



CHALMERS



GÖTEBORGS UNIVERSITET

Lås upp konstens hemligheter

En jämförelse av intensitetsytor från olika tidsintervall med hjälp av blickspårning och spatiala punktprocesser

Unlock the secrets of art

A comparison of intensity surfaces from different time intervals using eye tracking and spatial point processes

Examensarbete för kandidatexamen i matematisk statistik vid Göteborgs universitet

Kandidatarbete inom civilingenjörsutbildningen vid Chalmers

Filip Berntsson

Shahir Imam

Samuel Jonasson

Elon Vollmers Ginstrup

Lås upp konstens hemligheter

En jämförelse av intensitetsytor från olika tidsintervall med hjälp av blickspårning och spatiala punktprocesser

Examensarbete för kandidatexamen i matematisk statistik vid Göteborgs universitet

Filip Berntsson

Kandidatarbete i matematik inom civilingenjörsprogrammet Teknisk matematik vid Chalmers

Shahir Imam

Kandidatarbete i matematik inom civilingenjörsprogrammet Automation och mekatronik vid Chalmers

Samuel Jonasson

Kandidatarbete i matematik inom civilingenjörsprogrammet Bioteknik vid Chalmers

Elon Vollmers Ginstrup

Handledare: Aila Särkkä

Institutionen för Matematiska vetenskaper
CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
GÖTEBORGS UNIVERSITET
Göteborg, Sverige 2023

Förord

I detta arbete vill vi presentera vårt kandidatarbete inom matematik och spatial statistik. Arbetet har skrivits under vårterminen 2023 med hjälp av handledare Aila Särkkä vid institutionen för matematiska vetenskaper på Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet.

Under projektets gång har arbetet loggats veckovis i en dagbok och de individuella gruppmedlemmarna har redovisat sin arbetstid i en separat tidslogg. Det första utkastet av rapporten delades upp i olika avsnitt och skrevs av olika gruppmedlemmar. Hela rapporten har sedan noggrant reviderats och skrivits om i grupp. Den slutgiltiga texten är alltså genomgången och skriven av alla. Vem som skrev utkastet för olika avsnitt syns i tabellen nedan — koden som användes i projektet är skriven av Filip. Shahir har sedan använt koden för att producera både resultat och figurer. Samarbete har fungerat bra mellan gruppmedlemmar.

Vi vill främst tacka Aila Särkkä för hjälp och vägledning. Aila har tagit fram frågeställningen, mallen för arbetet och bidragit genom att ha möte med gruppen varje vecka. Vi vill också tacka Konstantinos Konstantinou som har bidragit med ledning kring programmering i R och i synnerhet spatstat-paketet.

Avsnitt:	Utkast skrivet av:	Reviderat av:
Populärvetenskaplig Sammanfattning Abstract	Samuel Shahir Shahir	Alla Alla Alla
Inledning Syfte och problem Avgränsningar Etiska aspekter	Elon, Samuel, Shahir Elon, Samuel Elon, Samuel Elon	Alla Alla Alla Alla
Teori Spatiala punktprocesser Intensitet Poissonprocesser Intensitetsskattning Kernelfunktionen Bandbredd Jmf av två intensitetsytor Relativ risk Monte Carlo-metoden	Elon, Samuel, Shahir Samuel Samuel Elon Samuel, Shahir Shahir Shahir Alla Samuel, Shahir Elon	Alla Alla Alla Alla Alla Alla Alla Alla Alla Alla
Data och utförande Data Tidsintervall Kantkorrigering Utförande Jmf av punktmönster Implementering av MC Val av bandbredd	Filip, Shahir Filip, Shahir Filip, Shahir Filip Filip, Shahir Filip, Shahir Filip Filip	Alla Alla Alla Alla Alla Alla Alla Alla
Resultat Visuell analys Resultat från MC	Alla Samuel, Shahir Alla	Alla Alla Alla
Diskussion	Elon, Filip, Shahir	Alla
Simulering av koden	Filip, Shahir	
Figurer och tabeller	Filip, Shahir	Alla
Koden	Filip	
Källförteckning	Shahir	

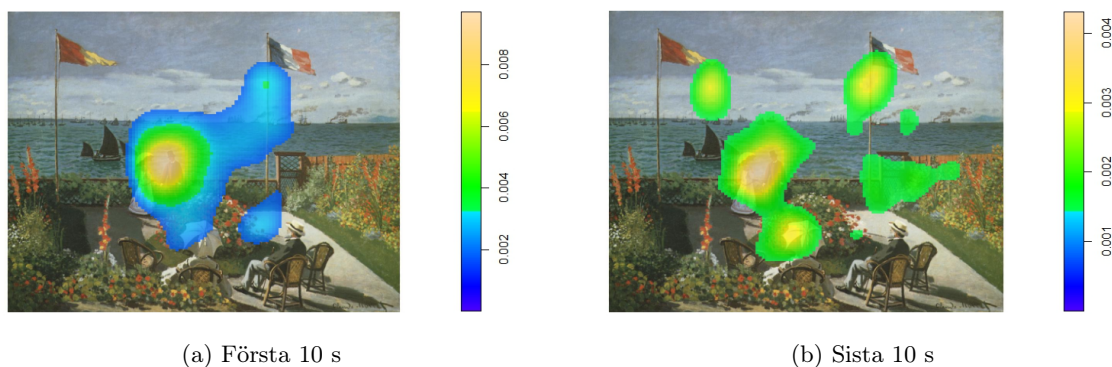
Populärvetenskaplig presentation

Visningstiden för en tavla kan ha stor inverkan på hur betraktaren uppfattar och tolkar konstverket, eftersom perspektivet och sinnesstämningen kan förändras beroende på hur länge man tittar på tavlan. Arbetet baseras på data från en tidigare studie utförd vid ett universitet i Finland, där 20 studenter deltog och tittade på Monets tavla *Terrasse à Sainte-Adresse* (1867) under en tidsperiod på tre minuter. Under denna tidsperiod mättes ögonrörelserna hos varje deltagare med en blickspårare. För varje position som en person fokuserade på tavla under denna tidsperiod markerades en punkt. Dessa punkter bildar ett unikt punktmönster från varje deltagare som tittade på tavlan.

Samtliga punktmönster från varje deltagare jämfördes tillsammans på tre olika sätt. De första och sista 10 s, de första och sista 30 s och de första och sista 90 s. Genom att undersöka om det finns någon skillnad mellan tidsintervallen eller om deras sätt att observera tavlan är detsamma hela tiden, kan man dra slutsatser om eventuella förändringar. Mer specifikt var det intensiteten av punktmönstren från deltagarnas ögonrörelser som jämfördes mellan varje tidsintervall.

Intensitet är ett begrepp som används dagligen av de flesta människor. Det används inom många träningsområden för att beskriva hur aktiv en person har varit under en viss tidsperiod. Det används också inom fysiken, där det kan definieras som energi per tidsenhet och enhetsarea. Fokuset i detta arbete kommer vara att skatta och ta fram intensitetsyta av punktmönstren. Genom att göra en intensitetsskattning av ett punktmönster, innebär det att man undersöker antalet punkter över en yta. Genom att dela in ytan i mindre delområden går det att upptäcka om det finns fler punkter på vissa platser och färre på andra platser. Vanligtvis används tekniska verktyg för att utföra denna uppgift och programmeringsspråket R är ett av de mest populära verktygen.

Efter det gjorts en intensitetsskattning i R, kan en värmekarta skapas som visar var flest punkter förekommer. Områden med en högre intensitet visas med starkare färger, medan områden med en lägre intensitet visas med svagare färger. I figur 1a och 1b kan man tydligt se två värmekartor över tavlan som visar de platser som de 20 individerna observerade mest på tavlan.



Figur 1: Intensitetsytorna är baserade på den sammansatta datan av alla individer.

Figurerna visar intensiteten under de första 10 sekunderna jämfört med de sista 10 sekunderna. Det är värt att nämna att det observerades en tydlig skillnad: alla personer som studerade tavlan fokuserade mycket på paret under de första 10 sekunderna, medan punkterna från deras blickar under de sista 10 sekunderna var mycket mer utspridda. Detta visar tydligt att det finns en skillnad i hur personerna i studien tittade på tavlan under de första sekunderna jämfört med de sista. De fokuserade mycket mer på ett område, medan deras blickar senare var betydligt mer utspridda. Vid de övriga jämförelserna var skillnaden inte lika stor, utan de tittade ungefär likadant under de första respektive sista tidsperioderna.

Sammanfattning

Ögonrörelser består av fixeringar, korta perioder där ögonen är relativt stilla och tar in eller bearbetar information. Genom att registrera ögonrörelserna av en person som tittar på en tavla kan positioner av fixeringar på tavlan undersökas som ett spatialt punktmönster.

Arbetet baseras på data från en studie i Jyväskylä University, där tio konstexperter och tio konstnöviker fick titta på olika tavlor i en treminutersperiod. Huvudsyftet är att undersöka om vilka delar av en tavla som en person tittar på förändras över tid genom att jämföra två tidsintervall, närmare bestämt första 30 s mot sista 30 s. Dessutom förekommer ytterligare jämförelser mellan första 10 s mot sista 10 s och första 90 s mot sista 90 s.

Jämförelsen görs huvudsakligen med intensitetsytor. Dessa ytor bestäms från spatiala punktmönster genom att uppskatta tätheten av punkter med kerneluppskattning, där valet av en utjämningsfaktor, eller bandbredd är essentiellt. För att bestämma om intensitetsytorna skiljer sig, tillämpas metoden utvecklad av Kellsall och Diggle kallad relativ risk. Metoden innebär att beräkna kvoten mellan två intensitetsytor och sedan använda ett Monte Carlo-test för att avgöra om kvoten är konstant. Det betyder att ytorna är lika och personerna har tittat på samma delar av tavlan de två tidsperioderna.

Resultatet visade blandade resultat från visuella analysen och Monte Carlo testet. Visuella analysen visade stora skillnader i 10 s intervallet och små skillnader i 30 och 90 s intervallen. Det statistiska testet bekräftade visuella analysen i 10 och 90 s intervallen, med en signifikant skillnad för 10 s och motsatsen för 90 s. Däremot visade statistiska testet även en signifikant skillnad för 30 s intervallet. Detta kan bero på att de flesta skillnaderna hittades nära kanterna och hörnen där det allmänt var få fixpunkter.

Abstract

Eye movements consist of fixations, short periods where the eyes are relatively still and taking in or processing information. By recording the eye movements of a person looking at a painting, the pattern of locations of fixations on the painting can be regarded as a spatial point pattern.

This thesis is based on data from a study at Jyväskylä University, where ten art experts and ten art novices were asked to look at different paintings, each for a three-minute period. The main objective is to investigate whether the parts of a painting that a person looks at changes over time by comparing two time intervals, specifically the first 30 s versus the last 30 s. In addition, further comparisons were made, namely between the first 10 s versus the last 10 s and the first 90 s versus the last 90 s.

The comparison is mainly made using intensity surfaces. These surfaces are determined from spatial point patterns of fixations by estimating the intensity of points using kernel density estimation, where the choice of a smoothing factor, or bandwidth, is essential. To determine whether the intensity surfaces differ, the method developed by Kelsall and Diggle called relative risk is applied. The method involves calculating the ratio between two intensity surfaces and then using a Monte Carlo test to determine whether the ratio is constant, which means that the surfaces are the same and that the individuals have looked at the same parts of the painting during the two time periods.

The results showed mixed results from the visual analysis and the Monte Carlo test. The visual analysis showed large differences in the 10 s interval and small differences in the 30 and 90 s intervals. The statistical test confirmed the visual analysis in the 10 and 90 s intervals, with a significant difference for 10 s and the opposite for 90 s. However, the statistical test also showed a significant difference for the 30 s interval. This may be due to the fact that most of the differences were found near the edges and corners where there were generally few fixation points.

Innehåll

1	Inledning	1
1.1	Syfte och problem	2
1.2	Avgränsningar	3
1.3	Etiska aspekter	3
2	Teori	3
2.1	Spatiala punktprocesser	3
2.1.1	Intensitet	4
2.1.2	Poissonprocesser	4
2.2	Intensitetsskattning	5
2.2.1	Kernelfunktionen	5
2.2.2	Bandbredd	5
2.3	Jämförelse av två intensitetsytor	6
2.3.1	Relativ risk	6
2.3.2	Monte Carlo-metoden	8
3	Data och utförande	8
3.1	Data	8
3.1.1	Tidsintervall	9
3.1.2	Kantkorrigering	12
3.2	Utförande	12
3.2.1	Jämförelse av punktmönster	12
3.2.2	Implementering av Monte Carlo-metoden	13
3.2.3	Val av bandbredd	14
4	Resultat	15
4.1	Visuell analys	15
4.2	Resultat från Monte Carlo-test	17
5	Diskussion	18
A	Appendix A – Figurer och tabeller	ii
A.1	Grupper	ii
A.2	Individer	ii
A.3	Tabeller	vii
B	Appendix B – CSR och Quadrant counting	viii
B.1	Test av CSR	viii
C	Appendix C – Kod	ix
C.1	Main	ix
C.2	jointPP.R	xii

1 Inledning

Analys av ögonrörelser har blivit ett viktigt forskningsverktyg inom många områden — särskilt inom psykologi, neurovetenskap och marknadsföring [1]. Genom att analysera ögonrörelser kan man få insikt i kognitiva och perceptuella processer, vilket handlar om hur hjärnan bearbetar och tolkar information från våra sinnen, såsom syn, hörsel och känsel. Visuell perception, eller syn, är informationen från ögonen som färger, former och rörelser. Synen är betydelsefull för bland annat uppmärksamhet, minne, inläring och tolkning av information. Med utgångspunkt i detta, undersöker det här arbetet var på en tavla en person tittar genom att analysera deras ögonrörelser när de betraktar tavlan under en längre period.

För att mäta en persons ögonrörelser används en blickspårare — denna teknik kallas för blickspårning. De inspelade ögonrörelserna kan användas för att avgöra var personen tittar och hur deras ögon rör sig från en plats till en annan. Vid analys av dessa rörelser är det vanligt att utgå från den starka ögon-sinnehypotesen [2]. Den starka ögon-sinnehypotesen säger att det inte finns någon märkbar fördröjning mellan det som fokuseras på och det som bearbetas — det vill säga att vad en person tittar på är direkt knutet till vad denne tänker på vid samma tillfälle. Genom att registrera ögonrörelser kan forskare spåra var en persons uppmärksamhet riktas för att sedan göra djupare analyser [3].

Ögonrörelser karaktäriseras av fixeringar och sackader [4, 5]. En fixering är en kort period där ögonen är relativt stilla och tar in eller bearbetar information. Vanligtvis pågår en fixering i 100–500 ms med ett genomsnitt på 250 ms [4]. Punkten som ögonen tittar på under en fixering kallas för en fixpunkt. Ögonens rörelse mellan två fixpunkter kallas för en sackad. Ibland genomför ögonen även så kallade mikrosackader. Detta innebär en snabb rörelse där ögonen först fixerar på en punkt, rör sig till en ny punkt och sedan går tillbaka till ursprungspunkten [3].

