar, eller påverkas. Såväl solen som planeterna äro i det närmaste klotformiga och deras inbördes afstånd äro i allmänhet mycket stora i förhållande till deras dimensioner. I följd af dessa båda omständigheter kan man nästan alltid betrakta himlakropparne såsom materiella punkter.

Den andra anmärkningen berör frågan om kroppars relativa och absoluta rörelser. Vi hafva i det föregående anfört, att tyngdpunkten af ett system kroppar eller materiella punkter kan röra sig i rymden alldeles oberoende af de särskilda kropparnes rörelser inom systemet och omvändt, att en sådan tyngdpunktens rörelse, hvilken naturligtvis är gemensam för hela systemet, ej influerar på rörelserna inom detsamma. Undersökningarne om de relativa rörelserna inom systemet kunna derföre företagas alldeles på samma sätt som om tyngdpunkten vore fast i rymden, eller, såsom man säger, relativt till tyngdpunkten och fasta, genom densamma gående riktningar.

Å andra sidan vore det äfven alldeles omöjligt att företaga några undersökningar öfver de absoluta rörelserna; ty dertill erfordrades att man kände åtminstone en enda fast punkt rymden, men till en sådan kunskap kunna vi på intet vis komma.

Men icke nog dermed att man endast behöfver betrakta rörelserna relativt till systemets tyngdpunkt; om systemet är fullkomligt fritt, så kan man ställa undersökningen så, att en kropp inom detsamma betraktas såsom fast i rymden och de öfriga i rörelse kring densamma. Sålunda betraktar man vanligen, då rörelser inom solsystemet undersökas, solen eller dess medelpunkt såsom varande i hvila, till hvilken punkt då de öfrigas rörelser hänföras. Ikring denna solens medelpunkt såsom brännpunkt beskrifva planeterna, i närmaste öfverensstämmelse med Keplers lagar, ellipser, men det gifves äfven kroppar, hvilka beskrifva paraboliska och sannolikt äfven hyperboliska banor kring samma brännpunkt. Arten af den kroklinie, en sådan kropp beskrifver, beror, såsom redan blifvit antydt, af ett visst förhållande emellan dess relativa hastighet och dess afstånd från solen. Det bevisas nu i mekaniken att banan är och förblifver en ellips om hastigheten v vid någon tidpunkt, hvilken som helst, är mindre än värdet af

$$k \sqrt{\frac{2(M+m)}{r}},$$

der M betecknar solens och m den kring henne kretsande kroppens massa, r afståndet dem emellan eller radius-vektor, samt slutligen k en konstant, hvars numeriska värde är beroende af den enhet, hvarmed man uttrycker massorna, samt af tidsenheten och enheten för afstånden. Antager man solens massa till enhet för alla massor inom solsystemet, dygnet till tidsenhet, samt jordens afstånd från solen till enhet för afstånden, så gäller värdet

$$k = 3548'', 188$$

eller

$$k = 0.01720209895$$

Deremot är banan en hyperbel om kroppens hastighet vid något tillfälle är större än det värde, som ofvananförda uttryck angifver. Motsvaras hastigheten slutligen fullkomligt af detta uttryck, d. v. s. om

$$v = k \sqrt{\frac{2(1+m)}{r}}$$

då rör sig kroppen i en parabolisk bana.

I början af Juli månad hvarje år ändras jordens afstånd från solen högst obetydligt; dess hastighet är då gifven medelst formeln

$$v = r(f' - f) = 1.01705 \times (57' \, 13'') = 1.01705 \times 3432''$$
$$= 3490'', 7$$

Å andra sidan har man

$$k\sqrt{\frac{2(1+m)}{r}}=4976''.3$$

dervid jordens massa i anseende till sin ringhet i förhållande till solens kunde bortlemnas. Man har således funnit att jordens hastighet v är mindre än produkten $k\sqrt{\frac{2(1+m)}{r}}$, hvaraf följer att jordens bana måste vara ellips, såvida ej andra krafter, än solens attraktionskraft, inverka på dess rörelse.

Man har genom iakttagelser af stjernfall funnit, att deras kosmiska hastighet, då de äro i jordens grannskap, i det närmaste belöpa sig till 5000''. Kombineras denna hastighet med deras afstånd från solen, hvilket är lika stort med jordens, eller lika med ett, så inser man att desamma, förutsatt att de ej nedfalla till jorden, beskrifva i det närmaste paraboliska banor kring jorden. Detsamma har man äfven funnit vara händelsen med största antalet af de kometer, hvilka under sitt lopp komma inom jordens synkrets.

Den andra Keplerska lagen motsvarar fullkomligt den princip, hvilken i mekaniken är känd under benämningen *principen för areorna.* Vi hafva redan i det föregående varit i tillfälle att se, huruledes de af radius-vektor genomlupna ytorna eller areorna i alla de händelser äro proportionella mot tiden, då en materiel punkt rör sig under inflytande af en centralkraft, denna må sedan vara huru beskaffad som helst.

I afseende å den tredje Keplerska lagen lärer deremot en theoretiskt-mekanisk undersökning, att densamma ej är fullkomligt riktig utan tvertom i formelt hänseende behäftad med ett väsentligt fel. Att densamma detta oaktadt kunde upptäckas på empirisk väg och derunder befinnas riktig beror, såsom vi straxt blifva i tillfälle att inse, på den omständighet, att planeternas massor äro mycket små jemförelsevis med solens.

Beteckna vi solens massa med M, planetens med m samt det ömsesidiga afståndet med r, så är, i enlighet med den Newtonska lagen, uttrycket för solens inverkan på planeten:

$$\frac{M}{r^2},$$

samt för planetens inverkan på solen:

$$\frac{m}{r^2},$$

kraften φ, hvilken sträfvar att förminska afståndet emellan solen och planeten, är lika med summan af dessa båda inverkningar och uttryckes således af formeln

$$\text{(a)} \qquad \varphi = \frac{M + m}{r^2}$$

För denna kraft kan man dock äfven erhålla ett annat uttryck hvilket är beroende af planetens medelafstånd från solen och af dess omloppstid. I det föregående funno vi nämnligen att i det ögonblick, då en planet befinner sig i sitt medelafstånd från solen, densamma närmas till solen med en kraft, som angifves af uttrycket

$$\frac{4\pi^2 a}{T^2}$$

I en annan punkt af banan, hvars afstånd från solen må vara r, erhåller man i enlighet med den newtonska lagen uttrycket för samma kraft genom att multiplicera det sistanförda uttrycket med förhållandet $\frac{a^2}{r^2}$, emedan de i olika punkter af banan verkande krafterna — nämnligen de, som sträfva att minska afstånden — förhålla sig omvändt till hvarandra såsom afståndens qvadrater. Man finner således att dessa krafter i allmänhet angifvas till sin storlek af formeln

$$\text{(b)} \qquad \varphi = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2 r^2}$$

Jemföras nu de båda uttrycken för φ, så finner man ögonblickligen denna eqvation

$$\text{(c)} \qquad M + m = 4\pi^2 \frac{a^3}{T^2}$$

Den funna likheten utvisar att förhållandet $\frac{a^3}{T^2}$ ej, såsom Keplers tredje lag angifver, har ett inom hela planetsystemet oföränderligt värde, utan att detsamma är beroende af planetens massa m, hvilken är olika för de olika planeterna. Att Kepler detta oaktadt fann ett konstant värde för ifrågavarande förhållande, kan ej förklaras på annat sätt än derigenom att planeternas massor äro jemförelsevis obetydliga eller, då observationerna ej hafva någon stor noggrannhet, omärkliga i förhållande till solens.

Vanligen angifver man planeternas massor såsom bråkdelar af solens i det man sätter $M = 1$. Man bör då multiplicera venstra sidan af likheten (c) med en konstant faktor, hvars nummeriska värde i öfrigt är beroende af de enheter, man väljer för a och T. Benämner man denna faktor med k^2, så är

$$k^2 (1 + m) = 4\pi^2 \frac{a^3}{T^2} \tag{d}$$

eller

$$k = \frac{2\pi}{\sqrt{1+m}} \frac{a^{\frac{3}{2}}}{T}$$

Såsom kort förut blifvit anfördt, antager man vanligen medelsoldygnet såsom enhet för T samt jordens medelafstånd från solen såsom enhet för a. Man finner då värdet för k omedelbart ur jordens bekanta omloppstid. Gauss, efter hvilken konstanten k vanligen kallas den gaussiska konstanten, antog

$$T = 365{,}2563835$$

samt

$$m = \frac{1}{354710}$$

och fann härmed det värde för k, hvilket i det föregående blifvit anfördt och hvilket nyare bestämningar af T och m endast obetydligt kunnat ändra.

Då k uttryckes i sekunder, måste äfven 2π anses vara uttryckt i vinkelmått, d. v. s. beteckna 360^0 eller $1296000''$. I denna händelse betyder $\frac{2\pi}{T}$ planetens medelrörelse, hvilken i det föregående blifvit betecknad med n. Man har då äfven

$$k = \frac{na^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{1 + m}}$$

Medelst denna särdeles enkla formel kan man beräkna en planets medelafstånd från solen, endast man känner dess omloppstid eller medelrörelse samt dess massa. Vi skola utföra en sådan beräkning i följande exempel. Planeten Jupiters omloppstid är ytterst noga känd på grund af iakttagelser, som sträcka sig öfver en betydlig tidrymd eller ett stort antal Jupiters omlopp. Om derföre äfven de enskilda iakttagelserna ej vore särdeles noggranna, så skulle detta dock inverka endast obetydligt på den ur desamma härledda omloppstiden. Felen i iakttagelserna fördela sig nämnligen på det stora antalet omlopp eller blifva med andra ord dividerade med omloppens antal och sålunda förminskade i mon, som detta antal är stort. Sålunda har man funnit för Jupiters dagliga medelrörelse

$$n = 299''.1286$$

Jupiters massa är väl ej med samma säkerhet bestämd, men man vet dock att densamma är temligen nära $\frac{1}{1050}$ af solmassan. På grund af dessa data finner man

$$a = 5.20284,$$

ett värde, som endast med några enheter i sista decimalen torde kunna skilja sig från det sanna.

Af en synnerlig vigt för astronomin blef upptäckten af teleskopet eller kikaren, ett instrument hvarmed det blef möjligt att på himlahvalfvet se och uppfatta föremål, hvilka icke kunde varseblifvas med blotta ögonen. Längre fram skola vi återkomma till de tjenster, som detta instrument bevisat astronomin, men här endast ihogkomma en upptäckt med detsamma, hvilken sedermera blef af största betydelsen för bestämningen af planeternas massor. Då Galilei erhöll underrättelse om en i Holland konstruerad apparat, hvilken enligt ryktet bestod af några i ett rör inpassade glaslinser och tjenade till att skenbart närma aflägsna föremål, om de betraktas genom detta rör, så konstruerade han sjelf ett dylikt och använde detsamma oförtöfvadt till himlahvalfvets betraktande. Han gjorde då genast den intressanta upptäckten, att planeten Jupiter i sin bana åtföljdes af fyra månar, på samma sätt som jorden åtföljdes af en. Dessa månar benämnde han mediceiska stjernor, en benämning som dock numera kommit ur bruk. Hastigheten hos dessa månar står nu i ett sådant förhållande till Jupiters attraherande inverkan på desamma, att deras banor blifvit ellipser med mycket små excentriciteter. Huruledes man af dessa månars omloppstider och medelafstånd från Jupiter kan sluta till Jupiters massa, är ej svårt att framvisa.

Vi beteckna med m och m' Jupiters och en af dess månars massor i det solens massa antages såsom enhet; med T Jupiters omloppstid kring solen uttryckt i medelsoldygn, samt med T_1 satellitens omloppstid i samma mått; vidare med a Jupiters medelafstånd från solen och med a_1 satellitens medelafstånd från Jupiter. Enär nu alla qvantiteter här anses vara uttryckta i samma enheter, som tänktes gällande vid uppställningen af eqvationen (d), så måste en liknande eqvation äga rum då Jupiters massa insättes i stället för solens, satellitens i stället för Jupiters; satellitens medelafstånd från Jupiter i stället för Jupiters medelafstånd från solen o. s. v. Man har således

$$k^2 (m + m') = 4\pi^2 \frac{a_1^{\,3}}{T_1^{\,2}}$$

Divideras åter denna likhet med eqv. (d), så finner man

$$\frac{m + m'}{1 + m} = \left(\frac{a_1}{a}\right)^3 \left(\frac{T}{T_1}\right)^2$$

Antager man vidare att satellitens massa är försvinnande liten i jemnbredd med Jupiters samt Jupiters massa försvinnande liten bredvid solens, så får man sätta

$$m = \left(\frac{a_1}{a}\right)^3 \left(\frac{T}{T_1}\right)^2$$

Genom noggranna mätningar har man funnit för Jupiters första måne

$$a_1 = 0.002819;$$

samt genom att iakttaga momenterna då satelliten förmörkades af Jupiters skugga eller bortskymdes af dess skifva:

$$T_1 = 1.76914$$

Med dessa värden samt det ofvan anförda för a och Jupiters sideriska omloppstid (pag. 30) erhåller man efter en ytterst lätt utförd räkning

$$m = 0{,}0009540 = \frac{1}{1048{,}1}$$

således nära öfverensstämmande med det, som användes vid beräkningen af Jupiters medelafstånd från solen. Vid härledningen af detta värde hafva äfven andra resultat blifvit tagna i betraktande, så att detsamma utgör ett medeltal af flera, medelst olika metoders ernådda bestämningar.

Genom deras satelliters medelafstånd och omloppstider har man äfven bestämt massorna för Saturnus och för de i sednare tider upptäckta planeterna Uranus och Neptunus.

Keplers upptäckt af den tredje lagen på empirisk väg bevisar väl att planeternas massor jemförelsevis med solens äro mycket små, men inflytandet af deras attraherande inverkningar på hvarandra äro derföre icke omärkliga, isynnerhet i nyare tiders ytterst noggranna iakttagelser. Det uppstår då af sig sjelf den frågan, hurudan blifver planeternas rörelser beskaffad, då desamma icke allenast äro påverkade af solens attraktionskraft, utan äfven af hvarandras? Svaret på denna fråga, om densamma betraktas i sin största allmänhet, är vid vetenskapens nuvarande ståndpunkt omöjligt att afgifva. Det är för närvarande alldeles omöjligt att angifva rörelsernas beskaffenhet inom system, der flere än tvenne kroppar röra sig under inflytande af hvarandras attraktionskraft i enlighet med den newtonska lagen. Problemet härom är visserligen i sig sjelf visst icke olösligt, ej heller innebär detsamma något obestämdt, men den mathematiska utredningen af rörelsernes förlopp och omgestaltning under inflytande af de i flere riktningar verkande attraktionskrafterna är för närvarande outförbar. Lyckligtvis är dock lösningen af ifrågavarande problem utan någon inskränkning af dess allmänhet icke nödig för undersökningen af planeternas rörelser äfven i de minsta detaljer. Det förefinnes tvertom en på planetsystemets verkliga beskaffenhet beroende omständighet, som väsentligen förenklar frågan och omedelbart inleder den väg, på hvilken den theoretiska härledningen af rättelserna inom detsamma kan utföras; likväl ej direkt, såsom fallet var vid den elliptiska rörelsen, utan endast medelst fortsatta tillnärmelser. Med sådana tillnärmelser kan man dock fortfara så länge att man erhåller visshet om resultatets stränghet och tillförlitlighet.

Denna omständighet beror först och främst derpå att inom solsystemet en enda kropp, nämnligen solen, genom sin massa i så hög grad öfverväger alla de öfriga, att man i en första tillnärmelse kan betrakta dessa såsom varande försvinnande små och således lemna dem helt och hållet å sido. Man erhåller då för planeternas rörelser de lagar, som i det föregående blifvit förklarade.

För att nu öfvergå till den andra tillnärmelsen, i hvilken planeternas attraherande inverkan på hvarandras rörelse tages i betraktande, så har man först och främst att erinra, det denna inverkan är proportionell mot den inverkande planetens massa samt indirekt mot qvadraten öfver afståndet från denna till den påverkade planeten. Detta afstånd känner man, strängt taget, visserligen icke, men man äger dock ett tillnärmelsevis riktigt värde för detsamma; det nämnligen, som erhålles, då man antager de båda planeterna röra sig i ellipser. Det sålunda beräknade afståndet är naturligtvis ej mer felaktigt, än som föranledes af planeternas inverkan på hvarandra.

Betecknar man det verkliga afståndet emellan tvenne planeter med ϱ, samt det samtidiga och i den händelse gällande afståndet, att de båda planterna röra sig i ellipser, med ϱ_0, och deras massor med m och m′, så kan man lätt erhålla ett uttryck af följande form

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{1}{\varrho^2_0} + mR + m'R'$$

der R och R′ äro tvenne obekanta funktioner, om hvilka vi dock veta att deras numeriska belopp äro ungefär af samma storleksgrad som $\frac{1}{\varrho^3_0}$. Om ϱ_0 blefve mycket liten, så skulle visserligen $\frac{1}{\varrho^3_0}$ kunna blifva så mycket större än $\frac{1}{\varrho^2_0}$ att, ehuru massorna m och m¹ äro mycket små, produkterna mR och mR¹ dock blifva af samma storleksgrad eller, såsom man med andra ord säger, ordning som $\frac{1}{\varrho^2_0}$. Den första termen i uttrycket för $\frac{1}{\varrho^2}$ skulle då icke ens tillnärmelsevis motsvara ändamålet att angifva värdet af qvantiteten till venster om likhetstecknet. Men dylika små värden af ϱ_0 förekomma icke inom solsystemet, åtminstone så länge frågan är om de planeter, vi hitintills tagit i betraktande. Dessas banor äro högst obetydligt excentriska samt i anseende till dimensionerna nog olika att omöjliggöra något alltför stort närmande emellan tvenne planeter. Under sådana förhållanden blifver $\frac{1}{\varrho^2_0}$ ett värde för $\frac{1}{\varrho^2}$, hvilket kan användas vid beräkningen af planeternas inverkan på hvarandra. Hvilken grad af tillnärmelse, man sålunda erhåller, inses lätt på grund af följande betraktelser.

Enligt Newtons lag inverkar planeten m' på planeten m med en kraft, hvilken uttryckes genom formeln

$$\frac{m'}{\varrho^2} = \frac{m'}{\varrho^2_0} + m^2R + mm'R'$$

Bortlemnas de båda sednaste termerna i detta uttryck så begår man ett fel, som tydligen är af storleksordningen m^2 eller mm'. Men emedan m och m' hvar för sig äro mycket små qvantiteter, så äro deras qvadrater och produkter än vida mindre och de termer, som äro multiplicerade med dylika faktorer utöfva ofta ett så litet inflytande att detsamma i de bästa iakttagelser ej kan förmärkas.

Den andra tillnärmelsen består nu deruti att man beräknar de små förbättringar till planetens lägen i den fingerade ellipsen, hvilka hafva sin orsak i kraften $\frac{m'}{\varrho^2_0}$. Dessa förbättringar benämnas *störingen af första ordningen.**

Icke alltid är det likväl tillfyllest att hafva utfört tvenne tillnärmelser, d. v. s. beräknat störingarne af första ordningen, men sedan dessa blifvit beräknade, är det utförbart att härleda tillnärmelsevärden för storheterna R och R', hvarefter man erhåller en ytterligare tillnärmelse eller *störingarne af andra ordningen.* Och på denna väg kan man än vidare

---

* Ehuru störing ej är något i svenska språket egentligen upptaget ord, synes detsamma dock vara användbart vid åtskilliga tillfällen, då detsamma nödvändigt uttrycker samma sak som det utländska ordet *perturbation.* Ordet *störing* härledes för öfrigt på samma sätt från *störa*, som *förstöring* från *förstöra.*

fortskrida samt i de sällsynta fall, der sådant blifver nödigt beräkna följande tillnärmelser eller störinoer af högre ordningar.

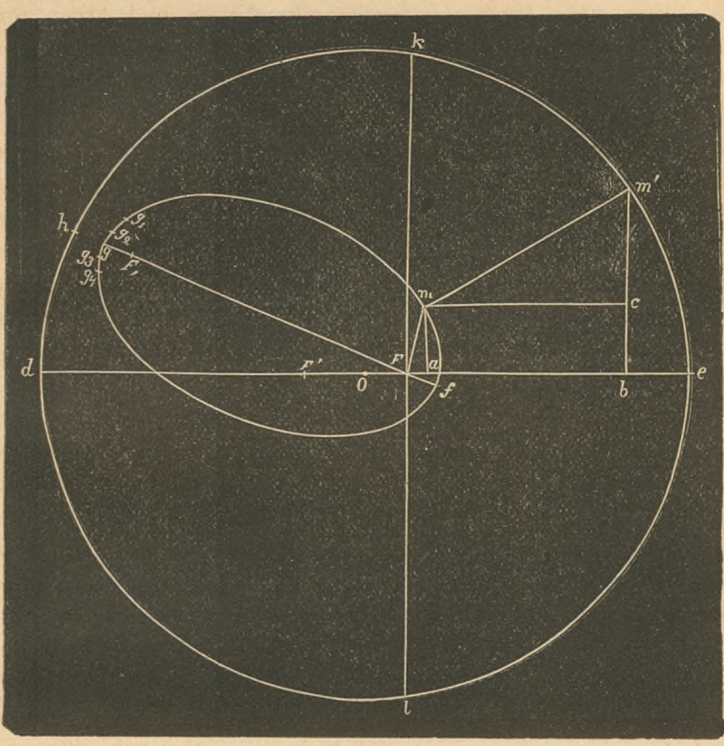
Då man beräknar störingarne af första ordningen betraktas inflytandet af hvarje planetarisk massa särskildt, d. v. s. man utför alltid räkningen så, som om endast trenne kroppar förefunnos. Häraf benämnes äfven problemet att beräkna störingar: *problemet för tre kroppar*, hvars lösning tydligen utgör en af de vigtigaste uppgifter för astronomernas forskningar. Ursprungligen förstod man under denna benämning en speciellare uppgift, nämnligen den att på theoretisk väg härleda månens rörelse, eller de störingar, som solen utöfva på månens rörelse krirg jorden.

Störingarnes belopp kan angifvas på flere sätt. Antingen kan man angifva de förbättringar, som böra tilläggas planetens rätvinkliga koordinater, sådana dessa blifvit beräknade i enlighet med lagarne för den elliptiska rörelsen eller ock kan man anbringa dylika förbättringar till den elliptiska radius-vektor och sanna anomalin. Äfven andra uttryckssätt har man med fördel användt, hvaribland följande, af astronomen *Hansen* införda, framför öfriga förtjenar uppmärksamhet. Till den med en konstant medelrörelse beräknade medelanomalin anbringas en qvantitet, motsvarande de störande krafternas inverkan; med denna förbättrade medelanomali beräknas den sanna anomalin samt radius-vektor på vanligt sätt, hvarefter slutligen den sålunda funna radius-vektor bör multipliceras med en faktor, som blifvit härledd ur de störande krafterna, samt hvilken ej betydligt skiljer sig från enheten. Den sålunda funna sanna anomalin och radius-vektor bestämma planetens verkliga läge på banans plan. I måntheorin angifver man störingarna af parallaxen i stället för störingarne af radius-vektor, hvarföre man äfven benämner dem parallaktiska störingar eller ojemnheter. I äldre tider har man vid denna benämning förknippat ett annat begrepp (jemf. pag. 53).

Vi hafva hitintills ej fästat något afseende dervid att den störda och den störande planetens banor måhända ej ligga i samma plan. Allt det föregående blifver dock äfven för denna händelse gällande, endast man genom en tredje, mot den störda ellipsens plan vinkelrät koordinat angifver beloppet af den störande kraftens inverkan i denna riktning.

Med ett gemensamt namn benämner man de på något af de uppgifna sätten anbragta störingarne: *störingar af koordinater*. I motsats härtill talar man om *störingar af elementen*, hvilka göra de förras anbringande obehöfligt. Man kan nämnligen till hvart och ett af de sex banelementen anbringa sådana förbättringar — naturligtvis olika vid olika tidpunkter — att man sedermera erhåller den sanna anomalin och radius-vektor medelst samma räkneoperationer, som gälla för den rent elliptiska rörelsen. Banelementen äro numera icke konstanter utan föränderliga, af tiden beroende funktioner. Möjligheten af att medelst ett sådant betraktelsesätt komma till en rätt insigt om en planets verkliga rörelse, beror derpå att man alltid genom planetens verkliga läge i rymden vid ett visst ögonblick kan lägga en, men också blott en enda ellips af den beskaffenhet, att dess ena brännpunkt sammanfaller med solen samt att en materiell punkt, som i samma ellips rör sig i enlighet med Keplers lagar, i det faststälda ögonblicket har samma läge och derjemte samma hastighet, både till storlek och riktning, som den verkliga planeten. I nästa ögonblick skulle en annan ellips, som något litet skiljer sig från den förra, hafva samma egenskap. Sådana, den verkliga rörelsen anpassade ellipser kallar man *oskulerande ellipser;* desamma öfvergå småningom och oafbrutet, den ena i den andra och hafva alltid den egenskapen att, om de störande krafterna plötsligen upphörde, planeten skulle fortfara att beskrifva sin bana i den vid samma ögonblick bestående oskulerande ellipsen. Af denna orsak är det ock tydligt, att den relation emellan medelrörelsen och halfva stora axeln, som angifves af den tredje keplerska lagen, äfven i hvarje oskulerande ellips måste äga rum. Denna method, der afseende

Fig. 29.



fästes vid störingarne genom att göra elementen föränderliga, härrör af den berömde *Lagrange* och spelar en särdeles framstående roll ej allenast i astronomin utan äfven i något förändrad form vid många andra tillfällen; man benämner densamma *methoden för konstanternas variation.*

Här kan det visserligen ej blifva fråga om att redogöra för de methoder, enligt hvilka man på grund af den Newtonska gravitationslagen härleder sådana allmänna uttryck för störingarne, som kunna läggas till grund för numeriska räkningar, eller att genomgå den långa följden af härtill erforderliga mathematiska operationer. Dock skola vi försöka att antydningsvis meddela så mycket häraf, som erfordras för att kunna öfverse den mathematiska formen för störingsuttrycken och dymedelst vinna en något djupare insigt af deras beskaffenhet. För sådant ändamål begagna vi oss af figuren 29, der såväl ellipsen dm'e, som den i den förra inneslutna ellipsen gm/ hafva en gemensam brännpunkt, nämnligen F. I punkten a tänka vi oss ett rätvinkligt koordinatsystem uppdraget med axlarna dFe och kFl; slutligen tänka vi oss i punkterna m och m' planeter, hvilkas massor må betecknas med samma bokstäfver m och m'. Koordinaterna för m äro nu: Fa = x och am = y, samt för m': Fb = x' och bm' = y'. Vi skola härvid visserligen ej fastställa att punkterna m och m' ligga alldeles på de respektiva ellipserna, men dock antaga att afstånden från dessa punkter till de elliptiska banorna ej äro större, än som kan föranledas af den störande kraften.

I alla händelser har man såsom uttryck för den kraft, hvarmed m' inverkar på m:

$$\frac{m'}{\overline{mm'}^2} = \frac{m'}{(x'-x)^2 + (y'-y)^2},$$

dervid vi för enkelhetens skull antagit att de båda planeterna röra sig i banor, som ligga i samma plan. Detta är visserligen ännu ej hela uttrycket för den kraft, som här bör tagas i betraktande. Massan m' inverkar nämnligen äfven på solen i punkten F, hvilken kraft bör subtraheras från den förra, enär det endast är den relativa rörelsen af kroppen med hänseende till F, man önskar lära känna; men vi kunna förbigå såväl den häraf beorende termen som ock en annan här ifrågakommande, emedan man redan på grund af den anförda termen kan komma till insigt om störingsuttryckens allmänna mathematiska form, det enda som här åsyftas.

Beteckna vi afståndet Fm med r, Fm' med r' samt vinklarne mFe och mF'e med φ och φ', så är, såsom man omedelbart inser,

$$x^2 + y^2 = r^2;\ x'^2 + y'^2 = r'^2$$
$$x = r \operatorname{Cos} \varphi;\ x' = r' \operatorname{Cos} \varphi'$$
$$y = r \operatorname{Sin} \varphi;\ y' = r' \operatorname{Sin} \varphi'$$
$$xx' + yy' = rr' (\operatorname{Cos} \varphi \operatorname{Cos} \varphi' + \operatorname{Sin} \varphi \operatorname{Sin} \varphi')$$
$$= rr' \operatorname{Cos} (\varphi - \varphi')$$

Häraf finner man

$$(x'-x)^2 + (y'-y)^2 = x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2 - 2(xx' + yy')$$
$$= r^2 + r'^2 - 2rr' \operatorname{Cos} (\varphi - \varphi')$$

den ifrågavarande kraften blifver således angifven medelst följande mathematiska uttryck:

$$\frac{m'}{r^2 + r'^2 - 2rr' \operatorname{Cos}(\varphi - \varphi')} = \frac{m'}{r^2 + r'^2} \frac{1}{1 - \frac{2rr'}{r^2 + r'^2} \operatorname{Cos}(\varphi - \varphi')}$$

Vore afsigten endast den, att beräkna numeriska värden för den störande kraftens belopp, motsvarande vissa tidpunkter, så kunde det anförda uttrycket dertill ganska väl användas, sedan r, r', φ och φ' blifvit beräknade i enlighet med reglerna för den elliptiska rörelsen. Man har härvid att bemärka det vinkeln eFf utgör skilnaden emellan de bägge periheliernas längder, samt att vinkeln $\varphi + eFf$ utgör sanna anomalin för punkten m, liksom vinkeln φ' för punkten m'. Betecknas de båda periheliilängderna med π och π' äfvensom de båda sanna anomalierna med f och f', så har man

$$\text{vinkeln } eFf = \pi' - \pi$$

$$\varphi = f - eFf = f + \pi - \pi'; \quad \varphi' = f'$$

$$\varphi - \varphi' = f - f' + \pi - \pi'$$

På samma gång blifva afståndet r identiskt med radius-vektor i ellipsen fmg, motsvarande sanna anomalin f, samt r' den elliptiska radius-vektor, motsvarande sanna anomalin f'.

Men för vårt ändamål är det alldeles icke nog att hafva uppställt ett allmänt mathematiskt uttryck för den störande kraften — äfven om detta hade skett mera fullständigt, än ofvan — vårt hufvudsyfte består tvertom deri att på grund af uttrycket för denna kraft finna den mathematiska formen för sjelfva verkan af densamma, d. v. s. för de af densamma föranledda störingarne af planetens koordinater eller banelement. För ernåendet af detta syfte skulle vissa mathematiska operationers utförande blifva nödvändigt, hvilket dock i anseende till deras vidlyftighet ej här kan komma i fråga; men man kan på grund af ganska enkla betraktelser likväl komma till insigt om, hvaruti dessa bestå. Det må härvid först och främst den anmärkning finna rum, att det ofvananförda uttrycket för den störande kraften endast angifver dess intensitet; man måste dock nödvändigt äfven veta riktningen i hvilken densamma verkar. Af denna orsak sönderdelar man den störande kraften i tvenne komponenter — i tre, om de båda planeterna ej röra sig i samma samma plan —, hvilka äro parallela med vissa bekanta riktningar. Kan man angifva sådana komponenter, så är såväl kraftens riktning som intensitet fullt bestämd. En sådan sönderdelning är emellertid lätt nog utförd. Är t. ex. planeternas ömsesidiga läge sådant, som det angifves i fig. 29, så verkar kraften i riktningen af linien $\overline{mm'}$; för att sönderdela denna kraft i sidokrafter, som äro parallela med koordinataxlarne Fe och Fk, erfordras ingenting annat än att multiplicera hela kraftintensiteten med de respektiva cosinerna för vinklarne m'mc och mm'c (jemf. pag. 146); dessa cosiner kunna åter angifvas såsom förhållanden emellan tvenne linier i den rätvinkliga triangeln mm'c. Sålunda har man

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \operatorname{Cos} m'mc &= \frac{\overline{mc}}{\overline{mm'}} = \frac{x' - x}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \operatorname{Cos}(\varphi - \varphi')}} \\ \operatorname{Cos} mm'c &= \frac{\overline{m'c}}{\overline{mm'}} = \frac{y' - y}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \operatorname{Cos}(\varphi - \varphi')}} \end{aligned}\right.$$

Med dessa värden borde nu uttrycket (1) rätteligen multipliceras, då produkterna skulle representera kraftkomponenterna i riktningen af x- och y-axlarne; men här kan denna multiplikation dock uteblifva, på den grund nämnligen, att det slutliga resultatets form, i den mening detsamma i det följande kommer att framställas, ej väsentligen kommer att förändras, den ifrågasatta multiplicationen må utföras eller ej.

Vi antaga emellertid för ett ögonblick att denna multiplikation hade blifvit utförd, samt att produkterna ytterligare hade blifvit multiplicerade med en konstant faktor, beroende af den antagna tidsenheten. Väljes medelsoldygnet såsom sådan, så är denna faktor k^2 (jemf. pag. 181). På så sätt erhålla vi tvenne kraftkomponenter, hvilka vi beteckna med ξ'' och η'' och hvilkas betydelse är den, att massan m' under förloppet af en tidsenhet tilldelar massan m hastigheten ξ'' i x-axelns riktning, och η'' i y-axelns riktning. Vid olika tider äro de numeriska värdena för ξ'' och η'' naturligtvis olika; ty, emedan de båda massorna äro i rörelse, så måste deras koordinater och följaktligen äfven de af desamma beroende qvantiteterna ξ'' och y'' förändras med tiden. För en följd af på hvarandra följande tidsenheter må dessa värden för ξ'' antagas vara ξ''_0, ξ''_1, ξ''_2, ... ξ''_m; man erhåller på grund af dessa massan m's hastighet i x-axelns riktning genom vanlig addition. Vid slutet af den första tidsenheten är nämligen hastigheten ξ''_0, vid slutet af den andra $\xi''_0 + \xi''_1$, o. s. v. Naturligtvis menas här endast den hastighet, som blifvit förorsakad genom den af uttrycket (1) angifna kraften. Då nu hastigheten under hvar och en af de olika tidsenheterna kan anses vara konstant, så erhållas åter sjelfva koordinatändringarne genom att addera en följd af termer. Under den första tidsenheten ändras x-koordinaten med qvantiteten $\frac{1}{2}\xi''_0$, emedan densamma utgör medelhastigheten under denna tidsenhet; under den andra tidsenheten finner man på samma sätt ändringen i x-koordinaten vara $\xi''_0 + \frac{1}{2}\xi''_1$, hvilken qvantitet må betecknas med ξ'_1; under den tredje tidsenheten är ändringen $\xi''_0 + \xi''_1 + \frac{1}{2}\xi''_2 = \xi'_2$; o. s. v.* Häraf följer vidare att ändringen ξ af x-koordinaten under de båda första tidsenheterna utgör: $\frac{1}{2}\xi''_0 + \xi'_1$; under de tre första: $\frac{1}{2}\xi''_0 + \xi'_1 + \xi'_2$, o. s. v. Ett alldeles liknande betraktelsesätt gäller för koordinatändringarne i y-axelns riktning samt äfven för ändringar, vinkelräta mot koordinatplanet, hvilka skulle äga rum, i händelse de båda banplanen ej skulle sammanfalla.

