Haarmåttet på en lokalkompakt grupp

Ett bevis från grunden av dess existens och entydighet

The Haar Measure of a Locally Compact Group

Examensarbete för kandidatexamen i matematik vid Göteborgs universitet

Max Fölsch
Louise Kvarnbrant
Simon Månsson Nylund

Institutionen för Matematiska vetenskaper
CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
GÖTEBORGS UNIVERSITET
Göteborg, Sverige 2023

Haarmåttet på en lokalkompakt grupp

Ett bevis från grunden av dess existens och entydighet

Examensarbete för kandidatexamen i matematik vid Göteborgs universitet
Max Fölsch   Louise Kvarnbrant   Simon Månsson Nylund

Handledare: Eusebio Gardella
Jan Gundelach

Institutionen för Matematiska vetenskaper
CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
GÖTEBORGS UNIVERSITET
Göteborg, Sverige 2023

Förord

I det här kandidatarbetet presenteras bevis för existensen respektive entydigheten av ett vänster-Haarmått på varje lokalkompakt grupp. Arbetet har huvudsakligen varit en gruppinsats, men för att underlätta individuell bedömning presenteras här en lista över vilka delar av rapporten respektive författare har haft huvudansvar för. Individuella tidsloggar och en gemensam dagbok som detaljerar arbetsprocessen har också förts.

- **Max Fölsch**: Inledning, kapitel 4, avsnitt 5.3, Appendix C samt Appendix D.
- **Louise Kvarnbrant**: Sammandrag och abstract, kapitel 3, avsnitt 5.2 samt Appendix B.
- **Simon Månsson Nylund**: Populärvetenskaplig presentation, förord, kapitel 2, avsnitt 5.1 samt Appendix A.

Vi vill varmt tacka våra handledare Eusebio Gardella och Jan Gundelach för deras kontinuerliga stöd under arbetets gång.

Populärvetenskaplig presentation

I grundskolan får elever lära sig hur man beräknar arean och volymen av diverse geometriska objekt. Man lär sig till exempel att arean av en rektangel erhålls genom att multiplicera rektangelns sidlängder med varandra, och att volymen av ett klot fås genom att multiplicera klotets radie upphöjt i tre med en konstant som innehåller talet pi. En naturlig fråga att ställa sig är hur man har kommit fram till de här formlerna. I synnerhet kan man fråga sig om det finns en allmän definition av arean och volymen av geometriska figurer i planet respektive rummet från vilken de ovan nämnda formlerna följer.

Henri Lebesgue presenterade år 1901 en teori som idag kallas för måtteori, i vilken praktiskt taget alla tänkbara geometriska objekt tilldelas ett mått. Utöver att vara exempel på sådana mätbara geometriska figurer har rektangeln och klotet gemensamt att deras mått inte förändras när figurerna förflyttas i planet respektive rummet. Givet vilken rektangel som helst, om vi förflyttar den till en annan position i planet, så förändras inte dess area. På samma sätt förändras inte ett klots volym när klotet förflyttas genom rummet. Denna egenskap är i själva verket gemensam för alla de geometriska objekt som Lebesguemåttet verkar på, och är så pass viktig att den har fått ett eget namn: translationsinvarians.

Lebesguemåttet visar sig vara ett specialfall av ett mycket mer allmänt fenomen. Planet och rummet har nämligen två större strukturer gemensamt. Dels är de vad som kallas för grupper; genom att fixera en referenspunkt i planet, så erhåller man för varje par av punkter i planet på ett naturligt sätt en ny punkt i planet, genom att lägga samman de pilar som utgår ifrån referenspunkten och har spets i respektive punkt. På ett analogt sätt är rummet en grupp. Att translatera en figur i planet eller rummet kan således beskrivas som handlingen att till varje punkt i figuren addera en och samma fixerade punkt. Dels har både planet och rummet en inneboende så kallad topologisk struktur som bland annat ligger till grund för vilka mängder som räknas som mätbara.

Den ungerske matematikern Alfred Haar studerade dessa fenomen i deras större generalitet och lade år 1933 fram ett bevis för att varje grupp med topologiska egenskaper liknande planets och rummets kan ges ett mått som precis som Lebesgues mått är translationsinvariant. Några år därefter visade John Von Neumann att Haars mått med nödvändighet är i princip unikt. Mer specifikt visade han att givet två Haarmått, så erhålls det ena genom att multiplicera det andra med en positiv konstant. För att knyta an till det inledande stycket innebär detta att Lebesgues mått är entydigt i meningen att alla andra mått i planet och rummet med motsvarande egenskaper (däribland den nämnda translationsinvariansen) erhålls genom att förstora eller förminska Lebesgues mått med en positiv konstant.

Sammandrag

Syftet med denna rapport är att bevisa att det på varje lokalkompakt grupp finns ett så kallat vänster-Haarmått, och att detta är unikt upp till en multiplikativ konstant.

Läsaren antas inte vara förtrogen med varken topologi, måtteori eller integrationsteori, utan en stor del av rapporten består av en grundlig genomgång av den nödvändiga bakgrundsteorin inom dessa områden. Från topologin kommer kompakthet och kontinuitet spela en avgörande roll. Viktiga resultat är Urysohns lemma och Tychonoffs sats, som båda används i beviset av huvudresultatet. Ett antal satser rörande topologiska rum som är Hausdorff och lokalkompakta formuleras även. Inom måtteorin presenteras, förutom grundläggande definitioner och räkneregler, en allmän metod för hur ett mått kan konstrueras med hjälp av ett så kallat yttre mått. Denna metod används sedan för konstruktionen av Haarmåttet. Den viktigaste komponenten i integrationsteorikapitlet är definitionen av den så kallade Lebesgueintegralen. Även monotona konvergenssatsen är ett viktigt resultat, som behövs i beviset av Haarmåttets entydighet. Innan huvudresultatet bevisas presenteras även definitionen av, och ett antal satser hörande till, lokalkompakta grupper.

Abstract

The aim of this report is to provide a proof showing that every locally compact group admits a so-called left Haar measure, and that this measure is unique up to a multiplicative constant.

No prior knowledge of topology, measure theory or integration theory is assumed, and therefore a big part of the report consists of basic definitions and theorems from these fields. From topology, compactness and continuity will be of great importance. Two key results are Urysohn's lemma and Tychonoff's theorem, both of which will be needed in the proof of the main result. A number of theorems concerning topological spaces that are Hausdorff and locally compact will be stated as well. In the measure theory chapter, in addition to some basic definitions and calculation properties, a general method of how to construct a measure using a so-called outer measure will be presented. This method will later be used in the construction of the Haar measure. From the chapter on integration theory, the most important takeaway is the definition of the so-called Lebesgue integral. Another key result is the monotone convergence theorem, which will be needed in the proof of the uniqueness of the Haar measure. Before the proof of the main result, the definition of locally compact groups will be given, alongside a number of theorems regarding such.

Innehåll

1 Inledning **1**
1.1 Motivering . . . 1
1.2 Rapportens mål . . . 1
1.3 Bakgrundsteori . . . 1

2 Topologi **2**
2.1 Grundläggande definitioner . . . 2
2.2 Kontinuitet, kompakthet och relaterade satser . . . 3
2.3 Lokalkompakta rum, Hausdorffrum och egenskaper hos dessa . . . 5

3 Måtteori **6**
3.1 Grundläggande definitioner och räkneregler . . . 6
3.2 Borel-σ-algebran . . . 8
3.3 Att konstruera ett mått med hjälp av ett yttre mått . . . 8

4 Integrationsteori **9**
4.1 Definitionen av Lebesgueintegralen . . . 9
4.2 Räkneregler och monotona konvergenssatsen . . . 10
4.3 Att byta integrationsordning . . . 11

5 Haarmåttet på en lokalkompakt grupp **12**
5.1 Inledande teori om topologiska grupper . . . 12
5.2 Haarmåttets existens . . . 14
5.3 Haarmåttets entydighet . . . 18

Referenser **21**

Appendix **i**

A Topologi **i**
A.1 Mängdteoretiskt bakgrundsmaterial . . . i
A.2 Några bevis av satserna i kapitel två . . . i

B Måtteori **iii**
B.1 Bevis av Carathéodorys utvidgningssats . . . iii
B.2 Konstruktionen av Lebesguemåttet . . . iv

C Integrationsteori **vii**
C.1 Bevis av regler för Lebesgueintegralen . . . vii
C.2 Att byta integrationsordning . . . x

D Riesz representationssats **xii**
D.1 Entydighet . . . xiv
D.2 Existens . . . xiv

1 Inledning

1.1 Motivering

För många matematiska problem är det av stort intresse att bestämma volymer i $\mathbb{R}^n$. Den måtteoretiska motsvarigheten till sådana volymberäkningar fås av det så kallade Lebesguemåttet. En viktig egenskap för ett sådant mått är translationsinvarians, vilket innebär att en delmängd av $\mathbb{R}^n$ inte ändrar volym om den flyttas i rummet. En generalisering av Lebesguemåttet till en allmännare typ av algebraisk struktur visar sig vara av intresse.[1]

I januari 1933 publicerade Alfred Haar artikeln *Der Massbegriff in der Theorie der kontinuierlichen Gruppen* i tidsskriften Annals of Mathematics [4]. Han beskrev i denna en teori för en sorts "volym" på lokalkompakta grupper. I samma utgåva publicerade John von Neuman artikeln *Die Einführung analytischer Parameter in topologischen Gruppen*, i vilken han använde Haars teori för att ge en lösning till en restriktion av det femte av de kända Hilbertproblemen [6]. Det är detta generaliserade "volymmått" som idag kallas *Haarmåttet.*

1.2 Rapportens mål

Vårt huvudmål kommer att vara att visa två huvudsatser. Den första av dessa kommer att garantera att det finns ett Haarmått på varje lokalkompakt grupp.