Det här arbetet undersöker ögonrörelser hos personer som tittar på konstverk — i synnerhet tavlor. De första studierna kring detta gjordes redan år 1935 av Buswell [6]. År 2001 och 2015 gjorde Smith och Smith studier i The Metropolitan Museum of Art in New York för att undersöka visningstiden av en tavla, alltså hur länge en person tittar på tavlan [7, 8]. Det visade sig inte bero på egenskaper hos den specifika personen som kön eller ålder utan istället på storleken av gruppen som tittade på tavlan tillsammans. De kom i detta fall fram till att den genomsnittliga visningstiden var ungefär 30 s. Vidare undersökte Hristova och Grinberg år 2011 bland annat hur ögonrörelser förändras över tid för personer som tittade på tavlor från två olika konststilar [9]. I synnerhet ökade varaktigheten för fixeringarna i det senare skedet av visningstiden. Samtidigt minskade amplituden av sackaderna, det vill säga storleken på vinkeln som ögonen rör sig i mellan två fixpunkter. Baserat på dessa betraktelser föreslår forskarna att åskådarna först utforskar hela tavlan för att senare fokusera sitt tittande till specifika delar av tavlan.

En samling av punkter fördelade över ett område utgör ett spatialt punktmönster [10]. När en åskådare tittar på en tavla så utgör dennes fixeringar på tavlan ett sådant punktmönster. Ett sätt att analysera detta är att studera intensiteten hos mönstret. Intensitet mäter hur många punkter som finns inom ett givet område av tavlan och en intensitetsskattning uppskattar intensitetsytan, det vill säga hur intensiteten av fixeringspunkter varierar över tavlan. I sin artikel från 2016 föreslog Ylitalo, Särkkä och Guttorp nya verktyg för att identifiera eventuella skillnader mellan hur två grupper tittade på tavlor [11]. Ett av dessa verktyg är intensitetsskattning.

Detta arbete bygger vidare på Ylitalo, Särkkä och Guttorps studie genom att använda intensitetsskattning för att analysera hur ögonrörelser förändras över tid. Studien tittade på data från sex olika tavlor. Detta arbete är baserat på samma data, men begränsas till en enskild tavla, närmare bestämt *Terrasse à Sainte-Adresse* av Monet (1867) som visas i Figur 2.



Figur 2: Claude Monet - *Terrasse à Sainte-Adresse* (1867), källa: *The Metropolitan Museum of Art/public domain*.

1.1 Syfte och problem

Syftet med detta arbete är att använda intensitetsskattning av spatiala punktprocesser för att undersöka om vilka delar av en tavla som en person tittar på förändras över tid. Arbetet är baserat på artikeln från Ylitalo, Särkkä och Guttorp [11], där de undersökte ögonrörelser från studenter som tittade på en tavla under en treminutersperiod. Här kommer huvudfokus läggas på att jämföra ögonrörelserna under de första 30 s mot de sista 30 s av en sådan tidsperiod. Detta på grund av att studien från Smith och Smith indikerar att en individ i överlag tappar intresse för en tavla efter cirka 30 s [8]. För att sätta i sammanhang görs dessutom jämförelser av de första 10 s mot de sista 10 s och de första 90 s mot de sista 90 s. Målet med undersökningen är att analysera intensitetsytorerna av det spatiala punktmönstret som uppstår under dessa tidsperioder.

Nollhypotesen är att var en person betraktar en tavla inte förändras över tid. För att testa detta så används ett statistiskt test som utvecklats av Kelsall och Diggle [12]. I avsnitt 2.3 i teoridelen framgår det hur testet utförs. Alternativhypotesen kan vara att individen tappar intresse för att studera tavlan och endast tittar på den av ren plikt för testet. En annan möjlighet är att individen lär sig något eller utvecklar en preferens för vissa delar av tavlan, vilket kan leda till en förändring i beteendet under det senare tidsintervallet jämfört med det tidigare.

Datan består av punktmönster från ögonrörelserna av tjugo studenter som tittade på tavlan *Terrasse à Sainte-Adresse*. I huvudsak undersöks den sammansatta datan av alla individer. Jämförelse sker med hjälp av visuell analys och med teststatistikan från Kelsall och Diggle. De tjugo olika individerna går att dela in i två grupper, konstexperter och noviser. Det genomförs även en kort jämförelse av dessa grupper och slutligen så undersöks datan från de enskilda individerna.

1.2 Avgränsningar

Syftet med detta arbete var att använda intensitetsskattning för att avgöra om vilka delar av en tavla som personer tittar på förändras över tid.

Av sex tillgängliga tavlor begränsas arbetet till den som visas i Figur 2. För att undersöka om vilka delar av en tavla som en person tittar på förändras över tid jämförs två tidsintervall, ett i början och ett i slutet. Tiden mellan dessa intervall tas ej i åtanke. Dessutom begränsas arbetet till att undersöka intensitetsytorna under respektive tidsperioder, istället för att använda andra statistiska verktyg. Utöver detta gjordes tekniska begränsningar vad gäller kantkorrigering och val av bandbredd — mer information om detta finns i Avsnitt 3.

1.3 Etiska aspekter

Datan kommer från en tidigare studie där ögonrörelserna har spelats in med en blickspårare. Då experimenten utfördes av andra är det svårt att bedöma de eventuella riskerna som deltagarna utsattes för. Dock är det fortfarande viktigt att ha de etiska aspekterna i åtanke, vilket i detta fall skulle kunna vara om den insamlade datan kan användas för att identifiera specifika individer.

Insamling och lagring av data från individer är mycket känsligt. Därför är det viktigt att ta hänsyn till om informationen från experimentet kan användas till dåliga ändamål. Ett möjligt problem som kan uppstå är om det går att identifiera specifika individer utifrån deras ögonrörelser, detta skulle potentiellt kunna missbrukas av organisationer för att samla data mot en persons vilja. Dock så verkar det som att ögonrörelserna av en individ, då den ser på en tavla, inte är tillräckligt unika för att kunna identifiera individen. Framtida teknologi med mer avancerad mönsterigenkänning skulle dock potentiellt kunna ändra på detta men för tillfället antas riskerna vara försumbara.

Det finns även aspekter kring arbetet som inte är negativa. Till exempel så skulle andra användningsområden kunna vara hur man kan använda ögonspårning för att ta reda på var en person fastnar med blicken. Detta kan vara av värde vid design av till exempel reklamaffischer eller layouten på en hemsida. Ögonspårning kan ge insikter om en persons beteende och psykologi och med mer avancerad teknologi och fler studier så kan vi lära oss ännu mer om hur våra hjärnor fungerar.

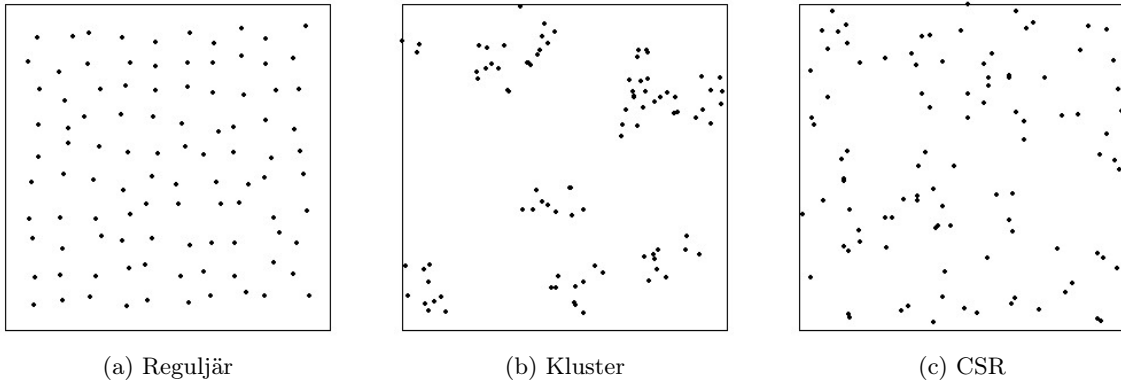
2 Teori

I denna del av rapporten presenteras den teori som är relevant för att stärka metoderna som används för att ta fram resultatet. Först ges en grundlig förklaring av spatiala punktprocesser, där introduceras och definieras intensitetsfunktionen och Poissonprocessen. Därefter beskrivs intensitetsskattning och hur val av bandbredd påverkar den skattade intensitetsytans utseende. Det sista avsnittet redogör för hur man kan jämföra två intensitetsytor, detta genom relativ risk och Monte Carlo-metoden.

2.1 Spatiala punktprocesser

En samling av punkter fördelade över ett område utgör ett spatialt punktmönster [10]. Detta är ett utfall av en spatial punktprocess. En sådan punktprocess är stationär om dess fördelning är invariant vid translation. Typiskt observeras punktmönstret på en begränsad yta, vi kallar en sådan yta för ett fönster.

Ett punktmönster klassificeras ofta som en av tre olika typer. Dessa tre typer syns i Figur 3. Den första visas i Figur 3a och visar punkter som är förhållandevis jämt fördelade över ytan. Detta kallas för en reguljär fördelning. Det andra fördelningsmönstret visas i Figur 3b där punkterna är samlade i grupper. Grupperna kallas för kluster och en process som genererar dessa kallas ofta för en klusterprocess. Figur 3c visar punkter som är oregelbundet fördelade över ytan. Detta kallas för fullständig spatial slumpmässighet (complete spatial randomness, CSR).



Figur 3: Ett exempel av ett (a) reguljärt, (b) klustrat och (c) fullständigt spatialt slumpmässigt (CSR) punktmönster.

I sin bok "Handbook of Spatial Statistics", kapitel 16, ger Marie–Colette van Lieshout exempel på både reguljära och klustrade punktmönster [13]. I sitt exempel beskriver hon träd i en rysk skog. Hon menar att tävlan om näring och utrymme leder till att de största träden blir reguljärt fördelade över skogen. När dessa träd mognat så sprids dess frön i närområdet och till följd av detta skapas kluster av mindre träd runt de större. Vad gäller fullständig spatial slumpmässighet så finns det ingen inneboende struktur — detta är ett teoretiskt ideal som aldrig förekommer i verkligheten. [10].

2.1.1 Intensitet

Intensiteten $\lambda(x)$ av en punktprocess X beskriver det genomsnittliga antalet punkter som förekommer per areaenhet. Intensiteten beskrivs av intensitetsfunktionen som definieras enligt

$$\lambda(x) = \lim_{|dx| \rightarrow 0} \frac{E[N(dx)]}{|dx|}, \quad (1)$$

där $N(dx)$ anger antalet punkter inom ett område dx , $|dx|$ är arean av dx och $E[N(dx)]$ väntevärdet av $N(dx)$. För en stationär process är intensiteten konstant. Notera att punktmönsterna i Figur 3 har alla samma intensitet då de har lika många punkter och att fönstrena är av samma storlek.

2.1.2 Poissonprocesser

Den homogena Poissonprocessen, även kallad CSR, är den enklaste möjliga metoden för att generera spatiala punktmönster. Poissonprocessen används ofta som nollhypotes inom spatial statistik och ligger därför bakom en stor del av teorin inom ämnet. Många andra punktprocesser kan även skapas av Poissonprocessen.

Poissonprocessen kan definieras av följande egenskaper:

Egenskap 1: För något värde på intensiteten $\lambda > 0$, och någon ändlig yta A , gäller att antalet punkter $N(A)$ i A är Poissonfördelat med väntevärde $\lambda|A|$.

Egenskap 2: Givet att $N(A) = n$, är de n punkterna likformigt och oberoende fördelade över ytan A .

Egenskap 3: För två disjunkta ytor A och B så är antalet punkter på respektive yta, $N(A)$ och $N(B)$, oberoende av varandra.

En Poissonprocess innebär därmed att alla punkter är fullständigt slumpmässigt fördelade och helt oberoende av varandra.

Det är vanligt att anta att ett okänt punktmönster kommer från en Poissonprocess. Om det inte skulle gå att motbevisa att ett punktmönster är en realisering av en Poissonprocess så är detta ett tecken på att fördelningen troligen inte har någon underliggande struktur.

2.2 Intensitetsskattning

Givet ett punktmönster från en stationär punktprocess X kan man skatta dess intensitetsfunktion. Ett sätt att göra detta är att dela in ytan i lika stora delar och räkna antalet punkter i dessa delar [10]. För att få en befogad skattning är en tumregel att antalet delar inte är för stort i relation till antalet punkter som finns i hela området. Formeln för intensitetsskattning av en stationär punktprocess är

$$\hat{\lambda} = \sum_{i=1}^m \frac{X(S_i)}{|S|}, \quad (2)$$

där $\hat{\lambda}$ är den uppskattade intensiteten, $X(S_i)$ antalet punkter i ett delområde S_i , $|S|$ storleken av området S och m antalet delområden som används i uppskattningen. Alltså summeras alla punkter ihop och sedan divideras de med hela ytans area.

2.2.1 Kernelfunktionen

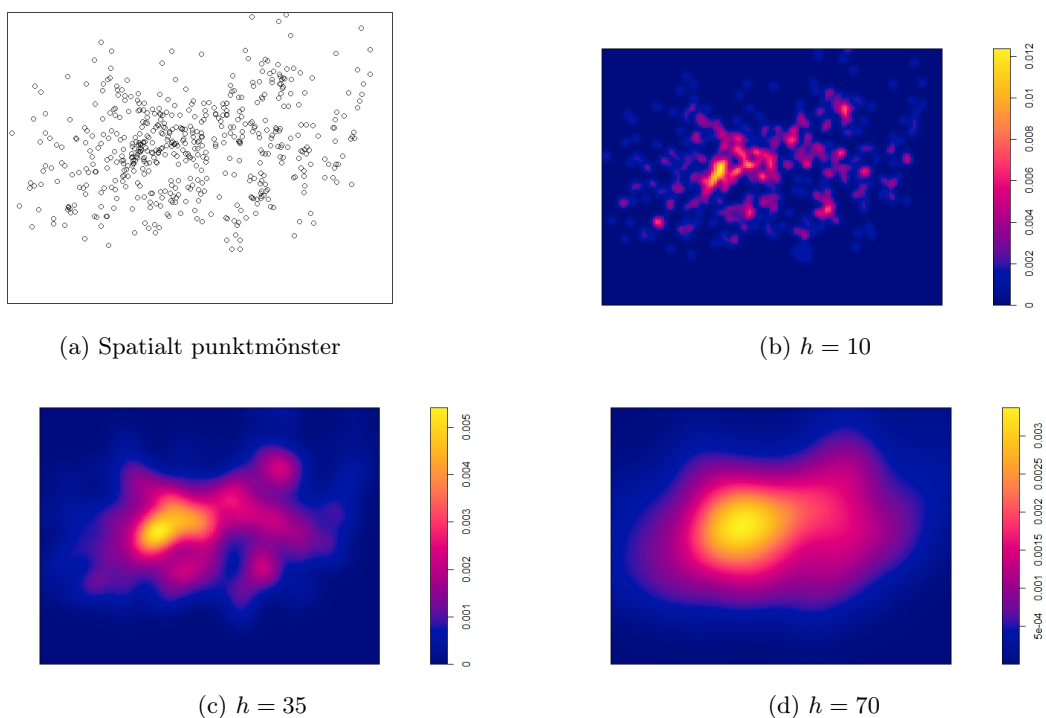
För icke-homogena punktprocesser kan intensiteten variera över ytan. I dessa fall kan en kernelskattning användas för att skatta intensitetsfunktionen [14]. Då ges intensitetsskattningen av

$$\hat{\lambda}(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - x_i}{h}\right), \quad (3)$$

där x_i är punkter från ett punktmönster, kernelfunktionen $K : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$ en symmetrisk funktion, centrerad kring 0 som vars integral är 1, och h en utjämningsparameter. Det finns olika typer av kernelfunktioner, till exempel den Gaussiska normalfördelningen som används i detta arbete. Kvadratiske eller triangulära kernelfunktioner är andra vanliga exempel [15].