Genom additioner af den ofvan anförda beskaffenheten kan man visserligen numeriskt beräkna det totala beloppet af koordinatändringarne under en gifven tidrymd — man kallar dem *relativa störingar* —, men en sådan beräkningsmethod lider af flere rent praktiska olägenheter, i synnerhet om densamma användes till beräkning af relativa störingar öfver en längre tid. Ej heller vinner man genom densamma någon klar föreställning om störingarnes beskaffenhet och förlopp under olika tider. Af denna orsak sträfvar man till att kunna utföra de ifrågavarande additionerna, i det att det allmänna mathematiska uttrycket för ξ'' eller η'' bibehålles. Man erhölle på sådant sätt allmänna uttryck, hvilka angifva störingarnas belopp för hvilken tidpunkt som heldst; d. v. s. uttryck, der tiden förekommer såsom en oberoende variabel. Det inses dock lätt, att sådana additioner ej låta utföra sig utan att betydliga svårigheter dervid måste öfvervinnas; resultatet synes nämnligen omedelbart vara af en särdeles invecklad beskaffenhet och derföre utan all praktisk användbarhet. Emellertid erbjuder den högre mathematiken methoder, hvarigenom betydliga förenklingar kunna åvägabringas och resultatet blifver härefter, visserligen icke uttryckt medelst några få enkla termer, men dock på ett sådant sätt att dess praktiska användbarhet är satt utom all fråga, samt att man i

---

* ξ''_0, ξ''_1, o. s. v. anses dock gälla för början af hvarje tidsenhet och ej för dessas midt; af denna orsak erhåller man ett noggrannare värde för ξ' genom att i stället för de anförda kraftkomponenterna använda medeltal af två och två. Sålunda har man, i det med s betecknas ett helt tal:

$$\xi'_s = \frac{1}{2}(\xi''_0 + \xi''_1) + \frac{1}{2}(\xi''_1 + \xi''_2) + \frac{1}{2}(\xi''_2 + \xi''_3) + \ldots + \frac{1}{2}(\xi''_{s-1} + \xi''_s)$$
$$= \frac{1}{2}\xi''_0 + \xi''_1 + \ldots + \xi''_{s-1} + \frac{1}{2}\xi''_s$$

detsamma kan se en trogen bild af störingens förlopp och förhållande vid hvilken tidpunkt som heldst.

De omtalade förenklingarna åvägabringas först och främst genom att förvandla de anförda uttrycken för kraftkomponenterna i följder af enklare termer, hvilkas antal visserligen är oändligt, men af hvilka dock endast ett inskränktare antal behöfver tagas i betraktande, enär de öfriga blifva så små att deras inflytande städse förblifver alldeles omärkligt. — Sådana förvandlingar i följder af termer, hvilkas antal ibland kan vara ändligt, men ofta nog är oändligt stort, kallar man serie-utvecklingar. Desamma äro af största betydelse vid mathematikens tillämpning på naturvetenskaperna, emedan man medelst dem kan förvandla ganska komplicerade uttryck i följder af enklare. Man måste härvid likväl iakttaga en viss försigtighet, i det man tillser att serieutvecklingen verkligen representerar det ursprungliga uttrycket, eller, såsom man vanligen uttrycker sig, att den är konvergent. Härmed menas, att summan af seriens termer, ju flere af dem man tager i betraktande, närma sig en viss ändlig gräns, hvartill i främsta rummet är nödigt att de olika termerna aftaga i storlek, ju större deras ordningsnummer är, och i följd häraf slutligen blifva omärkliga. Sålunda närmar sig t. ex. summan af termer i serien

$$1 + \tfrac{1}{10} + \tfrac{1}{100} + \tfrac{1}{1000} + \ldots . = 1{,}1111 \ldots .$$

mer och mer talet $\frac{10}{9}$, hvarom man lätt kan öfvertyga sig.

Utan den ringaste svårighet kunna vi utveckla uttrycket (1) i en serie, der termerna utgöras af allt högre och högre potenser af qvantiteten $\dfrac{2rr'}{r^2 + r'^2}$ Cos $(\varphi - \varphi')$, hvilken vi för korthetens skull beteckna med H. Multipliceras nämnligen $\dfrac{1}{1 - H}$ med $\dfrac{1 + H}{1 + H} = 1$, så erhålles

$$\frac{1}{1 - H} = \frac{1 + H}{1 - H^2}\,{}^{*}$$

Genom att vidare multiplicera detta resultat med $\dfrac{1 + H^2}{1 + H^2}$ finner man

$$\frac{1}{1 - H} = \frac{(1 + H)(1 + H^2)}{1 - H^4}.$$

* Man må erinra sig att $(1 + H)(1 - H) = 1 - H^2$

Fortfar man med dylika operationer, så kommer man ganska snart till ett uttryck, der nämnaren ej med någon märklig storhet skiljer sig från enheten. Så erhölle man t. ex. efter fyra ytterligare multiplikationer nämnaren $1 - H^{64}$; och antages $H = \frac{4}{5}$, således ganska nära 1, så blifver H^{64} först märklig i 7:de decimalen. Man kan således, under förutsättning att H är mindre än 1, helt och hållet bortlemna nämnaren och sätta

$$\frac{1}{1 - H} = (1 + H)(1 + H^2)(1 + H^4)(1 + H^8)\ldots\ldots$$

der faktorernas antal anses obegränsadt. Utföras de betecknade multiplikationerna, så erhåller man slutligen

$$(1 + H)(1 + H^2) = 1 + H + H^2 + H^3$$

$$(1 + H)(1 + H^2)(1 + H^4) = 1 + H + H^2 + H^3 + H^4 + H^5 + H^6 + H^7$$

o. s. v.

Såsom man sålunda finner, blifver resultatet

$$\frac{1}{1 - H} = 1 + H + H^2 + H^3 + \text{etc.}$$

Då störingarne af första ordningen skola härledas, har man, såsom ofvan (pag. 185) blifvit nämndt, vid beräkningen af det ömsesidiga afståndet, således äfven vid beräkningen af H och dess potenser, att antaga detta afstånd vara sådant, som om de båda planeterna skulle röra sig i ellipser enligt Keplers lagar. Man har med andra ord att sätta (jemf. pag. 117).:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\,\mathrm{Cos}\,f}; \quad r' = \frac{a'(1 - e'^2)}{1 + e'\,\mathrm{Cos}\,f'}$$

der a och a' beteckna de båda banornas halfva stora axlar; e och e' deras excentriciteter samt f och f' planeternas sanna anomalier. Vidare har man

$$\varphi - \varphi' = f - f' + \pi - \pi'.$$

De anförda värdena för r och r' böra nu införas i uttrycket $\frac{2rr'}{r^2 + r'^2}$, hvilket såsom en faktor ingår i H; man inser härvid lätt, att detta uttryck sålunda antager en temligen inveckladt form, hvilken ingalunda vore nog enkel att de ofvan omtalade additionerna skulle kunna utföras. Den omständighet att excentriciteterna få antagas vara mycket små erbjuder dock ett särdeles lämpligt medel till ytterligare förenkling. Man kan nämnligen utveckla den ifrågavarande faktorn i serie, der termerna blifva multiplicerade med allt högre och högre potenser af e och e', samt i följd häraf aftaga ganska hastigt i storlek. Bibehålles härvid endast de termer, som äro multiplicerade med de första potenserna af e och e', så erhåller man ett resultat af denna form

$$\frac{2rr'}{r^2 + r'^2} = \frac{2aa'}{a^2 + a'^2} - h.\ e \operatorname{Cos} f - k.\ e' \operatorname{Cos} f',$$

der h och k äro lätt härledda funktioner af a, och a^1, dem vi dock här ej vidare behöfva att känna. För att nu erhålla H, böra vi multiplicera detta uttryck med $\operatorname{Cos}(f - f' + \pi - \pi')$. Härigenom erhålles med största lätthet följande resultat*

$$H = \frac{2aa'}{a^2 + a'^2} \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{Cos}(f - f' + \pi - \pi') \\ - \frac{1}{2} he \left\{ \operatorname{Cos}(-f' + \pi - \pi') + \operatorname{Cos}(2f - f' + \pi - \pi') \right\} \\ - \frac{1}{2} ke' \left\{ \operatorname{Cos}(f - 2f' + \pi - \pi') + \operatorname{Cos}(f + \pi - \pi') \right\} \end{array} \right\}$$

Äfven i en något förändrad form kan man angifva H, hvilken i visst afseende är lättare att behandla. Af denna form, som omedelbart erhålles på grund af eqv:erna (I) (se noten), äro de första termerna, i det A, B, C, o. s. v. beteckna konstanter,

$$H = A \operatorname{Cos}(f - f') - B \operatorname{Sin}(f - f') - C\, e \operatorname{Cos} f' + \ldots.$$

Upphöjes ett uttryck, sådant som det anförda, till qvadrat, så uppstår en följd af termer, der hvarje innehåller en produkt af en sinus eller cosinus med en annan sinus eller cosinus. Med stöd af de eqvationer, hvilka äro anförda i systemet (II) af nedanstående not, kunna sådana produkter reduceras till enkla siner och cosiner. Bildar man på samma sätt de högre potenserna af H, d. v. s. derigenom att hvarje föregående multipli-

---

* Vid den i texten meddelade framställningen göres bruk af följande trigonometriska grundformler, hvilkas riktighet dock ej här lämpligen kan bevisas, och der a och b beteckna bågar, hvilka som heldst.

$$\text{(I)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{Cos}(a + b) = \operatorname{Cos} a \operatorname{Cos} b - \operatorname{Sin} a \operatorname{Sin} b \\ \operatorname{Cos}(a - b) = \operatorname{Cos} a \operatorname{Cos} b + \operatorname{Sin} a \operatorname{Sin} b \\ \operatorname{Sin}(a + b) = \operatorname{Sin} a \operatorname{Cos} b + \operatorname{Cos} a \operatorname{Sin} b \\ \operatorname{Sin}(a - b) = \operatorname{Sin} a \operatorname{Cos} b - \operatorname{Cos} a \operatorname{Sin} b \end{array} \right.$$

Af dessa följa omedelbart.

$$\text{(II)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{Cos} a \operatorname{Cos} b = \frac{1}{2} \operatorname{Cos}(a - b) + \frac{1}{2} \operatorname{Cos}(a + b) \\ \operatorname{Sin} a \operatorname{Sin} b = \frac{1}{2} \operatorname{Cos}(a - b) - \frac{1}{2} \operatorname{Cos}(a + b) \\ \operatorname{Sin} a \operatorname{Cos} b = \frac{1}{2} \operatorname{Sin}(a + b) + \frac{1}{2} \operatorname{Sin}(a - b) \\ \operatorname{Cos} a \operatorname{Sin} b = \frac{1}{2} \operatorname{Sin}(a + b) - \frac{1}{2} \operatorname{Sin}(a - b) \end{array} \right.$$

ceras med H, så finner man att serien $1 + H + H^2 + \ldots$ blifver uttryckt genom en följd af termer, hvilkas allmänna form är $K \operatorname{Cos}(if - i'f')$ eller $L \operatorname{Sin}(if - i'f')$. K och L beteckna konstanta koefficienter, hvilkas numeriska värden alltid kunna beräknas då man känner a, a', π, π', e och e'; i och i' beteckna återigen tvenne hela tal, af hvilka i' äfven kan hafva negativa värden. Angående de konstanta qvantiteterna K och L kan anmärkas, att de i allmänhet äro mindre, ju större värden i och i' antaga, samt i synnerhet ju större differensen emellan dessa båda tal är. Såsom man ganska lätt märker, är nämligen för den händelse, då alla med e och e' multiplicerade termer bortlemnas, städse $i = i'$. Medtagas härtill de termer, som innehålla excentriciteterna i första potensen, så har man äfven $i' = i - 1$ och $i' = i + 1$. Vill man gå vidare och fästa afseende vid sådana termer, som äro multiplicerade med e^2, ee' eller e'^2, så finner man dervid att hos dem relationen $i' = i - 2$ eller $i' = i + 2$ äger rum. Och i allmänhet angifver differensen emellan de båda hela talen i och i' det gradtal, till hvilket excentriciteten förekommer upphöjd i den ifrågavarande termen. Så ofta derföre, som e och e' hafva små numeriska värden, såsom fallet är inom planetsystemet, så antyder en stor differens emellan i och i' att den motsvarande termen är mycket liten. Detta gäller dock endast i allmänhet; ty, såsom vi snart blifva i tillfälle att se, förefinnes en omständighet, hvilken i betydlig grad kan förstora dylika termer.

Vi hafva således funnit den allmänna formen, under hvilken funktionen $\frac{1}{1 - H}$ kan angifvas såsom beroende af de tvenne argumenten f och f'; det är dock tydligt att denna form icke förändras genom multiplikation med faktorn $\frac{2rr'}{r^2 + r'^2}$; ty denna faktor kan ju utvecklas i en liknande serie med periodiska termer, och då de tvenne serierna multipliceras med hvarandra, så sker detta genom att multiplicera hvarje term i den ena serien med hvarje term i den andra. De sålunda uppstående partialprodukterne kunna sedan förmedelst eqv:erna (II) reduceras till enkla sinus- och cosinustermer. Men äfven de faktorer, genom hvilkas multiplikation med uttrycket för den störande kraften, man finner uttryck för kraftkomponenterna, kunna angifvas under samma form, och derföre antaga äfven dessa sistnämnda uttryck densamma.

De sålunda vunna utvecklingarna för komponenterna till den störande kraften kunna visserligen användas vid de ofvan omtalade summationerna. Dessa blifva dock vida enklare om man i st. för argumenten f och f' inför medelanomalierna g och g' (jemf. pag. 125), hvilket man äfven vanligen gör så ofta frågan är om planeter med liten banexcentricitet. Denna ändring af argumenten kan temligen lätt verkställas. I en not till pag. 126 meddelades följande utveckling, der vi dock nu bortlemna de termer, som innehålla excentriciteten i en högre potens än den första,

$$f = g + 2e \operatorname{Sin} g$$

Häraf finner man (se noten till sidan 196)

$$\operatorname{Sin} f = \operatorname{Sin} g \operatorname{Cos} (2e \operatorname{Sin} g) + \operatorname{Cos} g \operatorname{Sin} (2e \operatorname{Sin} g)$$

$$\operatorname{Cos} f = \operatorname{Cos} g \operatorname{Cos} (2e \operatorname{Sin} g) - \operatorname{Sin} g \operatorname{Sin} (2e \operatorname{Sin} g)$$

Så ofta e är så liten att man kan bortlemna dess qvadrat, så kan man äfven, utan att dervid uppoffra mera af noggrannhet än just qvantiteter af storleksordningen e^2, sätta: bågen $2e \operatorname{Sin} g$ i st. för densammas Sinus, samt dessutom: $\operatorname{Cos} (2e \operatorname{Sin} g) = 1$*.

Man erhåller då

$$\operatorname{Sin} f = \operatorname{Sin} g + 2e \operatorname{Sin} g . \operatorname{Cos} g = \operatorname{Sin} g + e \operatorname{Sin} 2g$$

$$\operatorname{Cos} f = \operatorname{Cos} g - 2e \operatorname{Sin} g^2 = - e + \operatorname{Cos} g + e \operatorname{Cos} 2g$$

Medelst multiplikationer och upphöjande till potenser af dessa uttryck kan man vidare, enligt ofvan anförda grunder, härleda utvecklingar för Sin i f och Cos i f; och alldeles på samma sätt finner man äfven uttryck för Sin i' f' och Cos i' f' såsom funktioner af argumentet g', d. v. s. den störande planetens medelanomali.

Sedan man sålunda infört g och g' i st. för f och f' såsom argument, komma komponenterna till den störande kraften att utgöras af termföljder, der termerna till deras form äro gifna medelst ett af uttrycken M Sin (ig — i'g') eller N Cos (ig — i'g'), der

---

* Med tillhjelp af fig. 14 inser man ögonblickligen, att bågen mb, hvilken må kallas φ, är större än Sin φ samt mindre än tang φ. Och emedan $\operatorname{tang} \varphi = \frac{\operatorname{Sin} \varphi}{\sqrt{1 - \operatorname{Sin} \varphi^2}}$, så har man: Sin φ mindre än φ

$\frac{\operatorname{Sin} \varphi}{\sqrt{1 - \operatorname{Sin} \varphi^2}}$ större än φ

Om nu φ, och således äfven Sin φ är så liten att dess qvadrat ej mer kan förminskas, så sammanfalla nödvändigt de båda gränserna för φ. Man har i detta fall $\operatorname{Sin} \varphi = \varphi$ och på samma gång $\operatorname{Cos} \varphi = 1$.

M N äro oföränderliga samt i och i', såsom förut, hela tal. Slutligen kan man, på grund deraf att $g = nt + c$; $g' = n't + c'$ (jemf. pag. 125) och c och c' dervid äro oföränderliga, förändra den sednast funna formeln för kraftkomponenterna derhän, att desamma komma att bestå af termer, hvilkas allmänna form är $P \sin (in - i'n') t$ och $Q \cos (in - i'n') t$.

Det har ofvan (pag. 192) blifvit antydt, att kraftkomponenterna, således hvarje term i uttrycken för desamma, böra vara multiplicerade med en konstant faktor, som beror af den tidsintervall, som väljes till enhet, eller än bättre under hvilken man kan antaga kraftkomponenterna bibehålla ett oförändradt värde. Beteckna vi derföre med τ en mycket liten tidsintervall, som kan vara uttryckt såsom en bråkdel af hvilken annan tidsenhet som heldst, så är den ifrågavarande faktorn proportionell mot τ; men, emedan vidare medelrörelsen n är konstant, så kunna vi äfven säga att denna faktor är proportionell mot $n\tau$. Ifrågavarande faktor har hitintills ej haft något intresse; så snart det dock blifver fråga om att ifrån de störande krafterna sluta till sjelfva störingsbeloppen, så blifver det af vigt att ihågkomma densamma. Såsom redan blifvit nämndt (pag. 192), erhåller man den störande kraftens inflytande på den störda kroppens hastighet i koordinataxlarnas riktning genom att summera de, på hvarandra följande tidsintervaller motsvarande värdena af den störande kraftens komponenter. Dessa värden erhållas sålunda, att man i de allmänna uttrycken för komponenterna, hvilka vi funnit vara serier, der termerna äro multiplicerade med sinus eller cosinus för en vinkel, hvars allmänna uttryck är $(in - i'n') t$, insätter de värden för tiden t, som motsvara de olika tidsintervallerna. Om man sålunda begynner att räkna tiden från den första intervallen, så har man att beräkna ξ''_0 med $t = o$; ξ'' med $t = \tau$; ξ''_2 med $t = 2\tau$; o. s. v. Men då nu ξ'' utgöres af en följd termer, hvar och en innehållande en sinus- eller cosinusfunktion af t, så böra äfven hvar och en af dessa termer beräknas med de angifna t-värdena; och då man slutligen går att bilda de omnämnda summorna $\xi''_0 + \xi''_1 + \xi''_2 + \ldots$, så sker detta genom att bilda de motsvarande summorna för hvarje särskild term i uttrycket för ξ''. Man erhåller sålunda efter att hafva bildat argumenten 0, $(in - i'n') \tau$, $(in - i'n') 2\tau$, o. s. v., för $\frac{1}{2}\xi''_0 + \xi''_1 + \xi''_2 + \ldots + \frac{1}{2}\xi''_s$ ett uttryck, der de olika termerna, förutom konstanta, och af de oföränderliga elementen beroende faktorer, äro bildade i enlighet med endera af tvenne följande former:

$$n\tau \left\{\tfrac{1}{2} + \text{Cos}\,(in - i'n')\,\tau + \text{Cos}(in - i'n')\,2\tau + \ldots + \tfrac{1}{2}\text{Cos}(in - i'n')\,s\tau\right\}$$
$$n\tau \left\{\text{Sin}\,(in - i'n')\tau + \text{Sin}\,(in - i'n')\,2\tau + \ldots + \tfrac{1}{2}\,\text{Sin}\,(in - i'n')\,s\tau\right\}$$

Med bokstafven s har här blifvit betecknat intervallernas antal, öfver hvilka man utsträckt beräkningar af den störande kraftens inverkan. Emedan tiden, som förflutit sedan den bestämda epoken, från hvilken störingsräkningen begynte, till slutet af någon intervall, icke är någonting annat än det antal (s) intervaller (τ), som uppmäta samma tid, så har man nödvändigt

$$t = s.\,\tau$$

För att denna eqvation likväl ständigt skall gälla, äfven vid tidpunkter inom intervallerna, så är det nödvändigt att s antages kunna erhålla äfven brutna värden. Det är dock af vigt vid förenklingen af ofvanstående summor att ständigt kunna förutsätta s vara ett helt tal; en förutsättning, som vid första påseendet kan synas vara helt och hållet oberättigad, i händelse man med produkten s. τ vill angifva hvilken tidpunkt som heldst, men hvars berättigande dock ganska lätt kan möjliggöras. Det är nämnligen tydligt, att ju mindre hvarje intervall (τ) är, desto närmare kan man genom ett helt antal sådana angifva en tidpunkt, hvilken som heldst. Medelst ett helt antal dygn kan man angifva en viss tidpunkt så nära, ett felet ej öfverskrider $\frac{1}{2}$ dygn; men genom att angifva tiden medelst ett helt antal timmar kan man inskränka felet inom $\frac{1}{2}$ timme, o. s. v. Genom att derföre antaga τ tillräckligt liten kan man alltid angifva hvarje godtycklig tidpunkt medelst produkten s. τ, der s betecknar ett helt tal. Under dessa förutsättningar, nämnligen att τ är mycket liten samt att s är ett helt tal, blifver i enlighet med en mathematisk lärosats, hvars riktighet dock här ej lämpligen kan ådagaläggas:

$$(A)\left\{\begin{aligned}
&n\tau \left\{\tfrac{1}{2} + \text{Cos}\,(in - i'n')\tau + \text{Cos}\,(in - i'n')2\tau + \ldots + \tfrac{1}{2}\text{Cos}\,(in - i'n')\,s\tau\right\} \\
&= \frac{n}{in - i'n}\,\text{Sin}\,(in - i'n')\,s\tau = \frac{n}{in - i'n'}\,\text{Sin}\,(in - i'n')\,t \\
&n\tau \left\{\text{Sin}\,(in - i'n')\,\tau + \text{Sin}\,(in - i'n')\,\tau + \ldots + \tfrac{1}{2}\text{Sin}\,(in - i'n')\,s\tau\right\} \\
&= \frac{n}{in - i'n'}\left\{1 - \text{Cos}(in - i'n)\,s\tau\right\} = \frac{n}{in - i'n'}\left\{1 - \text{Cos}(in - i'n')\,t\right\}
\end{aligned}\right.$$

Förmedelst dessa särdeles lätt begagnade formler kunna således de additioner utföras, hvarigenom man erhåller ξ' så snart ξ'' är bekant, och på samma sätt η' ur η''. Då nu dessa additionsresultat erhållas derigenom att hvarje cosinus förvandlas i sinus och tvertom, samt att hvarje term blifver multiplicerad med en konstant faktor och slutligen att vissa konstanta termer tillfogas, så blifver den allmänna formen för ξ' och η' densamma som för ξ'' och η''. Alldeles på samma sätt finner man äfven samma form för ξ och η eller för de egentliga störingsuttrycken. Härvid bör dock ännu en omständighet tagas i betraktande. Om de allmänna uttrycken för ξ'' och η'' också icke innehålla några konstanta termer, d. v. s. sådana som äro oberoende af en sinus eller cosinus för en af t beroende vinkel, så uppstå dock, såsom man finner med stöd af den andra af eqvationerna (A), sådana i ξ' och η'. I det man betecknar en sådan konstant term med $kn\tau$ och går att bilda summan

$$\tfrac{1}{2}\xi'_0 + \xi'_1 + \xi'_2 + \ldots + \tfrac{1}{2}\xi'_s,$$

så finner man i denna summa bland andra termer den följande

$$\left\{\tfrac{1}{2}k + k + k + \ldots + \tfrac{1}{2}k\right\} = kns\tau = knt,$$

d. v. s. en term, som växer proportionelt mot tiden.

I den föregående framställningen hafva vi varit i tillfälle att finna, det de allmänna mathematiska uttryck, som angifva störingarna, innehålla termer af tvenne väsentligen olika slag, nämnligen sådana som äro multiplicerade med en af tiden beroende sinus eller cosinus, men derjemte andra, hvilka innehålla sjelfva tiden såsom faktor. Termerna af det förra slaget representera störingsföreteelser, hvilka man benämner *periodiska störingar;* de öfriga åter s. k. *sekulära* störingar. De förra äro alltid inneslutna inom vissa, bestämda gränsor, betingade deraf att en sinus eller cosinus aldrig kan öfverskrida gränsorna $+1$ och -1; men de sekulära störingarne synas under seklernas lopp kunna uppgå till hvilket belopp som heldst. Vid en sådan slutföljd får man dock vara försigtig; ty utvecklas störingarne af andra och högre ordningar, så påträffar man termer, hvilka äro multiplicerade med t^2, t^3 o. s. v. Ehuru sådana termer under en mindre följd af år ofta kunna vara fullkomligt omärkliga, så blifva de dock förr eller sednare inflytelserika och kunna då måhända upphäfva verkan af de med t multiplicerade termerna.

Vid elementstöringarnas utveckling, d. v. s. vid utveckling af allmänna uttryck för de oskulerande elementens förändringar, finner man att dessa hafva alldeles samma form som störingarna af koordinater. Härvid har man dock funnit följande vigtiga satser.

I. *Halfva stora axeln, och således äfven medelrörelsen är icke underkastad någon sekulär störing.*

Denna sats är afgörande för frågan om solsystemets stabilitet; ty om halfva stora axeln vore underkastad en sekulär ändring, så skulle en gifven planetbana oafbrutet vidgas eller sammandragas. Låt vara att detta sker ganska långsamt, i tidernas lopp skulle sålunda jorden dock kunna kretsa i Jupiters nuvarande afstånd från solen eller ock i Merkurii. Hvilket inflytande de häraf uppkommande förhållandena skulle hafva på menniskoslägtets öde, är lättare att föreställa sig än att afgöra. Likväl gäller satsen om halfva stora axelns sekulära oföränderlighet endast så länge man ej drager högre potenser af de störande krafterna än den andra i betraktande; men det är tillika säkert att de högre potenserna under de närmaste seklen skola förblifva fullkomligt omärkliga; och årtusenden skola förgå utan att de härigenom föranledda störingarne utöfva något inflytande på menniskoslägtets lefnadsförhållanden.

II. *Excentriciteterna och banornas lutning mot hvarandra eller mot ekliptikan undergå ej sekulära förändringar, men periodiska af så långsam natur, att desamma vid en viss tidpunkt fullkomligt hafva karakteren af sekulära.*

Äfven denna sats är af vigt vid bedömandet af solsystemets framtida eller föregångna beskaffenhet. Om det i denna sats uttalade förhållandet ej ägde rum, så skulle vi kunna tänka oss jorden i en aflägsen framtid kretsa i en mycket excentrisk bana kring solen. I sitt perihelium vore då jorden utsatt för en hetta, den ingen organism skulle fördra; i afelium åter för en köld, mot hvilken måhända menniskan ej skulle kunna skydda sig. Vid en fortgående förändring af jordbanans lutning skulle man åter kunna föreställa sig upphörandet af skilnaden emellan årstiderna, eller tvertom skilnaden emellan olika orters klimat. Det förra i händelse jordbanan sammanfölle med eqvatorn, det sednare i händelse jordbanan och eqvatorn stode vinkelräta mot hvarandra.

III. *Längderna för perihelierna och noderna äro deremot underkastade sekulära ändringar, hvarigenom desamma kunna antaga alla värden från 0^0 till 360^0.*

Dylika ändringar äro utan allt inflytande på planetsystemets bestånd och äfven på den jordiska naturens, det menskliga lifvets ekonomi.

Genom att djupare intränga i störingsuttryckens mathematiska beskaffenhet har man funnit förklaring till åtskilliga rörelseföreteelser, hvilka dessförinnan förefallit gåtlika. Vi skola anföra några få sådana såsom exempel.

Vid härledningen af de genom solens attraherande kraft föranledda störingarne i månens elliptiska rörelse kring jorden påträffar man termer, hvilka äro beroende af jordbanans excentricitet. Emedan denna excentricitet är underkastad en ytterst långsam periodisk förändring och solens inverkan på månens rörelse öfverhufvud är ganska stor, så föranledes en mycket långsam ändring af månens medelrörelse, hvilken under loppet af flere sekler bibehåller karakteren af en sekulär-rörelse. Häri ligger förklaringen till den företeelse, som omnämndes pag. 52. Evektionen, variationen och den årliga eqvationen äro ej annat än vanliga periodiska störingar af månens längd. De märkliga förflyttningarna af månbanans perigeum och noder äro åter sekulära störingar, föranledda af solens attraherande kraft.

Då man från komponenterna till den störande kraften vill öfvergå till hastighetstillskotten i koordinataxlarnes riktning, sker detta, såsom vi ofvan sågo, genom en additionsprocess, hvars resultat dock omedelbart erhålles sedan man multiplicerat den konstanta faktorn framför $\operatorname{Sin}(in - i'n)t$ eller $\operatorname{Cos}(in - i'n)t$ med $\frac{n}{in - i'n'}$. Då vidare sjelfva koordinatändringarne skola härledas, påkallas en liknande multiplikation, hvarföre termer i koordinaternas störingsuttryck förekomma, som innehålla faktorn $\left[\frac{n}{in - i'n}\right]^2$. Under vissa omständigheter kan en sådan faktor blifva ganska stor och föranleda, att termer, som voro omärkliga i uttrycken för kraftkomponenterna, blifva ej allenast märkliga utan äfven ganska stora i de motsvarande koordinatändringarne. Sådant inträffar alltid när argumentet $in - i'n'$ är mycket litet utan att tillika i och i' hafva allt för olika värden.

Den tid, under hvilken $(in - i'n')t$ växer från $0°$ till $360°$, benämnes den ifrågavarande termens period; ty under samma tid genomgår densamma alla värden från det största till det minsta och begynner härpå åter att genomgå sina facer i samma ordning som förut. Tiden för en sådan period, hvilken må betecknas med T, finner man tydligen ur följande formel

$$T = \frac{360°}{in - i'n'},$$

hvilken utvisar att T blifver större i mon $in - i'n'$ blifver mindre. Det är derföre förnämligast termer af lång period, som blifva betydande i störingsuttrycken.

Såsom ett exempel på en sådan term må anföras den s. k. stora ojemnheten i Jupiters och Saturni rörelse, hvilken härrör af dessa planeters ömsesidiga störande inverkan på hvarandra. I det vi med n beteckna Jupiters dagliga medelrörelse, samt Saturni med n' gälla följande värden

$$n = 299''.1286$$
$$n' = 120.4548$$
$$2n - 5n' = 4.0168$$

Perioden för argumentet $2n - 5n'$ är således:

$$\frac{360 \times 60 \times 60}{4.0168} \text{ dagar} = \frac{360 \times 60 \times 60}{4{,}0168 \times 365{,}2564} \text{ år} = 283{,}3 \text{ år}$$

Likaledes finner man med dessa värden

$$\left[\frac{n}{2n - 5n'}\right]^2 = 5546; \left[\frac{n'}{2n - 5n'}\right]^2 = 899$$

Med dessa tal blifva de i kraftkomponenterna förekommande konstanta faktorerna, som höra till termen med argumentet $2n - 5n'$, multiplicerade, då man öfvergår till sjelfva störingsuttrycken. Man har sålunda funnit att Jupiters medelanomali är behäftad med ojemnheterna:

$$-424'',9 \operatorname{Sin}(2g - 5g') + 989'',5 \operatorname{Cos}(2g - 5g');$$

och att de motsvarande ojemnheterna i Saturni medelanomali äro:

$$-1016'',5 \operatorname{Sin}(5g' - 2g) - 2365''.8 \operatorname{Cos}(5g' - 2g),$$

der medelanomalierna g och g' åter blifvit införda i st för nt och n't.

För att en ojemnhet med mycket lång period skall kunna uppstå, d. v. s. att $in - i'n'$ skall blifva mycket liten erfordras att de tvenne medelrörelserna n och n' i det närmaste skola vara kommensurabla, d. ä. att förhållandet $\frac{n}{n'}$ i det närmaste skall sammanfalla med förhållandet emellan tvenne, ej alltför stora hela tal. Om detta åter är händelsen, så upptager, såsom det faller af sig sjelf, ett helt antal omlopp af den ena planeten ungefär samma tid som ett annat helt antal omlopp af den andra planeten. Så omfatta t. ex. 2 Saturni omlopp 58,9 år under det att 5 Jupiters omlopp omfatta 59,3 år.

Med tillhjelp af figuren 29 kan lätt visas, huruledes ett sådant förhållande emellan tvenne omloppstider tidtals föranleder en sammanhopning af den störande kraftens inverkan och dymedelst äfven en betydande ojemnhet. Vi antaga fördenskull exempelvis, att planeten m fullbordar något mer än tvenne omlopp under samma tid, som planeten m' fulländar ett; vidare förutsätta vi, att planeten m vid en viss tidpunkt befinner sig i punkten g_1, under det att planeten m' samtidigt befinner sig i punkten h. Då nu m' efter ett helt omlopp återkommit till h, har m' fulländat tvenne hela omlopp och dessutom ett litet stycke af sin bana, $g_1 g_2$; m befinner sig således i g_1 samtidigt som m' i h. Efter ytterligare ett omlopp af m' befinna sig m' och m samtidigt i h och g, o. s. v. Under en lång följd af omlopp komma sålunda planeterna m och m' hvardera närmare än i allmänhet är fallet, och detta närmande föranleder naturligtvis betydliga störingar. Vore deremot den ena planeten i m' under det att den andra är i g, så skulle på länge ej något så starkt närmande äga rum, som i förra fallet. Man inser äfven lätt att tillvaron af en excentricitet är nödvändig för att det minsta afståndet under vissa omlopp skall vara mindre än under andra; ty vid cirkelformiga banor skulle det minsta afståndet alltid inträffa då den ena planeten ginge förbi den andra och vara precist lika vid alla omlopp.