Sats 1.1 (Haarmåttets existens)**.** På varje lokalkompakt grupp finns ett vänster-Haarmått.

Den andra huvudsatsen etablerar Haarmåttets entydighet. Detta kan dock endast göras upp till en multiplikativ konstant.

Sats 1.2 (Haarmåttets entydighet)**.** Låt μ och ν vara vänster-Haarmått på en lokalkompakt grupp. Då finns ett positivt reellt tal c, så att $\nu = c\mu$.

En viktig detalj är att inte alla grupper är kommutativa. För sådana, icke-abelska grupper, så behöver vi skilja på vänster- respektive högertranslationsinvarians. Följaktligen behöver man då skilja på höger- respektive vänster-Haarmått. Vi har valt i denna uppsats att konstruera vänster-Haarmåttet, men man kan lika gärna göra en liknande konstruktion för höger-Haarmåttet. Det visar sig dessutom att om man har ett vänster-Haarmått på en lokalkompakt grupp, så får man direkt ett höger-Haarmått genom att ta måttet av mängdernas invers. Ett bevis av detta faktum finnes i [1], men vi går inte in på mer detaljer i denna uppsats.

1.3 Bakgrundsteori

I uppsatsen antar vi att läsaren går tredje året på något kandidatprogram i matematik. Innan vi bevisar huvudresultatet kommer vi emellertid att behöva introducera en hel del teori som inte alla studenter i vår målgrupp är bekanta med. Läsaren antages vara bekant med elementär gruppteori, för den som behöver en uppfräschning rekommenderas [2].

Vi kommer att bygga upp grundläggande teori för allmän topologi i kapitel 2. Här generaliseras begrepp från analysen, som öppenhet, kontinuitet och kompakthet. Ett viktigt resultat från detta kapitel är Tychonoffs sats. Denna sats, tillsammans med den så kallade ändliga snittegenskapen, används i ett nyckelsteg i existensbeviset.

En grund för måtteori kommer att presenteras i kapitel 3, där vi definierar vad ett mått är och hur man kan konstruera olika mått med hjälp av så kallade yttre mått. Denna teknik används vid konstruktionen av Haarmåttet, men även vid konstruktionen av Lebesguemåttet och vid beviset av Riesz representationssats[2].

Med måtteorin etablerad så kommer vi kunna definiera Lebesgueintegralen i kapitel 4 för godtyckliga funktioner på generella måttrum, och speciellt på topologiska grupper försedda med ett Borelmått. Här finns även en del resultat som används i nyckelsteg i beviset av entydighetssatsen, men för hela detta bevis är integrationsteori essentiellt.

[1] En fullständig konstruktion av Lebesguemåttet finnes i avsnitt B.2 av Appendix B.
[2] Beviset av Riesz representationssats finnes i Appendix D.

2 Topologi

I det här kapitlet gås de topologiska definitioner och satser som kommer att användas i beviset av Sats 1.1 och Sats 1.2 igenom. Kapitlet har delats in i tre avsnitt, där de två första är baserade på kapitel 1 och 2 av [5] medan det sista utgår från kapitel 7 i [1]. I grova drag kan avsnitten sägas behandla begreppen topologiska rum, kontinuitet av en funktion och kompakthet av mängder i ett topologiskt rum, respektive Hausdorff- och lokalkompakta topologiska rum. Med undantag för Tychonoffs sats och Urysohns lemma är bevisen mer eller mindre direkta följder av de relevanta definitionerna. Av detta skäl, och utrymmesskäl, har de utelämnats från huvudtexten, men några av dem går ändå att finna i Appendix A. I synnerhet återfinns där bevisen för kapitlets tredje avsnitts samtliga satser.

2.1 Grundläggande definitioner

När vi definierar vad en topologi är, så utgår vi från ett antal egenskaper som samlingen av de öppna delmängderna av ett metriskt rum har.

Definition 2.1. En ***topologi*** på en mängd X är en samling $\mathcal{T}$ av delmängder till X med följande tre egenskaper:

(i) X och $\emptyset$ är element i $\mathcal{T}$.

(ii) $\mathcal{T}$ är sluten under godtyckliga unioner.

(iii) $\mathcal{T}$ är sluten under ändliga snitt.

Om ovanstående gäller säger man att $(X, \mathcal{T})$ är ett ***topologiskt rum***, eller, om $\mathcal{T}$ framgår av sammanhanget, helt enkelt att X är ett topologiskt rum. En mängd $U \in \mathcal{T}$ säges vara ***öppen*** i X och en delmängd $C \subseteq X$ sådan att $X \setminus C \in \mathcal{T}$ säges vara ***sluten*** i X. En öppen mängd U som innehåller en punkt x kallas för en ***omgivning*** till x.

Anmärkning 2.2. På grund av De Morgans lagar och punkt (iii) och (ii) i definitionen ovan följer att ändliga unioner respektive godtyckliga snitt av slutna mängder är slutna.

Givet en delmängd A av X så finns det, på grund av punkt (ii) i Definition 2.1 och anmärkningen ovan, en största öppen mängd som är innehållen i A och en minsta sluten mängd som innehåller A. Dessa mängder kallas för det slutna höljet av A respektive det inre av A.

Definition 2.3. Om X är ett topologiskt rum och A är en delmängd av X, så kallas snittet av alla slutna delmängder av X som innehåller A för det ***slutna höljet*** av A, och betecknas med $\bar{A}$. Unionen av alla öppna mängder som är innehållna i A kallas för ***det inre*** av A och betecknas med A^o.

Att avgöra huruvida en punkt ligger i det slutna höljet av en mängd är inte lätt om man utgår ifrån definitionen ovan. Vi kommer vid flera tillfällen därför att ha användning av följande alternativa karaktärisering av det slutna höljet av en mängd. När vi skriver att en mängd skär en annan mängd så menar vi att mängdernas snitt är icke-tomt.

Proposition 2.4. Låt A vara en delmängd av ett topologiskt rum X och x vara en punkt i X. Då gäller att $x \in \bar{A}$ om och endast om varje omgivning till x skär A.

I nästa definition ger vi en metod för att konstruera en topologi på en mängd X utgående från en intressant samling $\mathcal{B}$ av delmängder till X, förutsatt att denna uppfyller två krav. I fallet $X = \mathbb{R}$, till exempel, utgår man från samlingen bestående av de öppna och begränsade intervallen (a, b), där $a < b$. Om inget annat sägs är det denna topologi som avses framöver när $\mathbb{R}$ betraktas som ett topologiskt rum.

Definition 2.5. En ***bas*** på en mängd X är en samling $\mathcal{B}$ av delmängder till X med följande två egenskaper:

(i) Varje punkt $x \in X$ är innehållen i något baselement B.

(ii) Om B_1 och B_2 är två baselement och x är en punkt i snittet $B_1 \cap B_2$, så finns ett tredje baselement B_3 sådant att $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Topologin $\mathcal{T}$ på X, i vilken en delmängd $U \subseteq X$ per definition är öppen om det för varje punkt $x \in U$ finns ett baselement B sådant $x \in B \subseteq U$, kallas för ***topologin genererad av basen*** $\mathcal{B}$.

Med denna definition i vårt arsenal kan vi ge ytterligare två metoder för att konstruera topologier. Dessa förutsätter att man redan har en eller flera topologier till att börja med.

Definition 2.6. Antag att X är ett topologiskt rum och att A är en delmängd av X. Topologin på A bestående av alla delmängder av A på formen $A \cap U$, där U är öppen i X, kallas för ***delrumstopologin*** på A. Om A är given denna topologi säger man att A är ett ***delrum*** av X.

Definition 2.7. Om X och Y är topologiska rum så tas som bas för en topologi på den kartesiska produkten $X \times Y$, samlingen $\mathcal{B}$ bestående av alla mängder på formen $U \times V$, där U är öppen i X och V är öppen i Y. Topologin som genereras av denna bas kallas för ***produkttopologin*** på $X \times Y$.