2.2.2 Bandbredd

Enligt Kelsall och Diggle är inte valet av kernelfunktion det viktigaste, utan istället valet av en utjämningsparameter h , eller bandbredd [16]. Bandbredden bestämmer hur stor vikt närliggande punkter ges vid beräkning av intensiteten vid varje punkt av ytan. Om bandbredden är för stor kommer uppskattningen att vara för slät och missa små detaljer (underanpassning) [15]. Om den istället är för liten riskerar uppskattningen att ge för stor vikt till de observerade punkterna (överanpassning). I Figur 4 nedan visas hur valet av bandbredd påverkar intensitetsskattning av ett punktmönster.



Figur 4: (a) Ett spatialt punktmönster och (b–d) dess uppskattade intensitetsytor med olika val av bandbredd h .

Figur 4 visar hur valet av bandbredd påverkar intensitetsskattningen av ett spatialt punktmönster. I Figur 4b har en liten bandbredd använts, vilket resulterar i en hög variation i intensiteten. Här är intensitetsskattningen känslig för små förändringar i punktmönstret. Intensitetsytan i Figur 4c har uppskattats med en mellanstor bandbredd, vilket ger en jämnare intensitetsskattning än den i 4b. I Figur 4d har en stor bandbredd använts, vilket resulterar i en mycket slät intensitetsfördelning. Här är intensitetsskattningen okänslig för små förändringar i punktmönstret. Ett lämpligt val av bandbredd beror på syftet av analysen.

2.3 Jämförelse av två intensitetsytor

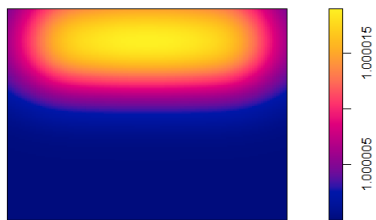
För att mäta skillnaden mellan två intensitetsytor, $\lambda_1(x)$ och $\lambda_2(x)$, används en metod som kallas för relativ risk [16]. Monte Carlo-metoden används sedan för att avgöra om en sådan skillnad är statistiskt signifikant. I detta avsnitt presenteras först relativ risk sedan Monte Carlo-metoden.

2.3.1 Relativ risk

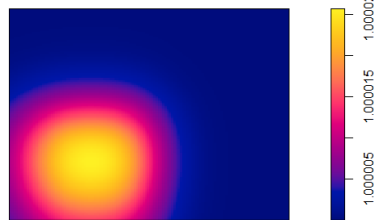
Den logaritmiska relativa risken ges av

$$r(x) = \log \left(\frac{\lambda_1(x)}{\lambda_2(x)} \right), \quad (4)$$

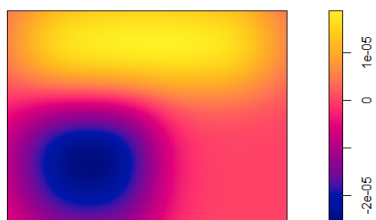
där $\lambda_1(x)$ och $\lambda_2(x)$ är två intensitetsytor [16]. Den relativa risk-kvoten $r(x)$ representerar en riskyta som beskriver hur $\lambda_1(x)$ och $\lambda_2(x)$ skiljer sig från varandra. I Figur 5 introduceras två enkla intensitetsytor och deras relativa risk.



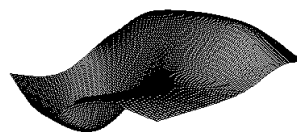
(a) Intensitetsyta med hög intensitet i övre delen av ytan.



(b) Intensitetsyta med hög intensitet i det nedre vänstra hörnet av ytan.



(c) Relativa risken $r(x)$ av intensitetsytorna i 5a och 5b



(d) Tredimensionellt perspektiv av $r(x)$ i 5c

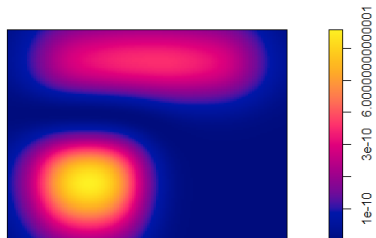
Figur 5: Relativ risk för två olika intensitetsytor där (a) och (b) är intensitetsytor, (c) är relativa riskytan och (d) är ett tredimensionellt perspektiv av riskytan.

Figur 5a och Figur 5b visar två olika intensitetsytor. Med hjälp av Ekvation (4) beräknas deras relativa riskyta $r(x)$ som visas i Figur 5c. Riskytan i 5c visar alltså skillnaderna mellan de två intensitetsytorna. Där den relativa risken är 0 är ytorna ekvivalenta, vilket tydligt visas i 5c i det nedre högra hörnet. Där riskytan är större än noll så är $\lambda_1(x)$ större än $\lambda_2(x)$. Där riskytan är mindre än noll så är $\lambda_2(x)$ större än $\lambda_1(x)$. Figur 5d visar motsvarande yta med ett tredimensionellt perspektiv.

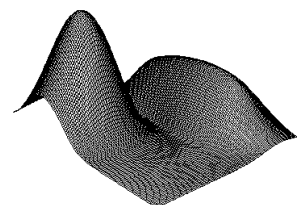
Integralen av den relativa riskytan kan användas för att skatta hur mycket de två intensitetsytorna skiljer sig från varandra. Dock riskerar toppar och dalar att ta ut varandra vilket skulle leda till att integralen underskattar skillnaden ytorna emellan. För att komma runt det här så används istället måttet

$$T = \int_S r(x)^2 dx, \quad (5)$$

där man integrerar kvadraten av riskytan $r(x)$ över fönstret S [12]. Figur 6 visar den kvadrerade riskytan från Figur 5.



(a) $r(x)^2$ av intensitetsytorna i 5a och 5b



(b) Tredimensionellt perspektiv av $r(x)^2$ i 6a

Figur 6: (a) Den kvadrerade relativa riskytan och (b) ett tredimensionellt perspektiv.

Måttet T i Ekvation (5) mäter volymen under en riskyta som den i Figur 6b. För att avgöra om storleken på måttet T är signifikant så används Monte Carlo-metoden.

2.3.2 Monte Carlo-metoden

Monte Carlo-metoden är ett numeriskt verktyg som används för att uppskatta egenskaper hos en fördelning. Detta görs genom att slumpmässigt simulera en mängd observationer ur fördelningen [17]. Metoden bygger på antagandet att en tillräckligt stor mängd sådana simuleringar kommer uppvisa liknande egenskaper som den bakomliggande fördelningen. En fördel hos Monte Carlo-metoden är att man kan använda vilken teststatistika som helst.

Det går även att använda Monte Carlo-metoden för att jämföra olika uppsättningar av data, som till exempel två intensitetsytor. Detta görs i artikeln av Kelsall och Diggle och även i artikeln av Ylitalo, Särkkä och Gutterorp [11, 12]. I artiklarna så jämförs två intensitetsytor med syftet att ta reda på om det finns någon signifikant skillnad på intensiteten av två punktmönster. För att göra detta används nollhypotesen att intensiteten för punktmönstrena är ekvivalenta, vilket innebär att $r(x) = 0$ i Ekvation (4). Teststatistikan som används är T som definierades i Ekvation (5). För simuleringarna ges de specifika måtten enligt

$$T_j = \int_S \hat{r}_j(x)^2 dx, \quad j = 0, 1, \dots, N, \quad (6)$$

där N är antalet Monte Carlo-simuleringar och $\hat{r}(x)$ är skattningen av riskytan $r_j(x)$ för den j :te simuleringen. För att ta fram p -värdet, som avgör om resultatet är signifikant eller ej, används ekvationen

$$p = \frac{k + 1}{N + 1}, \quad (7)$$

där k är antalet T_j som är större än eller lika med det observerade värdet på T_0 .

Detta arbete använder samma metod som Ylitalo, Särkkä och Gutterorp. Nollhypotesen är att de två intensitetsytorna som jämförs inte skiljer sig ifrån varandra och därför kommer från samma fördelning. Alternativhypotesen som följer är att de kommer från olika fördelningar. Detta är en fördel då datan som undersöks har en okänd sannolikhetsfördelning vilket inte sätter några krav på valet av teststatistika.

3 Data och utförande

I denna del av rapporten presenteras datan som legat till grund för arbetet och utförandet. Det första avsnittet beskriver hur visningstiden delas upp i tidsintervall. Avsnittet därefter avverkar kantkorrigering, som har att göra med att man observerar punktmönster från en begränsad yta. Utförandet består av jämförelse av punktmönster, implementering av Monte Carlo-metoden och val av bandbredd.

3.1 Data

Datan som ligger till grund för analysen kommer från Jyväskylä Universitet i Finland. Detta är samma datamängd som Ylitalo, Särkkä och Gutterorp använde för sin studie år 2016. Tjugo studenter deltog i den ursprungliga studien [11]. Av de tjugo studenterna som deltog i studien var tio konstintresserade och benämns som *experter*. De kvarvarande tio sade sig inte ha något särskilt konstintresse och benämns följaktligen som *noviser*. Förutom kön noterades ingen annan personlig information om deltagarna.

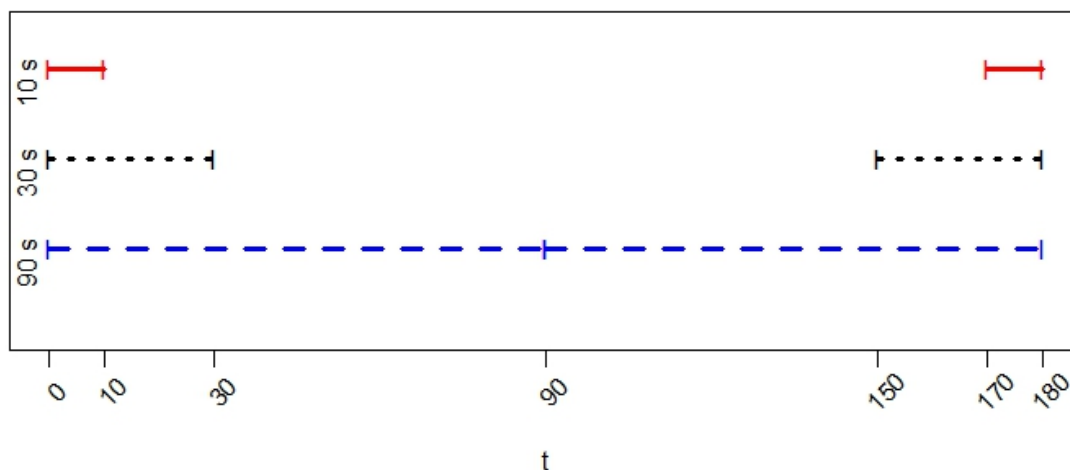
Deltagarna gavs i uppdrag att titta på sex tavlor som visades på en datorskärm, detta för en visningstid av tre minuter per tavla. Under tiden skulle de verbalt beskriva tavlans sinnesstämning (mood), samtidigt som deras ögonrörelser och röster spelades in. Av de sex tavlor för vilka data

samlades in avgränsar sig detta arbete till endast en av dem, nämligen *Claude Monet - Terrasse à Sainte-Adresse* (1897) (se Figur 2). Vidare betraktas endast datan från ögonrörelserna.

Ögonrörelserna spelades in genom att registrera koordinater, tidpunkter och varaktigheter för fixeringar då deltagarna tittade på den skärm där tavlan visades. Koordinaterna säger var på skärmen fixeringarna skedde, tidpunkterna säger när de skedde, och varaktigheterna hur länge de fortgick. En del av fixeringarna skedde dock utanför den del av skärmen som tavlan visades på och dessa har uteslutits ur denna analys. Ylitalo, Särkkä och Guttorp resonerar att fixeringspunkter som har en varaktighet kortare än 40 ms kan anses vara mikrosackader, det vill säga ögonrörelser inom en fixering. Med det som bakgrund så utesluts även de fixpunkter som är kortare än 40 ms i denna analys.

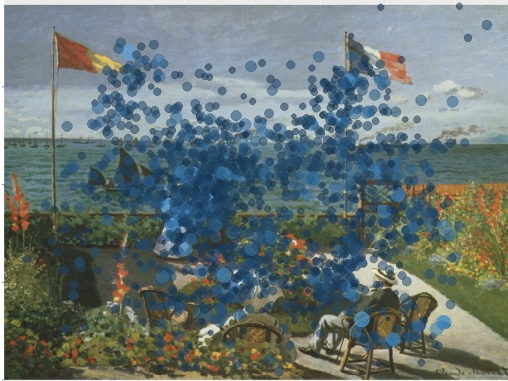
3.1.1 Tidsintervall

I syfte att undersöka om deltagarnas ögonrörelser förändras över tid så delas visningstiden upp i olika tidsintervall. Då fokuset är att jämföra var deltagarna fixerar så undersöks initiala och avslutande tidsintervall av visningstiden. Tidsintervallen som jämförs är alltid det initiala och det avslutande intervall som är av samma längd. Dessa tidsintervall benämns som ”de första 10 s” (0–10 s), ”de första 30 s” (0–30 s), och ”de första 90 s” (0–90 s), respektive ”de sista 10 s” (170–180 s), ”de sista 30 s” (150–180 s), och ”de sista 90 s” (90–180 s). Dessa tidsintervall visas i Figur 7. Notera att jämförelsen av de första och sista 90 s tillsammans utgör hela visningstiden (0–180 s).

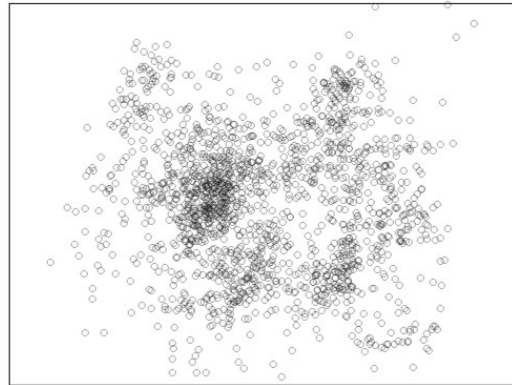


Figur 7: De olika tidsintervallen som visningstiden delas upp i. De röda heldragna linjerna motsvarar de första och sista 10 s. De svarta punkterade linjerna motsvarar de första och sista 30 s. De blåa streckade linjerna visar de första och sista 90 s.