Emedan störingsvärdena förnämligast äro beroende af planeternas massor samt af förhållandet emellan deras banors halfva stora axlar, så kan ofta ett iakttaget störingsbelopp tjena till att bestämma obekanta massor eller afstånd, eller till och med, under gynnsamma omständigheter, att finna nya himlakroppar, hvilka ej förut genom sin glans ådragit sig iakttagarnes uppmärksamhet. Planeterna Venus och Mars äro, så vidt man vet, ej omgifna af månar; deras massor hafva derföre ej på det pag. 183 angifna sättet kunnat blifva bestämda. Icke desto mindre äro dessa massor bekanta på grund af de sekulära störingar, desamma förorsaka. De sekulära störingarne växa nämnligen med tiden till vida större belopp än de periodiska, hvarföre de förra äro mera tjenliga till bestämningen af den störande massan, än de sednare.

Förhållandena emellan solens, jordens och månens massor har man med temligen stor noggrannhet kunnat bestämma, oberoende af dessa massors inflytande på hvarandras banrörelser; deremot har det varit svårt att genom direkta methoder bestämma förhållandet emellan månbanans och jordbanans halfva stora axlar. Denna svårighet har berott på ringheten af solparallaxen, hvilken just i följd häraf endast medelst användande af ytterst omsorgsfulla uppmätningsmethoder har kunnat blifva bestämd. Men till en sådan bestämning har äfven den theoretiska härledningen af solens störande inverkan på månens rörelse ledt. Astronomen *Hansen* har jemfört sina, på theoretisk väg härledda störingsvärden med de genom iakttagelser bestämda, och dervid funnit, att de förra endast i den händelse öfverensstämma med de sednare, då deras numeriska beräkning företages med ett sådant värde för förhållande emellan jordbanans och månbanans halfva stora axlar, som motsvaras af medelsolparallaxen: 8″. 9159. Detta värde öfverensstämmer i det närmaste med dem, som i sednaste tider på andra vägar blifvit funna (jemf. pag. 58).

Vi skola slutligen med några ord omnämna upptäckten af planeten *Neptunus*, hvilken skedde på grund af de störingar, densamma förorsakade i planeten Urani rörelse.

Man hade länge försökt att på grund af de kända krafterna förklara vissa afvikelser i planeten Urani iakttagna rörelse från dem, som enligt den theoretiska beräkningen skulle äga rum. Afvikelserna voro dervid nog regelbundna och betydliga att förhindra hvarje misstanke om deras uppkomst genom observationsfel. Här förelåg således en ännu obekant kraft, hvilken i följd af dess tydliga verkningar borde kunna uppdagas. Ehuru visserligen äfven andra åsigter försökte att göra sig gällande, så stannade man dock slutligen vid den, att den förmärkta kraften vore att söka i tillvaron af en ännu obekant transuranisk planet, men hvilkens läge på himmeln, på grund af dess störande inverkningars beskaffenhet medelst räkning borde kunna uppletas.

Redan länge hade det varit bekant att de olika planeternas medelafstånd från solen, om ock ej strängt, så dock med en viss grad af tillnärmelse kunna angifvas medelst uttrycken

			De verkliga.
Merkurius .	$0{,}4$	$= 0{,}4$	0,39
Venus	$0{,}4 + 0{,}3 \times 2^0$	$= 0{,}7$	0,72
Jorden	$0{,}4 + 0{,}3 \times 2$	$= 1{,}0$	1,00
Mars	$0{,}4 + 0{,}3 \times 2^2$	$= 1{,}6$	1,52
— — —	— — —	— — —	— — —
Jupiter	$0{,}4 + 0{,}3 \times 2^4$	$= 5{,}2$	5,20
Saturnus ..	$0{,}4 + 0{,}3 \times 2^5$	$= 10{,}0$	9,54
Uranus	$0{,}4 + 0{,}3 \times 2^6$	$= 19{,}6$	19,18

Den förmodan låg nu nära, att den nya planetens medelafstånd från solen skulle vara tillnärmelsevis angifvet af uttrycket $0{,}4 + 0{,}3 \times 2^7 = 38{,}8$. Med detta värde kunde vidare beräknas de störingsuttryck, som voro oberoende af den nya planetens excentricitet, hvilka uttryck dock ännu till deras numeriska värden ej fullständigt kunde bestämmas. Först och främst var ju den nya planetens massa alldeles obekant, af hvilken orsak de beräknade störingsuttrycken borde förses med en obestämd faktor, representerande denna massa. För det andra var äfven riktningen, i hvilken den förmodade massan verkade, helt och hållet obekant, hvarföre man egentligen skulle hafva haft tvenne vinklar att bestämma. I följd deraf, att banan, i analogi med de äldre planeternas, kunde förutsättas ligga i ett plan med ringa lutning mot ekliptikan, så blef det ej likväl nödvändigt att bestämma mer än en enda af dessa vinklar, nämnligen planetens heliocentriska längd vid en gifven tidpunkt. Då den nya planetbanans halfva stora axel förutsättes vara bekant, så var äfven medelrörelsen i densamma bestämd, och planetens längd vid hvarje annan tidpunkt kunde således utan vidare angifvas.

De iakttagna afvikelserna i Urani rörelse borde således tjena till att bestämma åtminstone tvenne obekanta, nämnligen den nya planetens massa samt dess heliocentriska längd för en gifven tid. En sådan bestämning är, isynnerhet om man betraktar densamma ur en rent mathematisk synpunkt, ej så svår, som man kunde föreställa sig; ty den ena obekanta (massan) förekommer endast såsom en faktor till de hypothetiska störingsuttrycken, den andra obekanta (längden) förekommer åter endast i argumenten. Af denna orsak är frånskiljandet af de båda obekanta från hvarandra ej förenadt med några större svårigheter, och hela uppgiften vore temligen lätt löst i händelse man verkligen varit berättigad att lemna excentriciteten och lutningen utan afseende, samt att använda de värden för halfva stora axeln och för medelrörelsen, som bestämmas af den ofvan angifna lagen. Emedan dessa förutsättningar likväl i ingen händelse kunna anses vara absolut exakta, så hafva de astronomer (*Leverier* och *Adams*), hvilka varit sysselsatta med lösningen af ifrågavarande problem, utsträckt sina undersökningar längre. Desse män hafva nämnligen icke allenast försökt att erhålla en omedelbar bestämning af den förmodade planetens halfva stora axel eller medelrörelse, utan äfven af dess banas öfriga elementer. Om resultatet af deras bemödanden kan man säga, att detsamma i hufvudsak var fullkomligt tillfredsställande; ty planeten upptäcktes i sjelfva verket på himmeln, ganska nära det ställe, astronomernas räkningar hade anvisat. Deremot framgingo den nya planetens banelement ganska felaktiga ur den theoretiska beräkningen, hvaraf en omedelbar följd var den, att dessa element ej länge hade kunnat representera planetens rörelse, ehuru desamma för en viss epok temligen nära angåfvo dess läge på himmeln.

De i det föregående omnämnda undersökningarna och resultaten af dem utvisa tillräckligt det förhållande, i hvilket astronomin står till den Newtonska gravitationslagen. Densamma utgör den princip, från hvilken alla astronomiska theorier, dem vi hitintills haft för ögonen, kunnat härledas. Det eklatantaste beviset för dess riktighet funno vi slutligen i upptäckten af planeten Neptunus.

Men jemte upptagandet af denna lag såsom en princip i astronomin blef äfven denna vetenskaps ställning i naturfilosofiskt hänseende helt och hållet förändrad. Det blef nämnligen nu möjligt att underkasta de astronomiska frågorna en sträng mekanisk-mathematisk behandling, hvarvid ovilkorligen måste träda i dagen, på hvilket sätt besvarandet af en sådan bör vara beroende af empiriska data, d. v. s. af rena iakttagelseresultat. Tydligen gifves det icke något astronomiskt resultat som vore oberoende af astronomiska iakttagelser, men beskaffenheten af detta beroende kan först på grund af theorin inses.

Vi kunna ur framställningarna i det föregående hämta åtskilliga exempel på, huruledes astronomiska resultat härledas ur astronomiska iakttagelser, såväl då man haft en theoretisk grundval för frågans behandling, som ock då man varit i saknad af en sådan. Vill man t. ex. härleda en formel, enligt hvilken man medelst räkning kan finna solens längd vid hvilken tidpunkt som heldst, så leda iakttagelserna, såsom vi sågo (pag. 93), till följande uttryck

$$\lambda = a + 360^\circ t + b \operatorname{Cos} 360^\circ t + c \operatorname{Sin} 360^\circ t + \ldots,$$

der de konstanta qvantiteterna a, b, c, o. s. v. synas alldeles oberoende af hvarandra, hvarföre det tyckes som om man vore berättigad att bestämma så många obekanta, som iakttagelserna gifva anledning till. Frågans theoretiska beskaffenhet är dock sådan, att ej mer än tre qvantiteter i ofvanstående uttryck få bestämmas oberoende af hvarandra, hvarigenom dock alla termer blifva numeriskt gifna, ty de äro alla funktioner af dessa tre qvantiteter. Räknas tiden från det ögonblick då jorden är i perihelium, så böra alla cosinustermer försvinna; den konstanta termen a betecknar då jordbanans perihelii längd samt c jordbanans dubbla excentricitet. Den tredje konstanten är jordens sideriska omloppstid, hvilken blifvit vald till tidsenhet. Bestämningen af dessa tre konstanter innebär ingen empiri, men be-

14

stämdes flere än dessa, så förlorade uttrycket helt och hållet sin theoretiska pregel och blefve då empiriskt. Termer, hvilka man, utan att kunna framvisa deras theoretiska betydelse, bestämt endast i afsigt att återgifva iakttagelsernas utsago, benämnas äfven empiriska termer. Deremot kunna de trenne angifna konstanterna endast och allenast bestämmas på grund af iakttagelser. Sjelfva den theoretiska utredningen af frågans beskaffenhet utvisar, att desamma i theoretiskt hänseende äro fullkomligt vilkorliga, d. v. s, obestämbara.

Den ytterst komplicerade theorin för månens och jordens rörelser kring solen, samt den mängd ojemnheter, som förefinnas i synnerhet i den förra, bero dock endast på fjorton konstanter, dervid dock förutsättes att solen, jorden och månen äro homogena klot. Dessa fjorton, endast ur iakttagelser bestämbara konstanter äro: 1) jordbanans sex elliptiska banelementer, 2) elementerna af månens elliptiska rörelse kring jorden, båda dessa elementsystem gällande för någon viss epok; slutligen tvenne förhållanden emellan de tre massorna. Härmed kunna icke allenast Evektionen, Variationen samt den årliga eqvationen numeriskt beräknas, utan jemväl alla öfriga ojemnheter. Men detta oaktadt har man ofta nog sett sig föranlåten att i uttrycken för månens rörelse införa empiriska termer. Det har nämnligen visat sig ytterst svårt att med tillbörlig skärpa utföra alla de numeriska räkningar, hvarigenom de olika ojemnheternas koefficienter erhållas, ehuru man ganska lätt kan finna tillnärmelsevis riktiga värden för de största af dem. Sålunda har ofta en mindre sorgfälligt utförd beräkning förorsakat afvikelser emellan theori och iakttagelse, i följd hvaraf man till och med någon gång sett sig föranlåten att betvifla den formella strängheten af Newtons lag, såvida nämnligen som denna afser den indirekta proportionaliteten af afståndens qvadrater. Sorgfälligare beräkningar hafva dock hitintills ständigt visat obehöfligheten af dylika antaganden och efterhand gjort alla empiriska termer öfverflödiga.

Förutom de fjorton omnämnda konstanterna i uttrycken för rörelserna inom systemet af de tre kropparna solen, jorden och månen, hvilka theorin lemnar helt och hållet obestämda, kunna ej flere förefinnas såvida icke andra fysiska omständigheter tillkomma, hvilka böra tagas i betraktande. Sådana omständigheter förefinnas dock, af hvilka den vigtigaste synes vara den, att jordmassan ej bildar ett homogent klot. I följd häraf blifver icke månen attraherad af jorden på samma sätt som om denna sednare utgjorde en materiell punkt. Theorin visar, att den häraf uppstående ojemnheten i månrörelsen är beroende af precist samma, massfördelningen i jordens inre utmärkande konstant, som ingick i precessions- och nutationsformlerna (Jemf. pag. 171). Medelst iakttagelse af månens rörelser bör således denna konstant kunna bestämmas, och således äfven, då månmassan är känd, pressionens årliga belopp och den s. k. nutationskonstanten. Den ur skenbara stjernrörelser direkt bestämda precessionskonstanten är likväl vida säkrare än den, som på den theoretiska vägen kan erhållas, hvarföre en jemförelse dem emellan skulle sakna intresse. Bestämningen af nutationskonstanten utvisar deremot genom sin öfverensstämmelse med värden, funna på andra vägar, en hög grad af fulländning i de astronomiska theorierna och deras anknytning till iakttagelserna.

3 Kapitlet.

Den moderna observationskonsten.

§ 12. Koordinater i rymden och på sferen.

Någon astronomisk kunskap står icke att vinna utom på grunden af astronomiska iakttagelser, på samma sätt som hvarje annan kunskap i viss mon alltid måste stödja sig på erfarenheten. För att derföre kunna bedöma tillförlitligheten af ett astronomiskt resultat, der frågan ej är af rent theoretisk beskaffenhet, bör man äga insigt om, huruledes astronomiska iakttagelser anställas, hvarigenom man sättes i tillfälle att kunna inse noggrannheten af desamma. Derföre må man dock ingalunda anse astronomins ändamål bestå i iakttagelsers anställande; dessa, eller de omedelbara resultaten af dem äro, såsom man i en ganska träffande liknelse utsagt, att anse såsom det råämne, ur hvilket den astronomiska vetenskapen blifvit utvecklad. I samma liknelse kan man dock vidare säga, att kännedomen af, eller förmågan att bedöma råämnets godhet är nödvändig för att kunna sluta till hållbarheten af det härledda resultatet.

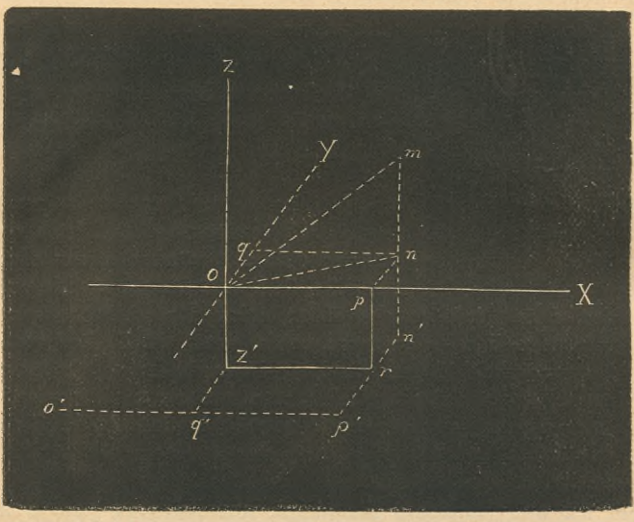
Redan i det första kapitlet har det blifvit antydt, att man medelst astronomiska iakttagelser närmast åsyftar att bestämma en himlakropps skenbara läge på himlahvalfvet vid en gifven tidpunkt, d. ä. den rigtning, i hvilken en sådan kropp synes från en punkt på jordytan. En rigtning angifves i allmänhet medelst tvenne vinklar, hvarföre en s. k. fullständig astronomisk iakttagelse äfven består i uppmätningen af tvenne vinklar, hvilka sålunda höra tillsammans, att de gemensamt bestämma en riktning. Sådana vinklar benämnas i astronomin *höjd* och *azimuth*, *rektascension* och *deklination* eller *längd* och *bredd*. I det föregående har betydelsen af dessa uttryck redan till en del blifvit förklarad; vi skola dock nu återkomma härtill samt angifva betydelsen af dessa vinklar eller bestämningsstycken, betraktade ur en gemensam synpunkt.

Medelst tvenne rätliniga koordinater angifver man en punkts läge på ett gifvet plan, men för att bestämma dess läge i rymden erfordras trenne koordinater. Man använder såsom sådana de trenne vinkelräta linier, hvilka från den ifrågavarande punkten kunna fällas mot trenne sålunda lagda plan, att desamma skära hvarandra i en gemensam punkt samt att de äro vinkelräta mot hvarandra. Såsom lätt nog inses, bilda då äfven dessa plans trenne genomskärningslinier räta vinklar med hvarandra, samt gå genom planens gemensamma genomskärningspunkt. Sjelfva planen benämnas *koordinatplan*, men deras genomskärningslinier *koordinataxlar*.

För att nu ytterligare förtydliga, huruledes en punkts läge i rymden angifves medelst rätliniga koordinater, har vidstående figur blifvit konstruerad. I densamma tänka vi oss de genom punkter antydda linierna ligga utom papperets plan, sålunda att axeln OY är vinkelrät mot planet XOZ. Linien np, som ligger i planet XOY och är parallel med OY, är således äfven vinkelrät mot planet XOZ och mot axeln OX. Linien mn, som anses ligga utom papperets plan, är åter parallel med axeln OZ. De trenne koordinaterna $Op = x$, $pn = y$ samt $mn = z$, hvilka fullständigt angifva läget af punkten m, äro sålunda vinkelräta mot de trenne koordinatplanen ZOZ, XOZ samt XOY.

I stället för rätliniga koordinater använder man äfven polära. Dessa äro t. ex. afståndet $Om = r$, vinkeln $mOn = \varphi$ samt vinkeln $YOn = \varphi$, hvilken sednare vinkel ligger i planet XOY. För att kunna angifva polära koordinater är det nödvändigt att hafva kommit öfverens om ett *grundplan* (här planet XOY), en *grundriktning* i samma plan (här riktningen OY) samt en *begynnelse-punkt* (här punkten O). I och med detsamma är äfven läget af de tvenne öfriga koordinatplanen bestämdt; ty riktningarne OX och OZ äro omedelbart gifna, den förra derigenom att densamma sammanfaller med grundplanet, står vinkelrät mot grundriktningen samt går genom begynnelsepunkten, den

Fig. 30.



sednare åter genom att stå vinkelrätt mot grundplanet samt gå genom begynnelsepunkten.

Det är mycket lätt att angifva relationerna emellan de rätvinkliga och de polära koordinaterna för en punkt i rymden, för så vidt dessa koordinater hänföra sig till samma grundplan, grundriktning och begynnelsepunkt. Ur den rätvinkliga triangeln mOn (fig. 30) finner man nämnligen

$$\overline{mn} = \overline{Om} . \mathrm{Sin\,mOn}; \quad \overline{On} = \overline{Om} . \mathrm{Cos\,mOn}$$

Den rätvinkliga triangeln nOq i planet XOY gifver oss vidare

$$\overline{Op} = \overline{nq} = \overline{On} . \mathrm{Sin\,nOq}; \quad \overline{np} = \overline{Oq} = \overline{On} . \mathrm{Cos\,nOq}$$

Med stöd af dessa likheter härleder man omedelbart följande relationer emellan x, y, z å ena sidan samt r, φ och ψ å den andra:

$$\overline{Op} = \overline{Om} . \mathrm{Cos\,mOn} . \mathrm{Sin\,nOq} \quad \text{eller} \quad x = r \,\mathrm{Cos}\, \varphi \,\mathrm{Sin}\, \psi$$

$$\overline{np} = \overline{Om} . \mathrm{Cos\,mOn} . \mathrm{Cos\,nOq} \quad \text{eller} \quad y = r \,\mathrm{Cos}\, \varphi \,\mathrm{Cos}\, \psi$$

$$\overline{mn} = \overline{Om} . \mathrm{Sin\,mOn} \quad \text{eller} \quad z = r \,\mathrm{Sin}\, \varphi$$

Tänker man sig en sfer med punkten O till medelpunkt och hvars radie är $\overline{Om}$, så motsvaras vinklarna φ och ψ af storcirkelbågar på samma sfer, hvilka benämnas *sferiska kordinater* eller koordinater på sferen. Utan att känna afståndet $\overline{Om}$, kan man naturligtvis ej angifva sferens radie, men detta oaktadt kan man ganska väl angifva de sferiska koordinaterna för en punkt. Det är med andra ord likgiltigt, hvilken radie man väljer för sferen, på den de sferiska koordinaterna tänkas uppdragna, dessa äro dock ständigt angifna medelst vinklarna φ och ψ. På samma sätt, som dessa vinklar, bestämma äfven de motsvarande sferiska koordinaterna fullständigt riktningen, i hvilken punkten m synes från O. Då nu de astronomiska iakttagelserna närmast åsyfta bestämningen af riktningar, så kan man säga, att sådana iakttagelser hafva till ändamål bestämningen af sferiska koordinater för punkter, hvilkas afstånd ej behöfva vara kända. Himlakropparnas sferiska koordinater, gällande för vissa tidpunkter, äro de data, hvarpå de astronomiska undersökningarna måste stödja sig.

De punkter, der axeln OZ skär en kring O, såsom medelpunkt, beskrifven sfer, kallas poler till den storcirkel, hvilken på samma sfer afskäres af planet XOY. I analogi härmed säger man ock, att axeln OZ är riktad mot polerna till planet XOY.

Genom astronomiska iakttagelser finner man omedelbart sferiska koordinater, hvilka städse äro hänförda till iakttagarens ståndpunkt såsom begynnelsepunkt. Deremot äro såväl grundplanen som grundriktningarne ej alltid desamma.

Vid astronomiska iakttagelser hänför man riktningarna hufvudsakligen till tvenne grundplan, nämnligen horisonten och eqvatorn.

Med *horisont* menas då det plan, som genom iakttagarens ståndpunkt drages vinkelrätt mot tyngdkraftens riktning, således icke den geocentriska horisonten (jemf. pag. 54).

Eqvator benämnes åter det plan, hvilket går genom iakttagarens ståndpunkt vinkelrätt mot jordens rotationsaxel. Eqvatorn och horisonten skära hvarandra längs en linie, som angifver riktningen af öster och vester.

Horisontens poler benämnas *zenith* och *nadir*, den förra ofvan sjelfva planet, den sednare under detsamma; eqvatorns poler kallar man åter *verldspoler*, den *norra* och den *södra*.

Det plan, hvars läge bestämmes af iakttagarens ståndpunkt, zenith och den norra verldspolen, benämner man *meridian*. — Tyngdkraftens riktning vid en punkt på jordytan råkar så nära jordens rullningsaxel, att vi kunna anse detta i all stränghet vara händelsen; det är tydligt, att då såväl förbindningslinien emellan zenith och nadir, på hvilken äfven iakttagarens ståndpunkt ligger, som ock jordens rullningsaxel måste sammanfalla med meridianen.

Genomskärningslinien af horisonten och meridianen benämnes *middagslinie,* ehuruväl man äfven under denna benämning någon gång förstår den storcirkel, meridianen utskärer på en kring iakttagarens ståndpunkt såsom medelpunkt, med en godtyckligt stor radie beskrifven sfer. Middagslinien är en af de oftast använda grundriktningar vid astronomiska iakttagelser. En andra grundriktning bestämmes af eqvatorns och meridianens genomskärningslinie. Den tredje grundriktningen, som användes i astronomin vid angifvandet af koordinater på sferen, är *dagjemningslinien,* d. ä. linien, efter hvilken eqvatorn och ekliptikan skära hvarandra.

I det koordinatsystem, hvars grundplan är horisonten och der middagslinien utmärker grundriktningen, benämner man koordinaten, som motsvarar vinkeln ψ (fig. 30), *azimuth* och koordinaten, som motsvarar vinkeln φ, *höjd.* Azimuth räknas från sydpunkten, d. v. s. den punkt der middagslinien i söder råkar den skenbara himlasferen, genom vester, norr och öster tillbaka till söder, således från 0^0 till 360^0. Höjden räknas deremot endast från 0^0 till 90^0, emedan man endast undantagsvis ser någon stjerna under horisonten. I stället för höjden angifver man ofta dess komplement till 90^0 eller den s. k. zenithdistansen. Betecknar man höjden med h samt zenithdistansen med z, så är nödvändigt

$$z = 90^0 - h.$$

Då man väljer eqvatorn till grundplan samt dess genomskärningslinie med meridianen till grundriktning, så motsvarar vinkeln ψ den s. k. *timvinkeln,* samt φ *deklinationen.* Timvinkeln räknas från söder genom vester, norr och öster tillbaka till söder eller från 0^0 till 360^0. I följd af jordens rullning synas alla himlakroppar förflytta sig sålunda att deras timvinklar likformigt tillväxa, såvida deras rörelser i öfrigt ej häri förorsaka någon modifikation. Deklinationerna förblifva under den dagliga rörelsens förlopp oförändrade, i händelse icke någon under dygnets förlopp märklig egen rörelse förefinnes. Deklinationen är nordlig eller sydlig, alltefter som en himlakropp befinner sig på norra eller södra hälften af den skenbara himlasferen.

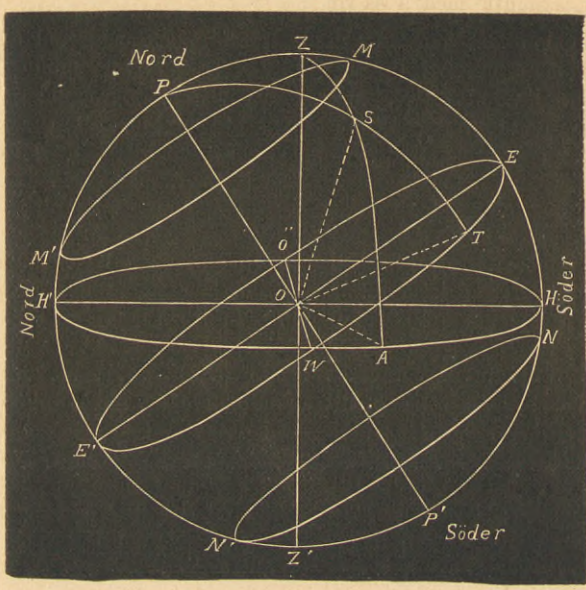
De hitintills omnämnda koordinaterna erhållas lättast direkt medelst iakttagelser; de äro likväl ej de lämpligaste att använda vid undersökningar om himlakroppars verkliga rörelser, och detta på den lätt insedda grund, att desamma med undantag af deklinationen mycket hastigt förändras. Såväl azimuth och höjd som timvinkel äro, med andra ord, ej oberoende af iakttagarens ståndpunkt på den roterande jorden. Man sammanbinder derföre med eqvatorn, såsom grundplan, dagjemningslinien, såsom grundriktning. Såsom förut, motsvaras äfven nu koordinaten φ af deklinationen, men den andra koordinaten är i detta system himlakroppens *rektascension.* Rektascensionen räknas i motsatt riktning till timvinkeln från 0^0 till 360^0, så att vid en gifven tidpunkt den kropp har en mindre rektascension, som har en större timvinkel. Vanligen angifvas rektascensionerna i timmar, af hvilka hvarje motsvarar 15^0.

Man använder ännu ett fjerde koordinatsystem, nämnligen det, som har ekliptikan till grundplan samt dagjemningslinien till grundriktning. Koordinaterna i detta system benämnas *längd* och *bredd,* af hvilka den förra motsvarar ψ och den sednare φ. Längden räknas från 0^0 till 360^0 i samma riktning som rektascensionerna; bredden räknas från 0^0 till 90^0 och är nordlig så ofta en himlakropp ligger åt samma sida om ekliptikans plan som norra verldspolen, i motsatt fall sydlig.

Genom direkta iakttagelser bestämmas vanligen himlakroppars höjder och azimuth eller deras deklinationer och timvinklar, men för de astronomiska undersökningarna är det fördelaktigare att känna rektascensioner och deklinationer eller längder och bredder. Häraf uppstår den uppgift, som är en af de väsentligaste i den s. k. sferiska astronomin, nämnligen att, *då en punkts sferiska koordinater i ett system äro gifna, medelst räkning finna samma punkts läge i ett annat system.* Naturligtvis måste härvid såväl de båda grundplanens lutning mot hvarandra som ock grundliniernas och begynnelsepunkternas relativa lägen vara bekanta. — Vi skola nu se, huruledes ifrågavarande uppgift reducerar sig till upplösningen af en s. k. sferisk triangel, hvilken upplösning utgör sjelfva hufvudföremålet för den s. k. sferiska trigonometrin. Härledningen af de vid denna upplösning förekommande formler ligger oss redan ganska nära; dock skola vi ej belasta texten med desamma, utan hänvisa i afseende härå till bihanget.

Vi föreställa oss en sfer, hvars medelpunkt O (fig. 31) sammanfaller med iakttagarens ståndpunkt. Papperets plan anse vi sammanfalla med meridianen; storcirklarna HWH'Ö och

Fig. 31.



EWE'Ö tänka vi oss ligga i plan, vinkelräta mot papperets, samt att det första af dessa plan föreställer horisonten, de sednare eqvatorn. Linien HH' är då middagslinien samt EE' grundriktning i det system, hvars koordinater äro timvinkel och deklination. Linien ZZ', som går genom punkten O och är vinkelrät mot horisonten, råkar sferen i polerna Z och Z' eller zenith och nadir. Punkterna P och P' motsvara eqvatorns poler, den förra norra verldspolen, den sednare den södra. Punkterna W och Ö angifva slutligen horisontens och eqvatorns genomskärningslinie.

Genom punkten S på sferen, der vi tänka oss en himlakropp, lägga vi tvenne storcirklar, af hvilka den ena tillika går genom punkterna Z och Z', den andra åter genom eqvatorns båda poler. Den förra af dessa storcirklar råkar horisonten i punkten A, den sednare åter eqvatorn i punkten T. Det är nu tydligt, att bågen HA representerer azimuth för punkten S, SA samma punkts höjd samt bågarne ET och ST timvinkeln och deklinationen för S. Bågen HA mätes dock tydligen af den sferiska vinkeln HZA, hvarföre vinkeln AZH' eller SZP måste vara lika med supplementet af azimuth till 180^0. Betecknas således azimuth med a så är

$$SZP = 180^0 - a.$$

Vinkeln EPT eller ZPS mäter åter tydligen timvinkeln, hvilken vi beteckna med t.

Eqvatorns höjd och polens höjd öfver horisonten utgöra tillsamman, såsom af figuren lätt synes, 90^0; beteckna vi den sednare med φ, så är derföre

$$ZP = HE = 90^0 - \varphi.$$

Slutligen beteckna vi zenithdistansen ZS med z samt deklinationen med δ, då tydligen storcirkelbågen $SP = 90^0 - \delta$.

De trenne storcirkelbågarna SZ, SP och ZP bilda på sferen en s. k. sferisk triangel, hvars sidor äro z, $90^0 - \delta$ och $90^0 - \varphi$, samt hvars vinklar äro $180^0 - a$, t och vinkeln ZSP, hvilken vi beteckna med p. Då tre af dessa sex qvantiteter äro bekanta, finner man de tre återstående genom trigonometrisk räkning. Öfvergången från azimuth och höjd eller zenithdistans till timvinkel och deklination, eller tvertom, sker således helt och hållet på grund af regler, som läras i den sferiska trigonometrin.

Öfvergången från timvinkel till rektascension sker deremot utan någon trigonometrisk räkning. Antaga vi t. ex. att W utmärker vårdagjemningspunktens läge på sferen, så är rektascension för punkten S angifven af bågen TW. Bågen EW är åter vårdagjemningspunktens timvinkel, hvilken vi beteckna med Θ. I det vi slutligen med α beteckna rektascension för S, hafva vi, såsom omedelbart inses af figuren,

$$\Theta = \alpha + t$$

Enligt denna formel kan man å ena sidan bestämma stjerntiden genom att iakttaga ett föremål på himlahvalfvet, hvars rektascension är bekant; å andra sidan finner man rektascension för en himlakropp genom att iakttaga dess timvinkel vid en bekant stjerntid. För en punkt i meridian är timvinkeln 0^0; om man således vid ett ur, som utvisar stjerntiden, iakttager ögonblicket, då en stjerna passerar meridianen, så har man omedelbart dess rektascension. Öfvergången till längd och bredd från rektascension och deklination sker medelst formler, fullkomligt liknande dem, hvarigenom timvinkel och deklination härledas ur azimuth och höjd.

Medelst de formler, som förmedla öfvergången från azimuth och höjd till timvinkel och deklination, bestämmer man dels polhöjden för en ort, dels himlakropparnas deklinationer, dervid azimuth och höjden antagas vara gifna genom iakttagelse. I särskilda fall behöfver man dock endast genom iakttagelse bestämma endera, höjden eller azimuthet. Uppmäter man t. ex. vid en gifven stjerntid höjden af ett föremål, hvars rektascension och deklination äro bekanta, så kan man beräkna polhöjden utan att behöfva känna azimuth. Likaså kan man, då rektasc., dekl. och azimuth äro bekanta, det sednare genom direkt uppmätning, medelst räkning finna polhöjden utan att känna höjden. Omvändt kan man äfven härleda en stjernas deklination genom iakttagelser af dess azimuth, hvarvid dock måste förutsättas att såväl iakttagelseortens polhöjd som stjernans rektascension äro bekanta.

Relationen emellan en stjernas höjd och dess deklination blifver enklast då stjernan är i meridian; man har för denna händelse och om stjernan är söder om zenith, såsom man med tillhjelp af figuren lätt kan öfvertyga sig,

$$\delta = h - (90^0 - \varphi) = \varphi - z.$$

I följd deraf, att man utan någon trigonometrisk räkning kan härleda himlakropparnas rektascensioner genom att iakttaga tiderna för deras meridianpassager, samt deras deklinationer genom att iakttaga deras meridianhöjder eller meridianzenithdistanser, anställas äfven de vigtigaste iakttagelser i meridianens plan. Man begagnar sig härvid af tuber, som endast kunna riktas mot punkter i detta plan. Sådana instrument benämnas *genomgångs-instrument* eller *passage-instrument* samt *meridiancirklar*.