I många situationer har man en indexerad samling av topologiska rum där indexmängden består av fler än två element [3]. Det är då av intresse att kunna tala om en topologi även på den kartesiska produkten av denna samling. I fallet då indexmängden är oändlig finns det åtminstone två möjliga val av en sådan. Härnäst ger vi definitionen av det för våra syften mer användbara valet.

Definition 2.8. ***Produkttopologin*** på den kartesiska produkten $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ ges av basen på $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ bestående av alla mängder på formen

$$\prod_{\alpha \in J} U_\alpha,$$

där $U_\alpha = X_\alpha$ för alla utom möjligen ändligt många index α, och U_α är öppen i X_α för resterande α.

2.2 Kontinuitet, kompakthet och relaterade satser

Vi går nu vidare till att behandla begreppen kompakthet och kontinuitet och för arbetets syften relevanta satser relaterade till dessa begrepp. Många av de definitioners och satsers reella motsvarigheter är läsaren sannolikt redan bekant med. Syftet med det här avsnittet är att formulera dem i den en allmän topologisk kontext. Som tidigare utelämnas bevisen, men bevisen för ändliga snitt-formuleringen av kompakthet och satsen om största och minsta värde återfinns i Appendix A.

Definition 2.9. Låt X och Y vara topologiska rum. En funktion $f\colon X \to Y$ sägs vara ***kontinuerlig*** om det för varje öppen mängd V i Y gäller att den inversa bilden $f^{-1}(V)$ är öppen i X.

Nästa proposition ger ett antal ekvivalenta formuleringar av kontinuitet som vi kommer att ha användning av under arbetets gång.

Proposition 2.10. Låt X och Y vara två topologiska rum och antag att $f\colon X \to Y$. Då är följande utsagor ekvivalenta.

(a) f är kontinuerlig.

(b) För varje punkt $x \in X$ och omgivning V till $f(x)$ finns en omgivning U av x sådan att $f(U) \subseteq V$.

(c) För varje delmängd A av X gäller att $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

(d) *(Under antagandet att topologin på Y genereras av en bas $\mathcal{B}$).* För varje $B \in \mathcal{B}$ gäller att $f^{-1}(B)$ är öppen i X.

[3] Se vid behov avsnitt A.1 i Appendix A för definitionen av den kartesiska produkten av en indexerad samling av mängder.

Följande proposition kallas ibland för ihopklistringslemmat eftersom den visar hur två kontinuerliga funktioner kan kombineras till en större kontinuerlig funktion. Propositionen används i beviset av Korollarium 2.34 från nästa avsnitt, som återfinns i Appendix A, men inkluderas här, i huvudtexten, för fullständighets skull.

Proposition 2.11. Antag att $X = C \cup D$ och låt $g\colon C \to Y$ och $h : D \to Y$ vara två kontinuerliga funktioner som sammanfaller på mängden $C \cap D$. Om C och D är slutna i X så är funktionen $f\colon X \to Y$ given av

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{då } x \in C \\ h(x) & \text{då } x \in D \end{cases}$$

också kontinuerlig.

Målmängden hos en kontinuerlig funktion mellan två topologiska rum kan inskränkas och utökas, utan att påverka dess kontinuitet. Vi kommer att utnyttja detta i beviset av Haarmåttets existens och vi formulerar det därför som en egen proposition.

Proposition 2.12. Låt Z vara ett delrum av Y.

(a) Om $f : X \to Z$ är kontinuerlig så är också $g : X \to Y$ given av $g(x) = f(x)$ kontinuerlig.

(b) Om $h : X \to Y$ är en kontinuerlig funktion sådan att $h(X) \subseteq Z$ så är också funktionen $k : X \to Z$ given av $k(x) = h(x)$ kontinuerlig.

Kontinuitet av reellvärda funktioner bevaras under operationerna addition, subtraktion och multiplikation. Beviset av detta faktum är en följd av definitionen av basen för topologin på $\mathbb{R}$ som gavs i stycket ovanför Definition 2.5. Vi dokumenterar detta här och hänvisar till övning 12 i sektion 21 av [5] för bevisidén.

Proposition 2.13. Om X är ett topologiskt rum och $f, g : X \to \mathbb{R}$ är kontinuerliga så är funktionerna $f + g$, $f - g$ och fg också kontinuerliga.

Ett mycket viktigt begrepp inom topologi är homeomorfi. Vi kommer emellertid endast att använda det som smidig terminologi i vissa propositioner i arbetets sista kapitel.

Definition 2.14. Låt X och Y vara topologiska rum. En bijektiv kontinuerlig funktion $f\colon X \to Y$ med kontinuerlig invers $f^{-1}\colon Y \to X$ kallas för en ***homeomorfi***.

Detta avrundar diskussionen kring kontinuitet och vi går nu vidare till begreppet kompakthet. Efter att ha definierat det formulerar vi ett antal mer eller mindre direkta följder. Vi formulerar också Tychonoffs sats vars bevis ligger utanför det här arbetets ramar, men går att finna i sektion 37 av [5]. Till sist skriver vi ner en alternativ formulering av kompakthet som vi kommer att ha stor användning av i arbetets sista kapitel, som dessutom har satsen om största och minsta värde som en trevlig följd.

Definition 2.15. En ***öppen övertäckning*** av en delmängd A av ett topologiskt rum X är en samling $\mathcal{A}$ av mängder som är öppna i X vars union täcker A.

Definition 2.16. En delmängd K av X säges vara ***kompakt*** om varje öppen övertäckning $\mathcal{A}$ av K innehåller en ändlig delövertäckning av X.

Proposition 2.17. Om $f : X \to Y$ är kontinuerlig och K är en kompakt delmängd av X, så är $f(K)$ en kompakt delmängd av Y.

Proposition 2.18. Om X är ett kompakt topologiskt rum och C är sluten i X, så är också C kompakt.

Vi är nu framme vid det första av detta kapitels två stora resultat: Tychonoffs sats. Denna sats motiverar vårt val av produkttopologin som topologi på produktrummet.

Sats 2.19 (Tychonoffs sats)**.** Låt $\{X_\alpha\}_{\alpha \in J}$ vara en samling kompakta topologiska rum indexerad av en mängd J. Då är den kartesiska produkten $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ kompakt i produkttopologin.

Härnäst skriver vi ner den utlovade alternativa formuleringen kompakthet. För att göra det inför vi först lite bekväm terminologi.

Definition 2.20. En samling $\mathcal{C}$ av delmängder till en mängd X säges ha ***ändliga snittegenskapen*** om det för varje ändlig delsamling $\{C_1, \dots C_n\}$ av $\mathcal{C}$ gäller att snittet $\bigcap_{i=1}^{n} C_i$ är icke-tomt.

Proposition 2.21. Låt X vara ett topologiskt rum. Då är X kompakt om och endast om det för varje samling $\mathcal{C}$ av slutna delmängder av X som har ändliga snittegenskapen gäller att snittet $\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C$ av alla mängder i $\mathcal{C}$ är icke-tomt.

En trevlig följd av denna formulering av kompakthet är satsen om största och minsta värde i en allmän topologisk form.

Korollarium 2.22. Låt X vara ett kompakt topologiskt rum. För varje kontinuerlig funktion $f \colon X \to \mathbb{R}$ finns då punkter $x_1, x_2 \in X$ sådana att $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ för varje $x \in X$.

2.3 Lokalkompakta rum, Hausdorffrum och egenskaper hos dessa

I hypoteserna för satsen om Haarmåttets existens ingår en så kallat lokalkompakt topologisk grupp G. I själva verket kräver man utöver lokalkompakthet att topologin på G är vad som kallas för Hausdorff. Att detta adjektiv ändå utelämnas får sägas vara talande för hur grundläggande egenskapen anses vara. Den medför bland annat att enpunktsmängder är slutna och att följder konvergerar till högst en punkt. Vi kommer emellertid i vår diskussion endast att ha behov av den förra egenskapen.

Definition 2.23. Ett topologiskt rum X säges vara ***Hausdorff*** om det för varje par av skilda punkter x_1, x_2 i X finns disjunkta öppna mängder U_1 och U_2 som innehåller x_1 respektive x_2.

Proposition 2.24. Låt X och Y vara Hausdorff och antag att x är en punkt i X.

(a) Mängden bestående av endast punkten x är sluten.

(b) Den kartesiska produkten $X \times Y$ är Hausdorff.

I beviset av Haarmåttets existens kommer vi behöva ett antal topologiska hjälpsatser rörande rum som är Hausdorff och/eller lokalkompakta. Återstoden av detta avsnitt är ägnat åt dessa. Flertalet av satserna är så kallade separationssatser, som uttalar sig om olika sätt som punkter och mängder i topologiska rum kan separeras på. Som tidigare utelämnas bevisen, men för detta avsnitt går samtliga att finna i Appendix A.

Proposition 2.25. Låt X vara Hausdorff och K vara en kompakt delmängd av X. För varje punkt y som inte ligger i K finns disjunkta och öppna mängder U, V som innehåller y respektive K.