Med hjälp av den uppdelning av visningstiden som visas i Figur 7 skapas i första hand sex stycken punktmönster — ett för varje tidsintervall. Dessa består av de fixpunkter som registrerats från samtliga deltagare under respektive tidsintervall. Figur 8 visar ett av dessa punktmönster, nämligen de första 30 s.



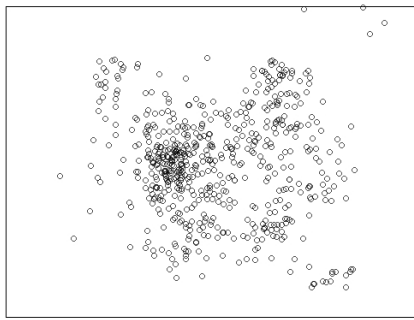
(a) Fixeringar på tavlan



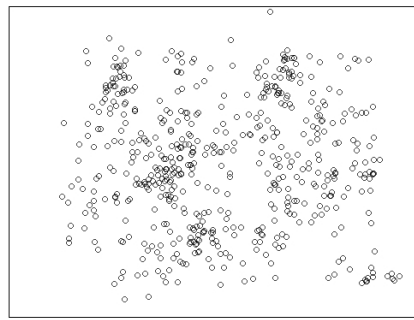
(b) Spatialt punktmönster

Figur 8: (a) Fixeringar från de första 30 s som samtliga deltagare tittat på tavlan, se Figur 2. Storleken och färgen av de individuella punkterna representerar varaktigheten av fixeringen. En mörkare och mindre punkt innebär en kortare varaktighet av fixeringen. (b) Samma fixeringar som ett spatialt punktmönster. Här har varaktigheten av fixeringarna inte längre någon betydelse.

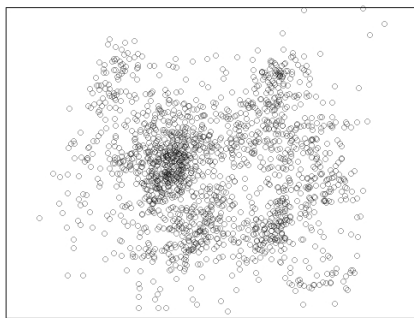
Figur 8a visar fixpunkterna från samtliga deltagare för de första 30 s placerade på tavlan och Figur 8b visar motsvarande punktmönster. Notera att storleken på prickarna i 8a motsvarar varaktigheten av fixeringarna, något som ej tas i hänsyn i analysen. Denna information finns inte heller kvar i punktmönstret i 8b. Fixpunkter från ett initialt och ett avslutande tidsintervall bildar då två separata punktmönster. Figur 9 visar punktmönstrena från de initiala och avslutande tidsintervallen av längderna 10, 30 och 90 s.



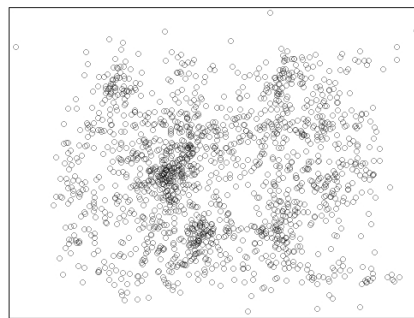
(a) De första 10 s



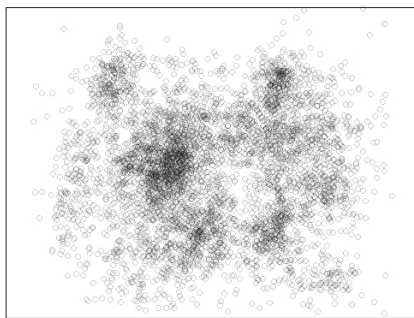
(b) De sista 10 s



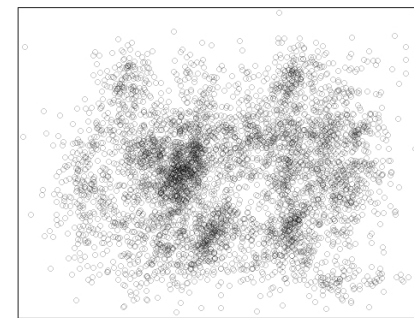
(c) De första 30 s



(d) De sista 30 s



(e) De första 90 s



(f) De sista 90 s

Figur 9: Punktmönster från samtliga deltagare för sex olika tidsintervall: De första och sista 10 s, de första och sista 30 s och de första och sista 90 s.

Notera punkterna uppe i det högra hörnet i figurer 9a, 9c och 9e. De första 10 s är en del av både de första 30 och de första 90 s. Därför kommer även alla punkter som finns i punktmönstret 9a också finnas med i 9c och 9e. Detsamma gäller för de avslutande tidsintervallen i figurer 9b, 9d och 9f, som har en återkommande en grupp av punkter i det nedre högra hörnet.

I huvudsak undersöks de punktmönster i Figur 9 som består av samtliga deltagares fixeringar. Vad gäller de första och sista 30 s så undersöks även grupperna *experter* och *noviser*, samt alla deltagare individuellt. Dessa punktmönster visas i Appendix A.

3.1.2 Kantkorrigering

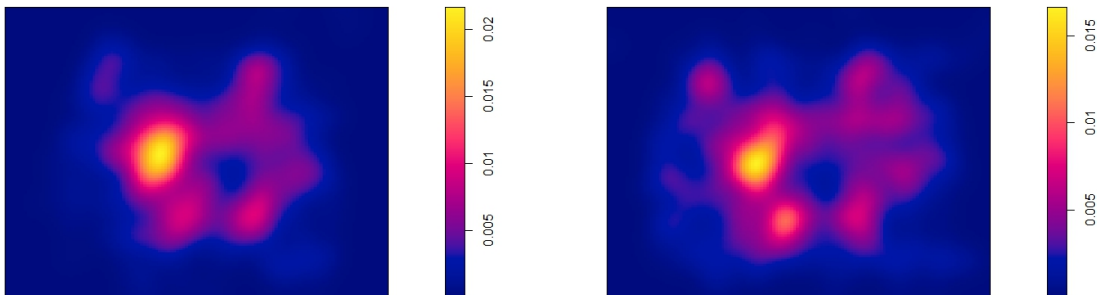
För vissa punktmönster kan det finnas punkter som ligger nära kanten på observationsfönstret. Detta implicerar att det kan finnas punkter av intresse just utanför fönstrets kant, något som skulle påverka intensitetsskattningen nära kanten. Kantkorrigering är en samling av metoder som ämnar kompensera för avsaknaden av denna information. Någon sådan metod används inte i detta arbete av två huvudsakliga anledningar. Först och främst har Hazelton visat att kantkorrigering inte är nödvändigt när samma bandbredd används vid kernelskattning för att beräkna relativ risk mellan två intensitetsytor [18]. I andra hand tas studiens utformning i åtanke. Då bilden av tavlan inte fyllde skärmen den visades på så har en mängd av de fixeringar som var utanför tavlan registrerats på den i övrigt tomma ytan av skärmen. Totalt finns 282 sådana fixeringar av de totalt 12621 som registrerats i den här delen av studien. En såpass liten andel föreslår att uteslutandet av fixeringspunkter utanför tavelbilden inte har någon signifikant effekt på analysen.

3.2 Utförande

För att jämföra två punktmönster med kernelskattningar så används programspråket R. Metoden är den som utvecklades av Kelsall och Diggle och presenteras i Avsnitt 2.3. De relevanta punktmönstren och deras intensitetsskattningar analyseras med `spatstat`-paketet som utvecklats av Adrian Baddeley, Rolf Turner och Ege Rubak [19].

3.2.1 Jämförelse av punktmönster

I `spatstat` hanteras punktmönster som `ppp`-objekt (planar point patterns). Givet en bandbredd h så producerar funktionen `density` en kernelskattning för ett sådant `ppp`-objekt, i enlighet med Ekvation (3). Det är på detta sätt som intensitetsytorna $\lambda_1(x)$ och $\lambda_2(x)$, i Ekvation (4), skattas. Intensitetsskattningar av punktmönstren i figurer 9c och 9d visas i Figur 10. Bandbredden h behöver inte vara densamma vid kernelskattning av två olika punktmönster. I detta arbete används dock alltid samma bandbredd för de två punktmönstren som jämförs. Valet av bandbredd h diskuteras i detalj i Avsnitt 3.2.3.

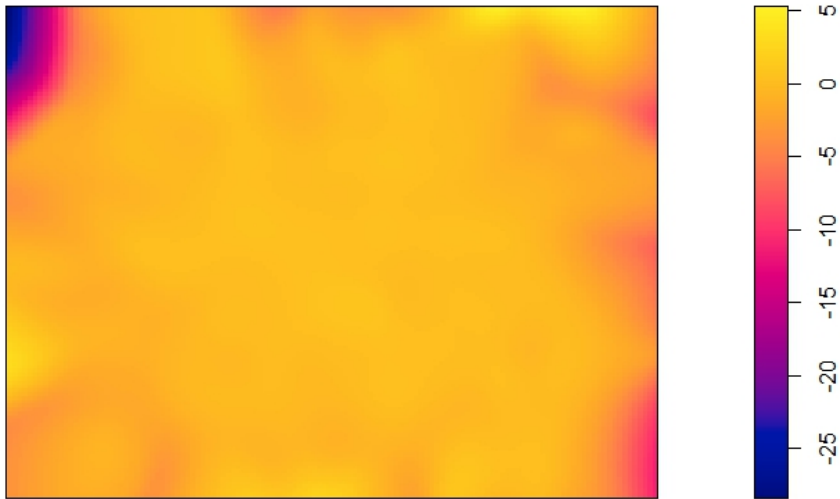


(a) Intensitetsskattning för punktmönstret i Figur 9c

(b) Intensitetsskattning för punktmönstret i Figur 9d

Figur 10: Intensitetsskattningar för punktmönstrena från figurer 9c och 9d med bandbredd $h = 31.41$.

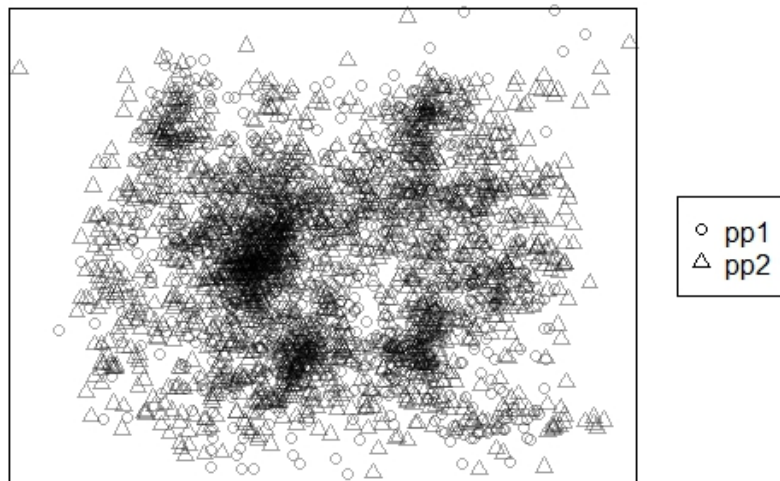
Intensitetsskattningar representeras av objekt av typen `real-valued pixel image` i R. Dessa är matriser av storlek 128×128 där värdena i elementen representerar intensiteten för de pixlar som elementen motsvarar. Givet intensitetsskattningarna för ett initialt och ett avslutande punktmönster beräknas den relativa riskytan, i enlighet med Ekvation (4). I R sker detta elementvis, vilket gör att riskytan också representeras av ett `real-valued pixel image`-objekt. För att skatta integralen i Ekvation (5) så summeras elementen i detta objekt. Detta producerar värdet T_0 som mäter hur mycket de två intensitetsskattningarna skiljer sig åt. För att avgöra om detta värde är signifikant genomförs därefter Monte Carlo-metoden. Ytornas relativa risk visas i Figur 11.



Figur 11: Relativ riskyta för de första och sista 30 s från figurer 10a och 10b.

3.2.2 Implementering av Monte Carlo-metoden

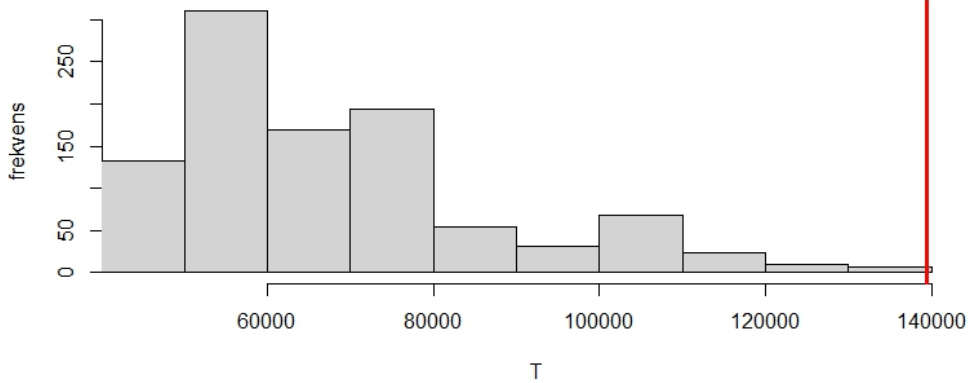
När två punktmönster, med n respektive m antal punkter, jämförs beräknas deras T -värde T_0 . Samtliga $n + m$ punkter samlas i en pool, se Figur 12. Poolen används för att genomföra Monte Carlo-simuleringar av en stor mängd ($N = 999$) nya T -värden, T_j , $j = 1, \dots, N$. Denna delas upp i N par nya punktmönster, återigen med n respektive m punkter vardera (återläggning sker mellan simuleringarna). På så sätt simuleras N par av punktmönster från den sammansatta poolen.



Figur 12: Pool av punkter från punktmönsterna i figurer 9c (pp1) och 9d (pp2). Det är från denna pool urvalet sker i Monte Carlo-metoden.

Förutsatt nollhypotesen, att punktmönsterna som jämförs har samma intensitet, så borde det sammansatta punktmönstret och följaktligen paren av de nya punktmönsterna, vara realiseringar av samma fördelning. Med hjälp av intensitetsskattningarna av dessa nya punktmönster beräknas den relativa risken hos paren, samt måtten T_j , $j = 1, \dots, N$. För att avgöra om T_0 är signifikant så beräknas p -värdet enligt Ekvation (7), signifikansnivån som används är $\alpha = 0.05$. Fördelningen

av T -värdena från Monte Carlo-simuleringarna, för jämförelsen av de 30 s långa intervallen, visas som ett histogram i Figur 13. Det röda strecket visar var T_0 placerar sig på denna distribution. Att T_0 befinner sig långt ut på någon av svansarna av distributionen motsvarar ett lågt p -värde, vilket förkastar nollhypotesen.