Emedan jorden roterar kring en axel, hvars läge i rymden åtminstone under loppet af ett dygn får anses förblifva paralell med sig sjelf, så synes hela himlahvalfvet med alla stjernor under loppet af denna tid svänga sig kring nämnda axel. Stjernornas dagliga banor synas för oss sålunda såsom cirklar med allt mindre och mindre radier, ju närmare deras läge är till någondera af verldspolerna. Dessa cirklar äro parallela med eqvatorn och ligga antingen helt och hållet öfver horisonten eller delvis öfver och delvis under detta plan eller ock helt och hållet under detsamma. I första händelsen måste stjernan städse kunna varseblifvas, såvida ej solljuset borttager dess sken. Inträffar deremot den sista händelsen, så kan stjernan alldeles icke komma öfver horisonten och således ej heller ses. Sålunda kunna en mängd stjernbilder, som pryda den sydliga delen af himlahvalfvet, från våra nordliga trakter ej varseblifvas. Om slutligen en himlakropps dagliga bana delvis ligger öfver och delvis under horisonten, så skär denna bana horisonten i tvenne punkter, en i öster och en i vester om meridian. Då en stjerna befinner sig i den östliga genomskärningspunkten, säges hon gå upp; då hon åter genom den vestra sjunker under horisonten, säges hon gå ned. Stjernor, hvilkas dagliga banor fullständigt ligga öfver horisonten, och hvilka således aldrig gå ned, benämner man *cirkumpolarstjernor*. Man inser lätt med tillhjelp af fig. 31, att en stjerna är cirkumpolär, om dess deklination är större än eqvatorns höjd öfver horisonten, d. v. s. större än $90^0 - \varphi$. Då en stjerna passerar meridianen, säges hon *kulminera*. Cirkumpolarstjernorna hafva således tvenne synliga kulminationer, en öfre i söder, om iakttagaren befinner sig på norra halfklotet, och en nedre i norr.

Medelst de trigonometriska relationerna emellan azimuth, höjd, timvinkel och deklination kan man med största lätthet härleda en himlakropps timvinkel och azimuth, då densamma går upp eller ned, endast dess deklination är bekant. Man behöfver för detta ändamål endast i ifrågavarande formler insätta höjden $= 0^0$. Känner man härtill himlakroppens rektascension, så kan man äfven lätt härleda sjerntiden för dess upp- eller nedgång. Det beräknade azimuthet tjenar åter till att bestämma den punkt på horisonten, der upp- eller nedgången sker.

Ekliptikans nordligaste punkt har en nordlig deklination, hvars storlek bestämmes af detta plans lutning mot eqvatorn; dess sydligaste punkt har en lika stor sydlig deklination. Det är tydligt att dessa båda punkter kulminera 12 timmar efter hvarandra. En himlakropp, som befinner sig nära ekliptikan och kulminerar 12 timmar efter solen, har således äfven en sydlig deklination då solen har en nordlig och tvertom. Under nordliga polhöjder kulminerar solen under sommaren ganska högt öfver horisonten, emedan dess deklination är nordlig, men himlakroppar nära ekliptikan, hvilka då kulminera vid midnatt, hafva sydliga deklinationer och kunna i följd häraf endast uppnå ringa höjder öfver horisonten. Härigenom förklaras den bekanta omständigheten, att planeterna och månen om sommaren synas mycket lågt vid horisonten. Om vintern, då solen vid sin kulmination står lågt, synas planeterna och månen åter högt på himmelen.

Genom iakttagelser finner man himlakropparnas sferiska koordinater hänförda till iakttagarens ståndpunkt såsom koordinaternas begynnelse-punkt. För vidare astronomiska undersökningar är det dock erforderligt att hänföra dessa koordinater till andra begynnelsepunkter, vanligen jordens eller solens medelpunkter. Nödvändigheten af en sådan reduktion beror dock derpå, huruvida den ifrågavarande himlakroppens afstånd är måttligt stort, eller om afståndet emellan de olika begynnelsepunkterna får anses försvinnande litet i förhållande till himlakroppens afstånd från någon af dem. I sednare händelsen äro koordinaterna desamma, till hvilkendera begynnelsepunkt de än må anses hänförda. En fixstjerna, hvars afstånd från solsystemet är mycket stort i jemförelse med jordens afstånd från solen, synes från hvardera af dessa himlakroppar på några få undantag när i alldeles samma rektascension och deklination. Emellertid skola vi i korthet visa, huruledes man öfvergår från ett system till ett annat, då såväl grundplanen som grundriktningarna antagas vara parallela.

Vi erinra oss härtill figuren 30, der O och O' beteckna tvenne begynnelsepunkter. De rätvinkliga koordinaterna för punkten m, hänförda till begynnelsepunkten O, äro $Op = x$, $np = y$ samt $mn = z$. Samma punkts koordinater, hänförda till O', äro åter $O'p' = x'$, $n'p' = y'$ och $mn' = z'$. Vidare beteckna vi koordinaterna för O, hänförda till O', nämnligen $O'q'$, qZ' och OZ' med a, b och c. Man inser nu ögonblickligen att

$$O'p' = O'q' + q'p' = O'q' + Op, \text{ d. v. s.}$$

$$x' = x + a$$

och på samma sätt är

$$y' = y + b$$

$$z' = z + c$$

Dessa formler skola vi använda för att visa, huruledes man beräknar en himmelskropps geocentriska rektascension och deklination, då man känner dessa koordinater, sedda från en punkt på jordytan. Låt α' och δ' beteckna den geocentriska rektascensionen och deklinationen, samt α och δ samma bestämningsstycken, sedda från en punkt på jordytan; låt vidare r' beteckna afståndet från himlakroppen till jordens medelpunkt, hvilket måste anses vara bekant, samt r afståndet till observationspunkten, så är (jemf. pag. 214)

$$x' = r' \operatorname{Cos} \delta' \operatorname{Sin} \alpha';\ x = r \operatorname{Cos} \delta \operatorname{Sin} \alpha$$
$$y' = r' \operatorname{Cos} \delta' \operatorname{Cos} \alpha';\ y = r \operatorname{Cos} \delta \operatorname{Cos} \alpha$$
$$z' = r' \operatorname{Sin} \delta';\ z = r \operatorname{Sin} \delta$$

Qvantiteterna a, b och c skola vi härleda under den förutsättning att jorden är ett fullkomligt klot, hvilket antagande äfven i de flesta fall är tillåtet, utan att något märkbart fel derigenom uppkommer. Jordradien beteckna vi då med ϱ. Vi behöfva ännu rektascensionen och deklinationen för iakttagarens ståndpunkt, sedda från jordens medelpunkt eller hvilket, då jorden anses för ett klot, komme på ett ut, rektascensionen och deklinationen för observationsortens zenith. Nu är dock, hvarom man ytterst lätt med tillhjelp af figuren 31 kan öfvertyga sig, den geocentriska rektascensionen för zenith alldeles detsamma som vårdagjemningspunktens geocentriska timvinkel, således ingenting annat än stjerntiden, den vi betecknat med Θ. Sammaledes inser man ock, att den geocentriska deklinationen för zenith är detsamma som observationsortens geocentriska polhöjd, d. ä. den vinkel, som jordradien bildar med det genom jordens medelpunkt lagda eqvatorplanet; denna vinkel beteckna vi med φ' * och hafva således

$$r' \operatorname{Cos} \delta' \operatorname{Sin} \alpha' = r \operatorname{Cos} \delta \operatorname{Sin} \alpha + \varrho \operatorname{Cos} \varphi' \operatorname{Sin} \Theta$$
$$r' \operatorname{Cos} \delta' \operatorname{Cos} \alpha' = r \operatorname{Cos} \delta \operatorname{Cos} \alpha + \varrho \operatorname{Cos} \varphi' \operatorname{Cos} \Theta$$
$$r' \operatorname{Sin} \delta' = r \operatorname{Sin} \delta + \varrho \operatorname{Sin} \varphi'$$

Dessa likheter tjena till bestämmandet af α' och δ'; men man kan ur desamma med största lätthet härleda formler, hvilka omedelbart angifva differenserna $\alpha' - \alpha$ och $\delta' - \delta$. Vi skola dock här inskränka oss till härledningen af differensen $\alpha' - \alpha$. Härtill erfordras endast att den första af ofvanstående eqvationer multipliceras med Cos α samt den andra med Sin α,

---

* I följd af jordmeridianernas ellipticitet är φ' och φ ej fullkomligt identiska. Skilnaden är beroende af φ på sätt, som inses af formeln $\varphi' = \varphi - 11' \, 30.'' \, 6 \operatorname{Sin} 2 \varphi + \ldots$

hvarefter den sednare produkten bör subtraheras från den förra. Man erhåller då följande rest

$$r' \operatorname{Cos} \delta' (\operatorname{Sin} \alpha' \operatorname{Cos} \alpha - \operatorname{Cos} \alpha' \operatorname{Sin} \alpha)$$
$$= \varrho \operatorname{Cos} \varphi' (\operatorname{Sin} \Theta \operatorname{Cos} \alpha - \operatorname{Cos} \Theta \operatorname{Sin} \alpha)$$

eller (jemf. noten till pag. 196)

$$r' \operatorname{Cos} \delta' \operatorname{Sin}(\alpha' - \alpha') = \varrho \operatorname{Cos} \varphi' \operatorname{Sin} (\Theta - \alpha)$$

Vanligen äro differenserna $\alpha' - \alpha$ samt $\delta' - \delta$ mycket små, hvarför man i den sednast härledda formeln får sätta δ i st. f. δ' samt bågen $\alpha' - \alpha$ i st. för densammas sinus. Man erhåller då slutligen

$$\alpha' - \alpha = \frac{\varrho}{r'} \frac{\operatorname{Cos} \varphi'}{\operatorname{Cos} \delta} \operatorname{Sin} (\Theta - \alpha)$$

Förhållandet $\frac{\varrho}{r'}$ är ingenting annat än sinus för himlakroppens horisontalparallax (jemf. pag. 54 och 88) eller, om densamma är mycket liten, sjelfva horisontalparallaxen. Då man anbringar reduktionen $\alpha' - \alpha$ till en iakttagen rektascension, säges man äfven korrigera densamma för parallax. Af ofvanfunna formel för parallaxens inflytande på rektascensionen finner man att detsamma helt och hållet försvinner, då himlakroppen kulminerar, emedan man dervid har $\Theta = \alpha$ och $\operatorname{Sin} o = o$. Deremot är parallaxens inflytande på deklination då störst och lika med höjdparallaxen.

I likhet med de anförda härledes en mängd andra reduktionsformler, t. ex. de, hvarigenom man härleder en planets geocentriska läge ur dess heliocentriska. Af sådana formler hafva vi redan i det föregående (pag. 128) anfört dem, hvilka förmedla öfvergången från den heliocentriska längden och bredden till den geocentriska.

§ 13. Astronomiska iakttagelser och astronomiska instrument.

Bestämningen af grundplanens lägen och af grundriktningarne måste nödvändigt föregå de egentliga astronomiska iakttagelserna; man måste, med andra ord, först veta, från hvilken utgångsriktning och i hvilket plan en vinkel skall räknas innan man skrider till dess uppmätning. Dessa lägen och riktningar äro dels beroende af iakttagarens ståndpunkt på jordytan, d. v. s. af observationsortens geografiska läge, dels icke. Sålunda har hvarje geografisk punkt sin horisont, som ej sammanfaller med någon annan orts, ehuru visserligen flere punkter kunna hafva samma polhöjd eller geografiska bredd, eller ock en gemensam meridian. I förra fallet ligga de olika orterna på en med jordeqvatorn parallel cirkel, i sednare fallet åter på en och samma geografiska meridian. Eqvatorns och ekliptikans läge i rymden är deremot ej på något sätt beroende af den ståndpunkt på jordytan, från hvilken dessa lägen bestämmas, likaså ej heller riktningen af dessa plans genomskärningslinie. Vi skola nu i korthet genomgå de vigtigaste methoder, enligt hvilka man bestämmer läget af ifrågavarande plan och dertill hörande grundriktningar.

Horisonten definieras derigenom att tyngdkraftens riktning vid observationsorten är vinkelrät mot densamma. Häraf följer omedelbart ett högst enkelt medel att angifva dess läge. Man låter nämnligen en vigt nedhänga vid en tråd, hvars öfre ända på något sätt är befästad. Denna tråd intager, då den öfverlemnas att fritt nedhänga och kommer i hvila, tyngdkraftens riktning, hvaraf följer att alla linier, som mot ofvannämnda tråd dragas vinkelräta, äro parallela med horisontalplanet. Den nyss beskrifna inrättningen benämner man *lod*.

Ofta bestämmer man horisontens läge derigenom att man inställer en plan skifva parallelt med horisontalplanet. En sådan skifva bör hvila på trenne fotskrufvar, hvilka med hvarandra bilda en liksidig triangel, så att skifvans läge med lätthet må kunna justeras. För att nu undersöka huruvida skifvan är parallel med horisonten eller icke, använder man en s. k. *niveau* eller *vattenpass*. Detsamma består hufvudsakligen i ett graderadt glasrör, i det närmaste fyldt med någon lättrörlig vätska, vanligen sprit eller svafvelether. Röret är icke fullkomligt cylindriskt, utan något böjdt, så att luftblåsan i dess inre synes vid rörets midt, då förbindningslinien emellan rörets ändpunkter är parallel med horisonten. Vanligen är röret infattadt i en messingskapsel sålunda, att endast dess graderade midtelparti är synligt; kapseln hvilar på tvenne, vid densamma fästade stöd, hvilka äro ämnade att sättas på den yta, hvars horisontalitet man vill undersöka. Röret är fästadt i kapseln medelst skrufvar, hvilka tillika tjena till att reglera rörets ställning till den linie, som förbinder ändytorna af de omnämnda stöden. Meningen är härvid den, att då vattenpasset sättes på en fullkomligt vågrät yta, luftblåsan i röret skall synas precist i dess midt, hvilken på något sätt är utmärkt på graderingen, d. v. s. att blåsans ändpunkter skola synas på lika afstånd från midten. Ehuruväl detta vilkor sällan fullständigt är uppfyldt, så kan man dock ganska väl använda vattenpasset för de ändamål, man afser med detsamma. Man behöfver nämnligen härtill endast utföra tvenne nivelleringar, den andra sedan stödens lägen blifvit vexlade. Nivellerar man t. ex. i riktningen från öster till vester, dervid blåsans ändpunkt åt vester utvisar a graderingsstreck, samt åt öster b, så skulle det nivellerade planet luta från vester åt öster med vinkeln $\frac{1}{2}(a - b)$, i händelse röret varit fullkomligt riktigt inpassadt med hänseende till stödens ändytor: dervid är denna vinkel dock ännu ej uttryckt i vanligt vinkelmått, utan i delar af niveauns gradindelning. Vexlar man nu stöden, så att det, som förr stod i vester, kommer att stå i öster, och tvertom, så bör man äfven nu, såvida niveauröret är riktigt injusteradt, afläsa a graderingsstreck åt vester samt b åt öster. Finner man dock att blåsans ändpunkter utvisa andra tal, t. ex. a' och b', så bevisar detta att röret ej är injusteradt i kapseln; genom att bilda medeltalet af bestämningarne i niveauns båda lägen, d. ä. af $\frac{1}{2}(a - b)$ och $\frac{1}{2}(a' - b')$, finner man dock ett fullt riktigt värde för det nivellerade planets lutning i riktningen från vester till öster. Om riktigheten häraf kan man ganska lätt öfvertyga sig. Tänker man sig nämnligen att den nivellerade riktningen i sjelfva verket är horisontal, så måste man anse differensen $a - b$ uteslutande uppkommen af ett fel i rörets injustering. Man skall då ständigt å niveauns ena sida, d. ä. den, som först var vestlig, afläsa a graderingsstreck, huru man ock må ändra niveauns läge på det horisontala planet. Denna afläsning skall således förblifva densamma, äfven sedan den ursprungligen vestliga ändan kommit i öster. Häraf följer ögonskenligen, att $a = b'$ och $b = a'$, eller

$$(a - b) + (a' - b') = 0,$$

d. v. s. att medeltalet af de båda nivelleringarne är oberoende af felet i niveauns justering.

Innan niveaun kan användas till att bestämma lutningen af en riktning mot horisonten, måste man hafva bestämt värdet af en del på graderingen i vinkelmått, vanligen i sekunder. En sådan bestämning kan emellertid ganska lätt utföras, om man med en gifven vinkel ändrar lutningen af den riktning, man nivellerar. Denna ändring motsvaras af en viss skilnad emellan nivelleringsresultaten före och efter, hvaraf man omedelbart slutar till vinkelvärdet af gradindelningen.

Genom att nivellera i tvenne olika riktningar, t. ex. en i öster och vester, den andra i söder och norr, kan man bestämma läget af ett plan med hänseende till horisonten, och medelst de trenne omnämnda fotskrufvarne är det möjligt att ytterst nära göra en plan skifva parallel med densamma.

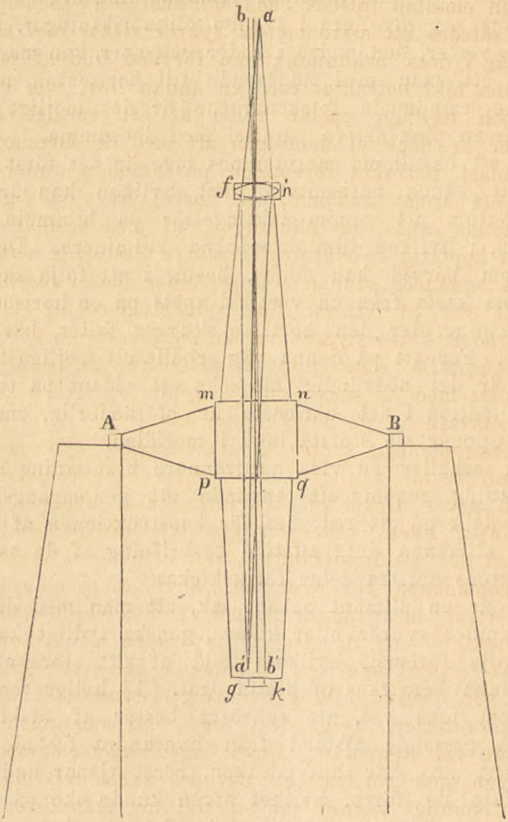
För att bestämma meridianens läge är det först och främst nödigt att känna horisontens, mot hvilken han är vinkelrät, men dessutom att genom iakttagelser på himmeln bestämma riktningen, i hvilken himlakropparna kulminera. Den enklaste utväg, som härvid kan följas, består i att följa skuggan, den solstrålarna kasta från en vertikal spets på en horisontal skifva. I den riktning, der den kortaste skuggan faller, har man middagslinien. För att på denna väg erhålla ett möjligast noggrannt resultat, är det nödvändigt att söka ett sådant på tider, då solens deklination i det närmaste är oföränderlig, emedan solen eljest ej uppnår sin största höjd i meridian.

Man erhåller en vida noggrannare bestämning af meridianens riktning genom att använda ett genomgångsinstrument. Innan vi dock gå att redogöra för konstruktionen af ett sådant, må en i allmänna drag affattad beskrifning af de astronomiska instrumentens optiska delar förutskickas.

Det är en allmänt bekant sak, att man med den apparat, som benämnes synrör eller kikare, ganska tydligt kan uppfatta och urskilja föremål, hvilka i följd af sitt stora afstånd icke skulle kunna bemärkas af blotta ögat. Ej heller torde mången finnas, som icke vet, att synröret består af åtskilliga glaslinser, på passande afstånd från hvarandra fästade i ett rör. Glaslinserna äro här hufvudsaken, röret tjenar endast till att sammanhålla de förra, hvilket äfven kunde ske på annat sätt, samt att utestänga annat ljus, än det som kommer från det inriktade föremålet. Vid astronomiska iakttagelser begagnas äfven synrör, men dessa af ett enklare slag än de, hvilka man använder vid betraktandet af föremål på jordytan; man benämner dem *astronomiska synrör.*

Det astronomiska synröret består af en större glaslins *fh* hvilken uppfångar de utifrån på densamma fallande ljusstrålarne; denna lins benämnes *objektiv.* De på objektivets midt fallande strålarna — man benämner dem *hufvudstrålar* — gå obrutna genom detsamma, men alla andra strålar, hvilka från en punkt

Fig. 32.



a falla på objektivet, brytas i det de genomgå detta sålunda, att de skära hvarandra i en och samma punkt a', hvilken ligger på hufvudstrålens riktning. I följd häraf synes en bild af föremålet a i punkten a', och på samma sätt synes i punkten b' en bild af föremålet b. Man erhåller sålunda omvända bilder af alla föremål, och dessa bilder ligga på en yta, hvars afstånd från sjelfve objektivet benämnes *brännvidd.* Den punkt, i hvilken de olika brutna, från ett och samma föremål utgångna strålarne skära hvarandra, benämnes *brännpunkt*, dock förstår man vanligen under sådan benämning den af dessa genomskärningspunkter, som ligger på linsens optiska axel, d. ä. förbindningslinien emellan linsens båda sferiska ytors medelpunkter.

Om således ett astronomiskt synrör riktas mot ett föremål, så uppstår i dess brännpunkt en förvänd bild af samma föremål; denna bild betraktas med en annan lins, som bär namnet *okular*, och hvilken spelar rolen af ett vanligt förstoringsglas. Det är dock ej meningen att med de astronomiska synrören endast betrakta föremålen på himmeln under stark förstoring; ett annat ändamål, och dertill ett vida vigtigare, kan med desamma ernås, det nämnligen, att med desto större säkerhet kunna uppfatta en riktning, ju större förstoring man använder. För detta ändamåls vinnande uppspänner man i synrörets brännpunkt ett nät af ytterst fina spindelväfstrådar. Der tvenne sådana trådar korsa hvarandra, är en punkt markerad, och genom att inställa röret just så, att bilden af en stjerna synes sammanfalla med en sådan punkt, uppfattar man riktningen till stjernan säkrare än på något annat sätt.

Ett astronomiskt synrör, hvilket användes till genomgångsinstrument, består vanligen af tvenne, något koniska rörhälfter fmnh och pgkq. Dessa rörhälfter äro med skrufvar fästade vid kuben mnpq, hvars ytor mn och pq naturligtvis äro genomborrade på det att ljusstrålarna från objektivet obehindradt må kunna framkomma till okularet. Vid kubens sidoytor mp och nq äro starka metallpjeser fästade, hvilka sluta med tappar af härdadt stål A och B. Dessa tappar äro med yttersta omsorg cylindriskt afsvarfvade och bestämma den axel, kring hvilken synröret kan vridas. Då genomgångsinstrumentet användes på fasta observatorier, hvila dess tappar på messingslager, hvilka äro fästade vid stenpelare. Dessa lager äro dock medelst skrufvar i någon mon rörliga, på det att axeln AB må kunna inställas fullkomligt vågrätt samt i riktning från öster till vester.

Hårnätet i rörets brännpunkt består hos genomgångsinstrumentet af tvenne horisontala samt flera vertikala trådar, på passande afstånd från hvarandra och vanligen symmetriskt på båda sidor om en, hvilken representerar trådnätets midt. Medelst skrufvar kan trådnätet något litet förskjutas i sitt plan, hvarigenom man kan inställa midteltråden sålunda, att densamma angifver en emot rotationsaxeln AB vinkelrät riktning. Om nu denna axel är både vågrät och instäld i riktningen från öster till vester, så skall bilden af en kulminerande himlakropp synas precist öfver midteltråden, dess deklination må vara hvilken som helst.

Sedan man medelst ett vattpass, hvilket är inrättadt att med sina stöd kunna ställas på tapparna, bringat instrumentets rotationsaxel i ett fullkomligt vågrätt läge eller uppmätt vinkeln emellan denna axel och horisonten, kan man på följande sätt inställa hårnätet, att dess midteltråd angifver en mot axeln vinkelrät riktning. Inunder objektivet ställes, sedan röret blifvit riktadt åt nadir, ett kärl innehållande något qvicksilfver. Härigenom beredes en fullkomligt vågrät yta, hvilken benämnes konstgjord horisont. Ifrån denna yta reflekteras en bild af hårnätet, hvilken kan varseblifvas från okularet. Man bör nu medelst korrektionsskrufvarne bringa hela hårnätet i sådant läge, att midteltråden fullkomligt sammanfaller med dess bild. Om en sådan inställning icke skulle lyckas, så qvarblifver ett litet fel, benämdt *kollimationsfel*. Detsamma kan likväl uppmätas och dess inflytande på de med genomgångsinstrumentet utförda iakttagelserna medelst räkning tagas i betraktande. På samma sätt anbringar man äfven små förbättringar i händelse instrumentets axel ej vore fullkomligt vågrät.

Vi kunna nu antaga att den synlinie, som bestämmes af midteltråden, beskrifver ett plan, hvilket är vinkelrätt emot horisonten och således går genom zenith. Om detta plan tillika går genom en annan punkt på himlahvalfvet i det ögonblick densamma kulminerar, så är detsamma meridianen. Man kunde bestämma kulminationsögonblicket på grund af den omständighet att punktens höjd då är störst, såvida nämnligen densamma är i sin öfre kulmination, men man vinner en noggrannare bestämning genom att vid ett välgående ur iakttaga tiderna då en och samma cirkumpolarstjerna i sin öfre och nedre kulmination passerar midteltråden. Mellantiden bör vara jemnt 12 timmar stjerntid, såvida instrumentet varit riktigt inställdt i meridian. Visar det sig dock, att tiden emellan den öfre och den nedre kulminationen är längre, än tiden emellan den nedre och derpå följande öfre kulminationen, så är instrumentets östra tapp något sydligare än dess vestra; för att derför bringa instrumentet i meridian, bör det östra tapplagret skjutas något åt norr, hvilken operation sker förmedelst de dertill anbragta skrufvarna.

Emedan inställningen af ett passageinstrument i meridian är förenadt med ganska mycket besvär och tidsspillan, så har man försökt att medelst s. k. meridianmärken bibehålla den en gång funna riktningen af meridian. Ett sådant märke kan bestå helt enkelt i en tafla, på hvilken ett vertikalt streck blifvit måladt. Taflan uppställes i betydligt afstånd från instrumentet sålunda, att strecket sammanfaller med midteltråden, då instrumentet befinner sig i meridian och är riktadt mot taflan. Man kan dock ej lita på att taflans läge under längre tider förblifver oförändradt, hvarföre detsamma då och då bör undersökas. Uraktlåtenhet i detta afseende har vållat att åtskilliga äldre observationsserier ej medfört den nytta för astronomin, som man hade väntat.

De egentliga iakttagelserna vid genomgångsinstrumentet bestå nu deri, att man uppfattar de tidsmoment, då bilden af himlakroppar synas öfver midteltråden, Är instrumentet fullkomligt riktigt instäldt, så erhåller man sålunda omedelbart urtiden, då himlakroppen kulminerar, men är detta icke händelsen, så måste till den iakttagna genomgångstiden små förbättringar anbringas, beroende på axelns lutning mot horisonten, kollimationsfelet samt på vinkeln emellan instrumentets axel och riktningen från öster till vester.

Skilnaden emellan de iakttagna kulminationstiderna för tvenne himlakroppar skulle nu omedelbart angifva skilnaden emellan deras rektascensioner, såvida urets gång vore precist reglerad efter stjerntid, d. v. s. om uret skulle utvisa jemnt 24 timmar emellan en och samma stjernas på hvarandra följande öfre kulminationer. Detta är dock i allmänhet icke händelsen, hvarföre de omedelbart iakttagna tidsskilnaderna böra förbättras med en qvantitet, som beror på urets dragning eller, såsom man säger, urets gång. Sjelfva gången bestämmes antingen genom att iakttaga samma stjerna tvenne eller flere dygn å rad eller ock genom att iakttaga flera stjernor efter hvarandra, hvilkas rektascensionsskilnader ur talrika föregående observationer ytterst noggrannt blifvit fastställda. Detta sednare förfarande är så tillvida att föredraga, som man egentligen ej får förutsätta att urets dragning under loppet af 24 timmar förblifvit fullkomligt oförändrad, men detsamma förutsätter, såsom nämndt, att rektascensionsdifferenser redan i förväg äro bekanta. Man synes här inveckla sig i en cirkel, ty för att hafva bekanta rektascensionsskilnader att tillgå, måste man dock någon gång hafva litat på den fullkomligt jemna gången af ett ur. — Visserligen har man gjort detta, men under fullt medvetande att man dervid begått ett fel, hvilket likväl ej kunde undvikas. Om nu afvikelserna från en jemn gång äro alldeles regellösa, d. ä. om gången ibland är något större, ibland något mindre än medelgången, hvilken finnes ur tvenne på hvarandra följande kulminationer af samma stjerna, utan att samma gång visar något beroende af den motsvarande tiden på dygnet, så kan man antaga, att medeltalet af flere iakttagna rektascentions-differenser emellan samma stjernpar är fritt från felen i urets dragning. Men det är alldeles icke sannolikt, att urets gång i ett gifvet ögonblick är alldeles oberoende af tidpunkten för detsamma inom dygnet; tvertom måste det anses högst antagligt, att urets gång i mer eller mindre grad är påverkad af de inom dygnets förlopp inträffade förändringarne i temperaturen. Det är af sådan orsak oundgängligen nödvändigt, att iakttaga samma rektascensionsskilnad under olika årstider, hvarigenom densamma äfven blifver bestämd på olika tider af dygnet; ty en stjerna, som vid ett visst datum kulminerar samtidigt med solen, kulminerar sex månader härefter vid midnatt. Medeltalet af sålunda bestämda rektascensionsskilnader kan man med skäl antaga vara temligen fritt från ojemnheterna i urets gång, äfven från dem, som regelmässigt återkomma på de olika dagstiderna.

I sednaste tider har det lyckats att i väsentlig mån inskränka felen i urens dragning. Då man nämnligen, för att kunna förnimma sekundslagen, förr var nödsakad att hafva uret i genomgångsinstrumentets omedelbara närhet, hvarigenom detsamma utsattes för hvarje temperaturvexling, är sådant numera icke nödigt. Man kan tvertom uppställa uret i ett rum, der det är möjligt att i det närmaste bibehålla temperaturen oförändrad, om man till detsamma anbringar en inrättning, hvarigenom en elektrisk ström hvarje sekund afbrytes eller tillslutes. Sålunda kunna sekundslagen medelst en elektromagnet förnimmas vid genomgångsinstrumentet, alldeles som om sjelfva uret vore i dess närhet.

Noggrannheten af en iakttagen genomgång beror på den skärpa, hvarmed man kan uppfatta tidsmomentet, då en stjerna synes på tråden. För att öka denna noggrannhet iakttager man stjernan icke allenast på midteltråden utan äfven på sidotrådarna. De för dessa trådar iakttagna tidsmoment kunna dock medelst en ytterst lätt räkning reduceras till midteltråden, d. v. s. den tid beräknas, då stjernan borde hafva synts på midteltråden. Man finner formeln, hvarefter denna beräkning utföres, genom att upplösa den sferiska triangel, som bildas af verldspolen, stjernans läge vid midteltråden och dess läge vid sidotråden. Sidotrådens afstånd ifrån midteltråden, hvilken uttryckt i vinkelmått må betecknas med f, utgör således en sida i nämnde triangel och den motstående vinkeln vid polen är timvinkeln t, hvilken just sökes. De tvenne andra i denna triangel äro stjernans afstånd från polen eller $90^0 - \delta$, om δ betecknar stjernans deklination. Upplösningen af denna triangel leder med hänseende dertill, att såväl f som t äro små qvantiteter, till formeln

$$t = \frac{1}{15}\frac{f}{\cos\delta},$$

dervid f antages vara uttryckt i båge.

Sedan iakttagelserna vid de olika trådarne blifvit reducerade till midteltråden, är man i tillfälle att af öfverensstämmelsen emellan de olika momenterna sluta till iakttagelsens noggrannhet. Vi meddela nu tvenne exempel, dervid reduktionsräkningen redan blifvit utförd, så att de nedanstående talen angifva de tider, då stjernan i följd af de iakttagna passagerna öfver sidotrådarne borde hafva synts öfver midteltråden.

Den 10 December 1871 iakttogs på Stockholms observatorium följande till midteltråden reducerade tidsmoment för stjernorna γ i Cepheus och α i Andromeda:

γ **Cephei**	Afvikelser från medium	α **Andr.**	Afvikelser från medium
$23^t\ 40^m\ 8^s.43$	$-0^s.43$	$0^t\ 7^m\ 48^s.77$	$-0^s.10$
8.72	-0.14	48.85	-0.02
9.18	$+0.32$	48.90	$+0.03$
9.00	$+0.14$	49.00	$+0.13$
8.67	-0.19	48.79	-0.08
8.80	-0.06	49.01	$+0.14$
8.68	-0.18	48.79	-0.08
9.32	$+0.52$		
medeltal 8.86		48.87	

Då obekanta qvantiteter skola bestämmas på grund af omedelbart iakttagna numeriska belopp, händer det ofta att man har ett större antal iakttagna värden härtill användbara, än hvad oundgängligen hade erfordrats för bestämningen af det förelagda antalet obekanta. Om man bland dessa iakttagna värden utväljer ett jemnt så stort antal, som erfordras, och med dessa utför bestämningen af de obekanta, så finner man i allmänhet andra värden för dessa, än om man hade utvalt ett annat antal iakttagna värden och grundat bestämningen af de obekanta på dem. Vanligen häntyder denna företeelse på ingenting annat, än att de iakttagna värdena äro behäftade med fel, beroende på iakttagelsernas ofullkomlighet. Nu uppstår dock den frågan, huruledes de iakttagna värdena fördelaktigast skola användas, så att bestämningen af de obekanta må blifva möjligast fri från observationsfelen. Vi skola försöka att förtydliga detta medelst ett enkelt exempel. Vi antaga i detsamma att man under ett antal dygn jemfört tvenne ur med hvarandra, och detta alltid på samma timme, samt att man ur dessa jemförelser vill härleda 1:o urens differens vid en gifven tid, 2:o deras relativa gång, d. v. s. den qvantitet, hvarmed differensen emellan de båda uren dagligen tillväxer. Hvarje iakttagen differens (D) gifver nu anledning till en likhet af följande utseende, der t betecknar den i dygn uttryckta tiden, x de båda urens differens vid tiden $t = 0$ samt y deras dagliga relativa gång,

$$D = x + yt.$$

För enkelhetens skull utsätta vi nu endast trenne eqvationer, motsvarande trenne dygns jemförelser. Vid den första jemförelsen är tydligen $t = 0$, om tiden räknas från densamma; vid den andra är $t = 1$, emedan ett dygn sedan den första jemförelsen förflutit, samt vid den tredje jemförelsen har man $t = 2$ *).