Som en följd av Proposition 2.25 erhåller man följande.

Korollarium 2.26. Kompakta mängder i Hausdorffrum är slutna.

En naturlig fråga, givet Proposition 2.25, är om man i Hausdorffrum kan separera disjunkta kompakta mängder med öppna mängder. Svaret visar sig vara ja och som en följd erhåller man Korollarium 2.28.

Proposition 2.27. Varje par av disjunkta kompakta mängder i ett Hausdorffrum kan separeras med disjunkta öppna mängder.

Korollarium 2.28. Låt X vara Hausdorff och antag att K är en kompakt delmängd av X. Om U_1 och U_2 är två öppna mängder sådana att $K \subseteq U_1 \cup U_2$, så kan K skrivas som unionen av två kompakta mängder K_1 och K_2 som är innehållna i U_1 respektive U_2.

Härnäst ger vi den definition av lokalkompakthet som lämpar sig bäst för våra syften. Det finns flera definitioner att välja mellan, men i Hausdorffrum är de allra flesta ekvivalenta.

Definition 2.29. Ett topologiskt rum X säges vara ***lokalkompakt*** om det för varje punkt x i X finns en omgivning av x som har kompakt slutet hölje.

I lokalkompakta Hausdorffrum visar det sig vara möjligt att krympa en omgivning så pass mycket att dess slutna hölje blir kompakt och ryms i den ursprungliga omgivningen. Motsvarande uttalande kan göras i det fall då man dessutom kräver att omgivningen alltjämt ska rymma en given kompakt mängd. Formellt har vi följande.

Proposition 2.30. Låt X vara lokalkompakt Hausdorff och U en omgivning till punkten x. Då finns en omgivning V till x vars slutna hölje $\overline{V}$ är kompakt och innehållet i U.

Korollarium 2.31. Om X är lokalkompakt Hausdorff, K en kompakt delmängd av X, och U en öppen mängd innehållande K, så finns en öppen mängd V som har kompakt slutet hölje $\overline{V}$ och som uppfyller att $K \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.

Detta täcker de separationssatser vi kommer att ha behov av och vi går nu vidare med att visa existensen av en viss funktion g som kommer att spela en avgörande roll i beviset av Sats 1.2. Låt X vara ett topologiskt rum och f vara en kontinuerlig reellvärd funktion på X. Med ***stödet*** av f, betecknat $\operatorname{supp} f$, menar vi det slutna höljet i X av mängden $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$. Vi låter $C_c(X)$ beteckna samlingen av alla reellvärda kontinuerliga funktioner på X som har kompakt stöd. Notera särskilt att $C_c(X)$, med de uppenbara definitionerna av addition och multiplikation med skalär, utgör ett vektorrum över $\mathbb{R}$.[4]

Existensen av den ovan nämna funktion är en följd av Urysohns lemma, det andra av detta kapitels två stora resultat. Lite vagt säger detta att varje par av disjunkta, slutna mängder i ett topologiskt rum kan separeras med en kontinuerlig version av en indikatorfunktion, förutsatt att det topologiska rummet är vad som kallas för normalt.

Definition 2.32. Låt X vara Hausdorff. Om varje par av disjunkta, slutna mängder kan separeras med disjunkta, öppna mängder, så säges X vara ett ***normalt*** rum.

Sats 2.33 (Urysohns lemma)**.** Om X är ett normalt rum och C och D är disjunkta, slutna mängder i X, så finns det en funktion $f : X \to [0, 1]$ sådan att $f(x) = 0$ för alla x i C och $f(x) = 1$ för alla x i D.

Följden av Urysohns lemma som vi är ute efter ges i följande korollarium, som får avsluta detta kapitel.

Korollarium 2.34. Antag att X är lokalkompakt Hausdorff och låt K vara en kompakt delmängd av X. Om U är en öppen delmängd av X innehållande K så finns det en funktion $g \in C_c(X)$ vars stöd är innehållet i U och som är sådan att $\chi_K \leq g \leq \chi_U$.

3 Måtteori

Innan vi kan konstruera Haarmåttet behöver vi, förklarligt nog, bygga upp den grundläggande måtteorin. I nästkommande två avsnitt går vi igenom definitioner och satser som senare kommer komma väl till pass. Därefter presenteras en allmän metod för att konstruera ett mått med hjälp av ett så kallat yttre mått. Denna metod används sedan i avsnitt 5.2 för konstruktionen av Haarmåttet. Materialet i det här kapitlet utgår från kapitel 3 i [7], bortsett från Definition 3.5 som återfinns i kapitel 7 i [1].

3.1 Grundläggande definitioner och räkneregler

När vi definierar ett mått utgår vi från en mängd X, och definierar sedan måttet som en funktion från en samling delmängder av X till $[0, \infty]$. Vi tillskriver alltså en "volym" till olika delmängder av X. Många intressanta mått, däribland Haarmåttet, är dock inte definierade för *alla* delmängder av X, utan enbart för en viss utvald samling av delmängder. Detta motiverar följande definition.

[4]För att visa att $C_c(X)$ är sluten under addition, använd Sats 2.13 och det faktum att $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$ för alla delmängder A och B av X.

Definition 3.1. Låt X vara en icke-tom mängd. En ***σ-algebra*** över X är en samling $\mathcal{M}$ av delmängder av X med följande egenskaper:

(i) X och $\emptyset$ är element i $\mathcal{M}$.

(ii) $\mathcal{M}$ är sluten under komplement.

(iii) $\mathcal{M}$ är sluten under uppräkneliga unioner.

Ett element A i $\mathcal{M}$ kallas för en ***mätbar mängd***.

Observera att en σ-algebra även är sluten under uppräkneliga snitt, vilket följer av De Morgans lag samt (ii) och (iii) ovan. Om $\mathcal{M}$ är en σ-algebra över en mängd X kallas paret $(X, \mathcal{M})$ för ett ***mätbart rum***. Härnäst definieras vad ett mått är.

Definition 3.2. Låt $(X, \mathcal{M})$ vara ett mätbart rum. Ett ***mått*** μ på $(X, \mathcal{M})$ är en funktion från $\mathcal{M}$ till $[0, \infty]$ med följande egenskaper:

(i) $\mu(\emptyset) = 0$.

(ii) För varje följd $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ i $\mathcal{M}$ bestående av parvis disjunkta mängder så gäller att

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Egenskap (ii) kallas för ***uppräknelig additivitet***. Ett mätbart rum $(X, \mathcal{M})$ tillsammans med ett mått μ på det kallas för ett ***måttrum***, och betecknas $(X, \mathcal{M}, \mu)$.

I nedanstående proposition listas några räkneregler för mått som vi kommer ha stor glädje av i fortsättningen.

Proposition 3.3. Låt $(X, \mathcal{M}, \mu)$ vara ett måttrum. Då gäller följande:

a) ***Monotonicitet:*** Om A och B är mätbara mängder i $\mathcal{M}$ och $A \subseteq B$ följer det att $\mu(A) \leq \mu(B)$. Om dessutom $\mu(A) < \infty$ gäller även att $\mu(B \backslash A) = \mu(B) - \mu(A)$.

b) ***Subadditivitet:*** Om $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ är en följd av mätbara mängder i $\mathcal{M}$ följer det att

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

c) ***Kontinuitet underifrån:*** Om $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ är en följd av mätbara mängder i $\mathcal{M}$ sådana att $A_n \subseteq A_{n+1}$ för alla $n \in \mathbb{N}$, följer det att

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n).$$

d) ***Kontinuitet ovanifrån:*** Om $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ är en följd av mätbara mängder i $\mathcal{M}$ sådana att $A_n \supseteq A_{n+1}$ för alla $n \in \mathbb{N}$, och om $\mu(A_1) < \infty$, följer det att

$$\mu\Big(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n).$$

Bevis. Egenskap a) kontrolleras enkelt och d) visas analogt med c). Vi visar därför b) och c).

b) Låt $B_1 := A_1$ och $B_n := A_n \backslash \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i$ för alla $n \geq 2$. Då är $(B_i)_{i=1}^{\infty}$ en följd bestående av parvis disjunkta element som alla tillhör $\mathcal{M}$, eftersom $\mathcal{M}$ är sluten under komplement och uppräkneliga snitt. Notera även att $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ och att $B_i \subseteq A_i$ för alla i. Detta ger att

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Det första och det sista ledet ger den önskade olikheten.

c) Från a) vet vi att $(\mu(A_i))_{i=1}^{\infty}$ utgör en växande följd. Därmed har följden ett gränsvärde i $[0,\infty]$. Låt $B_1 \coloneqq A_1$ och $B_n \coloneqq A_n \backslash A_{n-1}$ för alla $n \geq 2$. Lägg märke till att $(B_i)_{i=1}^{\infty}$ består av parvis disjunkta element, att $A_n = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$ och att $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$. Detta, tillsammans med uppräknelig additivitet, ger att

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mu(B_i) = \lim_{n\to\infty} \mu\Big(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n). \quad \square$$

3.2 Borel-σ-algebran

I det här avsnittet ska vi konstruera den σ-algebra som Haarmåttet är definierat på. Detta gör vi med hjälp av nästa proposition som säger att det, givet en mängd X och en delmängd av X, är möjligt att skapa en minsta σ-algebra som innehåller delmängden.