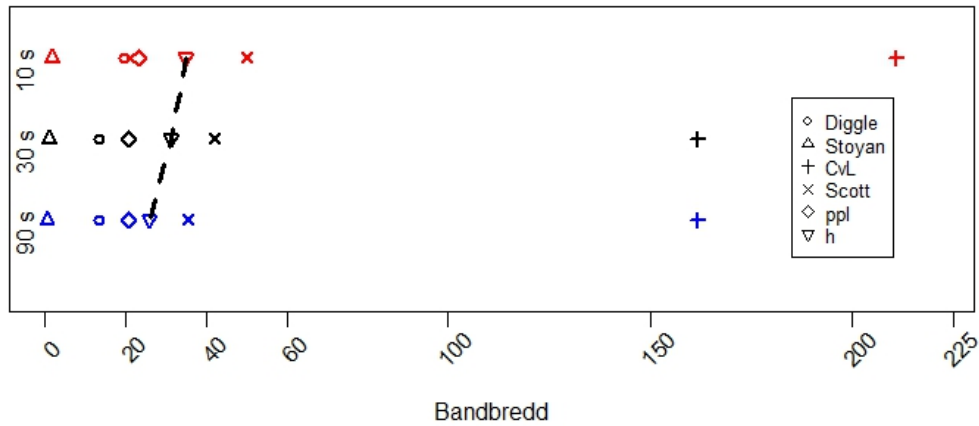


Figur 13: Histogram av Monte Carlo-fördelningen för de första och sista 30 s med en bandbredd $h = 31.41$. Detta motsvarar p -värdet $p = 0.001$.

3.2.3 Val av bandbredd

Som nämnts i Avsnitt 2.2.2 är valet av bandbredd h av stor betydelse. Inför skattningen av intensitetsytor beräknas en initial bandbredd h_0 med hjälp av funktionen `bw.diggle`. Denna metod använder korsvalidering och bygger på en artikel av Diggle (1985) [20]. I vissa fall är dock h_0 för lågt för att, i nästa steg, beräkna den relativa risken utan numeriska problem. Detta på grund av förekomsten av nollvärden i matrisen, som motsvarar nämnaren, i Ekvation (4). För att komma runt detta så justeras bandbredden vid eventuella numeriska problem — både under beräkningen av den relativa risken och motsvarande beräkningar i de efterföljande Monte Carlo-simuleringarna. I detta arbete innebär justeringen att bandbredden ökas med 10%. Därefter börjar processen om på nytt med denna nya bandbredd. Detta fortgår tills den relativa risken, och motsvarande beräkningar i Monte Carlo-metoden, kan genomföras utan numeriska fel. Därmed blir den slutgiltiga bandbredden $h = h_0 \cdot 1.1^k$, där k är antalet gånger bandbredden har ökat för att undvika numeriska problem, och bandbredden förblir oförändrad genom hela Monte Carlo-metoden.

Funktionen `bw` erbjuder utöver `bw.diggle` flera andra sätt att beräkna en lämplig bandbredd för ett punktmönster. Några exempel på dessa är `bw.stoyan`, `bw.CvL`, `bw.scott` och `bw.ppl` [19]. Figur 14 visar hur dessa förhåller sig till de bandbredder som används i detta arbete.



Figur 14: Ett urval av bandbredder från olika versioner av metoden `bw` för jämförelser av tidsintervall av längderna 10, 30 och 90 s. Bandbredderna h som binds av punkterade linjer är de bandbredder som använts i arbetet.

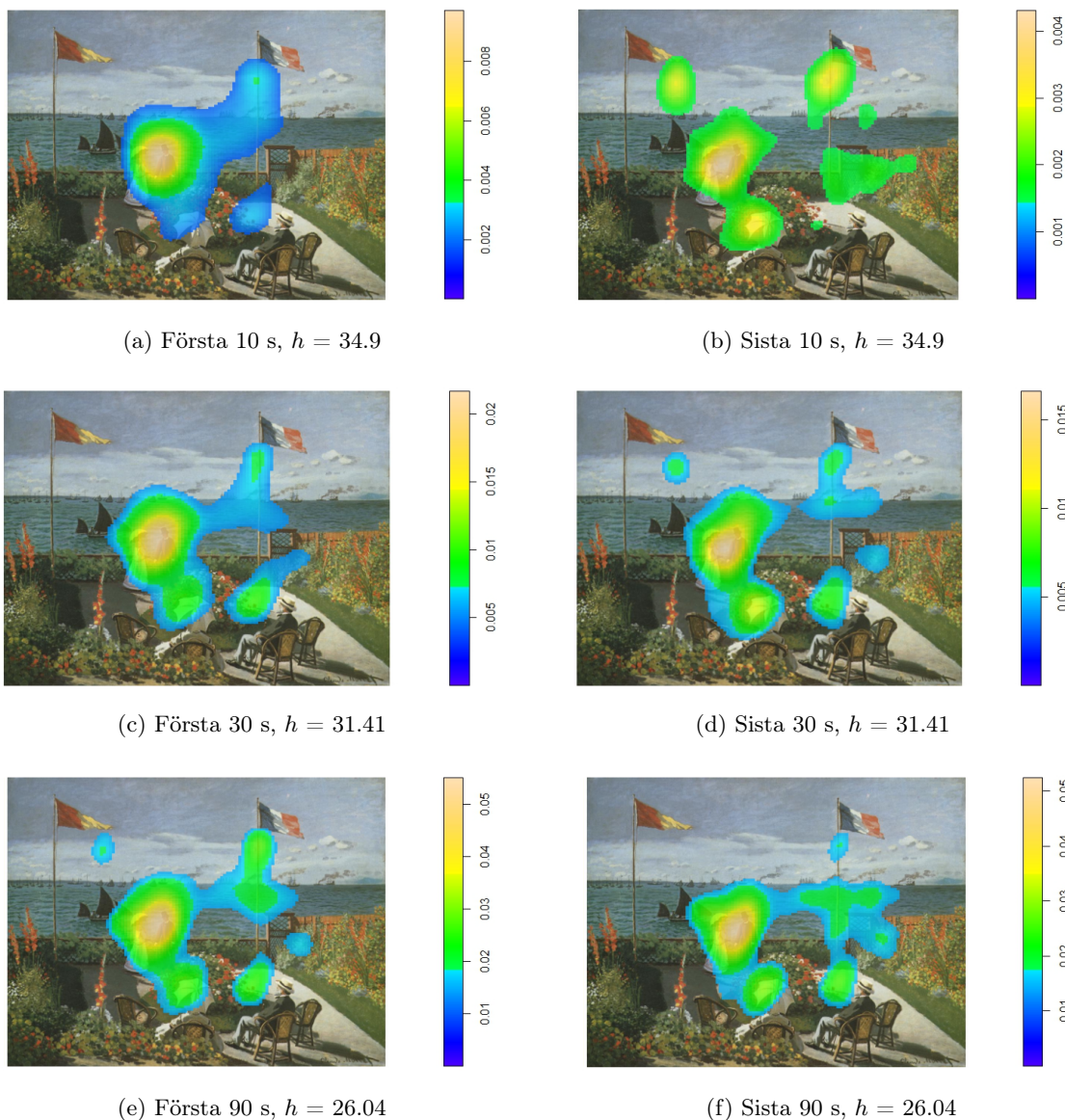
Då längre tidsintervall resulterar i punktmönster med fler fixpunkter så räcker ofta en lägre bandbredd för att undvika numeriska problem, detta syns i Figur 14. Bandbredden som används i jämförelsen av de första och sista 90 s ($h = 26.04$) är alltså lägre än den som används i jämförelsen av de första och sista 10 s ($h = 34.9$).

4 Resultat

Resultatet tas fram på två olika sätt i följande avsnitt. Dels genom en visuell analys där intensitetsskattningar och riskytorna betraktas noggrant. Därefter presenteras p -värdet och det bedöms om det är signifikant för de olika tidsintervallen i det statistiska testet.

4.1 Visuell analys

En visuell analys av intensitetsskattningarna klargör vilka delar av tavlan som samtliga deltagare har fokuserat på. De olika intensitetsytorna (de övre 15%), som visas på Monets tavla, syns i Figur 15. På detta sätt går det att se skillnader i fokus mellan tidsintervallen.

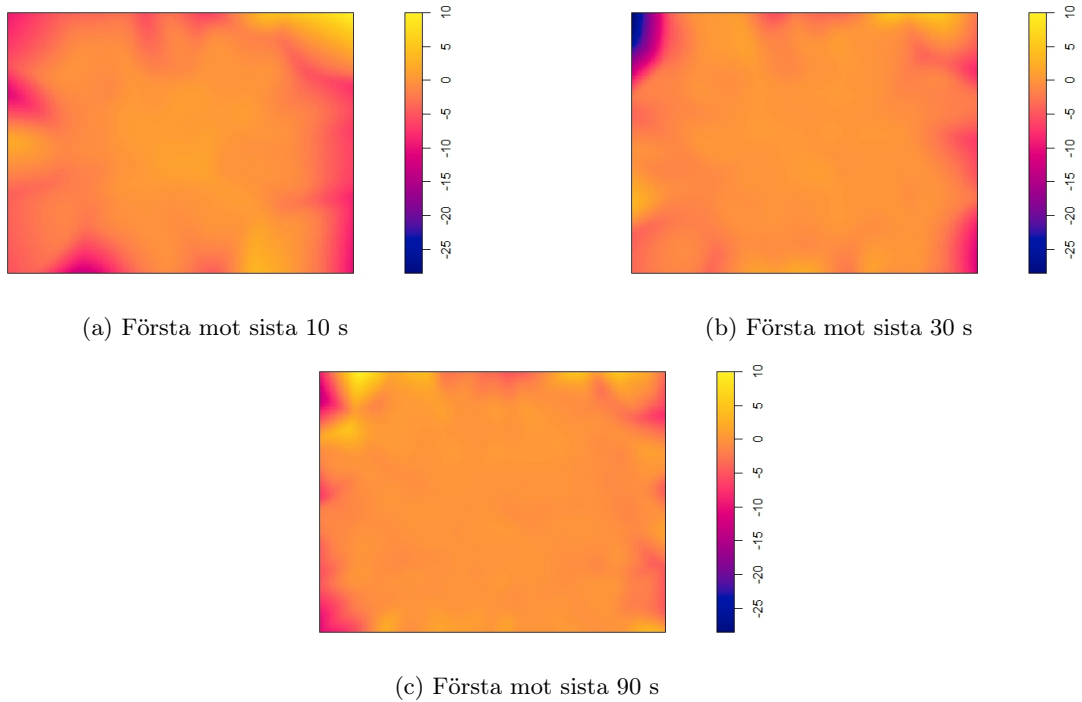


Figur 15: De övre 15% av intensitetsskattningarna, med bandbredd h , från de sex tidsintervallen. Intensitetsytorna är baserade på den sammansatta datan av alla deltagare.

I Figur 15 går det att identifiera vilka områden som genomgående attraherar fokus. Dessa är kring paret, paraplyet och den övre delen av den högra flaggstången. Deltagarna har i samtliga fall främst fokuserat på tavlans centrala delar — deras blickar har inte, i någon större bemärkelse, rört sig mot tavlans kanter eller hörn.

Jämförs de första och sista 10 s (Figur 15a och 15b) så kan man se att deltagarnas uppmärksamhet nästan uteslutande riktas mot paret i början av visningstiden. I de avslutande 10 s är deltagarnas fokus betydligt mer utspritt. Vad gäller de första och sista 30 s (Figur 15c och 15d) så syns små avvikelser — till exempel vid den vänstra flaggan och ovanför gentlemannen i stolen. Även de första och sista 90 s (Figur 15e och 15f) visar små skillnader mellan intensitetsytorna, såsom vid den vänstra och högra flaggstången. De största skillnaderna verkar vara mellan tidsintervallen för 10 s jämfört med de för 30 och 90 s.

Ett annat sätt att se skillnaderna mellan intensitetsskattningarna är att betrakta deras riskytor. Riskytorna tas fram enligt den metod som presenterats i Avsnitt 3.2.1 och visas i Figur 16.



Figur 16: Riskytorer av intensitetsskattningarna mellan tidsintervallen för 10, 30 och 90 s.

Gemensamt för alla riskytorer är att de visar på störst skillnader i närheten av kanterna. De centrala delarna av ytorna har värden närmre 0, vilket tyder på att intensitetsytorna liknar varandra i detta område. I Figur 16 syns det att 16a har fler skillnader längs kanterna jämfört med 16b och 16c, dessa kantregioner sträcker sig också längre in mot mitten. Figur 16 visar även att 16b och 16c är förhållandevis lika förutom att 16b visar på en stor skillnad i det övre vänstra hörnet.

4.2 Resultat från Monte Carlo-test

Monte Carlo-metoden används för att ta fram p -värdet, vilket avgör om skillnaderna är statistiskt signifikanta. Signifikansnivån för detta test är $\alpha = 0.05$, vilket innebär att nollhypotesen förkastas för p -värden lägre än α . Trots att flera test görs på samma datamängd så har signifikansnivån ej justerats för att kompensera för detta. Resultaten för tre jämförelser av de sammansatta punktmönstrena från samtliga deltagare visas i Tabell 1. Detta motsvarar punktmönstrena som visas i Figur 9. Grupperna *experter* och *noviser* undersöktes endast för tidsintervallen av längd 30 s. Resultaten för dessa jämförelser redogörs i Tabell 2.

Tabell 1: p -värden och bandbredder, h för de tidsintervall som testas.

Tidsintervall	h	p
10 s	34.90	0.003
30 s	31.41	0.001
90 s	26.04	0.574

Tabell 2: p -värden och bandbredder h för grupperna *experter* och *noviser* (30 s).

Grupp	h	p
Experter	36.20	0.001
Noviser	34.55	0.002

Deltagarernas punktmönster undersöktes även individuellt för tidsperioderna 30 s. Nollhypotesen kunde ej förkastas i 6 av 20 fall. Av dessa 6 var hälften *experter* och hälften *noviser*. Samtliga p -värden hittas i Tabell 3 i Appendix A.

5 Diskussion

Syftet med detta arbete var att använda intensitetsskattning för att avgöra om vilka delar av en tavla som en person tittar på förändras över tid. Nollhypotesen var att det inte sker någon förändring. För att avgöra detta genomfördes en visuell analys av kernellskattade intensitetsytor. Kelsall och Diggles test användes för att mäta den relativa risken mellan sådana intensitetsytor. Monte Carlo-simuleringar användes för att avgöra om nollhypotesen kunde förkastas med en signifikansnivå på $\alpha = 0.05$ — p -värdena justerades ej för multipla tester.

Studien använde data från tjugo studenters ögonrörelser — inspelat när de tittat på en tavla. Intensitetsytorna som skattades var från initiala och avslutande delintervall av en tre minuter lång visningstid. Intensitetsytor från de initiala och avslutande tidsintervall av samma längd jämfördes. Olika längder av tidsintervall användes vid olika jämförelser — nämligen 10, 30 och 90 s. I huvudsak studerades sammansatta punktmönster av samtliga deltagares ögonrörelser.