1872 Juni	4.	59^s30	$= x$
»	5.	58.25	$= x + y$
»	6.	56.97	$= x + 2y$

Ur två och två af dessa vilkorseqvationer kan man finna tre olika system af värden för de obekanta, nämnligen 1:o ur 1 och 2: $x = + 59.^s30$, $y = - 1.^s05$, 2:o ur 1 och 3: $x = + 59.^s30$, $y = - 1.^s165$ samt slutligen 3:o ur 2 och 3: $x = + 59.^s53$, $y = - 1.^s28$; men tillika visar det sig äfven, att man ej med ett enda system af värden för x och y på samma gång kan uppfylla de trenne vilkorseqvationerna, d. v. s. bringa dem under formen $0 = 0$, sedan man i desamma infört de numeriska värdena för de obekanta. Det är derföre omöjligt att finna fullkomligt exakta värden för de obekanta, och detta ligger i sakens natur, då man ej rimligtvis kan begära att bestämma några obekanta exakt på grund af iakttagelser, hvilka ej kunna vara fullkomliga eller felfria. Man sträfvar derföre endast derhän att ur vilkorseqvationerna med stöd af de regler, som läras i sannolikhetsräkningen, härleda de sannolikaste värdena för de obekanta. De regler, som man sålunda funnit, grunda sig på den princip, *att det arithmetiska medeltalet*

---

*) Exemplet är taget från en undersökning öfver gången hos en elektro-magnetisk kronometer, konstruerad af Docenten Theorell.

af ett antal med lika omsorg iakttagna värden för en sökt qvantitet, äfven är det sannolikaste värde, som ur de gifna iakttagelserna kan härledas för densamma. Tillämpas denna princip på vilkorseqvationer med flere obekanta, så leder densamma till följande sats, hvilken äfven uppställes såsom en princip, nämnligen *att det system af värden för de obekanta, hvilka, sedan desamma blifvit införda i vilkorseqvationerna, göra summan af qvadraterna på de öfrigblifvande afvikelserna mindre än något annat system, är det sannolikaste.* I enlighet med denna sats har man vidare utvecklat en method, genom hvilken man ur de gifna vilkorseqvationerna härleder ett slutsystem af jemnt så många likheter af första graden, som man har obekanta att bestämma. Upplöses detta system enligt kända regler, så erhåller man de sannolikaste värdena för de obekanta *). Sjelfva methoden kallar man *minsta qvadratmethoden.*

Behandlade enligt minsta qvadratmethoden leda vilkorseqvationerne i det anförda exemplet till följande slutsystem

$$0 = -174{,}52 + 3x + 3y$$
$$0 = -172{,}19 + 3x + 5y$$

hvarur erhålles: $x = +59{,}^s338$ och $y = -1{,}^s165$ **).

---

*) Upplösningen af tvenne eqvationer af första graden är särdeles enkel. Har man t. ex. följande eqvationer

$$n = ax + by$$
$$n' = a'x + b'y,$$

så multiplicerar man den första med b' och den andra med $-b$, hvarefter summan af dessa produkter gifver

$$nb' - n'b = x(ab' - a'b)$$

eller

$$x = \frac{nb' - n'b}{ab' - a'b}$$

Härefter finner man y ur någon af de ursprungliga eqvationerna.

Då antalet af obekanta är större kan man likväl gå tillväga på näranog samma sätt. Man bortskaffar genom att kombinera två och två af de gifna eqvationerna en obekant, och fortfar dermed så länge till dess endast en återstår, hvilken då omedelbart bestämmes.

**) Utan att framvisa härledningen af desamma, må här dock upptagas de formler, enligt hvilka slutsystemet härledes ur de gifna vilkorseqvationerna. Låt dessa eqvationer vara

$$0 = n + ax + by$$
$$0 = n' + a'x + b'x$$
$$0 = n'' + a''x + b''x$$

o. s. v.

De qvantititer, som qvarblifva sedan de sannolikaste värdena för de obekanta blifvit införda i vilkorseqvationerna, kunna betraktas såsom rena observationsfel och benämnas äfven *qvarblifvande fel*. Af desamma kan man bestämma såväl det s. k. sannolika felet för hvarje enskild iakttagelse, som ock de sannolika felen för de obekantas sannolika värden. Begreppet af det sannolika felet fastställes då i allmänhet på följande sätt. Om man tänker sig alla fel ordnade efter deras storlek och oberoende af deras tecken, så kan man bestämma en numerisk storhet af den beskaffenhet, att lika många fel till storlek äro öfver som under densamma. Denna storhet kallas *det sannolika felet*. Det är härvid tydligt, att möjligheten af ett större fel, än det sannolika, är precist densamma, som möjligheten af ett mindre, hvarföre man kan hålla vad, ett emot ett, att det vid en iakttagelse begångna felet ej öfverstiger det sannolika för iakttagelser af öfverhufvud af samma slag. — Man finner det sannolika felet för en iakttagelse genom att upphöja samtliga qvarblifvande fel till qvadrater, hvarefter summan af dessa qvadrater divideras med iakttagelsernas antal minskadt med antalet af de obekanta, som medelst dem blifvit bestämda. Qvadratroten ur denna qvot, multiplicerad med talet 0,6745, angifver då det sannolika felet.

Enligt den anförda regeln för härledningen af det sannolika felet skola vi undersöka noggrannheten af de ofvan anförda trådpassagerna af stjernorna γ Cephei och α Andromedae. För γ Cephei finna vi ur de anförda afvikelserna från medeltalet, — hvilket här utgör bestämningen för den enda obekanta, — för summan af dessa afvikelsers qvadrater: 0.669. Detta tal bör divideras med 7, enär iakttagelsernas antal är 8 samt

---

Man bildar nu summorna

$$[na] = na + n'a' + n''a'' + \dots$$
$$[nb] = nb + n'b' + n''b'' + \dots$$
$$[aa] = aa + a'a' + a''a'' + \dots$$
$$[bb] = bb + b'b' + b''b'' + \dots$$
$$[ab] = ab + a'b' + a''b'' + \dots,$$

hvarefter man erhåller följande sluteqvationer

$$0 = [na] + [aa]x + [ab]y$$
$$0 = [nb] + [ab]x + [bb]y$$

I öfverensstämmelse härmed bildas slutsystemet då flere obekanta förefinnas.

de obekantas endast 1. Man erhåller således för det sannolika felet af en enda iakttagen trådpassage, talet

$$\pm\, 0.6745 \sqrt{\frac{0.669}{7}} = \pm\, 0.^s209$$

Sammaledes finner man för α Andromedae det sannolika felet: $\pm\, 0.^s067$. Dubbeltecknet $\pm$ är här af tvenne orsaker utsatt. Först och främst sammanhänger detsamma med qvadratroten (jemf. sid. 79), men för det andra grundar sig hela minsta qvadratmethoden på den förutsättning att positiva och negativa fel af samma numeriska storlek äro lika sannolika.

Det sannolika felet är en storhet, som ej exakt kan bestämmas, utan endast tillnärmelsevis, men desto säkrare, ju flera iakttagelser bidraga till dess bestämning. De nyss funna sannolika felen äro ej heller fullt exakta, ty de tillfredsställa ej fullständigt vilkoret, att lika många afvikelser böra förekomma under det sannolika felets belopp, som öfver detsamma. I anseende till iakttagelsernas ringa antal får man dock ej antaga, att felen fullständigt skola följa den i minsta qvadratmethoden förutsatta fördelningen. Man behöfde likväl endast ändra den 5:te tråden vid γ *Cephei* till 8.65 samt den 5:te vid α *Andromedae* till 48.81 för att hafva fullständig öfverensstämmelse i afseende å felfördelningen emellan theori och iakttagelse.

Vi funno för iakttagelserna af γ *Cephei* ett vida större fel än för α *Andromedae;* orsaken härtill är den, att γ *Cephei* i följd af sin större nordliga deklination har en långsammare daglig rörelse, och således behöfver längre tid för att förflytta sig ett märkbart stycke bland trådarna. Iakttagelsens noggrannhet beror dock af den skärpa, hvarmed man kan bemärka den skenbara rörelsen. Att likväl sjelfva riktningen i hvardera fallen blifvit iakttagen med nära nog samma noggrannhet, finner man genom att förvandla de sannolika felen i de iakttagna tidsmomenterna till sannolika fel i uppfattningen af stjernans läge i afseende till trådarne. Enligt samma betraktelser, som ledde till formeln för sidotrådarnes reduktion till midteltråden, finner man att de förstnämnde sannolika felen böra multipliceras med $15 \cos\delta$. Man finner sålunda de sannolika felen: för γ *Cephei* $\pm\, 0'',68$ och för α *Andromedae* $\pm\, 0''.86$. I medeltal har man således $\pm\, 0.''77$ såsom sannolikt fel för uppfattningen af en himlakropps riktning medelst iakttagelse af dess passage öfver en enda tråd. — Det sannolika felet för medeltalet af 7 passager erhåller man genom att dividera det förra med $\sqrt{7}$. Härigenom finner man $\pm\, 0''.29$, hvilket tal utvisar den noggrannhet, hvarmed man kan uppfatta en himlakropps riktning.

De anförda talen äro ingalunda ovanligt små; tvertom skulle man ur dagböckerna, som blifvit förda öfver iakttagelser, kunna uppleta exempel, der öfverensstämmelsen emellan de skilda trådpassagerna vore vida större; emellertid erhåller man medelst desamma en föreställning om den noggrannhet, som i allmänhet ernås vid iakttagelser af passager.

I stället att efter hörseln af sekundslagen uppteckna tidsmomenterna, då stjernan synes öfver trådarna, kan man signalera dem genom att sluta en elektrisk ström. På en s. k. registrerapparat utmärkas dessa signaler ögonblickligen medelst punkter, hvilka på en rörlig pappersremsa blifva märkbara bredvid andra punkter, som utmärka sekundslagen. Genom att uppskatta en registrerad punkts afstånd från en sekundpunkt sluter man då till tiden för stjernans passage. Man ernår sålunda en något större noggrannhet än då man observerar efter gehör.

Man bestämmer eqvatorns lutning mot horisonten eller observationsortens polhöjd genom att iakttaga samma stjernas höjd vid dess öfra och nedre kulmination. Vi beteckna stjernans afstånd från polen med p, dess höjd i öfre kulmination med h samt i nedre kulmination med $h_{,}$; då har man, i det φ betecknar polhöjden,

$$h = \varphi + p$$
$$h_{,} = \varphi - p$$

Dessa likheter utvisa, att man finner en orts polhöjd genom att taga medeltalet af en och samma cirkumpolarstjernas höjder vid dess öfre och dess nedre kulmination. Man har nämnligen

$$\varphi = \frac{h + h_{,}}{2}$$

Vidare ser man ur samma likheter, att cirkumpolarstjernornas deklinationer omedelbart, eller utan att eqvatorns lutning mot horisonten är bekant, kunna bestämmas genom uppmätning af deras höjder vid de båda kulminationerna. Ifrågavarande likheter gifva

$$p = \frac{h - h_{,}}{2},$$

hvarigenom äfven deklinationen är bekant; ty summan af deklination och polafstånd utgör tydligen 90^0, så att $\delta = 90^0 - p$.

Sedan polhöjden en gång blifvit bestämd, finner man en himlakropps deklination genom att uppmäta dess höjd i meridian; man har då

$$\delta = 90^0 + \varphi - h$$

eller

$$\delta = h - 90^0 + \varphi,$$

dervid den förra formeln gäller då himlakroppen kulminerar norr om zenith, och den andra vid sydliga kulminationer.

Det återstår oss nu endast att angifva huruledes himlakropparnes höjder i allmänhet uppmätas; ty på lösningen af denna uppgift beror, såsom vi sett, bestämningen af eqvatorns lutning mot horisonten. Man betjenar sig för dylika uppmätningar af ett synrör, hvilket, i likhet med genomgångsinstrumentet, kring en horisontal axel rör sig i ett vertikalt plan. Parallelt med detta plan är en i grader indelad cirkel sålunda fästad vid axeln, att denna går genom cirkelns medelpunkt. Tänker man sig nu en, medelst ett märke eller visare (index) angifven punkt bredvid cirkelns gradering, hvilken punkt icke deltager i synrörets och cirkelns gemensamma rörelser, så måste de olika gradstrecken efterhand passera förbi densamma under det att synröret riktas mot olika punkter*). Det gradstreck, som befinner sig i grannskapet af det omtalade märket, angifver derföre en viss riktning, och vinkeln, som tvenne riktningar bilda med hvarandra, utmärkes genom det antal grader på cirkeln, hvilka under synrörets vridning från den ena riktningen till den andra gå förbi märket. Vanligen äro gradstrecken på cirkeln numererade från 0^0 till 359^0, om också sjelfva siffrorna ej utsättas vid alla utan endast vid hvart femte streck, samt mellanrummen äfven indelade i underafdelningar af grader. Det antal grader och minuter man finner utvisade af index, kallas *afläsning*.

Om man endast afläste cirkeln medels visare, så skulle man icke kunna uppnå någon nämnvärd noggrannhet. Äfven på de finast indelade cirklar stå dock tvenne närbelägna delstreck ej närmare hvarandra än 2 minuter; betraktar man nu visarstreckets läge mellan tvenne streck på cirkeln, så kan man i bästa fall dock ej angifva detta läge än på $\frac{1}{10}$ minut när.

---

*) En sådan visare består vanligen af en liten metallskifva, på hvilken ett skarpt streck blifvit uppdraget. Skifvan ligger delningen på cirkeln så nära som möjligt, på det att man skarpare må kunna uppfatta läget af strecket på densamma i förhållande till delningsstrecken på cirkeln.

Man har derföre sett sig om efter lämpliga medel för att verkställa afläsningen med större precission. Såsom ett sådant medel har man mycket användt en s. k *Nonius* eller *Vernier*. En sådan kan man åstadkomma genom att bredvid visarstrecket uppdraga flere, med detsamma parallela streck, hvilkas inbördes afstånd är något mindre än afståndet emellan strecken på cirkeln. Om nu ett tillräckligt antal sådana streck blifvit uppdragna, så måste förr eller sednare ett af dem i det aldra närmaste sammanfalla med ett af cirkelns streck, visarstrecket må dervid hafva hvilket läge som helst emellan strecken på cirkeln. Detta läge angifves emellertid af antalet streck, som ligga emellan visarstrecket och det, hvilket antogs sammanfalla med ett på cirkeln. Man kan på detta sätt ganska noga bestämma visarstreckets afstånd från de närliggande strecken på cirkeln, dock på långt när ej med den skärpa, som om detta afstånd direkt uppmätes medelst en s. k. *mikrometerskruf*. För att kunna använda en sådan skruf, fäster man ett mikroskop öfver cirkeln sålunda, att såväl visarstrecket som de närliggande delningsstrecken på cirkeln synas i detsamma. Naturligtvis är detta mikroskop i likhet med visarn fast med hänseende till cirkeln, så att detsamma ej deltager i cirkelns och synrörets gemensamma rörelser i det vertikala planet. I mikroskopets brännpunkt, der bilden af strecken äro synliga, finnes ett hårkors anbragt, men detta hårkors är ej fast, såsom fallet var med hårnätet i genomgångsinstrumentet, utan förmedelst en skruf lätt rörligt utefter bilderna af strecken *). Är denna skruf sorgfälligt arbetad, så kan man antaga att dess vridning föranleder en mot densamma proportionell rörelse af hårkorset bland delningsstrecken, på hvilken grund man genast inser möjligheten af att medelst skrufven uppmäta afstånd emellan delningsstrecken. Skrufknoppen är för detta ändamål försedd med en ring eller trumma, på hvars yttre yta en indelning, hvilken tjenar att angifva skrufvens vridning, befinnes graverad. Vanligen finnas 60 delstreck, från 0 till 59, så att, om delstrecken på cirkeln äro 2' från hvarandra, och skrufven bör vridas 2 hela hvarf för att hårkorset skall förflyttas jemnt från ett delstreck till nästföljande, hvarje afstånd emellan tvenne delstreck på skruftrumman motsvarar jemnt en sekund på cirkeln. Då man nu ytterligare kan uppskatta tiondedelarne af intervallerna på trumman, så kan man medelst ett mikroskop afläsa cirkeln

---

*) Man uppspänner hårkorset öfver en liten ram af metall, hvilken förmedelst skrufven skjutes fram och tillbaka.

på en tiondedels sekund när. — Vid användningen af ett mikroskop är det för öfrigt öfverflödigt att bibehålla visarn; ty man kan tänka sig det läge af hårkorset, som motsvarar trummans inställning vid dess nollpunkt, såsom en sådan. — Vid större instrument använder man vanligen fyra mikroskop, hvilka medelst metallarmar äro förenade med hvarandra. Naturligtvis bör hela detta mikroskopsystem intaga ett oföränderligt läge med hänseende till horisonten, hvarföre man medelst ett vattenpass, som är fästadt vid mikroskopsystemet, ständigt bör kontrollera detsamma.

Tillförlitligheten af de resultat, som erhållas med en cirkel, beror naturligtvis i hög grad på den omsorg, hvarmed delstrecken, såväl på cirkeln som på mikroskopernas skruftrummor, men i synnerhet de förra äro graverade på sitt rätta ställe, så att det ena mellanrummet är precist lika stort med det andra. Men huru stor sorgfällighet än må hafva nedlagts på cirkelns delning, så skall man dock, om denna delning noggrannt pröfvas medelst mikrometerskrufvarna, finna, att ej ens en relativ fullkomlighet blifvit uppnådd. Man kan, med andra ord, medelst mikrometerskrufvarna uppmäta afstånden emellan olika streck med en vida större skärpa, än det varit möjligt att utsätta sjelfva strecken på cirkeln. I händelse man derföre ej vill åtnöja sig med mindre tillförlitliga resultat, så bör cirkelns delning underkastas en noggrann pröfning, innan densamma användes.

Att uppmäta ett föremåls höjd är detsamma som att uppmäta vinkeln emellan riktningen åt föremålet och horisonten. Medelst cirkeln skulle man kunna utföra denna mätning sålunda, att man först inställer föremålet öfver en af de vågräta trådarna i synrörets brännpunkt samt afläser cirkeln; härefter skulle man åter afläsa cirkeln, sedan synröret blifvit riktadt mot någon punkt i horisonten, hvarefter skilnaden emellan de båda afläsningarne vore föremålets höjd. Härvid uppreser sig dock en betänklig svårighet. Det finnes nämnligen ingen på förhand gifven punkt, om hvilken man kunde säga, att densamma låge i horisonten. Man måste derföre genom konstgjorda medel fastställa en riktning i horisonten, i hvilken man tillika kan inrikta synröret. En sådan riktning kan åstadkommas på följande sätt. I samma plan med synrörets optiska axel uppställas tvenne mindre astronomiska tuber på ömse sidor om och i jemnhöjd med hufvudinstrumentet, samt med objektiven vända mot detsamma. Borttages nu hufvudinstrumentet ur sina lager, så blifver synlinien emellan de båda mindre synrören, hvilka äfven benämnas *kolli-*

matorer, fri, och desamma kunna då riktas mot hvarandra, d. v. s. inställas så, att hårkorset i den ena kollimatoren sammanfaller med bilden af den andras hårkors. Riktningen, som sålunda blifvit bestämd, bör vara fullkomligt vågrät, så vida de båda kollimatorerna verkligen stå i jemnhöjd med hvarandra, men riktningens horisontalitet kan yttermera kontrolleras medelst vattenpass, som sättes på sjelfva kollimatorerna. Sedan hufvudinstrumentet åter blifvit insatt i sina lager, kan dess synrör, genom att inställas på kollimatorernas hårkors, inriktas horisontalt.

Med större fördel inställer man dock synröret i lodrät riktning, hvilket lätt nog kan ske medelst en qvicksilfverhorisont, som ställes under instrumentet. Man afläser då på cirkeln den punkt, som motsvarar synrörets riktning mot nadir. Denna afläsning bör med jemnt 90^0 skilja sig från afläsningen, som angifver den horisontala riktningen.

Vid frågan om uppmätningar af himlakropparnas höjder bör ännu en omständighet tagas i betraktande, hvilken utöfvar ett högst märkligt inflytande på resultatet af sådana. — Man vet att den atmosferiska luften, ehuru tunn och genomskinlig densamma än synes vara, likväl i ganska märkbar grad äger förmågan att bryta ljusstrålar. Ganska lätt kan man på experimentell väg öfvertyga sig härom. Det behöfves nämnligen härtill ingenting annat än ett af glasskifvor sammansatt prisma, hvilket medelst en luftpump kan göras lufttomt. Allt efter det luften inom prismat blifver mer och mer förtunnad, skall man finna, att ljusstrålar, som gå genom detsamma, mer och mer afvika från den ursprungliga riktningen. Då nu ljusstrålarna från föremål utom jorden nå våra ögon, hafva de passerat atmosferen och derunder blifvit brutna, hvarföre vi se föremålen på himlahvalfvet i riktningar, hvilka mer eller mindre afvika från de rätta. Det är derföre af största vigt för tillgodogörandet af de astronomiska iakttagelserna, att kunna beräkna den i hvarje särskildt fall försiggångna brytningen, för att ur den iakttagna riktningen kunna sluta till den iakttagna kroppens sanna läge på den skenbara himlasferen. Man inser lätt, att en sådan beräkning är förenad med åtskilliga svårigheter; ty luftens täthet, mot hvilken dess brytningsförmåga är proportionell, är icke densamma inom hela atmosferen, utan aftager småningom från luftlager till luftlager, i den mon ett sådant höjer sig öfver jordytan. Hela brytningen, från det ljusstrålen inträder i atmosferen till dess densamma når ögat, måste derföre anses sammansatt af ett oändligt antal oändligt små brytningar, hvilka hvar och en kan beräknas under det antagande, att luftens täthet inom hvarje oändligt tunnt luftlager är konstant. Afser man äfven från svårigheten vid utförandet af dessa rent mathematiska operationer, så qvarstår dock en annan, af rent fysikalisk natur. För att en beräkning af den antydda naturen öfverhufvud skall kunna utföras, erfordras nämnligen kännedomen af luftens täthet inom de olika lagren, d. ä., med andra ord, den lag, efter hvilken luftens täthet aftager, i mon som höjden öfver jordytan blifver större. Till en del kan detta aftagande visserligen på theoretisk väg bestämmas, i det att man stödjer sig på den *Mariottiska* lagen, att en gasformig kropps täthet är proportionell mot trycket, under hvilket densamma befinner sig, samt derpå, att vigten af en gifven portion luft med bestämd täthet aftager i omvänd proportion till qvadraten på afståndet från jordens medelpunkt. På dessa grunder erhåller man likväl aftagandet af luftens täthet endast i den händelse fullständigt, att temperaturen inom hela atmosferen är densamma, hvilket dock bekantligen icke är fallet. De i sednaste tider talrikt utförda luftresor, vid hvilka man iakttagit temperaturen i olika höjder öfver jordytan, hafva nämnligen bragt i dagen, att temperaturen i det närmaste aftager i samma förhållande, som höjden öfver jordytan växer, åtminstone inom de lager, der luftens täthet är störst och der således den största strålbrytningen äger rum.

Man kan likväl genom ganska enkla betraktelser ernå ett tillnärmelsevis riktigt uttryck för strålbrytningen eller den s. k. *astronomiska refraktionen*, hvilket vi ej skola underlåta att härleda; dock erfordras härtill, likasom vid den fullständigare beräkningen af refraktionen, kännedom af de allmänna lagar, enligt hvilka ljusstrålens riktning förändras vid öfvergången från ett medium till ett annat.

Vi tänka oss en bugtig yta samt ett plan, hvilket går genom trenne närbelägna punkter på densamma. I det nu dessa trenne punkter närma sig hvarandra och slutligen sammanfalla, antager planet ett bestämdt läge, beroende på den bugtiga ytans beskaffenhet. Man kallar detta plan då *tangerande plan* till den bugtiga ytan. En mot detta plan vinkelrät linie, som går genom tangeringspunkten, benämnas åter *normal* till samma yta. Horisonten är ett tangerande plan till jordytan och tyngdens riktning är normal till densamma.

En ljusstråle, som träffar en bugtig yta, brytes nu efter den lag, *att den infallande och den brutna strålen ligga i samma plan med normalen till ytan i den punkt, der brytningen sker.*

Antagas de olika luftlagrens ytor likasom jordytan vara sferer med gemensam medelpunkt, så äro alla normaler riktade mot denna. Häraf följer, att alla brytningar ske i plan, hvilka gå genom jordens medelpunkt, och då ljusstrålen emellan brytningarne framgår rätlinigt, så ligger hela dess väg, från inträdet i atmosferen till iakttagarens öga i ett och samma plan. Detta plan måste tillika vara ett lodrätt plan mot horisonten; ty med detsamma sammanfaller normalen till jordytan vid iakttagarens ståndpunkt, d. ä. tyngdens lodräta riktning. Häraf inses, att endast himlakropparnas höjder blifva ändrade af strålbrytningen, i atmosferen, men icke deras azimuth.

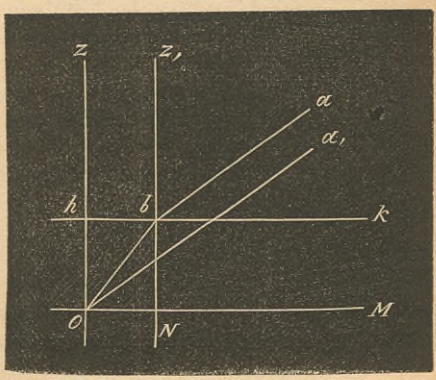
Vinkeln emellan den infallande strålen och normalen kallas *infallsvinkel;* den brutna strålens lutning mot normalen benämnes åter *brytningsvinkel.* Dessa båda vinklar äro beroende af hvarandra i enlighet med en lag, hvilken upptäcktes af holländaren *Snellius,* och lyder: *Sinus för infallsvinkeln står till sinus för brytningsvinkeln i ett oföränderligt förhållande.* Detta konstanta förhållande benämnes den *relativa brytningskoefficienten* för ljusstrålens öfvergång ur ett medium i ett annat. Betecknas infallsvinkeln med i, brytningsvinkeln med r samt brytningskoefficienten med n, så gifver den af Snellius upptäckta lagen upphof till denna likhet

$$\frac{\text{Sin } i}{\text{Sin } r} = n$$

För öfvergången ur tomrummet i ett medium af luft af den täthet, som äger rum vid jordytan, är $n = 1.0002884$.

Den höjd öfver jordytan, i hvilken luftlagrens täthet upphör att vara märklig, är jemförelsevis med jordklotets radie ganska ringa. Häraf följer vidare, att ljusstrålens väg genom atmosferen motsvarar en mycket liten vinkel emellan ändpunkternas normaler, d. ä. normalen i den punkt, der ljusstrålen inträder i atmosferen, och normalen i observationspunkten; detta dock såvida infallsvinkeln ej är alltför betydlig. Är detta likväl händelsen, d. v. s. inträder ljusstrålen med en ringa lutning mot horisonten, så är dess väg genom atmosferen ganska stor i jemförelse med inträdespunktens lodräta afstånd från jordytan; vinkeln emellan de yttersta normalerna belöper sig då till åtskilliga grader. Vi betrakta här endast det första fallet, och antaga vinkeln emellan de yttersta normalerna vara omärkligt liten. I öfverensstämmelse härmed måste äfven de olika luftlagren, som ljusstrålen genomgår, anses vara paralella med hvarandra, samt begränsade af plana ytor. I all stränghet är detta antagande ingalunda riktigt, men ett tillnärmelsevis riktigt resultat bör likväl kunna erhållas på grund af detsamma. För att yttermera förenkla härledningen af ett sådant resultat, skola vi ännu förutsätta, att endast en enda brytning sker, och denna vid den yta, som begränsar atmosferen. Inom samma yta antages luftens täthet konstant. Det synes, som om dessa antaganden borde föranleda, att resultatet blefve i hög grad felaktigt, men detta är icke händelsen. Atmosferens täthetsförhållanden, äfvensom luftlagrens böjning utöfva först vid större värden af infallsvinkeln betydligare inflytande, så att strålbrytningen vid mindre infallsvinklar i det närmaste kan anses oberoende af dessa omständigheter. — Vi tänka oss nu, för att komma till saken, en observator i punkten o (fig. 33) betrakta ett oändligt långt aflägset· föremål, hvilket, i händelse ingen strålbrytning vore förhanden, skulle synas utefter riktningen $Oa_,$. Från samma föremål utgår en ljusstråle, hvilken må råka atmosferens gränsyta i punkten b; denna ljusstråles riktning är parallel med riktningen $Oa_,$, emedan desamma först i oändligt afstånd råkas: efter brytningen i punkten b fortsätter ljusstrålen sin väg i riktningen bo. Linien OM representerar här horisontens afskärning med ett vertikalplan och linien OZ lodlinien eller normalen vid observationspunkten. I enlighet med de gjorda antagandena är linien hk parallel med OM samt $Z_,N$ parallel med ZO. Vinkeln ZOb = ObN är nu tydligen det iakttagna föremålets sedda eller skenbara afstånd från zenith; vinkeln $Z_,ba$ = $ZOa_,$ är åter dess sanna zenithafstånd. Om man nu erinrar sig, att den förra af dessa vinklar är brytningsvinkel, samt den sednare infallsvinkel, så är, i det man betecknar det skenbara zenithafståndet med z samt det verkliga med z + r,

Fig. 33.



$$\frac{\text{Sin}(z + r)}{\text{Sin } z} = 1.0002884$$

eller, emedan $\text{Sin}(z + r) = \text{Sin } z \text{ Cos } r + \text{Cos } z \text{ Sin } r$. ooh r är nog liten, att dess Sinus kan förvexlas med sjelfva bågen och dess Cosinus med enheten,

$$\frac{\text{Cos}\, z}{\text{Sin}\, z}\, r = 0.0002884,$$

d. ä.

$$r = 0.0002884 \tang z = 59.''48 \tang z.$$

För att lägga i dagen noggrannheten af detta resultat skola vi jemföra detsamma med en utveckling för refraktionen, hvilken blifvit härledd oberoende af de förenklande förutsättningar, på hvilka den ofvan meddelade refraktionsformeln grundar sig. Den ifrågavarande utvecklingen, hvilken inom de gränser, densamma är konvergent, kan anses vara fullt sträng, är följande

$$r = 59.''50 \tang z - 0.''069 \tang z^3 + 0.''00024 \tang z^5 - \ldots$$

Så länge z är mindre än 45^0, d. v. s. den iakttagna höjden större än 45^0, erhåller man medelst den afkortade formeln refraktionsvärden, hvilka äro riktiga på mindre än 0''05 när; vid större zenith-afstånd växa felen och uppgå vid $z = 70^0$ till omkring $1^1/_3$ sekund. — I närheten af horisonten erhåller man ej ens medelst den anförda serieutvecklingen riktiga refraktionsvärden, emedan densamma upphör att konvergera, då tang z erhåller mycket stora värden. Man har för dessa fall andra utvecklingar, hvilka dock här måste lemnas åsido; de medelst desamma beräknade refraktionsvärdena för några stora zenithdistanser skola vi emellertid anföra. Öfverensstämmelsen emellan dessa värden och de direkt iakttagna strålbrytningarna har visat, att den ganska invecklade theorin för strålbrytningen i atmosferen likväl uppnått en ganska hög grad af fulländing.

z	refr.	sannolikt fel
87^0	14'51.''7	± 5.''0
88	18 56. 4	± 8. 0
89	25 24. 3	± 20. 0
90	35 39. 6	

De i den med »sannolikt fel» öfverskrifna kolumnen utsatta talen angifva den sannolika afvikelse, man har att vänta hos de beräknade refraktionsvärdena från dem, som vid observationstillfällena i verkligheten äga rum.

Emedan luftens brytningsförmåga är beroende af dess täthet, och denna täthet åter ändras med lufttrycket och temperaturen, så böra äfven till de beräknade refraktionerna de belopp anbringas, hvilka bero på de för tillfället iakttagna afvikelserna från det normala lufttrycket och den normala temperaturen. Luftens täthet ändras proportionelt mot barometerståndet, hvarföre de s. k. medelrefraktionerna först och främst böra multipliceras med faktorn $\frac{b}{B}$, der b betecknar det iakttagna barometerståndet och B det normala. Vidare böra medelrefraktionerna divideras med 1 + 0,003665 t, der t betecknar lufttemperaturen i Celsii grader, emedan luften för hvarje sådan grad utvidgas med 0,003665 af sin volym, och dess täthet följaktligen i samma proportion minskas*). För att således kunna beräkna de sanna, vid obervastionsögonblicken gällande refraktionerna, är det nödvändigt att efterse barometerståndet och temperaturen, då man anställer iakttagelser öfver himlakropparnas höjder.

Då en himlakropp synes vid horisonten, är dess verkliga afstånd från zenith, i följd af strålbrytningen, mer än en half grad större än 90°. Refraktionen påskyndar sålunda himlakropparnas skenbara uppgång och försenar deras nedgång.

Innan vi lemna framställningen om, huru man bestämmer himlakropparnas höjder, skola vi meddela en liten följd af verkligen uppmätta zenith-afstånd, hvilka redan blifvit förbättrade för refraktionens inflytande. Vi hämta detta exempel från iakttagelserna med den stora vertikalcirkeln på observatorium i Pulkowa, samt utvälja zenith-afstånd för polstjernan i dess öfre och nedre kulmination. Precessionens och nutationens inflytande har härvid äfven blifvit frånraget, så att de anförda talen gälla för början af 1843.

	öfre kulm.	nedre kulm.
1843 Mars 16	28°42′1.″47	31°45′21.″36.
» 17	1. 34	21. 45.
» 18	0. 99	21. 36.
» 19	1. 62	21. 25.
	28 42 1. 36	31 45 21. 36.
	h = 61 17 58.64	h, = 58 14 38. 64.

Härmed finner man polhöjden för Observatorium i Pulkowa:

$$\varphi = 59^{0}46'18''.64,$$

samt polstjernans deklination för 1843, 0:

$$\delta = 90^{0} - 1^{0}31'40''.00 = 88^{0}28'20''00.$$

*) Brytningsindex 0,0002884 gäller för barometerståndet 29,6 eng. tum samt 0° C. lufttemperatur.