Proposition 3.4. *Låt X vara en icke-tom mängd och låt $\mathcal{E}$ vara en samling delmängder av X. Det existerar då en minsta σ-algebra över X, betecknad $\sigma(\mathcal{E})$, som uppfyller att $\mathcal{E} \subseteq \sigma(\mathcal{E})$. Vi säger att $\sigma(\mathcal{E})$ är σ-algebran som **genereras** av $\mathcal{E}$.*

Bevis. Vi kommer att se att den sökta σ-algebran fås genom att ta snittet av alla σ-algebror som innehåller $\mathcal{E}$. Låt därför I vara mängden av alla σ-algebror som innehåller $\mathcal{E}$ och låt

$$\sigma(\mathcal{E}) \coloneqq \bigcap_{\mathcal{F}\in I} \mathcal{F}.$$

Vi ska nu visa att $\sigma(\mathcal{E})$ uppfyller alla kraven i propositionen. Notera först att I inte är tom, eftersom potensmängden av X, $\mathcal{P}(X) \coloneqq \{A : A \subseteq X\}$, är en σ-algebra. Vidare ser vi att eftersom $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}$ för alla $\mathcal{F}$ följer det att $\mathcal{E} \subseteq \sigma(\mathcal{E})$, som önskat. Slutligen behöver vi säkerställa att $\sigma(\mathcal{E})$ verkligen är en σ-algebra. Att X och $\emptyset$ tillhör $\sigma(\mathcal{E})$ följer av att $\sigma(\mathcal{E})$ består av ett snitt av σ-algebror, vilka alla innehåller X och $\emptyset$. Det gäller även att $\sigma(\mathcal{E})$ är sluten under komplement, ty om A tillhör $\sigma(\mathcal{E})$ så tillhör A varje σ-algebra i I. Men eftersom σ-algebror är slutna under komplement medför detta att även A^c tillhör varje σ-algebra i I. Därmed tillhör A^c även $\sigma(\mathcal{E})$. På samma sätt visas att $\sigma(\mathcal{E})$ är sluten under uppräkneliga unioner. Avslutningsvis noterar vi att eftersom $\sigma(\mathcal{E})$ är innehållen i alla σ-algebror som innehåller $\mathcal{E}$ så måste den vara den minsta av dem. $\square$

Nu är det dags att knyta an till begreppet öppenhet, som definierades i kapitel 2. Haarmåttet definieras nämligen på den σ-algebra som genereras just av öppna delmängder.

Definition 3.5. Låt $(X, \mathcal{T})$ vara ett topologiskt rum. Den σ-algebra som genereras av $\mathcal{T}$ kallas för ***Borel-σ-algebran*** över X och betecknas $\mathcal{B}(X)$. Mängderna i $\mathcal{B}(X)$ kallas för ***Borelmängder***.

Om X är ett lokalkompakt Hausdorffrum kallas ett mått med definitionsmängd $\mathcal{B}(X)$ för ett ***Borelmått***. Haarmåttet är ett exempel på ett Borelmått.

3.3 Att konstruera ett mått med hjälp av ett yttre mått

I detta avsnitt presenteras en generell metod för att konstruera ett mått, som sedan kommer att användas för konstruktionen av Haarmåttet, samt för konstruktionen av Lebesguemåttet och för beviset av Riesz representationssats. Metoden bygger på att man först konstruerar ett så kallat yttre mått. Med hjälp av begreppet μ^*-mätbarhet konstrueras sedan en specifik σ-algebra, och slutligen fås det önskade måttet genom att inskränka det yttre måttet till denna σ-algebra.

Ett yttre mått är en funktion som påminner om ett mått, men som skiljer sig på två punkter: Ett yttre mått på en mängd X är alltid definierat för alla delmängder av X, och till skillnad från ett mått kräver vi inte att ett yttre mått är uppräkneligt additivt.

Definition 3.6. Ett ***yttre mått*** på en mängd X är en funktion μ^* från $\mathcal{P}(X)$ till $[0,\infty]$ med följande egenskaper:

(i) $\mu^*(\emptyset) = 0$.

(ii) Om A_1 och A_2 är delmängder av X och A_1 är innehållen i A_2, följer det att $\mu^*(A_1) \leq \mu^*(A_2)$.

(iii) Om $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ är en följd i $\mathcal{P}(X)$ gäller det att $\mu^*\big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\big) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$.

Egenskap (ii) och (iii) kallas som tidigare för monotonicitet respektive subadditivitet.

Definition 3.7. Om μ^* är ett yttre mått på en mängd X, kallas en delmängd $A \subseteq X$ för ***μ^*-mätbar*** om det för alla delmängder $E \subseteq X$ gäller att

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c). \tag{1}$$

Anmärkning 3.8. Lägg märke till att olikheten $\leq$ i (1) följer direkt av subadditivitet, efter omskrivningen $E = (E \cap A) \cup (E \cap A^c)$. När vi ska visa att en delmängd är μ^*-mätbar behöver vi därför bara visa olikheten $\geq$. Dessutom kan vi anta att $\mu^*(E) < \infty$, ty om $\mu^*(E) = \infty$ är olikheten $\geq$ trivial. Dessa två observationer kommer vi hädanefter ta som givna när vi ska visa att en mängd är μ^*-mätbar.

Definitionen säger alltså att om en delmängd A av X är μ^*-mätbar är det möjligt att dela upp måttet av varje delmängd E av X i två delar: måttet av den del som E har gemensamt med A, och måttet av den del som E inte har gemensamt med A.

Nu har vi kommit fram till ett viktigt resultat inom måtteori, nämligen Carathéodorys utvidgningssats. Med hjälp av den kan vi visa att ett yttre mått μ^* utgör ett mått, om definitionsmängden inskränks till samlingen av de μ^*-mätbara mängderna. Beviset till satsen återfinns i avsnitt B.1 i Appendix B.

Sats 3.9 (Carathéodorys utvidgningssats)**.** Låt μ^* vara ett yttre mått på en mängd X. Då utgör samlingen $\mathcal{M}$ av μ^*-mätbara mängder en σ-algebra och restriktionen av μ^* till $\mathcal{M}$ är ett mått.

4 Integrationsteori

Med måtteorin etablerad ska vi inleda detta kapitel med att successivt definiera den så kallade *Lebesgueintegralen* för allt mer generella typer av funktioner. Vi kommer använda denna integral vid beviset av sats 1.2. Minns Riemannintegralen från de första kurserna i matematisk analys, som vi definierade genom att partitionera integrandens definitionsmängd. Idén med Lebesgueintegralen är att partitionera integrandens bildmängd snarare än definitionsmängd.

4.1 Definitionen av Lebesgueintegralen

Vi börjar med att definiera några centrala begrepp. Det mesta är ganska standadiserat och liknande kan hittas i de flesta läroböcker om ämnet, i detta fall utgår vi dock från kapitel 4 i [7].

Definition 4.1. Låt $(X, \mathcal{M})$ och $(Y, \mathcal{N})$ vara mätbara rum. En funktion $f\colon X \to Y$ sägs vara ***mätbar*** om det för varje $N \in \mathcal{N}$ gäller att $f^{-1}(N) \coloneqq \{x \in X : f(x) \in N\} \in \mathcal{M}$.

Vi betecknar klassen av icke-negativa mätbara funktioner på måttrummet $(X, \mathcal{M}, \mu)$ med

$$L^+(X, \mathcal{M}, \mu) \coloneqq \{f\colon X \to [0, \infty], \text{ sådan att } f \text{ är mätbar}\}.$$

Vi definierar först Lebesgueintegralen för så kallade *enkla funktioner* som endast antar ett ändligt antal funktionsvärden. Vi beskriver dessa formellt.