En visuell analys av intensitetsskattningen indikerar en märkbar skillnad mellan intensitetsytorna av de första och sista 10 s. Detsamma gällde även de första och sista 30 s. Däremot verkade de första och sista 90 s inte påvisa lika stora skillnader. Det statistiska testet som genomfördes bekräftade att för en signifikansnivå av $\alpha = 0.05$ så var 10 respektive 30 s intervallen statistiskt signifikanta men inte 90 s intervallet. Alltså förkastades nollhypotesen att intensitetsytorna skulle vara likartade för jämförelsen för de första och sista 10 respektive 30 s. Nollhypotesen kunde ej förkastas för jämförelsen av de första och sista 90 s.

Det ursprungliga syftet var att fokusera på jämförelsen av de första och sista 30 s. Detta eftersom tidigare forskning av Smith och Smith antydde att en persons intresse för en tavla minskar efter ungefär 30 s [7, 8]. Båda p -värdena för 10 och 30 s var lägre än $\alpha = 0.05$, vilket klassar de båda som signifikanta — till skillnad från 90 s. En förklaring av detta kan vara av att små skillnader i punktmönster med färre fixeringar kan ha en större påverkan på intensitetsskattningar. De större skillnaderna för korta intervall föreslår att det kan vara mer intressant att studera dessa närmare i vidare studier.

Då ett test upprepas flera gånger kan detta ge ett falskt positivt resultat, det vill säga att nollhypotesen förkastas då den ej borde det. För att kompensera för detta finns det korrigeringar som kan göras, dock har ej någon sådan korrigering använts i detta arbete, vilket är en möjlig felkälla.

En observation som gjordes under arbetets gång var att valet av bandbredd verkade ha en direkt relation till p -värdet. Utan någon genomgående analys verkade en ökad bandbredd konsekvent leda till ett lägre p -värde. Detta, i kombination med de numeriska problem vid beräkningen av den relativa risken, ledde till en ovanlig metod vid valet av bandbredd. Avsikten var att behålla bandbredden så låg som möjligt för att inte få artificiellt små p -värden — men stor nog för att undvika numeriska problem.

I Ylitalo, Särkkä och Guttorps artikel så normaliserades intensitetsytorna innan den relativa risken beräknades [11]. I det här arbetet normaliserades ej intensitetstoyrorna. Då p -värdena verkade vara direkt kopplade till valet av bandbredd så kan detta ha varit ett misstag. I synnerhet då samma bandbredd användes för intensitetsskattningarna i täljare och nämnare för samtliga relativa risker som beräknades — trots att det i vissa fall rekommenderas att använda en högre bandbredd för intensitetsskattningen i täljaren. Då bandbredden går mot oändligheten så borde de resulterade intensitetsytorna konvergera mot två plan. Förutsatt att dessa plan är förhållandevis parallella så mäter den relativa risken och det efterföljande T -värdet inget mer än skillnaden i amplituden för dessa plan (alltså hur högt de är över nollplanet). Hade intensitetsytorna normaliserats hade två sådana parallella plan varit ekvivalenta med varandra. Att p -värdena verkade minska när bandbredden ökade kan alltså innebära att det inte var något annat än amplituden av de relativa riskytorna som mättes.

Kelsall och Diggles metod användes även i artikeln av Ylitalo, Särkkä och Guttorp för att jämföra intensitetsytorna mellan experter och noviser [11, 12]. De diskuterar i sin artikel om att de inte hittade någon statistisk signifikant skillnad mellan ytorna — trots att de hittade vissa skillnader mellan dem i sin visuella analys. Dessutom påpekar de hur de största skillnaderna hittades nära kanterna av tavlan, där det var få fixeringar i båda grupperna. Samma problematik uppstår i denna

undersökning mellan tidsintervall. Figur 15 visar att de övre 15% av intensitetsytorna aldrig var nära kanterna. Detta fynd bekräftas i relativ riskytorna i Figur 16 där ytorna konsekvent tyder på likheter i centrala delar av tavlan, medan kanterna och hörnen visar på stora skillnader. Detta kan vara en huvudsaklig anledning till att skillnaden mellan intensitetsytorna för 30 s-intervallen klassades som signifikant — där den absolut största skillnaden är belägen i det övre vänstra hörnet i Figur 16b. Skillnaden i analysen för intensitetsytorna från intervall av längd 10 s klassades också som signifikant men i Figur 16a är skillnaden i den relativa risken mer utspridd över hela fönstret.

Med tanke på att det överlag är få fixeringar utanför och nära kanterna är det, som nämnt i Avsnitt 3.1.2, inte troligt att kantkorrigering hade löst problemet. Ett alternativt tillvägagångssätt för att kringgå detta problem hade varit att jämföra mindre delar av tavlan — istället för tavlan i sin helhet. Genom att undersöka specifika intresseområden (som till exempel paret i mitten) och jämföra intensitetsskattningar av punktmönster från denna del av tavlan skulle de låga antalet punkterna i kanterna av tavlan inte vara ett problem.

Studien av Smith och Smith visade att visningstiden av en tavla typiskt sätt inte överskrider 30 s. I denna studie tittade deltagarna på en tavla i 180 s, vilket är betydligt längre än 30 s. En sådan förlängd visningstid kan påverka resultatet av experimentet på flera sätt. Till exempel kan det ge deltagarna möjlighet att observera detaljer som annars hade förbisetts vid kortare visningstider. Det kan även öka risken för trötthet eller uttråkning, vilket kan påverka deras uppfattning och upplevelse av tavlan. Slutligen kan den långa visningstiden leda till en annan grad av engagemang och intresse för tavlan, vilket kan påverka deras bedömning och respons på den. Det är därför viktigt att ta hänsyn till den långa visningstiden vid analys och tolkning av resultaten. Ett sätt att göra det skulle vara att jämföra andra tidsintervall än de som påbörjar och avslutar visningstiden.

I `spatstat` erbjuds funktionen `relrisk`, som beräknar den relativa risken mellan två punktmönster, och funktionen `segregation.test`, som genomför Monte Carlo-test för att avgöra om en samling av punktmönster är realiseringar av olika fördelningar. Dessa verktyg är högst relevanta i denna sortens arbete. Valet att inte använda dessa funktioner i detta arbete baserades i synnerhet på en brist av rätt kompetens inom programspråket R. Avsaknaden av expertis inom R och `spatstat`-paketet ledde till att de histogram som önskades inte kunde produceras, om Monte Carlo-simuleringarna inte genomfördes manuellt. Utöver det så ledde det mer manuella tillvägagångssättet till en ökad nivå av förståelse för de teoretiska verktyg som användes och ett stärkt förtroende för att det som koden producerade var det som eftersökts. Hade arbetet genomförts med inbyggda funktioner till den grad det var möjligt så hade kanske valet av bandbredd inte heller haft samma relation till p -värdena.

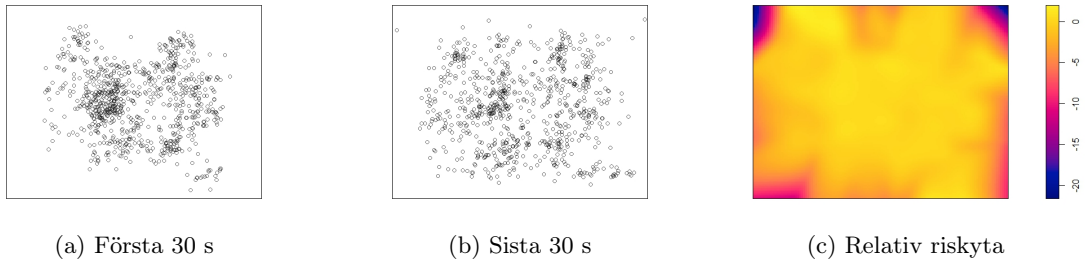
Sammanfattningsvis föreslår resultatet att de största skillnaderna uppstår i jämförelser av kortare tidsintervall. Det kan i efterföljande arbete vara intressant att jämföra fler korta tidsintervall, i synnerhet i början av visningstiden, snarare än längre tidsintervall. En studie med fler deltagare kan även vara av intresse för ett säkrare resultat.

Referenser

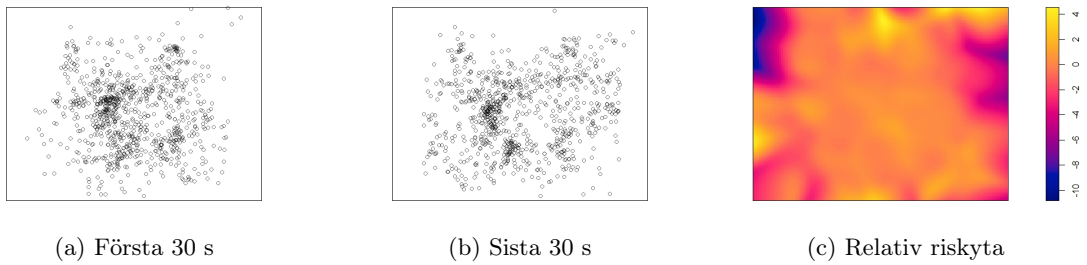
- [1] Holmqvist K, Andersson R. Eye tracking: A comprehensive guide to methods, paradigms and measures. Lund, Sverige: Lund Eye-Tracking Research Institute; 2017.
- [2] Just MA, Carpenter PA. A theory of reading: From eye fixations to comprehension. *Psychological review*. 1980;87(4):329-54.
- [3] Poole A, Ball LJ. Eye Tracking in Human-Computer Interaction and Usability Research: Current Status and Future Prospects. In: *Encyclopedia of Human Computer Interaction*. Liverpool, UK: Idea Group Reference; 2006. p. 211-9.
- [4] Galley N, Betz D, Biniossek C. Fixation durations—why are they so highly variable? *Advances in Visual Perception Research*. 2015:83-106.
- [5] Leigh RJ, Kennard C. Using saccades as a research tool in the clinical neurosciences. *Brain*. 2004;127(3):460-77.
- [6] Buswell GT. *How People Look at Pictures: A Study of the Psychology of Perception in Art*. Chicago, IL: The University of Chicago Press; 1935.
- [7] Smith JK, Smith LF. Spending time on art. *Empirical Studies of the Arts*. 2001;19(2):229-36.
- [8] Smith LF, Smith JK, Tinio PP. Time spent viewing art and reading labels. *Psychology of Aesthetics, Creativity, and the Arts*. 2017;11(1):77-85.
- [9] Hristova E, Grinberg M; New Bulgarian University Press. Time course of eye movements during painting perception. *Proceedings of the European conference on cognitive science*. 2011.
- [10] Diggle PJ. *Statistical Analysis of Spatial and Spatio-Temporal Point Patterns*. 3rd ed. Boca Raton, FL: CRC Press; 2014.
- [11] Ylitalo AK, Särkkä A, Guttorp P. What we Look at in Paintings: A Comparison between Experienced and Inexperienced Art Viewers. *Annals of Applied Statistics*. 2016;10(2):549-74.
- [12] Kelsall JE, Diggle PJ. Kernel estimation of relative risk. *Bernoulli*. 1995;1:3-16.
- [13] Gelfand AE, Diggle PJ, Guttorp P, Fuentes M. *Handbook of Spatial Statistics*. Boca Raton, FL: CRC Press; 2010.
- [14] Silverman BW. *Density estimation for statistics and data analysis*. London: Chapman and Hall; 1986.
- [15] Baddeley A, Rubak E, Turner R. *Spatial Point Patterns: Methodology and Applications with R*. Chapman & Hall/CRC Press; 2015.
- [16] Kelsall JE, Diggle PJ. Non-parametric estimation of spatial variation in relative risk. *Statistics in Medicine*. 1995;14:2335-42.
- [17] Ulam S, Metropolis N. The Monte Carlo Method. *Journal of the American Statistical Association*. 1949;44(247):335-41.
- [18] Hazelton ML. Kernel estimation of risk surfaces without the need for edge correction. *Statistical Medicine*. 2007;27(12):2269-72.
- [19] Baddeley A, Rubak E, Turner R. *spatstat: Analysing Spatial Point Patterns*; 2014. [Internet]. Hämtad från: <https://spatstat.org/>.
- [20] Diggle PJ. A Kernel Method for Smoothing Point Process Data. *Journal of the Royal Statistical Society Series C (Applied Statistics)*. 1985;34:138-47.

A Appendix A – Figurer och tabeller

A.1 Grupper

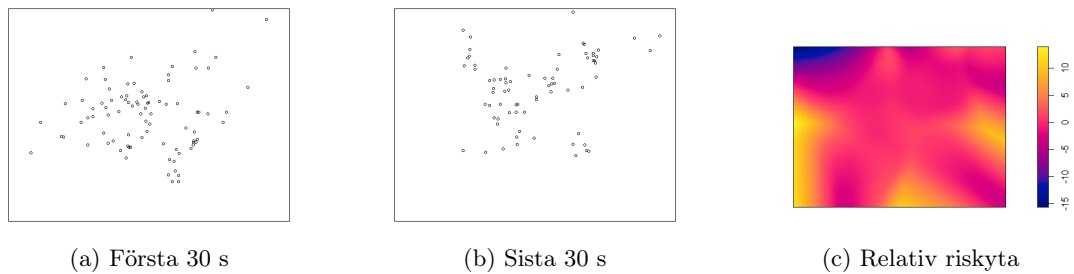


Figur 17: Sammansatta punktmönster för gruppen *noviser* och relativ riskytan.

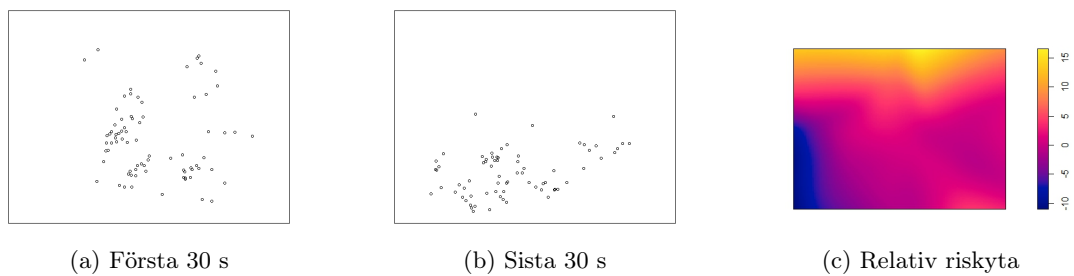


Figur 18: Sammansatta punktmönster för gruppen *experter* och relativ riskytan.