Huruledes vårdagjemningspunktens läge bestämmes, hafva vi i det föregående redan varit i tillfälle att se; man iakttager rektascensionsskilnaden emellan en stjerna och solen, då denna befinner sig i eqvatorn, den funna skilnaden är då omedelbart stjernans absoluta rektascension, i händelse iakttagelserna blifvit anställda på våren, men jemnt 180^0 större än denna rektascension, om man observerat under hösten. Då nu likväl iakttagelserna anställas i meridian, och man ej kan räkna derpå, att solen just vid kulmination tillika passerar eqvatorn, så finner man ej omedelbart den sökta absoluta rektascensionen, utan denna erhålles först genom en liten räkning, dervid ekliptikans lutning mot eqvatorn måste förutsättas vara bekant. I mon, som solen är nära någon af dagjemningspunkterna vid observationstillfället, inverkar dock en osäkerhet i denna lutning mindre på resultatet, och man kan, genom att observera solen vid ungefär lika stor nordlig och sydlig deklination, göra resultatet nästan helt och hållet fritt från denna osäkerhet. Vi antaga således, att ekliptikans lutning mot eqvatorn är känd, och beteckna denna vinkel med Θ; man kan då till hvarje iakttagen soldeklination (D) genom räkning finna den dertill hörande absoluta rektascensionen (A). Denna beräkning sker enligt formeln

$$\text{Sin A} = \frac{\text{tang D}}{\text{tang } \Theta},$$

hvilken erhålles ur den rätvinkliga sferiska triangel, hvars sidor äro solens rektascension, deklination och längd. Betecknas nu en stjernas rektascension med α, samt tiden, som förflyter från solens kulmination till stjernans, med T, så är

$$\alpha = \text{A} + \text{T}$$

Vi gå nu att belysa användningen af dessa formler medelst ett exempel, det vi hämta ur dagböckerna, som blifvit förda vid observatoriet i Pulkowa. Den 20 och 21 Mars 1842 iakttogos tidsskilnaderna emellan solens och stjernan α *Arietis* kulminationstider; $\text{T} = 2^t0^m25.^s75$ och $\text{T} = 1^t56^m47.^s66$. Samtidigt uppmättes solens deklination och befanns denna vid dessa kulminationer vara $-\,0^0 14' 2.''52$, resp. $+\,0^0 9' 36.''73$. Ekliptikans lutning antaga vi på grund af äldre iakttagelser vara: $\Theta = 23^0 27.'7$; och, ehuru detta värde icke är fullt noggrannt, så kan detsamma likväl användas vid beräkningen af A, så länge D ej har väsentligt större värden än ofvan. Man finner med stöd af den utsatta formeln $\text{A} = -\,32' 21.''4 = -\,2^m9.^s43$ och $\text{A} = +\,22' 8.''9 = +\,1^m28^s60$, hvarmed slutligen följande tvenne värden för *α Arietis* absoluta rektascension erhållas: $\alpha = 1^t58^m16.^s32$ och $\alpha = 1^t58^m16.^s26$.

Ekliptikans lutning mot eqvatorn skulle man finna genom att uppmäta solens deklination, då denna har sitt största nordliga eller sydliga värde; men då man ej kan påräkna, att dessa värden skola äga rum samtidigt med kulminationen, så beräknar man ifrågavarande lutning ur formeln

$$\text{tang}\, \Theta = \frac{\text{tang D}}{\text{Sin A}}$$

Beräkningen af Θ enligt denna formel förutsätter att A är bekant, men om iakttagelserna anställas vid tiderna för solstånden, då A är nära 90^0 eller 270^0, så blifver en osäkerhet i A ej af någon betydenhet vid bestämningen af Θ. Såsom ett exempel må här anföras de värden för D, hvilka blifvit iakttagna i Pulkowa 1842 den 20, 21 och 22 Juni, jemte de samtidigt gällande värdena för A samt de med dessa data beräknade värdena för Θ, ur hvilkas öfverensstämmelse man kan sluta till den noggrannhet, hvarmed ekliptikans lutning mot eqvatorn kan bestämmas.

	D	A	Θ
1842 Juni 20	$+\ 23^0 27' 5.''08$	$5^t 53^m 52.^s3$	$23^0 27' 32.''08$
» 21	$+\ 23\ 27\ 29.31$	$5\ 58\ \ 1.9$	$23\ 27\ 32.08$
» 22	$+\ 23\ 27\ 29.44$	$6\ \ 2\ 11.5$	$23\ 27\ 32.88$

Det funna värdet för Θ angifver ekliptikans verkliga lutning, d. v. s. den genom nutationen förändrade lutningen. Subtraherar man från den verkliga eller sanna lutningen qvantiteten $9.''22 \text{Cos} \Omega$, så erhåller man den s. k. medellutningen. (Jemf. pag. 170).

Bestämmer man ekliptikans medellutning vid tvenne olika tidsepoker, så finner man, att denna lutning är underkastad en fortgående förminskning af $0''474$ årligen. Detta aftagande beror derpå, att eqvatorn förblifver parallel med sig sjelf under det att ekliptikans läge är underkastad en långsam förändring (jemf. pag. 202). Efter mycket långa tidrymder kan dock äfven en ändring i eqvatorns läge förmärkas, men beloppet af denna ändring uppnår efter ett sekels förlopp ej mer än en tiondedels bågsekund. Orsaken härtill är åter densamma, som föranleder precessionen.

Genom en stjernas absoluta rektascension är dagjemningsliniens riktning bestämd, dock endast med hänseende till riktningen åt ifrågavarande stjerna eller till en riktning, som deltager i den dagliga rörelsen. Dagjemningsliniens riktning med hänseende till meridianen bestämmes åter genom vinkeln, som ett genom dagjemningslinien gående, mot eqvatorn vinkelrätt plan bildar med ortens meridian. Denna vinkel är ortens stjerntid, hvarföre man bestämmer dagjemningliniens riktning med hänseende till meridianen, då man bestämmer stjerntiden. Härtill är dock ingenting annat erforderligt, än att iakttaga urtiden, då en stjerna med bekant rektascension passerar meridian.

Den sanna soltiden är detsamma som solens timvinkel; man kunde bestämma denna tid genom att iakttaga solens gång genom meridianen, hvarefter man funne medelsoltiden genom att anbringa tidseqvationen. Emedan man dock ej kan iakttaga solrändernas beröring med genomgångsinstrumentets trådar med samma noggrannhet, som en stjerna observeras, så föredrager man att medelst räkning härleda soltiden. Stjerntiden, som förflutit sedan medelsolens kulmination till ett visst ögonblick, för hvilket man söker medelsoltiden, är tydligen lika med stjerntiden i samma ögonblick, minskad med stjerntiden i medelsolens näst-föregående kulminationsmoment. Denna sistnämnda stjerntid är likväl ingenting annat än medelsolens rektascension, hvilken är bekant på grund af theorin för solens skenbara rörelse och äldre iakttagelser, och derföre på förhand kan angifvas för hvarje kulminationsmoment. Multipliceras den omnämnda skilnaden med $1 - \frac{1}{366{,}242201}$, så erhåller man utan vidare den sökta medelsoltiden.

Då man bestämmer läget af himlakroppar, bör man tillika angifva tiden, för hvilken denna bestämning gäller. Noggrannheten, som vid dylika uppgifter erfordras, är likväl mycket olika. Under det att de s. k. fixstjernorna ytterst långsamt ändra sina lägen, sedda från jorden, så att det ofta är nog att endast uppgifva årtalet för observationen, äro deremot de skenbara ortsförändringarna hos kroppar, som höra till solsystemet, nog hastiga, att man vanligen angifver tiderna, då sådana blifvit iakttagna, på sekunden när.

I alla de händelser, der tiden bör angifvas närmare än på dagen när, är det nödvändigt att tillika uppgifva den meridian, för hvilken tiden antages gälla. — De olika meridianerna särskiljer man genom skilnaden i ortstid, i hvilken ett och samma absoluta ögonblick på de olika orterna uppfattas. En månförmörkelse, som inträffar t. ex. kl. 11 efter en viss orts meridian, inträffar för en ort, som ligger 15^0 vester om den förra, kl. 10. De båda meridianerna bilda nämligen med hvarandra en vinkel af 15^0 eller en timme, hvarföre vårdagjemningspunktens timvinkel är jemnt så mycket mindre vid den sednare orten än vid den förra. Denna vinkel emellan tvenne orters meridianer benämner man deras *meridianskilnad* och uttrycker densamma i astronomin vanligen i tid i st. för båge. Det är ej någon lätt uppgift att bestämma orters meridianskilnad; men, emedan lösningen af densamma är af största vigt, icke allenast för astronomin, utan äfven för geografin och sjöfartskonsten, så har man användt betydlig både möda och kostnad för att finna tjenliga methoder härtill. Af dessa skola vi omnämna de vigtigaste.

Först och främst bör ortstiden på hvardera orten, hvilkas meridianskilnad man vill bestämma, ytterst noggrannt härledas, hvilket emellertid sker på sätt, som i det föregående blifvit beskrifvet. Sedan kommer det endast an derpå att jemföra den ena tiden med den andra, men det är just härvid som de egentliga svårigheterna yppa sig.

En sådan jemförelse kan nu utföras antingen derigenom att man iakttager den ena ortstiden vid den andra, eller och genom att samtidigt vid båda orterna iakttaga någon gemensamt förnimbar signal. För att kunna iakttaga tiden, som gäller för en annan ort, än den iakttagaren sjelf befinner sig på, erfordras en apparat, hvarmed tiden kan transporteras, d. v. s. ett flyttbart ur. Skulle ett sådant gå fullkomligt väl under transporten, d. v. s. precist på samma sätt som då detsamma befinner sig i hvila, så hade man häri ett särdeles tjenligt medel för bestämningen af meridianskilnader. De bäst utförda kronometrar lemna emellertid mer eller mindre öfrigt att önska, hvarföre man är nödsakad att öfverföra ett mycket stort antal af dem, då man kan hoppas, att medeltalet af de, med de olika kronometrarna erhållna resultaten kommer sanningen temligen nära. Methoden är, ehuru densamma kan leda till ganska noggranna resultat, likväl kostsam och tidsödande, hvarföre man öfvergifvit densamma, der man medelst elektriska telegrafer är i tillfälle att med större lätthet öfverföra tiden från en ort till en annan. Den elektriska strömmens hastighet är nämligen mycket stor, så att man genom att sluta en sådan nästan ögonblickligen kan sätta en elektromagnet i verksamhet. På sådant sätt kunna signaler, utvisande den ena ortens tid, skickas till den andra, och tvertom. Signalerar man turvis från hvardera station, så blifver medeltalet oberoende af strömmens hastighet, om denna får antagas vara densamma vid båda signaleringarna.

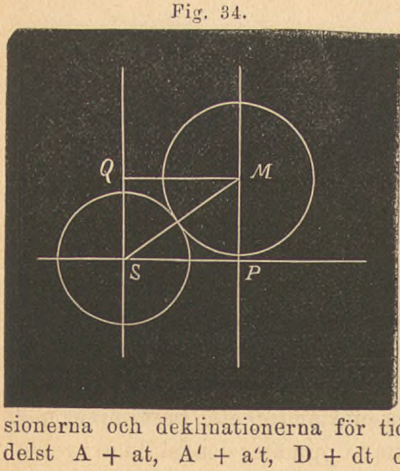
En månförmörkelse, äfvensom förmörkelser af Jupiters månar, äro företeelser, hvilka i samma ögonblick blifva synliga från alla punkter på jordytan, derifrån de öfverhufvud kunna ses. Dessa fenomen skulle derföre särdeles lämpligt kunna användas såsom signaler vid längdbestämningar, om ej den ringa skärpa, med hvilken desamma kunna uppfattas, gjorde dem för sådant ändamål nästan alldeles odugliga.

Med större fördel iakttager man solförmörkelser, och i än högre grad fördelaktigt kunna stjernors bortskymning af månen användas såsom signaler. Härvid erhåller man dock icke den sökta meridianskilnaden direkt, emedan solens eller stjernans bortskymning ej ses i samma ögonblick från olika punkter, hvilket åter beror på storleken af jordens dimensioner i förhållande till månens afstånd. De riktningar, som från olika punkter af jordytan träffa månranden, äro derföre icke parallela och kunna således icke samtidigt råka ett aflägsnare föremål.

Förutberäkningen af en solförmörkelse eller stjernbortskymning är, jemförelsevis med andra astronomiska beräkningar, lätt nog; emellertid är densamma dock alltför invecklad att här fullständigt kunna meddelas. Vi inskränka oss derföre till att antyda, huruledes en sådan räkning utföres oberoende af månens parallax, d. v. s. för den händelse, att fenomenet skulle betraktas från jordens medelpunkt.

Vi förutsätta härvid, hvilket äfven ligger i sakens natur, att solen och månen äro skenbart hvarandra helt nära på himmeln, samt att den lilla del af himlasferen, på hvilken dessa himlakroppar äro projicierade, kan betraktas såsom en plan yta i st. för en sferisk. Solens rektascension och deklination vid en viss tid T beteckna vi med A och D samt månens samtidiga rekt. och dekl. med A′ och D′. Ändringarna af dessa qvantiteter, hvilka under en kort tid kunna anses försiggå likformigt, beteckna vi åter med a, d, a′, d′, så att de respektiva rektascensionerna och deklinationerna för tiden T + t äro uttryckta medelst A + at, A′ + a′t, D + dt och D′ + d′t. Om nu punk-

Fig. 34.



ten S (fig. 34) antyder läget af solens medelpunkt vid tiden $T + t$, M månens, samt SQ och BM äro stycken af dessa himlakroppars deklinationscirklar, så är

$$SQ = D' - D + t(d' - d)$$

Vinkeln emellan dessa deklinationscirklar är tydligen $A' - A + t(a' - a)$, och denna qvantitet skulle äfven angifva sidan SP, såvida solen befunne sig eqvatorn. Är detta likväl icke händelsen, så har man

$$SP = [A' - A + t(a' - a)] \operatorname{Cos} D$$

För att beröring af solens och månens ränder skall äga rum, bör $SM = R + R'$, der R och R' beteckna solens och månens skenbara radier; den rätvinkliga triangeln SPM gifver oss då

$$(R + R')^2 = [A' - A + t(a' - a)]^2 \operatorname{Cos} D^2 + [D' - D + t(d' - d)]^2$$

De ur denna eqvation af andra graden härflytande värden för t angifva den tid, som förflyter från tiden T till den första och sista beröringen af de båda ränderna, d. v. s. till förmörkelsens början och dess slut. Erhåller man imaginära rötter till denna eqvation, så antyder sådant att någon förmörkelse ej äger rum. Tiden T kan väljas efter behag, endast man dervid tillser, att de för densamma gällande värden af $A' - A$ och $D' - D$ äro små; vanligen väljer man för denna tid det ögonblick, då $A = A'$, d. v. s. oppositionsmomentet. För punkter på jordytan gestalta sig förmörkelseföreteelserna dock ej obetydligt annorlunda, än som följer af ofvanstående mathematiska utredning. Orsaken härtill är hufvudsakligen att söka i månparallaxens storlek.

I en otalig mängd fall är det hvarken fördelaktigt eller ens utförbart att medelst meridianiakttagelser bestämma läget af himlakroppar. Detta inträffar t. ex. då föremålet öfverhufvud är mycket ljussvagt, eller när detsamma passerar meridian, medan solen är uppe, och dervid ej är nog ljusstarkt att kunna varseblifvas. De flesta kometer äro sålunda uteslutna från iakttagelser i meridian, emedan desamma oftast äro solen skenbart temligen nära, och endast kunna varseblifvas en kort tid efter dess nedgång eller före dess uppgång. Under sådana omständigheter bestämmer man ej föremålets absoluta läge, utan uppmäter dess skilnad i rektascension och deklination från en stjerna, hvars läge genom föregående meridianiakttagelser är bekant. Dylika relativa bestämningar utför man äfven då, när kännedomen af det absoluta läget ej är hufvudsaken, såsom fallet t. ex. vid de s. k. dubbelstjernorna, der förnämligast den ena stjernans rörelse, relativt till den andra, är af intresse. Principen för och konstruktionen af det instrument, hvarmed det relativa läget af tvenne, hvarandra mycket nära belägna föremål på himmeln bestämmes, skola vi med några ord försöka att förklara.

Hufvudsaken härvid är ett hårnät, der en af trådarna medelst en mikrometerskruf är rörlig, och hvilket kan vridas i ett mot synrörets optiska axel vinkelrätt plan, så att trådarna ständigt bibehålla sitt läge i brännpunkten oförändradt. Vanligen finnes endast en fast tråd parallel med den rörliga, men vinkelrätt emot dessa båda äro flera fasta trådar uppspända. Inställes hårnätet på så sätt, att den rörliga tråden är parallel med stjernornas dagliga rörelser, d. ä. med eqvatorn, så sammanfalla de mot denna tråd vinkelräta fasta trådarna med deklinationscirklar. Sedan man inriktat synröret mot de föremål, hvilkas relativa läge man vill bestämma, ser man först det ena och sedan det andra af dessa passera de mot den dagliga rörelsen vinkelräta trådarna. Skilnaden emellan de moment, i hvilka de båda föremålen synas öfver trådarna, är omedelbart den sökta rektascensionsskilnaden. — Då man vill uppmäta deklinationsskilnaden, efterser man först, hvilken afläsning på skruftrumman motsvarar den rörliga trådens koincidens med den fasta. Härpå riktar man tuben sålunda, att det ena föremålet synes precist öfver den fasta tråden, samt inställer den rörliga medelst skrufven under det andra, samt afläser trumman. Skilnaden i dessa båda afläsningar är tillika den sökta deklinationsdifferensen, uttryckt i delar på skruftrumman. Dessa böra dock förvandlas i bågsekunder, hvarföre man bör känna värdet af en del på trumman i sekunder. För att bestämma detta värde, vrider man hårnätet 90^0 och uppmäter medelst skrufven en i sekunder bekant rektascensionsskilnad; den sökta qvantiteten finner man sedan genom att dividera rektascensionsskilnaden, uttryckt i bågsekunder och multiplicerad med Cos δ, med det iakttagna antalet delar på trumman, hvilka motsvara densamma.

I händelse de båda föremålen äro så nära hvarandra, att uppfattandet af bådas passager, — hvilka då följa mycket tätt på hvarandra, — blifver obeqvämt, så ställer man, genom att vrida hela hårnätet, en af de, emot den rörliga vinkelräta trådarna i den riktning, som de båda föremålens läge bestämma. Vinkeln emellan denna riktning och deklinationscirkeln kallas *positionsvinkel* och uppmätes på en, okularöppningen omgifvande cirkel, på hvilken äfven hårnätets vridning i allmänhet angifves. De båda föremålens skenbara afstånd uppmätes sedan medelst den rörliga tråden på samma sätt som deklinationsskilnaderna.

Man vinner i beqvämlighet vid mikrometriska iakttagelsers anställande, om sjelfva synröret har en sådan uppställning, att detsamma med lätthet följer himlakropparna i deras dagliga rörelser. För sådant ändamål bör röret vara rörligt kring en axel, som är parallel med verldsaxeln, men röret får dervid icke vara fästadt vid denna axel på samma sätt, som genomgångstuben vid sin. Då skulle man nämnligen endast kunna följa himlakroppar i eqvatorn. Synröret måste tvertom kunna intaga olika riktningar i ett plan, som är parallelt med axeln, på det att man må kunna inställa föremål med hvilken deklination som helst. Synröret har således en dubbel rörelse, nämnligen en, parallel med eqvatorn, samt en annan, vinkelrät mot detta plan. För att åstadkomma denna dubbla rörelse, anbringar man vid den omtalade axeln, som kallas *timaxel*, en annan, mot den förra vinkelrät, hvilken således ligger i ett med eqvatorn parallelt plan. Denna axel kallas åter *deklinationsaxel*. Vid ändan af deklinationsaxeln är synröret fästadt på så sätt, att detsamma endast kan riktas mot punkter på en och samma deklinationscirkel, såvida deklinationsaxeln bibehåller sitt läge oförändradt. Men genom att vrida timaxeln, vrides äfven deklinationsaxeln jemte den vid densamma fästade tuben, hvarigenom synlinien på det skenbara himlahvalfvet beskrifver en med eqvatorn parallel cirkel och således följer stjernorna i deras dagliga rörelser. Ett instrument, hvars rörelser äro reglerade på det anförda sättet, kallas i allmänhet *instrument med parallaktisk uppställning*. Vanligen kunna dess rörelser afläsas på tvenne, mot axlarna vinkelräta cirklar, den s. k. *timcirkeln* och *deklinationscirkeln*, hvilka förnämligast äro afsedda att lättare kunna inställa det föremål man vill iakttaga. Äro dessa cirklar likväl fint indelade, så kan man medelst desamma bestämma rektascensions- och deklinationsskilnader oberoende af mikrometerapparater. Sådana instrument benämnas vanligen *eqvatoreal*.

§ 14. Om himlakropparnas sanna, skenbara och medel-lägen.

Då man vill undersöka himlakropparnas rörelser på grund af förändringarna af deras skenbara lägen på himmeln, böra dessa lägen vara hänförda till samma grundplan och till samma grundriktning. Om läget af en himlakropp i sjelfva verket vore alldeles oföränderligt, så skulle man dock kunna finna en skenbar förändring af detsamma i händelse man jemförde iakttagelser med hvarandra, hvilka hvar och en vore hänförd till den för hvarje observationstillfälle gällande riktningen af dagjemningslinien, och ej till en gemensam grundriktning. Precessionens och nutationens inflytande på dagjemningsliniens riktning skulle nämnligen i sådan händelse blifva bemärkbara såsom förändringar af stjernornas lägen, hvilka man, om icke dessa omständigheter vore bekanta, skulle kunna tillskrifva verkliga rörelser. Då man derföre går att jemföra lägen för en och samma himlakropp, hvilka vid olika tidpunkter blifvit iakttagna, så subtraherar man först bort de qvantiteter, hvarmed dessa lägen, d. ä. himlakroppens längder, eller rektascensioner och deklinationer i följd af nutationen blifvit förändrade. Man säger sig sålunda hänföra himlakroppens lägen till medeleqvinoktium, *medeldagjemningspunkten*, hvarmed menas den dagjemningspunkt, som motsvaras af verldsaxelns riktning mot nutationselipsens medelpunkt (jemf. pag. 170); de till en sådan dagjemningspunkt hänförda lägena kallas i öfverensstämmelse härmed *medellägen* eller *medelorter*. I motsats härtill kallas den dagjemningspunkt, som motsvarar verldsaxelns verkliga riktning mot en punkt på nutationsellipsen, den *sanna* dagjemningspunkten, samt de till sådana dagjemningspunkter hänförda lägena *sanna* lägen eller *orter*. Medellägena äro naturligtvis äfven beroende af tiden och föränderliga med densamma, emedan medeldagjemningspunkten är underkastad precessionens inflytande. Man måste derföre städse angifva tiden, för hvilken medellägena skola anses var gällande. För att undersöka en himlakropps verkliga rörelse, hänför man, medelst anbringandet af precession, dess för olika tidpunkter gällande medellägen; skilnaderna i sådana, till en och samma dagjemningspunkt hänförda, men för olika tider gällande lägen angifva kroppens verkliga rörelser.

Man iakttager emellertid ej direkt himlakropparnas sanna lägen, äfven om refraktionens inflytande medelst räkning blifvit frånskildt, och likaså inflytandet af en möjligen märkbar parallax. På den i rörelse stadda jorden uppfattas nämnligen ljusstrålarna från en himlakropp icke i alldeles samma riktning, som motsvarar dess sanna läge, utan afvika från denna sednare riktning med en vinkel, hvars storlek beror på förhållandet af jordens hastighet i vinkelrät riktning mot ljusstrålen och ljusets fortplantningshastighet. Denna vinkel kallas *aberration.* Ljusets hastighet i sekunden har man funnit vara 27881 sv. mil, och under samma tid tillryggalägger jorden 2,746 sv. mil i sin bana. Den största möjliga aberration är således i sekunder

$$\frac{2{,}746}{27881} \times 206265'' = 20.''45,$$

hvilket tal benämnes *aberrationskonstant.* Jordens rörelse är i det närmaste vinkelrät emot de ljusstrålar, som utsändas från solen, hvarföre äfven den med aberration behäftade sollängden är 20.''45 mindre än den sanna sollängden. Ett föremål åter, mot eller från hvilket jordens rörelse är riktad, visar sig deremot utan aberration, d. v. s. i sitt sanna läge.

Man vinner en tydlig föreställning om aberrationens uppkomst genom följande betraktelse. Vi begynna densamma med att tänka oss ett synrör, orörligt med hänseende till ljusstrålen och riktadt emot en stjerna, så att denna synes precist öfver hårkorset. Tänkes nu synröret plötsligen försatt i en mot synlinien vinkelrät rörelse, så kan ljusstrålen ej mera träffa hårkorsets midt, utan råkar detsamma ett så långt stycke åt sidan, som röret hunnit förflytta sig under det ljusstrålen fortplantat sig från objektivet till hårkorset. I en 8 fots tub utgör detta stycke $^1/_{125}$ decimallinie, förutsatt att stjernan synes i en mot jordens rörelse vinkelrät riktning, och detta stycke motsvarar i ett sådant rör just 20.″45 sekunder.

Ljusets hastighet uppmättes för första gången af den danske astronomen Olaus Römer. Hans afsigt var urspungligen den, att undersöka Jupiters månars rörelser, och han jemförde fördenskull de tider, då dessa månar inträdde i skuggan af Jupiter, med dem, då dessa förmörkelser på grund af månarnas kända omloppstider hade bordt inträffa. Dervid ernådde han det påfallande resultat, att förmörkelserna i sjelfva verket inträffade tidigare än beräkningen angaf, så ofta Jupiter var i opposition och dess afstånd från jorden således minst; i mon som afståndet från jorden ökades, inträffade äfven förmörkelserna sednare, och slutligen, då Jupiters och jordens ömsesidiga afstånd hade uppnått sitt största värde, iakttogs förmörkelsen jemnt så mycket sednare, som man i den förra händelsen hade observerat honom tidigare. Römer förklarade denna företeelse derigenom, att han antog ljuset behöfva en kortare tid att framkomma till jorden, då afståndet från Jupiter är mindre, än då detta afstånd är större. Den funna skilnaden, omkring 17 minuter, behöfde då ljuset för att fortplantas det stycke, som utgör skilnaden emellan jordens största och minsta afstånd från planeten, hvilken skilnad tydligen i det närmaste är lika med jordens dubbla afstånd från solen. I enlighet med denna förklaring behöfver ljuset omkring $8^1/_2$ minut för att hinna från solen till oss.

Aberrationsfenomenet upptäcktes genom direkta stjerniakttagelser af *Bradley*, då han försökte att bestämma afståndet till stjernan γ Draconis. Bradley iakttog under loppet af en längre tid så ofta som möjligt denna stjernas deklination, och fann dervid, då dessa deklinationer medelst anbringandet af precession reducerades till samma dagjemningspunkt, betydliga afvikelser emellan de olika resultaten. Han undersökte då afvikelsernas natur närmare och fann sålunda förklaringen till desamma i aberrationen. Dock blef öfverensstämmelsen ännu icke fullständig, om resultaten från flere år jemfördes med hvarandra; men äfven härtill upptäckte han orsaken. Det visade sig nämnligen i de qvarblifvande afvikelserna en ojemnhet med en 18 års period, hvilken hade alldeles samma natur som den, redan af Newton påtänkta nutationen. Härigenom blef äfven denna företeelses tillvaro faktiskt ådagalagd.

De med aberration behäftade stjernlägena benämnas *skenbara* eller *apparenta* lägen; för att ur desamma härleda de sanna lägena måste aberrationens inflytande bortsubtraheras. Detta inflytande på en stjernas längd är ganska lätt att angifva.

Genom att sönderdela jordens hastighet i tvenne komponenter, af hvilka den ena är vinkelrät emot riktningen till stjernan, finner man, att den med ekliptikan parallela, af aberrationen förorsakade förflyttningen utgöres af en båge, som är proportionell emot cosinus för vinkeln emellan riktningarne till solen och stjernan. Lägges nu genom stjernans skenbara och sanna lägen samt genom ekliptikans pol storcirklar (s. k. breddcirklar), så finner man ur den härigenom uppkomna sferiska triangeln aberrationens inflytande på stjernans längd genom att dividera förstnämnda båge med cosinus för stjernans bredd. Detta inflytande uttryckes således medelst formeln

$$\lambda' - \lambda = -20.''46 \frac{\text{Cos}(\lambda - \odot)}{\text{Cos}\,\beta},$$

der λ' och λ beteckna stjernans skenbara och sanna längder, $\odot$ solens längd, samt β stjernans bredd.

Genom att sammanslå uttrycken för precession, nutation och aberration finner man att en stjernas skenbara längd (λ') vid tiden t skiljer sig från dess medellängd (λ_0) vid tiden t_0 genom qvantiteten

$$\lambda' - \lambda_0 = 50.''376(t - t_0) - 17.''24\,\text{Sin}\,\Omega - 20.''46 \frac{\text{Cos}(\lambda - \odot)}{\text{Cos}\,\beta}$$

Hvarje genom iakttagelser funnet värde af λ' gifver nu tydligen upphof till en vilkorseqvation, i hvilken man kan anse λ_0 samt de tre numeriska konstanterna såsom obekanta. Föreligger ett större antal sådana vilkorseqvationer, så kan man på dem tillämpa minsta qvadratmethodens regler och erhåller på så vis de sannolikaste värdena för dessa konstanter. Sålunda har man på observatorierna i Dorpat och Pulkowa härledt de värden för dessa, i astronomin så ytterst vigtiga konstanter, hvilka för närvarande allmännast användas.

Resultaten af stjerniakttagelser angifvas vanligen under formen af medelrektascensioner och medeldeklinationer för början af något år; sammanställningar af dylika resultat benämnas *stjernkataloger*. Resultaten af planet- och solobservationer reduceras deremot ej till medelläget utan öfverlemnas denna operation åt beräknaren, som på grund af desamma vill förbättra banelementens numeriska värden, sådana dessa blifvit bestämda på grund af äldre iakttagelser.

4 Kapitlet.

Nyare astronomiska forskningar.

§ 15. Bestämning af himlakroppars afstånd.

Endast i ytterst få fall har det hitintills varit möjligt att medelst direkta mätningar bestämma himlakropparnas parallaxer eller afstånd; grundlinien, från hvilkens ändpunkter dylika mätningar kunna ske, är nästan alltid så försvinnande liten i jemförelse med de afstånd, som skola uppmätas, att äfven de mest noggranna iakttagelser ej förmå att framvisa dess parallax. Det har sålunda hitintills endast lyckats att bestämma de vinklar, hvarunder jordens halfdiameter synes från månen, planeterna Mars och Venus, samt, i sednaste tid, från en af de s. k. småplaneterna. Huruledes månparallaxen blifvit bestämd genom uppmätningar af månens meridianhöjder, hafva vi redan i det föregående framvisat; på ett hufvudsakligen liknande sätt har det äfven lyckats att bestämma parallaxen för Mars, då denna planets afstånd från jorden varit möjligast litet, och parallaxen i följd häraf haft sitt största värde. Otvifvelaktigt skulle man äfven genom passande iakttagelser af planeten Venus hafva kunnat erhålla en likaså tillförlitlig bestämning af dess parallax; men, ehuru sådana iakttagelser understundom varit ifrågasatta, så har man dock ej ännu på allvar skridit till deras utförande. Orsaken härtill torde förnämligast hafva varit den, att man vid vissa tillfällen med stor noggrannhet kan bestämma det relativa läget emellan solen och Venus och således äfven skilnaden emellan deras parallaxer. Dessa tillfällen, som emellertid äro ganska sällsynta, inträffa då planeten under sin rörelse kring solen, från jorden synes framskrida på sjelfva solskifvan. Iakttager man tidpunkterna, då solens och planetens ränder beröra hvarandra, så har man i sjelfva verket utfört en iakttagelse af det från observationsorten synbara vinkelafståndet emellan de båda himlakropparnas medelpunkter, emedan detta afstånd då är bestämdt af deras skenbara radier. Det är tydligt, att man från hvarje punkt på jordytan samtidigt skulle uppfatta momentet för rändernas beröring, såvida antingen de båda himlakropparnas parallaxer vore försvinnande små eller ock lika stora. Ty om de båda himlakropparnas parallaxer äro omärkbara, så äro deras lägen på himmelen desamma, man må nu betrakta dem från jordens medelpunkt eller från någon annan punkt af jordkroppen, och då måste naturligtvis rändernas beröring visa sig samtidigt från olika punkter på jordytan. I den händelse åter, då de båda kropparna hafva en märkbar men lika stor parallax, synes deras ömsesidiga läge ej heller förändradt, om detsamma betraktas från olika punkter af jordytan, såvida kropparnas skenbara afstånd öfverhufvud ej är stort; ty så mycket som den ena kroppens läge i följd af parallaxens inflytande synes olika från olika synpunkter, lika mycket — åtminstone i det närmaste — är äfven den andra kroppens skenbara läge förändradt. Afståndet dem emellan förblifver härunder detsamma, och således måste ränderna synas beröra hvarandra i samma absoluta ögonblick, från hvilken punkt på jordytan man än må betrakta företeelsen. Om deremot den ena kroppens parallax både är mätbar och större än den andras, så måste dess lägen på himmeln, betraktade från olika geografiska punkter, förete större skiljaktigheter än den andra kroppens. I följd häraf kan rändernas beröring ej synas samtidigt från olika punkter, utan inträffa efter mer eller mindre stora mellantider, beroende dels på iakttagelseorternas geografiska afstånd från hvarandra, dels på den qvantitet, hvarmed den närmare himlakroppens parallax öfverskjuter den aflägsnares. Genom att från flere orter iakttaga tidsmomenterna för rändernas beröring, kan man derföre äfven sluta till denna qvantitet, såvida orternas geografiska afstånd äro bekanta. Man inser nu, huruledes iakttagelser af planeten Venus' passage öfver solskifvan kan tjena till att bestämma öfverskottet af dess parallax öfver solens.

Med stöd af den tredje keplerska lagen äro dock alla afstånd emellan solen och planeterna bestämda, så snart man känner ett enda. Har man således lyckats att bestämma parallaxen för en planet, så kan man icke allenast ur denna härleda solparallaxen utan äfven alla öfriga planeters. Ur samma lag finner man äfven förhållandet emellan solens och Veneris parallaxer gällande för den tid, då man, medelst iakttagelser, kan bestämma dessa parallaxers skilnad. Genom att kombinera dessa tvenne relationer, härleder man slutligen den sökta solparallaxen.