Definition 4.2. En mätbar funktion $h \in L^+(X, \mathcal{M}, \mu)$ kallas ***enkel*** om den kan uttryckas med summan

$$h(x) = \sum_{n=1}^{N} c_n \chi_{E_n}(x),$$

där $c_1, \dots, c_N$ är icke-negativa reella tal, $E_1, \dots, E_N \in \mathcal{M}$ är disjunkta mätbara delmängder av X och $\chi_{E_n}\colon X \to \{0, 1\}$ är indikatorfunktionen på E_n. Vi betecknar underklassen av icke-negativa enkla mätbara funktioner på måttrummet $(X, \mathcal{M}, \mu)$ med

$$\mathcal{S}^+(X, \mathcal{M}, \mu) \coloneqq \{h \in L^+(X, \mathcal{M}, \mu) : h \text{ är enkel}\}.$$

Definition 4.3. Låt $(X, \mathcal{M}, \mu)$ vara ett måttrum. ***Lebesgueintegralen*** av en positiv enkel funktion $h \in \mathcal{S}^+(X, \mathcal{M}, \mu)$ definieras som

$$\int_X h(x)d\mu(x) := \sum_{n=1}^{N} c_n \mu(E_n), \text{ och om } A \in \mathcal{M} \text{ definierar vi } \int_A h(x)d\mu(x) := \int_X h(x)\chi_A(x)d\mu(x).$$

Vi kan notera att den enkla funktionen kan representeras på flera sätt genom olika uppdelningar av definitionsmängden i mätbara mängder. Dock kan vi med uppräknelig additivitet konstatera att integralen med denna definition kommer ha samma värde och är därför väldefinierad. Med Lebesgueintegralen definierad för enkla funktioner utvidgar vi begreppet till positiva mätbara funktioner.

Definition 4.4. Låt $(X, \mathcal{M}, \mu)$ vara ett måttrum. ***Lebesgueintegralen*** av en positiv mätbar funktion $f : (X, \mathcal{M}) \to [0, \infty]$ definieras som

$$\int_X f(x)d\mu(x) := \sup \left\{ \int_X h(x)d\mu(x) : h \in \mathcal{S}^+(X, \mathcal{M}, \mu), h \leq f \right\}.$$

Notera att vi först väljer ett ändligt antal konstanter $c_1, \dots, c_N \in \mathbb{R}$ och sedan partitionerar definitionsmängden i mätbara delmängder $E_i = \{x \in X : f(x) \in [c_{i-1}, c_i)\}$. Detta görs alltså beroende på vilket intervall funktionen avbildas på. Detta är en väsentlig skillnad från Riemannintegralen. När vi sedan tar supremum motsvarar detta gränsvärdesprocessen vi är vana vid. Vi noterar också att definitionsmängden kan vara vilken icke-tom mängd som helst, så länge vi har en σ-algebra definierad på denna.

Nu utvidgar vi begreppet till att innefatta godtyckliga mätbara funktioner. Vi gör detta formellt i följande definition.

Definition 4.5. Låt $(X, \mathcal{M}, \mu)$ vara ett måttrum, $f : (X, \mathcal{M}) \to [-\infty, \infty]$ vara en mätbar funktion och dela upp denna i en *positiv* samt en *negativ* del enligt $f^+(x) := \max\{f(x), 0\}$ respektive $f^-(x) := \max\{-f(x), 0\}$. (Notera att $f = f^+ - f^-$). ***Lebesgueintegralen*** av f definieras som

$$\int_X f(x)d\mu(x) := \int_X f^+(x)d\mu(x) - \int_X f^-(x)d\mu(x),$$

givet att minst en av integralerna i högerledet har ändligt värde, annars är integralen för funktionen inte definierad. Klassen av alla ***integrerbara*** funktioner på $(X, \mathcal{M}, \mu)$ definieras som

$$L^1(X, \mathcal{M}, \mu) := \left\{ f : (X, \mathcal{M}) \to [-\infty, \infty], \text{ sådana att } \int_X |f(x)|d\mu(x) < \infty \right\}.$$

Vi kan notera att kravet att $\int |f|d\mu$ är ändlig är det samma som att $\int f d\mu$ är definierad och ändlig. Vi kommer oftast bara skriva $L^1(X)$ när det är tydligt vilken σ-algebra och vilket mått som avses.

4.2 Räkneregler och monotona konvergenssatsen

När vi ska bevisa Haarmåttets entydighet så kommer vi att behöva några räkneregler för Lebesgueintegralen, de flesta av dessa känns igen från den har naturliga motsvarigheter för Riemannintegralen. Dessa, samt ytterligare några resultat presenteras i denna del. Även denna sektion utgår från kapitel 4 i [7].

Proposition 4.6. För $f, g \in L^1(X, \mathcal{M}, \mu)$, $\widetilde{f} \in L^+(X, \mathcal{M}, \mu)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ och $E \in \mathcal{M}$ så gäller

(a) $$\int_X \alpha f(x)d\mu(x) = \alpha \int_X f(x)d\mu(x),$$

(b) $$\int_X f(x) + g(x)d\mu(x) = \int_X f(x)d\mu(x) + \int_X g(x)d\mu(x),$$

(c) $$f \leq g \quad \text{implicerar} \quad \int_X f(x)d\mu(x) \leq \int_X g(x)d\mu(x),$$

(d) $$\left|\int_X f(x)d\mu(x)\right| \leq \int_X |f(x)|\, d\mu(x),$$

(e) $$\text{avbildningen } E \mapsto \int_E \widetilde{f}(x)d\mu(x) \text{ är ett mått.}$$

Räkneregler motsvarande (a) till (d) för Riemannintegralen är välkända och beviset av dessa är inte centralt för vårt mål. Ett detaljerat bevis av propositionen finnes dock i kapitel C.1 i Appendix C.

Härnäst kommer ett viktigt resultat inom integrationsteorin som används flitigt i några av områdets viktigaste satser. Vi kommer emellertid bara behöva använda den en gång i beviset av entydigheten för Haarmått.

Sats 4.7 (Monotona konvergenssaten)**.** Låt $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vara en följd av funktioner i $L^+(X, \mathcal{M}, \mu)$, sådana att $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \ldots$ och definiera

$$f(x) \coloneqq \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{f_n(x)\}.$$

Då gäller det att

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)d\mu(x) = \int_X \lim_{n\to\infty} f_n(x)d\mu(x) = \int_X f(x)d\mu(x).$$

‘

Bevis. Eftersom att $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ är växande så gäller enligt monotonicitet (Proposition 4.6 (c)) att $\int f_n d\mu \geq \int f_m d\mu$ för $n \geq m$ och $\int f d\mu \geq \int f_n d\mu$ för alla n. Detta innebär att gränsfunktionen f är väldefinierad samt

$$\int_X f(x)d\mu(x) \geq \lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)d\mu(x). \tag{2}$$

Fixera en enkel funktion $h \in \mathcal{S}^+(X, \mathcal{M}, \mu)$, sådan att $f \geq h$ och välj något $\alpha \in (0, 1)$. Definiera sedan de mätbara mängderna $E_n \coloneqq \{x \in X : f_n(x) \geq \alpha h(x)\}$ och notera att $E_n \subseteq E_{n+1}$, för varje n, samt att $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = X$. Nu använder vi att $f \geq f_n \geq \alpha h$ på E_n, samt monotonicitet (Proposition 4.6 (c)) och får

$$\int_X f_n(x)d\mu(x) \geq \int_X f_n(x)\chi_{E_n}(x)d\mu(x) \geq \alpha \int_X h(x)\chi_{E_n}(x)d\mu(x).$$

Tag sedan gränsvärdet $n \to \infty$ i höger- och vänsterled ovan, och utnyttja kontinuitet underifrån från Proposition 3.3 (b) (för att kunna göra det behöver vi konstatera att $E_n \mapsto \int h\chi_{E_n} d\mu$ är ett mått, vilket står klart av Proposition 4.6 (e)). Eftersom $\alpha \in (0, 1)$ valdes godtyckligt så gäller att

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)d\mu(x) \geq \int_X h(x)d\mu(x), \text{ och då } h \leq f \text{ är godtycklig så följer}$$

$$\int_X f(x)d\mu(x) \leq \lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)d\mu(x). \tag{3}$$

Nu följer påståendet av (2) och (3). □

4.3 Att byta integrationsordning

Vid beviset av Sats 1.2 kommer vi behöva byta integrationsordningen på en itererad integral. Det finns ett generellt resultat som tillåter detta, vilket brukar kallas för Fubinis och Tonellis satser. Här formulerar dock vi en svagare version som är tillräcklig för vårt mål och är hämtad från kapitel 7 i [1]. Beviset av propositionen skisseras endast under, men ett formellt bevis finnes i kapitel C.2 i Appendix C.