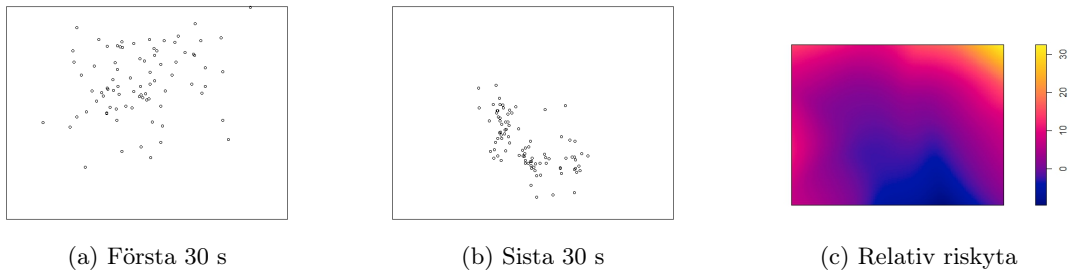
A.2 Individer



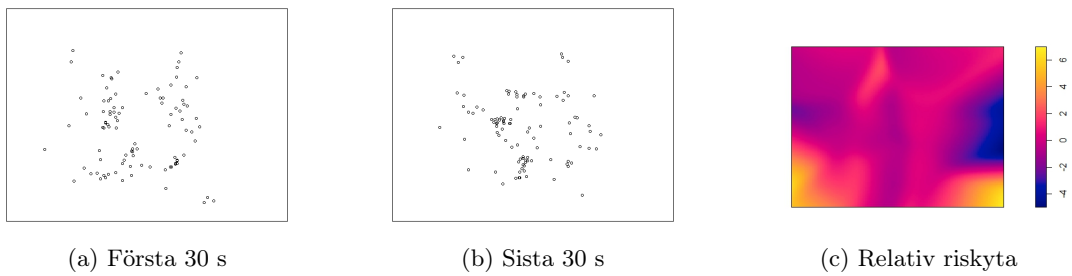
Figur 19: Punktmönster första och sista 30 s och relativ riskytan för deltagare 1



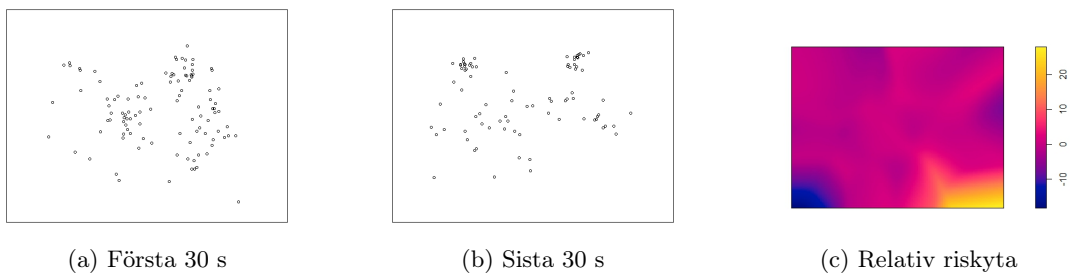
Figur 20: Punktmönster första och sista 30 s och relativ riskytan för deltagare 2



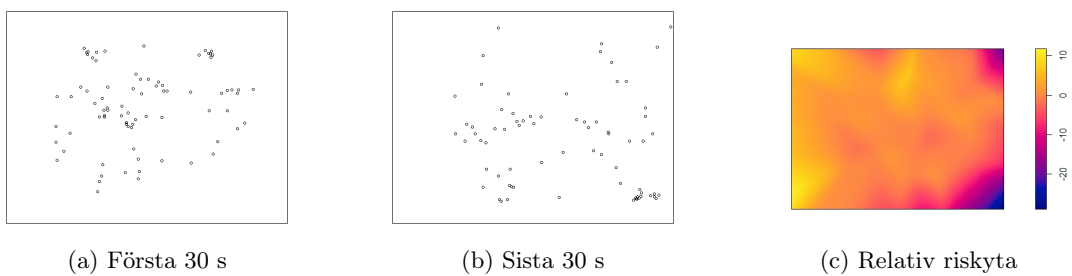
Figur 21: Punktmönster första och sista 30 s och relativ riskytan för deltagare 3



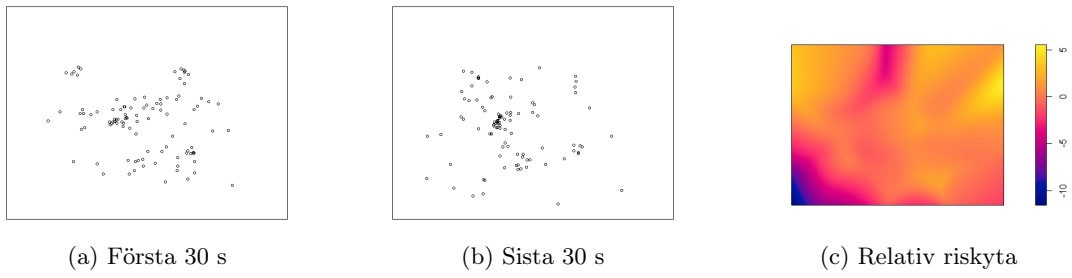
Figur 22: Punktmönster första och sista 30 s och relativ riskytan för deltagare 4



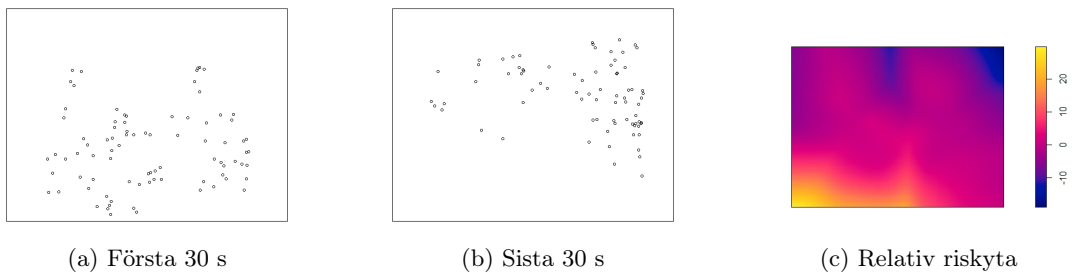
Figur 23: Punktmönster första och sista 30 s och relativ riskytan för deltagare 5



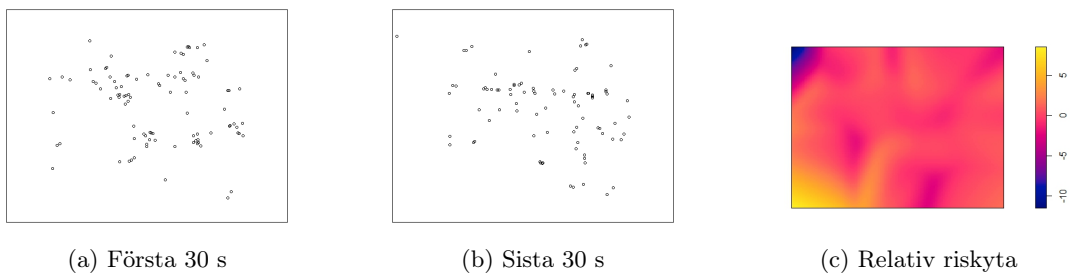
Figur 24: Punktmönster första och sista 30 s och relativ riskytan för deltagare 6



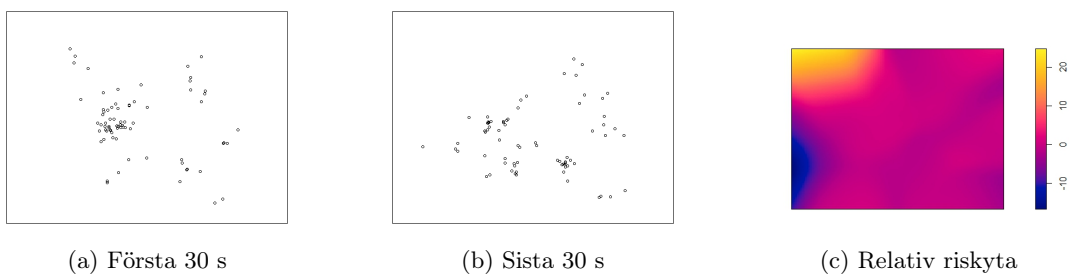
Figur 25: Punktmönster första och sista 30 s och relativ riskytan för deltagare 7



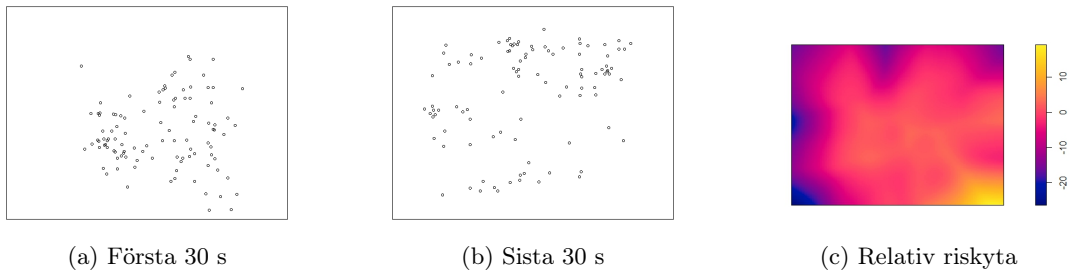
Figur 26: Punktmönster första och sista 30 s och relativ riskytan för deltagare 8



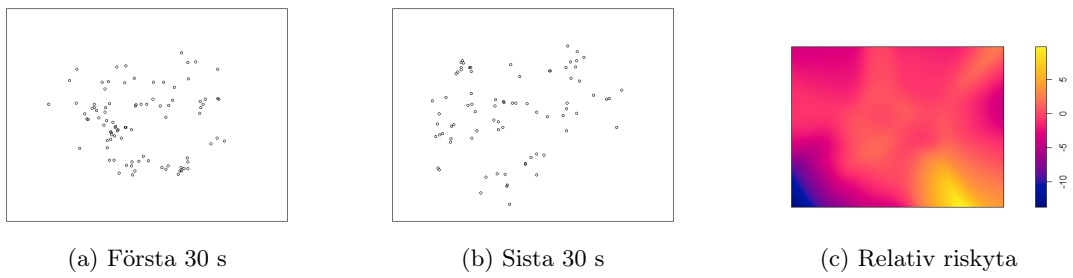
Figur 27: Punktmönster första och sista 30 s och relativ riskytan för deltagare 9



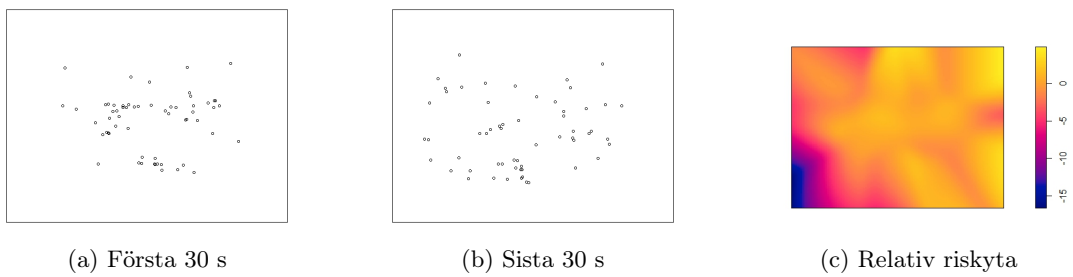
Figur 28: Punktmönster första och sista 30 s och relativ riskytan för deltagare 10



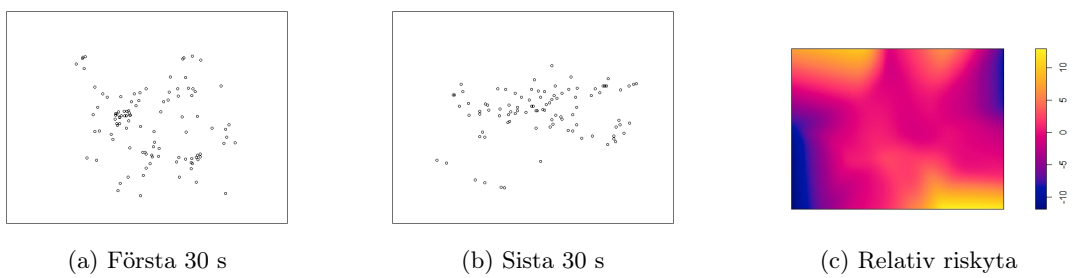
Figur 29: Punktmönster första och sista 30 s och relativ riskytan för deltagare 11



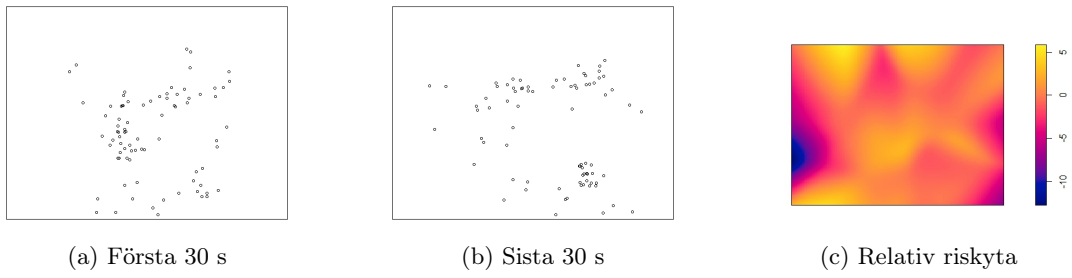
Figur 30: Punktmönster första och sista 30 s och relativ riskytan för deltagare 12



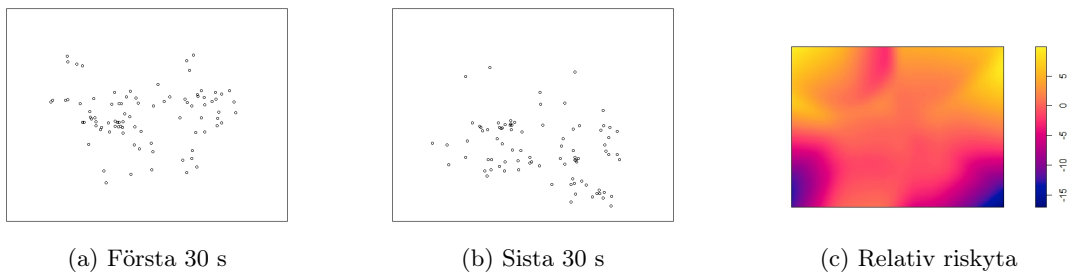
Figur 31: Punktmönster första och sista 30 s och relativ riskytan för deltagare 13



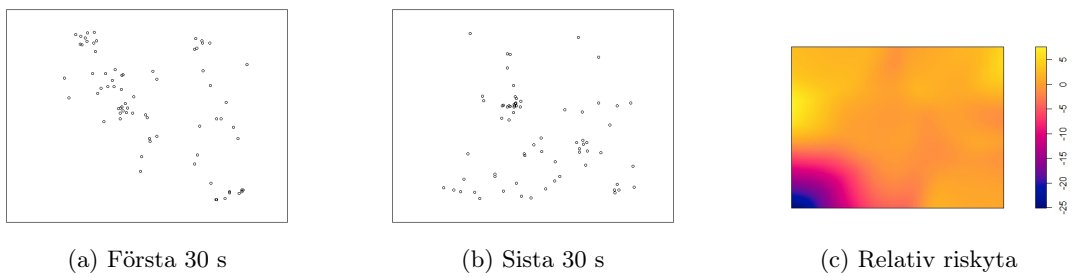
Figur 32: Punktmönster första och sista 30 s och relativ riskytan för deltagare 14