Vi hafva i de föregående framställningarne varit i tillfälle att anföra det värde, man antagit för solparallaxen på grund af förhållandet emellan sol- och månparallaxerna, sådant detta borde vara för att de af solens störande kraft förorsakade ojemnheterna i månrörelsen må motsvara iakttagelsernas utsago. Detta värde var

$$8.''9158.$$

Iakttagelser af planeten Mars' meridianhöjder hafva äfven ledt till ett med det förra ganska nära öfverensstämmande värde för solparallaxen, nämnligen

$$8.''855.$$

Kännedomen af ljusets hastighet, uttryckt i mil, leder äfven till en bestämning af solparallaxen. Den på astronomisk väg bestämda aberrationskonstanten motsvarar nämnligen ett visst antal sekunder, dem ljuset behöfver för att tillryggalägga afståndet från solen till jorden. Då man emellertid vet huru många mil ljuset fortplantas hvarje sekund, så erhåller man genom vanlig multiplikation jordens afstånd från solen, uttryckt i mil. Förhållandet emellan jordklotets, i mil uttryckta radie och ofvannämnda afstånd är då den sökta solparallaxen. Genom

Foucaults direkta bestämning af ljusets hastighet har man funnit följande värde för denna qvantitet.

8.″9 *).

Alla de anförda värdena för solparallaxen öfverensstämma så nära med hvarandra, som man kan vänta, då hvarje bestämningsmethod i mer eller mindre grad måste vara underkastad inflytandet af observationsfel, och således ej kan leda till ett absolut riktigt resultat.

De anförda resultaten hafva emellertid ej länge varit kända, utan grunda sig på undersökningar, som blifvit utförda under de tvenne sednaste decennierna. Ända in på 1860-talet använde man nästan uteslutande för solparallaxen värdet

8.″57116,

hvilket blifvit beräknadt af den tyske astronomen *Encke* på grund af Venus-genomgångarne 1761 och 1769. Det stora förtroende man satt till detta resultat, har således ej visat sig vara berättigadt. Sedan de nyare resultaten blifvit bekanta har man derföre reviderat Enckes räkningar och äfven i väsentlig mon kunnat förbättra desamma, enär Encke ej haft att tillgå säkra bestämningar för längdskilnaderna emellan vissa orter, derifrån man iakttagit Venus-genomgångarne. Man har sålunda ernått värden för solparallaxen, hvilka närmare öfverensstämma med de ofvan anförda; dock äro dessa ännu ej befriade från all osäkerhet och torde ej heller kunna blifva det, hvarföre man endast kan hoppas, att resultaten af genomgångarna 1874 och 1882 skola komma i harmoni med de på andra vägar ernådda, enär i motsatt händelse Venus-passagerna svårligen kunna anses vara så särdeles till bestämmandet af solparallaxen.

Så snart en till solsystemet hörande himlakropps omloppstid kring solen är bekant, föreligger ingen väsentlig svårighet att härleda dess afstånd från solen eller jorden, då dessa afstånd skola uttryckas i delar af jordens afstånd från solen. Vi hafva sett (§ 6) huruledes dessa blifvit öfvervunna af Kepler. Men det gifves ofta fall, då en nyupptäckt himlakropp — planet eller komet — endast en kort tid kunnat blifva iakttagen och man derunder ej varit i tillfälle att följa densamma längre än en obetydlig del af

*) Uppgifterna härom äro något olika; äfven torde dessa undersökningar behöfva upprepas, för att kunna anses vara fullt bevisgiltiga.

omloppstiden. För att detta oaktadt så snart som möjligt kunna vinna någon kunskap om dess bana, är det framför allt nödvändigt, att på grund af de iakttagelser, som för tillfället kunna insamlas, härleda ifrågavarande himlakropps afstånd från jorden eller solen, dessa afstånd uttryckta i jordens medelafstånd från solen såsom enhet.

Dels skulle det förutsätta alltför mycken vana vid geometriska uppgifters lösning, dels upptaga större utrymme, än i denna bok kan medgifvas, att annat än antydningsvis anföra utgångspunkten, hvarifrån ofvan omtalade bestämningar kunna åvägabringas.

Vi skola då först och främst omnämna, att bestämningen af den koniska sektion, i hvilken en himlakropp rör sig kring solen i enlighet med Newtons gravitationslag, förutsätter trenne fullständiga, vid olika tidpunkter anställda astronomiska iakttagelser. Ur de sex sålunda bekanta bestämningsstyckena, nämnligen tre rektascensioner och tre deklinationer, eller tre längder och tre bredder, kunna banans sex elementer medelst beräkning härledas. Hufvudsaken är härvid den, att finna himlakroppens afstånd från jorden, hvilka äga rum vid de trenne observationstillfällena. Äro dessa afstånd en gång bekanta, så finner man genom en ganska lätt räkning, dervid den 4:e 5:e och 6:e af de likheter, dem vi anfört sid. 128, komma till användning, himlakroppens samtidiga afstånd från solen, samt dess heliocentriska längder och bredder, hvarefter banans läge och form fullständigt äro bestämda. Sedan dessa qvantiteter blifvit beräknade, erhåller man nämnligen medelst de trenne första af de å sistnämnda sida anförda eqvationerna omedelbart de tvenne elementen Ω och i, samt dessutom värden för u, som gälla för observationstiderna. Såsom ett exempel på, huru härvid förfares, skola vi anföra härledningen af den uppstigande nodens längd, hvilken blifvit betecknad med Ω. Tvenne heliocentriska längder och bredder beteckna vi med l och l', b och b', samt hafva då i enlighet med den andra af de anförda likheterna

$$\text{tang b} = \text{tang i Sin(l} - \Omega)$$
$$\text{tang b}' = \text{tang i Sin(l}' - \Omega)$$

Divideras dessa uttryck med hvarandra, så befinnes

$$\frac{\text{tang b}}{\text{tang b}'} = \frac{\text{Sin(l} - \Omega)}{\text{Sin(l}' - \Omega)} = \frac{\text{Sin l Cos } \Omega - \text{Cos l Sin } \Omega}{\text{Sin l}' \text{ Cos} \Omega - \text{Cos l}' \text{ Sin } \Omega} \text{ *)}.$$

*) Se noten till sid. 196.

Divideras slutligen täljare och nämnare i uttrycket mest till höger med Cos Ω, så blifver värdet af detsamma oförändradt, och man erhåller

$$\frac{\text{tang b}}{\text{tang b}'} = \frac{\text{Sin l} - \text{Cos l tang } \Omega}{\text{Sin l}' - \text{Cos l}' \text{tang } \Omega},$$

hvilken är en eqvation af första graden i afseende på tang Ω. Denna funktion af Ω kan således omedelbart beräknas, hvarefter Ω finnes med tillhjelp af trigonometriska tabeller.

Slutligen bestämmer man de öfriga elementen a, e. π samt c, i det de relationer tagas i betraktande, som äga rum emellan radius-vektor och sanna anomalin samt emellan sanna anomalin och tiden; några egentliga svårigheter föreligga härvid icke.

Uppgiften att bestämma en nyupptäckt himlakropps bana kring solen beror således, såsom vi sett, derpå att finna dess afstånd från jorden vid olika iakttagelse-tillfällen. Men härvid möta svårigheter af det omfång, att desamma ännu icke torde kunna anses fullständigt öfvervunna, ehuru man dock lyckats uttänka härtill tjenliga methoder, som åtminstone i viss mon motsvara det praktiska behofvet, och dervid man ernår resultatet genom upprepade tillnärmelser. Grundvalen för dessa methoder är att söka i de Keplerska lagarna. I följd af den omständighet, att den sökta banan ligger i ett plan, kan man genom rent geometriska betraktelser uppställa ett antal likheter, hvilka angifva relationer emellan afstånden från jorden och de trianglar, hvilka bildas af himlakroppens afstånd från solen vid de olika iakttagelsetillfällena. För öfrigt innehålla dessa relationer endast bekanta qvantiteter, nämnligen trigonometriska funktioner såväl af de genom iakttagelser bestämda rektascensionerna och deklinationerna eller derur härledda längder och bredder som ock af solens sferiska koordinater. Såsom exempel skola vi anföra en af dessa likheter, dock utan bevis för dess riktighet. Denna relation är

$$\alpha\varrho' = \mathrm{L} + \frac{\mathrm{M} + \mathrm{N}\dfrac{f}{f''}}{1 + \dfrac{f}{f''}} \left[\frac{f}{f'} + \frac{f''}{f'}\right],$$

der α såväl som L, M och N beteckna bekanta qvantiteter, ϱ' himlakroppens afstånd vid tiden för den mellersta iakttagelsen, samt f, f' och f'' de triangelytor, som ligga emellan kroppens trenne solafstånd, nämnligen emellan r' och r'', emellan r och r'' samt emellan r och r', då r, r' och r'' beteckna dessa afstånd vid första, andra och tredje observation.

Det vore nu ingen konst att beräkna ϱ', endast förhållandena $\frac{f}{f'}$ och $\frac{f''}{f'}$ vore bekanta, men häri ligger just sjelfva knuten. Någon möjlighet att beräkna triangelytorna f, f' och f'' förefinnas icke, då hvarken någon till dem hörande sida eller vinkel är bekant; det enda man om dessa ytor vet, är att desamma, såvida tiderna emellan de trenne iakttagelserna äro små, ej mycket kunna skilja sig från de motsvarande sektorerna. Sålunda skiljer sig triangeln aFm (se fig. 28) från sektorn aFm endast genom det jemförelsevis lilla segmentet agm, dervid triangeln städse är mindre än sektorn. Förhållandet emellan tvenne sådana triangelytor skiljer sig derföre än mindre från förhållandet emellan tvenne motsvarande sektorer, hvilket åter, på grund af den andra Keplerska lagen, är detsamma som förhållandet af de till desamma hörande mellantiderna. Man erhåller derföre ett tillnärmelsevis riktigt värde för ϱ' genom att i ofvananförda uttryck för denna storhet införa förhållandena $\frac{t''-t'}{t''-t}$ och $\frac{t'-t}{t''-t}$ i st. för $\frac{f}{f'}$ och $\frac{f''}{f'}$, dervid t, t' och t'' beteckna de trenne observationstiderna. Sedan man sålunda funnit ϱ', härleder man utan några större svårigheter tillnärmelsevis riktiga värden för r, r' och r'', samt mellanliggande vinklar, och derpå äfven för f, f' och f'', med hvilka beräkningen af ϱ' måste förnyas. Genom sådana upprepade tillnärmelser är det möjligt att på grund af trenne iakttagelser härleda en kring solen kretsande kropps afstånd från jorden samt elementen af dess bana.

Vinkeln, hvarunder jordbanans halfva stora axel synes från en himlakropp, benämnes dennes *årliga parallax*. Dessa vinklar, uppgående till grader äfven för de aflägsnaste af solsystemets planeter, äro endast för ett fåtal af de s. k. fixstjernorna bemärkbara. Man har dock nedlagt högst betydande ansträngningar på bestämmandet af sådana, ursprungligen i afsigt att erhålla ett direkt bevis för den kopernikanska läran om jordens rörelse kring solen. Tillvaron af en parallax bevisar nämnligen, att ett föremål blifvit betraktadt från tvenne olika synpunkter, således äfven att jorden intager olika lägen i rymden och ej är stillastående, såsom man före Copernicus i allmänhet hade antagit. Emellertid förblef all härpå använd möda länge fruklös, och Copernicus såg sig äfven nödsakad till den förklaring, att fixstjernorna voro så långt aflägsna från solsystemet, att hela jordbanan från dem endast visade sig såsom en punkt. Den tiden, då Copernicus lefde, voro likväl de astronomiska iakttagelserna ännu särdeles bristfälliga, deras osäkerhet kunde uppgå till 10 minuter. Men kort härpå begynte Tyge Brahe omskapa den praktiska astronomin och lyckades att i de astronomiska iakttagelserna uppnå en förut oanad säkerhet och skärpa. I ingen händelse torde man dock få uppskatta den af honom ernådda noggrannheten högre än till en minut, d. v. s. att de af honom bestämda stjernlägena i gynnsammaste fall kunna anses säkra på en minut när. Det hade således varit möjligt, att på Tyges berömda observatorium *Uranienborg*, beläget på ön Hven i Öresund, upptäcka ortsförändringar, som uppgingo till en minut, och således äfven årliga parallaxer, i händelse sådana förekommit till beloppet af $^1/_2$ minut, enär stjernorna betraktas från ändpunkterna af en linie, hvars längd är dubbelt så stor som jordens afstånd från solen. I Tyges iakttagelser kunde emellertid ej några årliga parallaxer förmärkas, hvarföre man måste sluta, antingen att stjernornas afstånd från solen äro större än 6875 *) gånger jordens afstånd från solen eller ock, att antagandet af jordens rörelse ej var riktigt. Sedan de franska astronomerna *Picard* och *Azout* begynnt att använda synröret vid astronomiska instrument, gick åter observationskonsten ett betydligt steg framåt, isynnerhet genom bemödanden af engelsmannen *Flamsteed* och dansken *Römer*. Några årliga parallaxer kunde dock ej heller nu framvisas. Slutligen lyckades det den berömde observatorn *Bradley* att

---

*) Man finner detta afstånd ur formeln $\frac{1}{\text{Sin}\ \frac{1}{2}'}$.

uppdrifva säkerheten vid astronomiska iakttagelser till en sekund, och han belönades härför genom upptäckten af ljusets aberration samt af nutationen. Hade hos någon af de stjernor, som af honom oftare blifvit iakttagen, en årlig parallax af en sekunds belopp förefunnits, så hade denna ej kunnat undgå att blifva bemärkt. Då sådana likväl ej förmärktes, var man nödsakad att anse stjernornas afstånd vara större än 206265 jordvidder (afstånd från solen), en sträcka den ljuset behöfver mer än trenne år att genomlöpa, eller ett jernvägståg omkring 50 miljoner.

Först inemot medlet af detta sekel lyckades det tvenne utmärkta observatörer, *Bessel* i Königsberg och *W. Struve* i Dorpat, nära nog samtidigt, att framvisa fixstjernparallaxer, den förre hos stjernan N:o 61 i svanens stjernbild, den sednare hos Vega. Sednare, med än större sorgfällighet anställda iakttagelser hafva väl bekräftat realiteten af Bessels och Struves parallaxer, men derjemte ej obetydligt ändrat dessas numeriska värden.

Af alla hitintills undersökta stjernor är *α Centaurii* på den södra himmeln oss närmast; dess parallax har blifvit bestämd dels på Cap, dels i Santiago, hvarvid man funnit tvenne med hvarandra ganska nära öfverensstämmande resultat, nämnligen p = 0.″913 och p = 0.″88.

Vi meddela nu i följande sammanställning de parallaxer, som hitintills blifvit bestämda och derjemte äga anspråk på trovärdighet. Dervid ingå nyare bestämningar för 61 Cygni och *α* Lyræ.

α Centaurii	p = 0.″90
61 Cygni *)	0. 51
N.o 21185 i Lalandes katalog	0. 51
N:o 34 i Groombridges »	0. 31
N:o 21258 Lalande	0. 26
N:o 7415 Oeltzen	0. 25

*) De ursprungliga, af Bessel och Struve funna parallaxerna, dem vi beteckna med p, voro

61 *Cygni*:	p = 0.″3483	med det sannolika felet	± 0.″0095
α Lyræ	p = 0. 2613	» » » »	± 0. 0254

N:o 1830 Groombridge	p =	0."23 *)
σ Draconis		0. 22
Sirius		0. 19
Vega		0. 18
70 p Ophiuchi		0. 16

Om en stjerna är solsystemet så nära, att dess parallax är märklig, så måste dess skenbara geocentriska orter förete en ojemnhet, beroende af jordens läge i sin bana; en ojemnhet, som icke förefinnes i de till solens medelpunkt hänförda orterna. Skilnaden emellan den heliocentriska och den geocentriska orten finner man emellertid med största lätthet; önskar man veta skilnaden emellan stjernans heliocentriska och geocentriska längd, så finner man ur den fjerde och femte af de å pag. 128 anförda eqvationer följande formel

$$\lambda - l = -\frac{R}{\Delta \operatorname{Cos} \beta} \operatorname{Sin}[l - \odot]^{**}),$$

dervid stjernans afstånd från solen och från jorden antagits vara lika stort. Man finner ur denna formel, såsom man äfven ganska lätt, på grund af enkla geometriska betraktelser kunde inse, att stjernans geocentriska längd är underkastad en periodisk ojemnhet, hvars maxima i bågsekunder äro $= \pm\, 206265'' \frac{R}{\Delta}$ $= \pm$ p, alltefter som $l = 270^0 + \odot$, eller $= 90^0 + \odot$.

Tydligen är bestämningen af så små qvantiteter, som fixstjernparallaxerna visat sig vara, ytterst vansklig; möjligheten att blott och bart genom iakttagelsefel af periodisk natur erhålla fullkomligt illusoriska parallaxer är ej alltför aflägsen, hvarföre man bör upptaga alla uppgifter om sådana med största försigtighet.

Oftast försöker man att bestämma de årliga parallaxerna medelst mikrometrisk uppmätning af tvenne närbelägna stjernors ömsesidiga afstånd, dervid man förutsätter, att den ena stjernans parallax är omärklig. Då nu sådana mätningar äro beroende af det värde i sekunder, som motsvarar en omvridning af mikrometerskrufven, och detta värde åter något förändras af temperaturvexlingarna, så kunna dessa mätningar i någon mån förblifva behäftade med periodiska fel, som följa de årliga temperaturförändringarna och således menligt inverka på parallax-

*) Andra bestämningar gifva vida mindre värden för denna stjernas parallax.

**) Härledningen af denna formel sker genom alldeles samma förfarande, som användes pag. 223.

bestämningen. Dessutom är sjelfva skrufven sällan så fullkomligt arbetad, att ej mätningarna med densamma äfven af denna orsak kunna vara behäftade med fel, hvilka i hög grad äro egnade att vanställa det resultat, man erhåller för parallaxen.

§ 16. Små planeter.

Den sammanställning af planeternas afstånd från solen, hvilken meddelades å pag. 207, innefattar en lucka emellan Mars och Jupiter. Att fylla denna, hade redan Kepler förmodat en planet, hvilken sannolikt i följd af dess ringa storlek hade förblifvit obemärkt, men oberoende af dylika förmodanden skedde likväl upptäckten af den första planeten inom den grupp, der man nu redan räknar nära 140 s. k. småplaneter.

Det var den italienske astronomen *Piazzi*, som under iakttagelser af fixstjernor händelsevis påträffade en ditintills ej bemärkt stjerna, hvilken snart genom sin betydliga rörelse visade sig tillhöra solsystemet. Hans upptäckt inveg det 19:e seklet, ty densamma skedde på sjelfva nyårsdagen 1801. Denna upptäckt hade dock knappast kunnat tillgodogöras åt astronomin, ty den nyss funna planeten, hvilken blifvit benämnd *Ceres*, närmade sig skenbart solen, hvarigenom densamma snart undandrog sig iakttagarnes blickar. För att efter konjunktionen åter kunna finna densamma, var det framför allt nödvändigt att söka härleda dess bana kring solen, men härtill visade sig de äldre methoderna otillräckliga. Den tyske astronomen *Gauss* lyckades det emellertid att sålunda ordna de härtill nödiga numeriska tillnärmelserna (jemf. föreg. §), att han med en för det praktiska behofvet tillräcklig skärpa kunde ur de fåtaliga iakttagelserna förutsäga planetens läge efter konjunktionen, der densamma äfven i sjelfva verket återfanns.

Inom kort härefter upptäcktes ytterligare trenne till denna grupp hörande planeter, *Pallas* och *Vesta* af Olbers i Bremen, samt *Juno* af Harding i Lilienthal. Med dessa syntes upptäckterna af småplaneter hafva afstannat, ty ända till året 1845 förblef det vid de fyra omnämnda. Man hade dock nu begynnt att kartlägga stjernhimmeln med en vida större sorgfällighet än förut varit brukligt, hvarigenom upptäckten af småplaneter blef betydligt underlättad. Man behöfde nämnligen nu endast jemföra ett ställe af himlahvalfvet med den motsvarande stjernkartan, för att genast inse huruvida man hade någon ny himlakropp i kikarens synfält eller icke. Efter denna tid begynna äfven upptäckterna af små planeter att i högst betydlig grad ökas, så att sedan denna tid i medeltal omkring fyra sådana hvarje år blifvit funna.

I följd af deras granskap till den stora planeten Jupiter erfara de små planeterna högst betydliga störingar, på hvilken grund man äfven försökt att bestämma Jupiters massa ur de iakttagna afvikelserna från den elliptiska rörelsen hos en och annan af dessa planeter. Något fullt tillfredsställande resultat har väl härvid icke ännu blifvit uppnådt, hufvudsakligen emedan beräkningen af här ifrågakommande störingar är förenad med stora svårigheter, men otvifvelaktigt skall man dock på denna väg omsider lyckas att finna en mycket säker bestämning för denna, inom solsystemet en så vigtig rol spelande massa. I öfrigt hafva undersökningarne om småplaneterna hitintills haft ganska ringa af intresse att erbjuda den astronomiska forskningen.

Det vigtigaste efter upptäckten af en liten planet, är att bestämma dess elliptiska bana kring solen. För detta ändamål beräknar man först en bana ur trenne iakttagelsedata, såsom blifvit antydt i sednaste §, hvilken bana dock endast är att anse såsom en första tillnärmelse till den sanna. Med de sålunda funna banelementen beräknar man planetens geocentriska orter för alla de tider, då densamma blifvit iakttagen, samt jemför de sålunda beräknade orterna med de iakttagna Härvid visa sig mer eller mindre stora afvikelser, hvilka visserligen till en del kunna bero på iakttagelsefel, men dock förnämligast hafva uppkommit på grund af de ej fullt riktiga banelementen. Dessa afvikelser kunna derföre betraktas såsom funktioner af förbättringar till de ursprungliga elementen, således af sex ännu obekanta qvantiteter, hvilka likväl kunna bestämmas just ur samma afvikelser. Har man nu flera än trenne fullständiga iakttagelser att använda för elementens förbättring, så har man äfven flera än sex likheter, ur hvilka dock endast sex obekanta skola bestämmas; man söker då de sannolikaste värden för elementens förbättringar enligt minsta qvadratmethodens regler.

§ 17. Kometer.

Företeelser af kometer hafva städse i högsta grad ådragit sig den allmänna uppmärksamheten, såväl genom deras ofta praktfulla anblick, som ock genom det hemlighetsfulla, som man varit benägen att förknippa vid orsaken till deras framträdande. Oanade, oförutsedda framträda de ur himmelns djup, samt försvinna åter, vanligen efter att en ej lång tid hafva varit synliga, utan att efterlemna något spår. Understundom hafva kometer uppnått en alldeles förvånande glans, derunder de till och med om dagen varit synliga för blotta ögat. Krönikorna omtala åtskilliga sådana, hvarvid dock någon öfverdrift understundom torde hafva gjort sig gällande. — Kort efter Cæsars död skall en stor komet till och med vid middagen hafva varit synlig; Romarne trodde densamma hafva kommit att afhemta den store diktatorns själ. Trovärdigare uppgifter säga dock äfven om kometen af året 1744, att densamma i början af Mars månad öfverträffade Venus i dennas största glans, samt att man utan möda en timme efter middagen med blotta ögonen kunde varseblifva densamma.

Så länge man sväfvade i fullkomlig ovisshet om sätet för sjelfva företeelsen, om densamma borde förläggas inom jordatmosferen, eller i de himmelska rymderna, var det ej underligt, om man förlorade sig i de mest äfventyrliga gissningar om kometernas natur, deras uppkomst samt ändamålet med deras synligblifvande.

Tyge Brahe och Keplers lärare *Mästlin* synas först med bestämdhet hafva ansett kometerna vara himlakroppar och ej atmosferiska företeelser, samt Kepler trodde desamma röra sig i rätliniga banor. Danziger-astronomen *Hevelius* samt en prest i Plauen *Dörfel* hade härom riktigare föreställningar, i det de ansågo deras banor vara parabler, men det var först den store Newton som visade det berättigade i ett sådant föreställningssätt, samt huru detsamma öfverensstämde med den allmänna gravitationstheorin. Newton uppgaf äfven en method att beräkna de paraboliska banelementen, hvilken method utbildades och tillämpades på då kända kometer af hans samtida och landsman *Halley*.

Halley beräknade sålunda paraboliska banelement för 24 kometer, dervid iakttagelserna af dessa ej visade annat, än att förutsättningen af en parabel var berättigad. Härvid skola vi dock genast anmärka, att parabeln i granskapet af perihelium så nära sammanfaller med en mycket excentrisk ellips eller med en hyperbel, hvars excentricitet i det närmaste är 1, att skilnaden var omöjlig att afgöra på grund af den tidens, ännu mycket råa iakttagelser, hvilka, såsom äfven kometiakttagelser öfverhufvud, endast omfattade bandelen närmast perihelium. — Det kan nu synas ganska märkvärdigt, att kometerna just skola beskrifva banor, hvilkas excentriciteter alldeles icke, eller dock endast omärkligt skilja sig från enheten, men det märkvärdiga häri bortfaller vid närmare eftersinnande. De iakttagna kometernas paraboliska banor utvisa nämnligen i främsta rummet, att desamma öfverhufvud hafva mycket stora dimensioner, att desamma komma från rymder utom solsystemets gränser, dit de äfven återgå och således ej heller egentligen böra räknas till detta system. Deremot bevisar denna form ingalunda, att ej kometer med helt andra banor äfven kunna förekomma, ehuru dessa ej blifva synliga för oss, då de ej komma solen nog nära. För att en kropp, som rör sig i en mycket stor bana, skall kunna komma solen jemförelsevis nära, är det nämnligen erforderligt, att excentriciteten i det närmaste är lika med enheten, hvilket äfven inses af formeln

$$q = a(1 - e),$$

der q betecknar det kortaste afståndet från solen. I mon, som halfva stora axeln a har ett betydligt värde, måste faktorn $1 - e$ vara liten, på det att q ej väsentligen skall öfverskrida enheten eller jordens afstånd från solen, hvilket utgör vilkoret för att en komet öfverhufvud skall kunna synas från jorden.

Bland de 24 af Halley beräknade banorna funnos trenne, hvilkas element i högst förvånande grad liknade hvarandra. För att tydliggöra tillgången af den vigtiga upptäckt, som i denna omständighet hade sin utgångspunkt, skola vi anföra dessa trenne elementsystem, dervid q, såsom ofvan, betyder det kortaste afståndet från solen, samt T tiden, då kometen var i sitt perihelium:

T	1531 Aug. 25, $19^t 10^m$	1607 Okt. 26, $17^t 20^m$	1682 Sept. 14, $19^t 14^m$
π	$301^0 12'$	$301^0 38' 10''$	$301^0 55' 37''$
Ω	45 30	48 40 28	51 11 18
i	17 0	17 12 17	17 44 45
q	0,5799	0,5880	0,5829

Rörelsens riktning retrograd eller motsatt till planeternas.

Såsom denna sammanställning utvisar, äro de trenne elementsystemen, visserligen ej fullkomligt öfverensstämmande med hvarandra, dock så nära lika, att man otvunget måste tänka på, att desamma i sjelfva verket höra till samma komet, hvilken i en starkt excentrisk ellips och med en omloppstid af 75—76 år rör sig kring solen *). Orsaken till olikheterna i elementen och i synnerhet i mellantiden från den första periheliitiden till den andra, och från den andra till den tredje, ansåg redan Halley böra sökas i planeternas och framför allt i Jupiters störande inverkan. — Halleys åsigt om identiteten af de trenne kometföreteelserna vann en fullkomlig och glänsande bekräftelse 1759, då samma komet den 12 Mars åter passerade sitt perihelium. Tidpunkten för denna perihelpassage äfvensom kometens rörelse i öfrigt hade den franske astronomen *Clairaut* försökt att i förväg beräkna på grund af äldre data, dervid han fäste afseende vid de af planeterna förorsakade störingar. Hans beräkningar

*) I den elliptiska hypothesen erhölls $a = 18{,}17$; $e = 0{,}968$.

angåfvo nämnde tidpunkt till medlet af April, således något mer än en månad för sen. Felet låg dock mindre i hans räkningar, än deri, att Saturni massa vid hans tid ännu var mycket osäkert bestämd samt att planeten *Uranus* var helt och hållet obekant *). Sednast var den Halleyska kometen i sitt perihelium den 15 Nov. 1835, endast 3 dagar efter den tid, en af den tyske astronomen Rosenberger utförd förutberäkning hade angifvit.

Efter den Halleyska, har man lärt känna åtskilliga andra återkommande kometer, af hvilka några hafva en omloppstid af ett ganska ringa antal år. Såsom ett högst märkvärdigt exempel på en sådan skola vi omnämna kometen af år 1770. Iakttagelserna visade här ganska snart, att de ej hörde till en parabel, utan antydde desamma en ellips, i hvilken kometen rörde sig med $5^1/_2$ års omloppstid. Genom att medelst räkning följa kometens lägen i denna bana både före och efter tidpunkten för dess upptäckt, fann man, att dess dåvarande bana hade uppstått i följd af Jupiters ovanligt stora inverkan, då kometen 1767 gick denna planet mycket nära förbi. Samma orsak skulle ännu en gång helt och hållet förändra kometens rörelse, ty 1779 kom kometen åter Jupiter mycket nära, ja så nära, att troligen planeten med dess fyra månar gick genom sjelfva kometmaterien. I Jupiters rörelse kunde efter denna katastrof ingen förändring förmärkas, hvaraf man kan sluta till kometmassans ringhet. Kometen kastades deremot i en ny bana, på hvilken den ej mer blef synlig från jorden. Äfven vår jord kom denna komet mycket nära, och skulle, om densamma haft någon märklig massa, utöfvat väsentliga störingar, hvilka hade gifvit sig tillkänna såsom en förändring af årets längd. Ur frånvaron af sådana störingar sluter *Laplace*, att kometens massa ej uppnår $^1/_{5000}$ af jordmassan.

Af kometer med kort omloppstid böra vi i främsta rummet ihogkomma den *Enckeska*. Denna har redan ett stort antal gånger blifvit sedd och iakttagen, första gången af Pons i Marseille år 1786. Dess omloppstid är endast 3,3 år och dess bana, hvars excentricitet är 0,85, faller helt och hållet inom Jupiters. Encke som under en lång följd af år beräknat dess rörelse, trodde sig finna, att denna ej helt och hållet kan förklaras ur den newtonska gravitationslagen, utan att iakttagelserna antydde en för-

*) Uranus upptäcktes år 1781 af Herschel d. ä. Densamma hade likväl förut varit iakttagen af Flamsteed, Bradley, T. Mayer och Lemonnier, ehuru dessa astronomer ej bemärkt hans rörelse.

kortning af omloppstiden, hvartill en annan förklaringsgrund borde sökas. Han ansåg sig hafva funnit en sådan i antagandet af etherns motstånd, hvilket skulle förminska kometens tangentialhastighet och således föranleda att solens attraktion finge någon öfvervigt, hvaraf en förkortning af omloppstiden nödvändigt skulle följa. Det är ännu för tidigt att afgöra riktigheten af Enckes åsigt, alldenstund sjelfva företeelsen af omloppstidens förkortning ännu ej blifvit ställd utöfver alla tvifvel. Härtill vore nämnligen erforderligt att med större skärpa, än hitintills skett, beräkna kometens störingar, ett arbete, som ännu ej med tillbörlig säkerhet kunnat utföras.

Förutom den Enckeska kometen känner man 6 kometer med omloppstid under 10 år, hvilka mer än en gång varit sedda, dessa äro

den Bielaska	kometen:	omloppstid	6,7	år
den Faye-Möllerska	»	»	7,4	»
de Vico's komet		»	5,5	»
Brorsens	»	»	5,6	»
d'Arrest's	»	»	6,4	»
Winneckes	»	»	5,6	»

För ett mindre antal kometer förutom de nyss anförda har man beräknat elliptiska banelement, och således äfven omloppstider på grund af iakttagelser kring tiden för en enda perihelpassage. Med få undantag äro dock resultaten af dylika beräkningar utan någon synnerlig betydelse. Ju större man finner kometens omloppstid i förhållande till den, öfver hvilken iakttagelserna sträcka sig, desto osäkrare är äfven bestämningen af densamma. Det stora flertalet af kometer röra sig emellertid i paraboliska eller mycket excentriska, eller möjligen äfven hyperboliska banor, och öfverskrida i dessa solsystemets gränser, hvarföre de ej heller egentligen kunna räknas till detta, ehuru desamma under någon tid hufvudsakligen lyda solens attraktionskraft. Det synes äfven troligt, att de återkommande kometerna, med jemförelsevis korta omloppstider, erhållit sina nuvarande banor i följd deraf, att desamma kommit någon planet mycket nära, hvilken då genom sin attraktionskraft eröfrat kometen åt solsystemet.

I sednaste tider har man bemärkt ett högst nära samband emellan vissa kometer och stjernskottssvärmar, hvilka under sin vandring inom solsystemet sammanstött med jorden. Man har tillika funnit, att sådana svärmar hafva en mycket stor utbredning i den bana, desamma beskrifva, eller till och med uppfylla hela denna bana, så att svärmen i sjelfva verket antagit formen af en elliptisk ring, den jorden samma dag hvarje år måste genomgå på det ställe, der ringen och jordbanan skära hvarandra. Häraf förklaras de periodiskt återkommande stjernskottsregnen. Då nu jorden kommer inom svärmen, strömma en mängd partiklar från densamma mot jordytan i riktningar, som i sjelfva verket äro parallela med hvarandra, såvida dessa partiklar beskrifva parallela banor kring solen. Men fenomenet på himlahvalfvet af en sådan ström utvisar dock ej omedelbart denna parallelism, emedan vi ej varseblifva den del af rörelsen, som är riktad mot vår ståndpunkt. En meteor, som i sjelfva verket rör sig rakt mot en iakttagare, synes för honom stå stilla på himlahvalfvet. De stjernskott åter, som ila förbi honom, eller öfver och under hans ståndpunkt, synas deremot beskrifva bågar på himmeln, hvilka dock alla utgå från den punkt, der stjernskotten nedströmma rakt mot iakttagaren och således ej visa någon skenbar rörelse. Denna punkt benämnes *radiationspunkt*, och densamma bibehåller sitt läge bland fixstjernorna i det närmaste oförändradt — ett bevis för stjernskottens kosmiska natur. Genom att upprita stjernskottens skenbara banor på himmelskartor, kan man ganska lätt bestämma radiationspunktens läge med den noggrannhet, som här öfverhufvud kommer i fråga. I och med detsamma har man äfven bestämt riktningen af strömmens rörelse i en punkt af dess bana, d. ä. en tangent till denna bana. Antages strömmen röra sig i en konisk sektion, enligt Keplers lagar kring solen, så bestämma nämnde riktning och solens medelpunkt läget af banans plan i rymden. Tillåter man sig dessutom den förutsättning att banan är parabolisk, så är äfven denna fullständigt bestämd, enär dess brännpunkt sammanfaller med solens medelpunkt, samt perihelii längd och liniera afstånd från solen kunna beräknas, då man känner riktningen af en tangent till banan i en punkt, hvars afstånd från brännpunkten är bekant. Detta afstånd är nämnligen detsamma som jordens samtidiga afstånd från solen. Till den åsigt, att banorna äro paraboliska, åtminstone i det närmaste har man åter kommit på grund af den kännedom om deras kosmiska hastighet, som man på vissa omvägar lyckats vinna (jemf. pag. 179). Den italienske astronomen Schiaparelli grundar sin härledning af denna hastighet hufvudsakligen på följande betraktelser.