Definition 4.8. Om $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, definiera funktionerna $f^x : Y \to \mathbb{R}$ och $f^y : X \to \mathbb{R}$ genom

$$f^x(y) \coloneqq f(x, y), \text{ för varje } x \in X, \text{ respektive } f^y(x) \coloneqq f(x, y), \text{ för varje } y \in Y.$$

Proposition 4.9. Låt X och Y vara lokalkompakta Hausdorffrum, låt μ och ν vara Borelmått på X respektive Y och antag att $f \in C_c(X \times Y)$. Då gäller

(a) för varje $x \in X$ så har vi $f^x \in C_c(Y)$, och för varje $y \in Y$, så gäller $f^y \in C_c(X)$,

(b) avbildningarna $x \mapsto \int_Y f d\nu$ och $y \mapsto \int_X f d\mu$ tillhör klasserna $C_c(X)$ respektive $C_c(Y)$,

(c)
$$\int_X \int_Y f(x,y) d\nu(y) d\mu(x) = \int_Y \int_X f(x,y) d\mu(x) d\nu(x).$$

Som utlovat gör vi en bevisskiss. (a) följer relativt enkelt av välkända egenskaper för kontinuerliga funktioner. För att visa (b) formulerar vi ett lemma som säger att för den kartesiska produkten av två rum $S \times T$, varav T är kompakt, så kan vi hitta en omgivning för varje element i S sådan att funktionsvärdena för $f\colon S \times T \to \mathbb{R}$ ligger godtyckligt nära varandra. Beviset av (c) utnyttjar kompaktheten hos stödet och använder samma lemma som ovan för att partitionera stödet i Borelmängder. Sedan definieras en enkel funktion på dessa Borelmängder som approximerar f, varpå vi med hjälp av integralens räkneregler och lemmat kan konstatera att de två integralerna i (c) är lika.

5 Haarmåttet på en lokalkompakt grupp

Det här kapitlet är ägnat åt arbetets två huvudresultat. Materialet är hämtat från kapitel 9 i [1], men är standard nog att det går att finna i de flesta läroböcker i integrationsteori. Läsaren förutsätts vara bekant med definitionen av en grupp och den direkta produkten av två grupper. Om så inte är fallet, så finns en framställning som täcker våra behov på sidorna 30 och 83 av [2]. Vi inleder med att ge ett par grundläggande definitioner och visar därefter ett par propositioner som kommer att behövas i respektive bevis.

5.1 Inledande teori om topologiska grupper

En ***topologisk grupp*** är en grupp G (med gruppoperation $(x,y) \mapsto xy$) som är utrustad med en topologi som är sådan att avbildningarna $(x,y) \mapsto xy$ och $x \mapsto x^{-1}$ är kontinuerliga. Om G under denna topologi dessutom är lokalkompakt och Hausdorff, så säger man att G är en ***lokalkompakt topologisk grupp***, eller, kortare, en ***lokalkompakt grupp***.

Om G är en grupp, A och B är delmängder av G, och a är ett element i G, så låter vi

$$aB := \{ab : b \in B\} \quad \text{och} \quad Ba := \{ba : b \in B\}.$$

Vi låter också

$$AB := \{ab : a \in A, b \in B\} \quad \text{och} \quad B^{-1} := \{b^{-1} : b \in B\}.$$

Om $B = B^{-1}$ så säger vi att B är ***symmetrisk***. Notera att detta är ekvivalent med utsagan att $x \in B$ om och endast om $x^{-1} \in B$.

Proposition 5.1. Låt G vara en topologisk grupp, e beteckna enhetselementet i G, och a vara ett godtyckligt element i G.

(a) Avbildningarna $x \mapsto xa$, $x \mapsto ax$ och $x \mapsto x^{-1}$ är homeomorfier mellan G och G.

(b) Om K och L är kompakta delmängder av G så är aK, Ka, KL och K^{-1} också det.

Bevis. Påstående (a) följer från det faktum att en kontiuerlig funktion f definierad på ett produktrum $X \times Y$ med värden i ett rum Z är kontinuerlig "i varje variabel"; det vill säga, för varje $x_0 \in X$ och $y_0 \in Y$ så är avbildningarna $y \mapsto f(x_0, y)$ och $x \mapsto f(x, y_0)$ kontinuerliga funktioner från Y respektive X till Z. Påstående (b) följer från samma faktum, Proposition 2.17, samt det faktum att den kartesiska produkten $K_1 \times K_2$ av två kompakta delmängder $K_1 \subseteq X$ och $K_2 \subseteq Y$ är en kompakt delmängd av $X \times Y$.[5] □

[5]Detta följer från Tychonoffs sats. Alternativt kan det bevisas självständigt; se till exempel sida 167 i [5].

Proposition 5.2. Låt vara G en topologisk grupp, e beteckna enhetselementet i G, och U vara en omgivning till e.

(a) Det finns en omgivning V av e sådan att $VV \subseteq U$.

(b) Det finns en symmetrisk omgivning W av e som är innehållen i U.

Bevis. Del (a) är en omedelbar följd av att gruppoperationen på G är kontinuerlig samt Definition 2.5 av basen för topologin på den kartesiska produkten $G \times G$. För del (b), låt $g : G \to G$ beteckna funktionen under vilken $x \mapsto x^{-1}$. Eftersom $e \mapsto e$ och g är kontinuerlig så är mängden $V := g^{-1}(U)$ en omgivning till e. Mängden $W := V \cap V^{-1}$ är nu en symmetrisk omgivning av e som är innehållen i U, som önskat. □

Vi ska så småningom definiera ett begrepp som kan sägas motsvara begreppet likformig kontinuitet, fast för reellvärda funktioner på en topologisk grupp. Nästa sats utgör ett steg på vägen. Den säger lite löst att en kompakt mängd K förflyttas godtyckligt lite när den multipliceras med omgivningar till identitetselementet e från höger och vänster, förutsatt dessa omgivningar är små nog.

Proposition 5.3. Låt G vara en topologisk grupp, U vara öppen i G, och K vara en kompakt delmängd av G som är innehållen i U. Då finns omgivningar V_R och V_L av e sådana att $KV_R \subseteq U$ och $V_L K \subseteq U$.

Bevis. Vi visar existensen av mängden V_R; mängden V_L konstrueras analogt. Antag för den skull att x är en godtycklig punkt i K. Enligt Sats 5.1 är avbildningen $y \mapsto xy$ på G kontinuerlig. Enligt den alternativa formuleringen av kontinuitet given del (c) av Proposition 2.10 kan vi välja en omgivning W_x av e sådan att $xW_x \subseteq U$ och enligt Sats 5.2 kan vi välja en omgivning V_x av e sådan att $V_x V_x \subseteq W_x$. Samlingen $\{xV_x\}_{x \in K}$ är nu en öppen övertäckning av K, så det finns ändligt många punkter $x_1, \ldots, x_n$ i K sådana att mängderna $x_i V_{x_i}$ täcker K. Eftersom ändliga snitt av öppna mängder är öppna är mängden $V_R := \cap_{i=1}^n V_{x_i}$ en omgivning av e. Dessutom, om x är en punkt i K och y är en punkt i V_R, så gäller för något index i_0 att $xy \in x_{i_0} V_{x_{i_0}} V_{x_{i_0}}$. Eftersom $xV_{x_{i_0}} V_{x_{i_0}} \subseteq x_{i_0} W_{x_{i_0}} \subseteq U$ visar detta att xy ligger i U, varför $KV_R \subseteq U$. □

Nu definierar vi det utlovade kontinuitetsbegreppet. En reellvärd funktion f på en topologisk grupp G sägs vara ***likformigt kontinuerlig från vänster*** om det för varje $\varepsilon > 0$ finns en omgivning U av e sådant att det för varje $x \in G$ gäller att $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ närhelst $y \in xU$. Definitionen av ***likformig kontinuitet från höger*** för funktionen f erhålls genom att ersätta mängden xU ovan med mängden Ux.

Vi är nu i ett läge där vi kan precisera en speciell klass av likformigt kontinuerliga funktioner. Under Borelmått som ger kompakta mängder ändligt mått kan dessa funktioner integreras ändligt, och av deras likformiga kontinuitet följer att denna integralavbildning är kontinuerlig; en egenskap som kommer att utnyttjas i beviset av Haarmåttets entydighet.

Proposition 5.4. Låt G vara en lokalkompakt grupp och antag att $f \in C_c(G)$. Då är f likformigt kontinuerlig från vänster och höger.

Bevis. Vi bevisar att f är likformigt kontinuerlig från vänster; den likformiga kontinuiteten från höger visas på precis samma sätt.

Låt K beteckna stödet av f och antag att $\varepsilon > 0$. Eftersom f är kontinuerlig kan vi, för varje $x \in K$, välja en omgivning U_x av x sådan att $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$ för alla $y \in U_x$. Mängden $W_x := x^{-1} U_x$ är då en omgivning av e sådan att $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$ för alla $y \in xW_x$. Enligt den (a) av Proposition 5.2 finns det därför en omgivning V_x av e sådan att $V_x V_x \subseteq W_x$. Samlingen $\{xV_x\}_{x \in K}$ utgör nu en öppen övertäckning av K, så vi kan välja ändligt många punkter $x_1, \ldots, x_n$ från K sådana att $K \subseteq \bigcup_{j=1}^n x_j V_{x_j}$. Till slut, välj med hjälp av del (b) av Proposition 5.2 en symmetrisk omgivning V av e sådan att $V \subseteq \bigcap_{j=1}^n V_{x_j}$. Vi hävdar att det för varje $x \in G$ gäller att $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ om $y \in xV$.