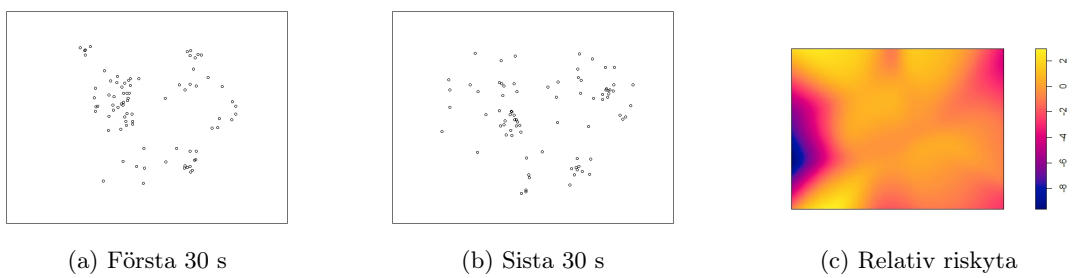
Figur 33: Punktmönster första och sista 30 s och relativ riskytan för deltagare 15



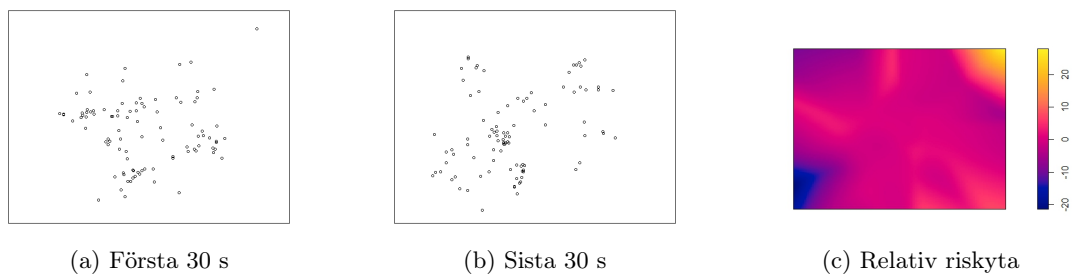
Figur 34: Punktmönster första och sista 30 s och relativ riskytan för deltagare 16



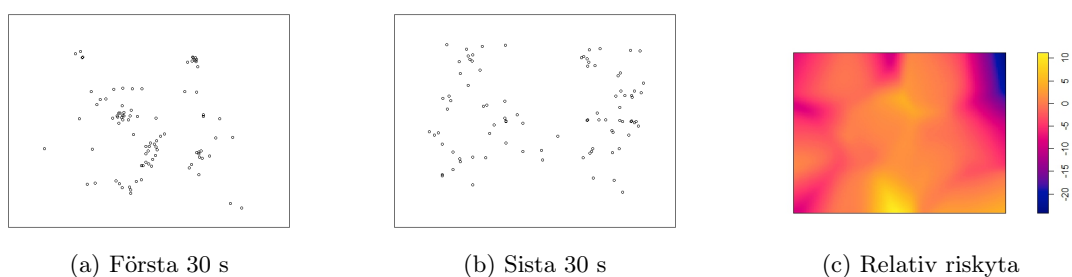
Figur 35: Punktmönster första och sista 30 s och relativ riskytan för deltagare 17



Figur 36: Punktmönster första och sista 30 s och relativ riskytan för deltagare 18



Figur 37: Punktmönster första och sista 30 s och relativ riskytan för deltagare 19



Figur 38: Punktmönster första och sista 30 s och relativ riskytan för deltagare 20

A.3 Tabeller

Tabell 3: p -värde och Bandbredd för individer. Klass 1 är noviser och klass 2 är experter.

ID	p -värde	Bandbredd h	Klass	Förkasta?
1	0.042	48.66	2	ja
2	0.010	67.13	2	ja
3	0.001	62.70	2	ja
4	0.519	54.17	2	nej
5	0.020	43.31	1	ja
6	0.001	46.23	1	ja
7	0.542	52.51	2	nej
8	0.001	51.88	2	ja
9	0.534	56.20	1	nej
10	0.002	55.08	1	ja
11	0.001	43.70	1	ja
12	0.005	53.00	1	ja
13	0.207	50.85	1	nej
14	0.005	50.61	2	ja
15	0.205	56.63	2	nej
16	0.001	52.01	1	ja
17	0.001	62.70	1	ja
18	0.177	64.66	1	nej
19	0.009	44.75	2	ja
20	0.001	44.97	2	ja

B Appendix B – CSR och Quadrant counting

B.1 Test av CSR

För att testa hypotesen om CSR (Complete spatial randomness) i en spatial punktprocess används en metod där området delas in i delområden. Data som erhålls genom denna metod består av punkter n_1, n_2, \dots, n_m i m delområden av area B , antagna vara oberoende. Låt n vara det totala antalet punkter i mönstret och E_i vara det förväntade antalet punkter i den i :te delområdet under CSR.

Men först behövs $N(B)$ som är ett sannolikhetsmått på fördelningen som följer en Poisson-fördelning med medelvärdet λB . Detta ges av formeln:

$$p_n(B) = e^{-\lambda B} \frac{(\lambda B)^n}{n!} \quad \text{för } n = 0, 1, 2, \dots \quad (8)$$

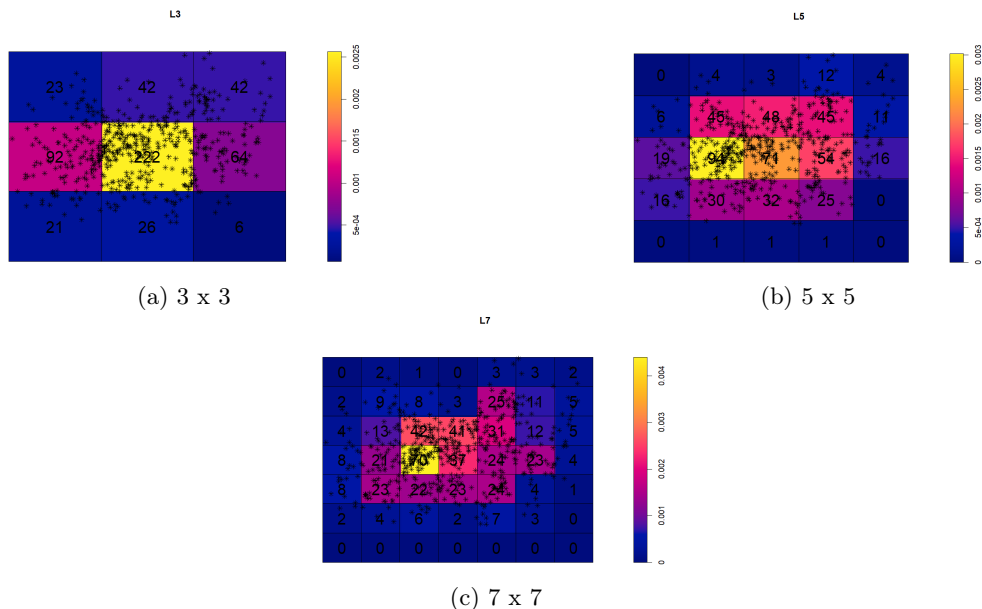
För att testa om de observerade punkterna följer en Poisson-fördelning med ospecificerat medelvärde använder vi spridningsindexet I , definierat som:

$$I = m \sum_{i=1}^m \frac{(n_i - \bar{n})^2}{(m-1)\bar{n}} \quad (9)$$

där \bar{n} är medelvärdet av de observerade beräkningarna. Täljaren för I ges av variansen s^2 , som beräknas:

$$s^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (n_i - \bar{n})^2 \quad (10)$$

Figur 39a, 39b och 39c nedan visar att datamängden inte är CSR då majoriteten av punkter befinner sig i centrum.



Figur 39: Quadrant counting av datamängden

C Appendix C – Kod

C.1 Main

```
1 library(spatstat)
2 library(jpeg)
3 library(scico)
4 library(spatial)
5 library(data.table)
6 library(TeachingDemos)
7
8 ### Chunk 1 #####
9 ### Setup #####
10 #####
11
12 ##set where code lives
13 setwd(
14   "C:/.../projectCode"
15 )
16
17 ##where data and image lives
18 load(
19   "C:/.../Monet.RData"
20 )
21
22 ## Useful functions
23 source("jointPP.R") ## Joint pp of several individuals
24
25 #import data set
26 attach(Monet)
27
28 ##Select only fixations that are within the frame
29 ##Also removes fixations shorter than 40ms
30 data <- subset(Monet,
31                inpic == TRUE
32                & dur40 == 1)
33
34 ## Set the dimensions of frame and window object
35 frameX <- c(0, 1017)
36 frameY <- c(0, 767)
37 win <- owin(frameX, frameY)
38
39
40 ### Chunk 2 #####
41 ### Settings #####
42 #####
43
44 ## set timeperiods
45 tp1 <- c(0,30) * 1000
46 tp2 <- c(30, 180) * 1000
47
48 ## Select what individuals to include (1:20)
49 idlist = c(1:20)
50
51 ## Set number of iterations for Monte Carlo
52 nite <- 999
53
54 ## Set Initial bandwidth to be tested
55
56 ## Joint point patterns for individuals
57 ## One for first time period and second time period
58 pp1 <- jointPP(data = data, ids = idlist , tp1, win)
59 pp2 <- jointPP(data = data, ids = idlist , tp2, win)
60
61 ## Merge to singletype ppp-object
62 ppPool <- superimpose(pp1, pp2)
63
64
65 ###Chunk 3 #####
66 ### Computations #####
```

```

67 #####
68
69 ## Joint point patterns for individuals
70 ## One for first time period and second time period
71
72 pp1 <- jointPP(data = data, ids = idlist , tp1, win)
73 pp2 <- jointPP(data = data, ids = idlist , tp2, win)
74
75 ## Merge to singletype ppp-object
76 ppPool <- superimpose(pp1, pp2)
77
78 ## Calculate initial bandwidth using diggle
79 ## This might turn out to be too small, and is in that case increased further down
80 bandwidth <- bw.diggle(ppPool)
81
82 ## Create empty objects to catch results from monte carlo
83 rr_j <- list()
84 T_j <- 0 * c(1:nite)
85
86 #####
87 ## A quick explanation as to the structure of the following code:
88 ##-----
89 ## This repeat-loop will try to compute real relrisk densities for pp1 in
90 ## relation to pp2, and approximate the volume under the relrisk surface
91 ## according to Kelsall and Diggle 1995a. This real value is saved as "val".
92 ##
93 ## Then the inner forloop is the monte carlo simulation in accordance to pg.14
94 ## in the same Kelsall and Diggle 1995a. The approximated volumes under the cased
95 ## relrisk
96 ## are saved in T_j-vector and will finally generate a histogram so
97 ## that we can accuire a p-value by seeing where the real value ends up in this
98 ## distribution.
99 ##
100 ## While the bandwidth is set by bw.diggle(), this likely leads
101 ## to log(d1/d2) generating NaN's. The if-clause will catch this and update the
102 ## bandwidth by increasing it by 10% and then re-run the entire repeat-loop with
103 ## this new bandwidth. Further down, in the monte carlo-loop the a similar if-
104 ## clause is needed. Indeed even though the real relrisk might not produce any
105 ## NaN's for a specific bandwidth, it might still be small enough so that there
106 ## are NaN's generated in the monte carlo simulation. If this happens, the
107 ## bandwidth is again increased by 10% and the ENTIRE repeat loop is restarted.
108 ## This includes redoing the real relrisk rr again. This means we use the same
109 ## bandwidth throughout the entire monte carlo simulation.
110 ## for reproducibility
111 set.seed(123)
112
113 ## the warnings generated by this code are handled by increasing the bandwidth
114 ## so we do not want to read each warnings
115 ## set warn = 1 if you want to read
116 options(warn = -1)
117
118 repeat {
119
120   ## Acquire the densities for pp1 and pp2
121   d1 <- density(pp1, sigma = bandwidth)
122   d2 <- density(pp2, sigma = bandwidth)
123
124   ## Compute the relative risk
125   ## Kelsall and Diggle 1995a
126   rr <- log(d1 / d2)
127
128   ## Here we ensure that there are no NaN's generated. If so, we increase the
129   ## Bandwidth and restart the investigation
130   if (sum(!is.finite((sum(rr$v)))) == 1) {
131     bandwidth <- bandwidth * 1.1
132     next
133   }
134
135   ## The volume under the relative risk surface according to

```

```

136 ## Kelsall and Diggle 1995a
137 val <- sum(rr ^ 2)
138
139 ## Monte Carlo Simulations
140
141 for (j in 1:nite) {
142
143   #Select index to case from pool
144   idx <- sample(1:ppPool$n, pp1$n)
145
146   #Two pps. The case and the control in two separate pps
147   casePP <- subset(ppPool, subset = idx)
148   controlPP <- subset(ppPool, subset = setdiff(1:ppPool$n, idx))
149
150   #The corresponding densities
151   caseDensity <- density(casePP, sigma = bandwidth)
152   controlDensity <- density(controlPP, sigma = bandwidth)
153
154   # Calculate relative risk.
155   rr_j[[j]] <-
156     log(caseDensity / controlDensity)
157
158   # Here we ensure that there are no NaN's generated. If so, we increase the
159   # Bandwidth and restart the investigation
160   if (!is.finite((sum(rr_j[[j]])))) {
161     bandwidth <- bandwidth * 1.1
162     break
163   }
164
165   # The volume under the relative risk surface according to
166   # Kelsall and Diggle 1995a
167   # This corresponds to the "val" in the real case above
168   T_j[j] <- sum(rr_j[[j]] ^ 2)
169
170 }
171 # If all iterations gone through for a bandwidth without numerical problems
172 # we have the required result and loop breaks.
173 if (j == nite) {
174   print("No NaN's produced")
175   print(c("Final bandwidth is", bandwidth))
176   break
177 }
178 }
179
180 ### Chunk 4 #####
181 ### Produce histograms and images of densities and relrisk #####
182 #####
183
184
185 dev.off()
186
187 ## Framing
188 xmin = min(min(T_j), val) * 0.99
189 xmax = max(max(T_j), val) * 1.01
190
191 ## Hist
192 hist(T_j, xlim = c(xmin, xmax))
193
194 ## P-val
195 abline(v = val, col = "RED", lwd = 3)
196 print(pvalue <- (sum(T_j >= val)+1) / (nite+1))
197
198
199 par(mar = c(5,5,5,5))
200 ## densities
201 plot(d1,main="")
202 plot(d2,main="")
203
204 ## densities persp
205 persp(d1, main="", axes=TRUE, ticktype="detailed")

```

```
206 persp(d2, main="", axes=TRUE, ticktype="detailed")
207
208 ## relrisk
209 plot(rr, main="")
210 dev.off()
```

C.2 jointPP.R

```
1   jointPP<-function(data = data,
2                       ids = c(1, 2, 3),
3                       timeperiod = c(-Inf, Inf),
4                       win = owin(c(0,1017), c(0,767))
5                       ){
6
7   tmp <- subset(data,
8                 id %in% ids &
9                 data$timestamp > min(timeperiod) &
10                data$timestamp < max(timeperiod)
11                )
12
13   pp <- ppp(tmp$locX,
14             tmp$locY,
15             win
16             )
17
18   return(pp)
19 }
```