Med uteslutande af den i Augusti regelmässigt återkommande, s. k. Laurentius-strömmen, kunna stjernskotten — då man betraktar dem i allmänhet och ej någon enskild svärm — anses ila mot jorden, i nära nog samma myckenhet från olika delar af rymden, och med ungefär samma hastighet. Stode jorden orörlig, så skulle, om ofvan antydda förutsättning är riktig, hvarje punkt af jordytan likformigt öfversållas af stjernskott, hvilket förhållande ej heller skulle ändras i följd af jordens rotation. En iakttagare skulle således under hvarje timma, han kan använda till iakttagelser, se samma antal stjernskott. Om deremot jordens framåtskridande rörelse vore ojemförligt hastigare än stjernskottens, så skulle man på den jordhalfva, som är bortvänd i riktningen af jordrörelsen, ej kunna varseblifva några stjernskott alls. Man skulle i denna händelse endast kunna se stjernskott så länge, som den punkt på himlahvalfvet, mot hvilken jordens rörelse för ögonblicket är riktad, den s. k. *Apex,* befunne sig öfver horisonten. I följd af jordbanans ringa excentricitet, är rektascension för apex i det närmaste 6 timmar mindre än solens rektascension (riktningen af jordens rörelse är nämnligen i det närmaste vinkelrät mot riktningen till solen). Apex kulminerar derföre kl. 6 om morgonen, då största antalet stjernskott i alla händelser bör varseblifvas. Men äfven tiden omkring kl. 6 om aftonen, ehuru apex då befinner sig djupast under horisonten, är ej fullständigt blottad på stjernskott, utan man kan äfven då se sådana till och med i meridian, hvilket bevisar, att stjernskottens kosmiska hastighet ej allenast är jemförbar med jordens utan äfven något större, emedan man eljest icke skulle kunna se något sådant i den himmelsregion, som är apex diametralt motsatt. Ty, för att ett stjernskott i den nämnda regionen skall kunna blifva synligt, måste detsamma framila efter jorden och, i det dess hastighet är större än jordens, upphinna denna. Förhållandet emellan de antal stjernskott, som man i allmänhet vid olika timmar af dygnet iakttager, beror derföre på förhållandet emellan stjernskottens och jordens hastigheter, hvilket förhållande äfven ur verkligt iakttagna stjernskottsmängder har blifvit bestämdt. Schiaparelli fann för detta förhållande talet 1.447, hvilket tal i det närmaste motsvarar hastigheten i en parabel.

Vi afsluta denna framställning med att anföra paraboliska banelement såväl för Augusti-meteorerna som för den 3:e kometen från år 1862, dessa äro

	Stjernskotten den 10 Aug.	Komet III, 1862.
π	343°38′	344°41′
Ω	138 16	137 27
i	63 3	66 25
q	0.9643	0.9626
	retrograd	retrograd

Desslikes har man funnit fullständig öfverensstämmelse emellan meteorerna af den 13 November samt komet I 1866 samt emellan några andra meteorsvärmar och kometer. Häraf framgår klart och otvetydigt, att såväl kometen som meteorerna framskrida i samma bana, hvarföre man väl synes tvungen till det antagande, att något fysiskt sammanhang äger rum emellan kometen och meteorsvärmen. Hvilket dock detta sammanhang är, kan ej ännu med visshet afgöras; troligen äro meteorerna afsöndringar från kometer, men det är ock möjligt, att kometer bildas genom sammanhopningar af meteorer.

§ 18. Dubbelstjernor.

Betraktar man himmeln med ett synrör, så skall man snart nog finna ett relativt ganska stort antal stjernor, hvilka parvis ligga så nära hvarandra, att man otvunget ledes till benämningen *dubbelstjernor*, hvilken benämning skulle innebära, att paret är fysiskt förenadt, d. v. s. att de båda stjernorna äro i märklig grad underkastade inflytandet af hvarandras attraktion. Tillvaron af sådana stjernpar skulle man visserligen äfven derigenom kunna förklara, att man antoge riktningarne från vår ståndpunkt i verldsrymden till tvenne stjernor, hvilka för öfrigt skulle kunna vara mycket aflägsna från hvarandra, så nära sammanfalla, att dessa stjernor på det skenbara himlahvalfvet synas i hvarandras omedelbara närhet. Någon gång äger väl detta förhållande rum, och man benämner sådana, endast skenbart nära liggande stjernor *optiska dubbelstjernor;* men parens antal är alltför stort, att denna förklaringsgrund, äfven om man ej i flere fall hade direkta bevis för det fysiska sammanhanget, skulle äga någon nämnvärd grad af sannolikhet.

Herschel d. ä., som omkring året 1780 begynnt att egna sin uppmärksamhet åt dubbelstjernorna, fortsatte sina undersökningar öfver dem i mer än tvenne årtionden. Under dessa arbeten upptäckte han i några fall verkliga banrörelser inom stjernparen, såsom t. ex. hos ξ *Ursæ majoris*, σ *Coronæ* m. fl., i följd hvaraf han äfven öfvergaf sin ursprungliga åsigt om att dubbelstjernorna endast skulle vara optiska. Före Herschel kände man endast ett ringa antal stjernpar, men han uppmätte till position och distans öfver 800 sådana.

Efter Herschel d. ä. hafva hans son *Sir John Herschel* i förening med *South* samt i synnerhet *W. Struve* genom sina talrika och omsorgsfulla iakttagelser utvidgat vår kunskap om dubbelstjernornas antal och omloppstider; och under de sednaste decennierna har *Otto Struve* insamlat ett särdeles värderikt iakttagelse-material härtill, ehuru hans iakttagelser ännu ej blifvit offentliggjorda. Numera känner man omkring 6000 dubbelstjernor, dervid det ömsesidiga afståndet ej öfverstiger 32″, och inom ungefär $^1/_{10}$ af dessa par har man kunnat uppspåra omloppsrörelser.

Ett stort antal af de funna omloppsrörelserna äro ännu mycket osäkra och kunna ej vara annat, då omloppstiderna äro mycket stora i förhållande till den tid, öfver hvilken iakttagelserna sträcka sig. För några dubbelstjernor har man dock icke allenast kunnat fastställa den ena stjernans omloppstid kring den andra, utan äfven beräkna samtliga banelement, dervid det visat sig, att den ena stjernan bekrifver en ellips kring den andra i enlighet med Keplers lagar. Den Newtonska gravitationslagen gäller derföre äfven här. Stora axeln af dessa ellipser kan man dock icke angifva i liniert mått utan endast i sekunder, emedan parets afstånd från solsystemet endast undantagsvis är bekant. Vi anföra nu omloppstiderna, halfva stora axlarna (d) samt excentriciteterna för 9 dubbelstjernor, dervid omloppstiderna endast i ett fall öfverstiga ett sekel. De öfriga elementen äro af mindre intresse.

Namn	Omloppstid	d	e
ξ Herculis	37.2 år	1.″2	0.438
ζ Cancri	58.9 »	1. 03	0.256
ξ Ursæ maj	60.2 »	2. 30	0.404
η Coronæ	67 »	1. 20	0.404
α Centaurii	77 »	15. 5	0.950
λ Ophiuchi	89 »	0. 84	0.453
p Ophiuchi	93 »	4. 8	0.489
Castor	997 »	7. 54	0.344

Kännedomen af stjernparets massa i förhållande till solens skulle med stöd af den bekanta relationen emellan omloppstid, medelafstånd och massa, leda till en bestämning af ellipsens halfva stora axel, uttryckt i jordbanans halfva stora axel såsom enhet. Med stöd af det uppmätta vinkelafståndet emellan de båda stjernorna skulle man häraf vidare kunna sluta till deras afstånd från solsystemet. Betecknar man nämnligen parets årliga parallax med p, samt dess afstånd från solen uttryckt i jordens medelafstånd från solen såsom enhet med R, så är

$$R = \frac{1}{\operatorname{Sin} p}$$

Vidare är banans halfva stora axel uttryckt genom formeln

$$a = R \operatorname{Sin} d = \frac{\operatorname{Sin} d}{\operatorname{Sin} p} = \frac{d}{p}$$

Insättes detta värde i uttrycket

$$k\sqrt{m + m'} = 2\pi \frac{a^{\frac{3}{2}}}{T} \text{ (se pag. 183),}$$

så erhålles, i det året i st. för dygnet antages till enhet

$$k\sqrt{m + m'} = \frac{2\pi}{365{,}256\,T} \left(\frac{d}{p}\right)^{\frac{3}{2}};$$

härvid uttrycker m + m' summan af de båda stjernornas massor, samt T omloppstiden, hvilken vi anse vara uttryckt i år såsom tidsenhet. Tages dessutom solens massa till enhet för massorna, så har man med bortlemnande af jordens massa

$$k = \frac{2\pi}{365{,}256}$$

Genom att dividera dessa båda uttryck med hvarandra finner man

$$\sqrt{m + m'} = \frac{1}{T}\left(\frac{d}{p}\right)^{\frac{3}{2}},$$

eller

$$p = \frac{d}{\sqrt[3]{T^2}\,\sqrt[3]{m + m'}}$$

Denna formel kan tjena till att beräkna hypothetiska värden för åtskilliga dubbelstjernors årliga parallaxer; ty det fel, som man begår vid förutsättningen af ett värde för m + m', utöfvar ett betydligt ringare inflytande på värdet af p. Uppställer man t. ex. tvenne hypotheser för m + m', dervid man i den ena sätter m + m' = 1 samt i den andra m + m' = 8, så finner man tvenne värden för p, af hvilket det andra endast är hälften mindre än det första. För dubbelstjernan α Centaurii finner man under antagandet m + m' = 1: p = 0.''86, således ganska nära öfverensstämmande med den på direkt väg funna parallaxen.

I tvenne fall har man funnit banrörelser, utan att man hade bemärkt stjernans duplicitet, nämnligen hos stjernorna *Sirius* och *Procyon*. Dessa upptäckter, först uttalade af Bessel, bevisa en synnerlig skärpa hos meridian-iakttagelserna; ty det var på grund af sådana, som Bessel först leddes till ifrågavarande upptäckt. Numera sedan man åtminstone till Sirius verkligen sett parstjernan, äga dessa upptäckter ingenting förvånansvärdt, ehuru man en tid poetiserat om dunkla verldskroppar, hvilkas tillvaro likväl kan vara mycket möjlig *).

Man känner äfven tre- och flerdubbla stjernor, dock är om banrörelserna inom sådana system ännu ej mycket bekant. Detsamma gäller om de egentliga stjerngrupperna, der ett mycket stort antal stjernor äro tätt sammanträngda, och antagligen äro fysiskt förenade.

§ 19. Stjernornas glans, antal och fördelning på det skenbara himlahvalfvet.

Efter deras skenbara glans indelar man stjernorna i storleksklasser, så att man säger de mest lysande höra till första storleken, de derpå följande till andra, o. s. v. Om man sålunda något oegentligt tillåter sig att begagna ordet storlek, så måste ihågkommas, att dermed ingalunda menas stjernornas verkliga storlek eller ens deras skenbara diametrar, utan helt enkelt intensiteten af deras glans.

Inom den första storleksklassen är dock stjernornas ljusstyrka mycket olika; genom fotometriska bestämningar har man nämnligen funnit, att, om Vegas ljusstyrka antages till enhet, så är ljusstyrkan hos

---

*) Äfven till Procyon anser sig Otto Struve hafva sett parstjernan; upptäckten häraf synes dock ännu ej vara fullt konstaterad, alldenstund denna stjerna är mycket ljussvag.

α Canis majoris (Sirius)	=	4.29
β Orionis (Rigel)	=	0.99
α Aurigæ (Capella)	=	0.82
α Bootis (Arcturus)	=	0.79
α Canis min. (Procyon)	=	0.70
α Aquilæ (Altair)	=	0.49
α Virginis (Spica)	=	0.49

Vid de följande storleksklasserna förekomma icke sådana ojemnheter. I allmänhet är ljusstyrkan hos en stjerna, tillhörande någon viss klass, $^2/_5$ af ljusstyrkan hos stjernorna i den närmast föregående klassen.

I allmänhet äro de ljussvagare stjernorna aflägsnare från oss än de mera lysande, då en kropps skenbara ljusstyrka aftager i proportion, som qvadraten på dess afstånd ökas. Men man får dock endast i den största allmänhet af stjernornas glans sluta till deras afstånd; ty man känner alldeles icke huru många undantag, som härvid kunna äga rum. Stjernornas verkliga lyskraft kan nämligen vara mycket olika, så att tvenne stjernor i alldeles samma afstånd kunna höra till ganska olika storleksklasser. Sålunda vet man t. ex., att en stjerna af 6:e storleken (61 i Svanen) är oss vida närmare än Vega, hvilken är den mest lysande stjerna på norra halfklotet.

Man förledes gerna, vid betraktandet af det stjernbeströdda himlahvalfvet, till den tro, att man ser ett oräkneligt antal stjernor. Detta är dock ingalunda händelsen, utan denna uppfattning beror endast på den obestämdhet, hvarmed man förnimmer ljusintrycket af de svagaste, för blotta ögat ännu skönjbara föremål på himmelen. Hela antalet stjernor, som af ett godt öga kunna ses, torde uppgå till 6,000; man räknar dit alla stjernor af till och med 6:e storleken. Detta antal tiodubblas, om man medräknar alla stjernor af till och med 9:e till 10:e storleken, men härvid stanna de hitintills verkligen utförda stjernberäkningarna*). Man uppskattar dock deras antal, som synas i de mägtigaste teleskop, till 1,200 millioner.

Angående stjernornas fördelning på himlahvalfvet är ingenting väsentligt att anmärka, för så vidt man endast betraktar de ljusare stjernorna, intill 3:e eller 4:e storleken, utan synas dessa vara temligen likformigt fördelade öfver hela himmelen. Annorlunda blifver dock resultatet, om de ljussvagare stjernorna, t. ex. intill 10:e storleken medtagas i undersökningen. Man

*) Detta antal kan ses i ett synrör med ett objektiv af 3 tums diameter.

finner då, att stjernorna i öfvervägande antal likasom ihopträngas i granskapet af det svagt skimrande bälte, vi benämna vintergata. Den tyske astronomen *Argelander*, som föranstaltat en särdeles omsorgsfull räkning af de på norra halfklotet befintliga stjernor från de ljusaste till och med 9:e storleken, har äfven öfver stjernornas fördelning meddelat några numeriska sammanställningar, af hvilka vi här skola anföra det vigtigaste. Vi tänka oss härtill ett plan, lagt genom vår åskådningspunkt sålunda i rymden, att detsamma på himmelen utskär en storcirkel, hvilken så nära som möjligt sammanfaller med vintergatan, samt benämna polerna till denna storcirkel *vintergatans poler*. Enligt Argelanders räkningar förekomma nu i medeltal på en qvadratgrad följande antal stjernor

i den stjernfattigaste trakten, nära vintergatans nordpol	6,84
vid sjelfva polen	8,55
30° från polen	9,15
50° från polen	10,90
70° från polen	16,37
i sjelfva vintergatan	28,52
105° från polen	19,82
125° från polen	11,18
140° från polen	9,32

Den påfallande större stjernerikedomen i vintergatan och granskapet af densamma har föranledt den, såsom det vill synas, ej obefogade föreställningen, att alla stjernor, dem vi varseblifva såsom sådana, och ej endast i följd af deras stora antal uppfatta såsom töckenfläckar, höra till ett stort stjernsystem, hvars aflägsnaste delar skulle antydas af vintergatans svagt skimrande otaliga stjernor. I analogi med detta, understundom s. k. vintergatans stjernsystem, har man i en del af de många töckenfläckar eller nebulosor, som ljusstarka synrör visa oss framskimra ur himmelens djup, velat se andra stjernsystem i för oss helt och hållet ofattliga afstånd. Huru härmed än må förhålla sig, i alla fall är dock stjernornas koncentration emot ett plan i hög grad anmärkningsvärd såsom antydande, att deras läge i verldsrymden ej får betraktas vara alldeles tillfälligt, utan en följd af rörelser, hvilka i någon mon likna hvarandra, d. v. s. deruti, att de försiggå i plan med små ömsesidiga lutningar. Analogien med vårt solsystem, i hvilket planeterna med få undantag synas sammanträngda inom en temligen smal zon, är alltför påfallande att ej hafva blifvit bemärkt, hvarföre spekulationer öfver stjernsystemets konstruktion, i de flesta fall likväl endast grundade på allmänna betraktelser, tid efter annan hafva uppdykt. Emellertid äro rörelserna det karakteristiska i ett mekaniskt system; det är således uppenbart, att dylika betraktelser, der de endast varit grundade på den nuvarande fördelningen af stjernorna på det skenbara himlahvalfvet, ej kunnat leda till några bestämda resultat.

§ 20. Stjernornas och solsystemets rörelser.

Redan Halley bemärkte, då han efter anbringande af precession ville jemföra stjernlägena i Almagest med sednare bestämningar af dessa lägen, att stjernorna *α Tauri* (Aldebaran) samt Sirius och Arkturus förrådde en egendomlig rörelse åt söder. De ptolemiska lägena visade sig nämnligen vara så mycket nordligare än de genom sednare iakttagelser härledda, att skilnaderna ej kunde tillskrifvas fel i iakttagelserna eller någon annan omständighet än den, att de nämnda stjernorna verkligen voro i rörelse. — Halleys upptäckt har efterhand blifvit mer och mer stadfästad, samt ledt till den åsigt, att stjernorna ej äro fästade på himlasferen, och således ej heller böra benämnas fixstjernor, utan att desamma äro verldskroppar, begåfvade med massa, på samma sätt som solen och planeterna. Om sådana kroppar kan man ej föreställa sig annat, än att desamma äro stadda i rörelse samt underkastade hvarandras attraktion, ehuru denna, i följd af de enormt stora afstånden, endast i obetydlig mon kan verka, hvarföre äfven stjernornas rörelser, åtminstone under ett sekel kunna betraktas såsom rätliniga och likformiga.

Man bör derföre hos hvarje stjerna kunna förvänta att upptäcka dess rörelse — förr eller sednare, allt eftersom denna rörelse är stor eller liten — och i sjelfva verket har man redan hos flere tusen stjernor kunnat framvisa rörelser detta dock med mer eller mindre säkerhet.

För att bestämma stjernornas rörelser, har man ej mer än en enda väg att följa, densamma på hvilken äfven Halley gjorde de första upptäckterna i denna gren af astronomin. Man jemför tvenne, till samma stjerna hörande, men för olika tider gällande medelorter med hvarandra, sedan precessionen för mellantiden blifvit anbringad. Ett exempel skall förtydliga detta förfarande. Vid tiderna 1855,0 och 1865,0 hade stjernan β *Geminorum* (Pollux) följande rektascensioner: $\alpha = 7^t36^m26.^s27$ samt $\alpha = 7^t37^m3.^s07$. Precession för mellantiden är $37.^s26$, hvilken qvantitet bör adderas till den första rektascensionen för att göra densamma jemförbar med den andra. Man erhåller då: $7^t37^m3.^s53$, hvaraf man finner, att stjernans egen rörelse under 10 år ändrat dess rektascension med — $0,^s46$ = — 6,″9, eller årligen med — 0,″69. Har man sålunda bestämt rörelsekomponenterna såväl i rektascension som i deklination, så finner man den fullständiga rörelsen s medelst formeln

$$s = \sqrt{a^2 \operatorname{Cos} \delta^2 + d^2},$$

der a betecknar rörelsen i rektascension, d rörelsen i deklination samt δ stjernans deklination.

De största rörelser, man hitintills funnit, äro till deras årliga belopp sammanställda i följande förteckning

Stjernans namn	s
N:o 1830 i Groombridge's kat.	7.″01
61 Cygni	5. 22
N:o 21185 i Lalandes kat.	4. 73
ε Indi	4. 51
o^2 Eridani	4. 09
μ Cassiopejæ	3. 83
α Centaurii	3. 67
α Bootis	2. 26

Öfverhufvud hafva endast 25 af de i Bradley's katalog förekommande stjernor en årlig rörelse af mer än en bågsekund; de öfrigas rörelser äro i allmänhet vida mindre och aftaga, med få undantag, på samma gång som stjernans glans. Den tyske astronomen *Mädler* angifver medelvärden för de årliga rörelserna, dem han bildat

af 65	stjernor,	hörande	till	1:a och 2:a	storleken:	0.″222
» 154	»	»	»	3:e	»	0. 168
» 312	»	»	»	4:e	»	0. 137
» 690	»	»	»	5:e	»	0. 111
» 994	»	»	»	6:e	»	0. 090
» 921	»	»	»	7:e	»	0. 086

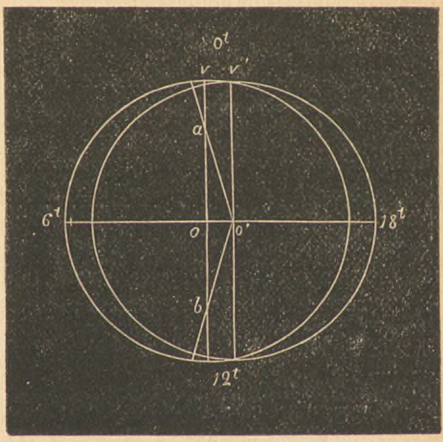
Om man betraktar förteckningar öfver de årliga rörelsekomponenterna i rektascension och deklination, så synas dessa vid första ögonkastet vara fullkomligt regellösa, d. ä. stora och små, positiva och negativa rörelser, såväl i rektascension som deklination förekommande bredvid hvarandra. En uppmärksammare blick varsnar dock snart, att ett annat förhållande i det stora hela äger rum, om man nämnligen bildar medeltal af de bekanta rörelserna inom vissa begränsade ytor på himlahvalfvet. Sålunda har man funnit, att rörelserna i deklination företrädesvis äro riktade mot söder, samt att rektascensionerna i allmänhet ökas, om stjernan ligger nära vårdagjemningspunkten, men deremot minskas i den motsatta delen af himmeln. För att med siffror visa detta sednare förhållande, skola vi anföra medeltal ur rektascensionsrörelser, hämtade ur Argelanders, på iakttagelser i Åbo grundade katalog. Vi inskränka oss härvid till de stjernor, hvilkas årliga rörelse är större än 0,″2 men mindre än 0,″5, samt hvilka ligga inom zonen emellan eqvatorn samt parallelcirkeln för 30^0 nordlig deklination. Dessa rörelser hafva blifvit indelade i grupper, hvarje omfattande tvenne timmar, och detta sålunda att midten af hvarje grupp sammanföll med de jemna timmarna $0,^t2$, o. s. v. Sålunda framgingo följande medelvärden för rektascensionsrörelserna inom de olika grupperna

Grupp	Medelvärden för rörelsen under 100 år
23^t—1^t	+ 4.″59
1—3	+ 12. 78
3—5	+ 17. 77
5—7	+ 0. 03
7—9	— 4. 14
9—11	— 17. 26
11—13	— 15. 93
13—15	— 15. 80
15—17	— 6. 10
17—19	+ 0. 80
19—21	+ 15. 04
21—23	+ 25. 05

För att bedöma säkerheten af dessa tal, böra vi nämna' att desamma äro härledda ur stjernkataloger, hvilka ligga 75 år från hvarandra, nämnligen den Bradleyska för 1755 och den Argelanderska för 1830; man skulle derföre vara nödsakad att antaga sammanlagda fel i dessa kataloger, som uppginge till $\frac{1}{4}$ af ofvananförda rörelsebelopp, i händelse man ville förneka dessa siffror deras reela betydelse. Sådana fel äro dock otänkbara, hvarföre det endast återstår att uppsöka orsaken till den egendomliga företeelse, ofvananförda talserie utvisar.

För att inleda en sådan förklaring, förutskicka vi den anmärkning, att de funna stjernrörelserna i sjelfva verket kunna bestå af tvenne väsentligen skilda delar, nämnligen af en verklig rörelse, den stjernan är stadd uti, samt af en skenbar eller parallaktisk, som beror på solsystemets framskridande i rymden, på samma sätt som planeternas retrograda rörelser endast äro skenbara och bero på jordens verkliga rörelse. — Vi skola nu undersöka, huru stjernornas rektascensioner blifva ändrade, om hela solsystemet, och således äfven jorden, rör sig mot en punkt, hvars rektascension är 18^t eller 270^0. Punkterna o och o′ (fig. 35) tänka vi oss angifva tvenne lägen af solsystemet i rymden, samt linierna ov och o′v′ angifvande riktningarne till vårdagjemningspunkten, hvilka få antagas vara parallela, emedan precessionens inflytande på denna punkts läge kan anses vara medelst räkning bortskaffadt. En stjerna i punkten a, hvars rektascension vid det första tillfället var 0^t, synes efter solsystemets förflyttning i riktningen o′a, således i en större rektascension. En stjerna

Fig. 35.



i b deremot, hvars rektascension ursprungligen var 12^t, synes från o′ hafva en rektascension, som motsvarar vinkeln bo′v′, hvilken synbarligen är mindre än 180^0 eller 12^t. Stjernans rektascension har således blifvit förminskad. Rektascensionerna för de stjernor, som ligga vid 6^t eller 18^t blifva oförändrade, såsom med största lätthet inses af figuren.

Sådana rektascensionsändringar, som skulle följa af solsystemets rörelse mot en punkt vid 18^t, äga emellertid i sjelfva verket rum, såsom vi sågo af de nyss anförda medeltalen; vi äro derföre berättigade till den slutsats, att en sådan rörelse verkligen förefinnes. Genom en liknande undersökning af deklinationsförändringarne sluter man, att deklinationen för den punkt, mot hvilken solsystemet för närvarande framskrider, är 20^0—40^0; närmare kan densamma f. n. ej angifvas. Ifrågavarande punkt ligger således i stjernbilden *Hercules.*

Redan vid medlet af det förra seklet uttalade Bradley sin förmodan att stjernornas rörelser till en del kunde förklaras, om man antoge solsystemets rörelse i rymden. Det var dock Herschel d. ä. förbehållet att på mer positiva grunder undersöka denna rörelse och fann för rörelsens riktning

Rekt. : $260^0 44'$ Dekl. : $+ 26^0 16'$

Gauss erhöll ett nära nog öfverensstämmande resultat, nämnl.

Rekt. : $259^0 30'$ Dekl. : $+ 30^0 50'$

Noggrannare, och på större antal rörelser grundade bestämningar begynna med Argelander; resultaten afvika dock föga från de redan anförda, hvarföre de här sakna intresse.

Alla dessa undersökningar grunda sig emellertid på den förutsättning, att medeltalen af flere iakttagna stjernrörelser äro fria från stjernornas verkliga rörelser och endast uppkomna genom återspeglingen af solsystemets framskridande. Alldeles riktig torde denna förutsättning likväl ej vara, och i sådan händelse äro de funna bestämningarne af detta framskridandes riktning ännu möjligtvis betydligt felaktiga.

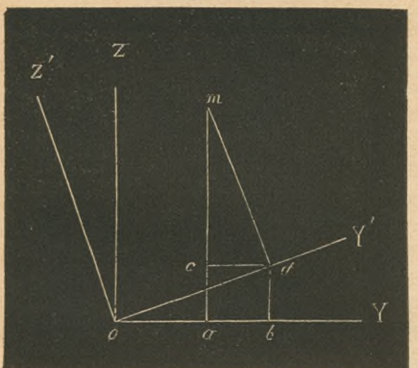
Då man bestämmer precessionskonstanten på grund af iakttagna förändringar i stjernornas medelorter, så gör man dervid den förutsättning, att medeltalet af ett stort antal rörelser skall blifva omärkligt, ty i annan händelse skulle den funna precessionskonstanten nödvändigt blifva felaktig. Om t. ex. de egna rörelserna försigginge så, att stjernornas längder i följd af dessa i allmänhet ökades med en viss qvantitet årligen, så skulle precessionskonstanten nödvändigt blifva funnen för liten. Det har likväl hitintills ej varit möjligt att afgöra, huruvida medeltalet af ett stort antal rörelser, äfven om dessa, för att göra resultatet oberoende af solsystemets framskridande och de deraf uppkomma parallaktiska rörelserna, fördelas symmetriskt öfver hela himlahvalfvet eller någon viss zon, i sjelfva verket närmar sig gränsen noll, eller om man måste befara, att de hitintills vunna bestämningarna för precessionskonstanten äro behäftade med väsentliga fel.

Vi stå här vid gränsen af ett vidsträckt fält för den astronomiska forskningen; det nämnligen, på hvilket lagarna för stjernornas verkliga rörelser skola uppsökas.

BIHANG.

Det har blifvit framhållet (pag. 217), att höjd, azimuth, deklination, timvinkel samt polhöjd äro sidor och vinklar af en sferisk triangel, eller ock skilja sig från sådana genom en eller två räta vinklar. De trigonometriska relationerna emellan dessa qvantiteter kan man emellertid mycket lätt erhålla utan tillhjelp af den sferiska triangeln. Härtill erfordras endast några formler från läran om rätvinkliga koordinaters transformation, dem vi på några rader skola meddela. Fördenskull tänka vi oss ett rätvinkligt koordinatsystem i rymden, hvilket, under det att dess x-axel bibehåller sitt läge oförändradt, vrider sig kring samma x-axel med en viss vinkel θ. Sålunda uppstår ett nytt koordinatsystem, hvars y- och z-axlar med de ursprungliga bilda samma vinkel θ. Vidstående figur angifver YZ-planet, samt de i detsamma liggande axlarna oY och oZ samt oY' och oZ'. Vinkeln YoY' är tydligen lika med ZoZ', hvilken vinkel vi betecknat med θ. Koordinaterna för en punkt m, hänförda till de förra axlarne, äro $ao = y$ samt $am = z$; koordinaterna för samma punkt, hänförda till det andra systemet, äro åter $od = y'$ samt $md = z'$. En blick på figuren leder omedelbart till följande relationer:

Fig. 36.



$$y = ob - cd = y' \operatorname{Cos} \theta - z' \operatorname{Sin} \theta$$
$$z = mc + db = z' \operatorname{Cos} \theta + y' \operatorname{Sin} \theta$$

Tänka vi oss nu, att den gemensamma X-axeln är riktad mot vester längs horisontens och eqvatorns genomskärningslinie; Y-axeln mot söder i horisonten samt Y'-axeln mot söder i eqvatorn; Z-axeln mot zenith och Z'-axeln mot norra polen, så är, om afståndet från punkten m till o betecknas med r (jemf. pag. 214),

$$x = r \operatorname{Cos} h \operatorname{Sin} a;\quad x' = r \operatorname{Cos} \delta \operatorname{Sin} t$$
$$y = r \operatorname{Cos} h \operatorname{Cos} a;\quad y' = r \operatorname{Cos} \delta \operatorname{Cos} t$$
$$z = r \operatorname{Sin} h \quad;\quad z' = r \operatorname{Sin} \delta$$

Vinkeln θ är då eqvatorns höjd öfver horisonten eller $90^\circ - \varphi$.

Härefter finner man, genom att insätta dessa värden i ofvanstående uttryck, och efter att hafva bortlemnat den gemensamma faktorn r,

$$\operatorname{Cos} h \operatorname{Sin} a = \operatorname{Cos} \delta \operatorname{Sin} t$$
$$\operatorname{Cos} h \operatorname{Cos} a = \operatorname{Cos} \delta \operatorname{Cos} t \operatorname{Sin} \varphi - \operatorname{Sin} \delta \operatorname{Cos} \varphi$$
$$\operatorname{Sin} h = \operatorname{Sin} \delta \operatorname{Sin} \varphi + \operatorname{Cos} \delta \operatorname{Cos} t \operatorname{Cos} \varphi$$

Liknande formler gälla för alla sferiska trianglar. Betäckna vi de tre sidorna i en sådan med α, β, γ samt de tre motstående vinklarne med A, B, C, så kunna vi genast nedskrifva formlerna

$$\text{Sin } \alpha \text{ Sin } B = \text{Sin } \beta \text{ Sin } A$$
$$\text{Sin } \alpha \text{ Cos } B = \text{Cos } \beta \text{ Sin } \gamma - \text{Sin } \beta \text{ Cos } \gamma \text{ Cos } A$$
$$\text{Cos } \alpha = \text{Cos } \beta \text{ Cos } \gamma + \text{Sin } \beta \text{ Sin } \gamma \text{ Cos } A$$

och på samma sätt

$$\text{Sin } \beta \text{ Sin } C = \text{Sin } \gamma \text{ Sin } \beta$$

o. s. v.

Är triangeln rätvinklig, så att t. ex. $A = 90$, så har man

$$\text{Sin } \alpha \text{ Sin } B = \text{Sin } \beta$$
$$\text{Sin } \alpha \text{ Cos } B = \text{Cos } \beta \text{ Sin } \gamma$$

Genom division af dessa uttryck erhålles

$$\text{Sin } \gamma \text{ tang } B = \text{tang } \beta.$$

Af denna formel följer omedelbart den andra eqvationen pag. 128, äfven som den, pag. 248 begagnade relationen emellan solens deklination och rektascension samt ekliptikans lutning.

Dessa exempel må vara nog att utvisa, huruledes de i astronomin förekommande trigonometriska uttrycken härledas.