Det finns totalt tre fall att betrakta. I det första fallet, då varken x eller y ligger i K, så gäller uppenbarligen att $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. I det andra fallet, då förutsättningarna är att $x \in K$ och $y \in xV$, så finns det ett index i sådant att $x \in x_i V_{x_i}$, och således sådant att $x, y \in x_i U_{x_i}$ (ty

$V_{x_i} \subseteq U_{x_i}$ vilket i sin tur ger att $y \in xV \subseteq x_i V_{x_i} V_{x_i} \subseteq x_i U_{x_i}$). Triangelolikheten ger därför att $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. I det tredje och sista fallet är förutsättningarna att $y \in K$ och $y \in xV$. På grund av att V har valts som en symmetrisk omgivning av e följer emellertid att $x \in yV$; detta fall är precis det vi just betraktade, fast med rollerna för x och y ombytta. I alla tre fall håller alltså olikheten, och satsen är därmed bevisad. □

Korollarium 5.5. Antag att G är en lokalkompakt grupp och att μ är ett Borelmått på G som ger kompakta mängder ändligt mått. Då gäller för varje funktion f i $C_c(G)$ att avbildningarna $x \mapsto \int_X f(xy)d\mu(y)$ och $x \mapsto \int_Y f(yx)d\mu(y)$ är kontinuerliga.

Bevis. Vi visar att den andra avbildningen är kontinuerlig, vilket kommer att följa av att f är likformigt kontinuerlig från vänster. Beviset för den första avbildningen följer på ett analogt sätt av att f är likformigt kontinuerlig från höger.

Låt för den skull $\varepsilon > 0$ och tag en godtycklig punkt x_0 i G. Vi avser finna en omgivning av x_0 sådan att $|\int f(yx)d\mu(y) - \int f(yx_0)| < \varepsilon$ för alla x i denna omgivning (se Sats 2.10). Observera först att det för alla x i G gäller att

$$\left| \int_G f(yx)d\mu(y) - \int_G f(yx_0)d\mu(y) \right| \leq \int_G |f(yx) - f(yx_0)| \, d\mu(y)$$

på grund av triangelolikheten för integrerbara funktioner (se Proposition 4.6). Använd att G är lokalkompakt för att välja en omgivning W av x_0 med kompakt slutet hölje $\overline{W}$. Om K betecknar stödet av f så har vi för varje x i W och y utanför mängden $K\overline{W}^{-1}$ att $f(yx) = 0$. Eftersom den senare mängden är kompakt kan vi välja ett $\varepsilon' > 0$ sådant att $\mu(K\overline{W}^{-1})\varepsilon' < \varepsilon$. Det faktum att f är likformigt kontinuerlig från vänster medför att det finns en omgivning V av e sådan att att det för varje $s \in G$ och $t \in sV$ gäller att $|f(s) - f(t)| < \varepsilon'$. Om nu x är en punkt i snittet $W \cap x_0 V$ så gäller för varje y i G att $yx \in yx_0 V$. Högerledet i integralolikheten ovan är alltså begränsat ovanifrån av $\mu(K\overline{W}^{-1})\varepsilon' = \varepsilon$ och beviset är därmed klart. □

5.2 Haarmåttets existens

Nu har vi byggt upp all nödvändig bakgrundsteori för att till fullo kunna förstå vänster-Haarmåttets definition, samt för att kunna bevisa dess existens.

Definition 5.6. Ett ***vänster-Haarmått*** på en lokalkompakt grupp G är ett Borelmått μ som inte är identiskt noll och som har följande egenskaper:

(i) $\mu(xA) = \mu(A)$ för alla $A \in \mathcal{B}(G)$ och för alla $x \in G$.

(ii) Varje mängd $A \in \mathcal{B}(G)$ uppfyller att $\mu(A) = \inf\{\mu(U) : A \subseteq U \text{ och } U \text{ är öppen}\}$.

(iii) Varje öppen mängd $U \in \mathcal{B}(G)$ uppfyller att $\mu(U) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq U \text{ och } K \text{ är kompakt}\}$.

(iv) För varje kompakt mängd $K \in \mathcal{B}(G)$ gäller att $\mu(K) < \infty$.

Egenskap (i) kallas för ***translationsinvarians från vänster***, medan egenskap (ii) och (iii) kallas för ***ytterreguljäritet*** respektive ***innerreguljäritet på öppna mängder***.

Sats 1.1 (Haarmåttets existens)**.** På varje lokalkompakt grupp finns ett vänster-Haarmått.

Bevis. I den här konstruktionen av vänster-Haarmåttet följer vi metoden som presenterades i avsnitt 3.3. Det första och mest omfattande steget är att konstruera det yttre mått, μ^*, som vi sedan utgår från. Nästkommande steg är att visa att alla Borelmängder av G är μ^*-mätbara, vilket i kombination med Carathéodorys utvidgningssats (Sats 3.9) garanterar att $\mu^*|_{\mathcal{B}(G)}$ är ett mått. Slutligen visar vi att måttet besitter de nödvändiga egenskaperna för att vara ett vänster-Haarmått. Låt oss börja med konstruktionen av det yttre måttet.

Låt G vara en lokalkompakt grupp, låt K vara en kompakt delmängd av G och låt V vara en delmängd av G vars inre V^o är icke-tomt. För varje element x i G är då xV^o en öppen mängd och samlingen $\{xV^o\}_{x \in G}$ utgör en öppen övertäckning av G. Därmed utgör $\{xV^o\}_{x \in G}$ även en öppen övertäckning av K, och eftersom K är kompakt finns det ändliga följder $(x_i)_{i=1}^n$ så att

$K \subseteq \bigcup_{i=1}^n x_i V^o \subseteq \bigcup_{i=1}^n x_i V$. Låt $\#(K : V)$ beteckna det minsta icke-negativa heltal n för vilket en sådan ändlig följd existerar. Observera att n kommer vara positivt, förutom då K är tomma mängden, i vilket fall n kommer vara lika med noll.

Välj nu en kompakt delmängd K_0 av G, vars inre är icke-tomt. Att G är lokalkompakt garanterar att det är möjligt. K_0 kommer vara fix för resten av beviset och fungera som referens när vi mäter storlekarna för olika delmängder av G. Närmare bestämt kommer vi för varje kompakt mängd K och för varje omgivning V till e titta på kvoten $\#(K : V)/\#(K_0 : V)$, och undersöka vad som händer då vi låter V bli mindre och mindre. Vi kommer alltså få ett slags gränsvärde, med hjälp av vilket vi kommer kunna definiera ett yttre mått.

Låt $\mathcal{K}$ vara samlingen av alla kompakta delmängder av G och låt $\mathcal{U}$ vara mängden av alla omgivningar till e. För varje U i $\mathcal{U}$, definiera funktionen $h_U \colon \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ genom att sätta $h_U(K) = \#(K : U)/\#(K_0 : U)$.

Lemma 5.7. För alla U i $\mathcal{U}$, för alla K, K_1 och K_2 i $\mathcal{K}$ och för alla x i G, gäller att

a) $0 \leq h_U(K) \leq \#(K : K_0)$,

b) $h_U(K_0) = 1$,

c) $h_U(xK) = h_U(K)$,

d) $h_U(K_1) \leq h_U(K_2)$ om $K_1 \subseteq K_2$,

e) $h_U(K_1 \cup K_2) \leq h_U(K_1) + h_U(K_2)$, och att

f) $h_U(K_1 \cup K_2) = h_U(K_1) + h_U(K_2)$ om $K_1U^{-1} \cap K_2U^{-1} = \emptyset$.

Bevis. Påståendena b), c), d) och e) är enkla att kontrollera. Vi bevisar a) och f). Låt oss börja med påstående a). För varje kompakt mängd K är $h_U(K)$ en kvot mellan ett icke-negativt heltal och ett positivt heltal, vilket medför att $h_U(K)$ är icke-negativ. Det kvarstår att visa att $h_U(K) \leq \#(K : K_0)$. Om vi multiplicerar båda sidor med det positiva talet $\#(K_0 : U)$ får vi den ekvivalenta olikheten $\#(K : U) \leq \#(K : K_0)\#(K_0 : U)$. Låt nu $(y_i)_{i=1}^m$ och $(z_j)_{j=1}^n$ vara ändliga följder i G sådana att $K \subseteq \bigcup_{i=1}^m y_i K_0$ och $K_0 \subseteq \bigcup_{j=1}^n z_j U$. Detta ger att $K \subseteq \bigcup_{i=1}^m \bigcup_{j=1}^n y_i z_j U$, från vilket den önskade olikheten följer.

Nu visar vi f). Eftersom den ena olikheten följer av e) kvarstår det endast att visa att $h_U(K_1 \cup K_2) \geq h_U(K_1) + h_U(K_2)$. Antag att $K_1U^{-1} \cap K_2U^{-1} = \emptyset$ och tag en följd $(x_i)_{i=1}^n$ i G av längd $n := \#(K_1 \cup K_2 : U)$ som uppfyller att $K_1 \cup K_2 \subseteq \bigcup_{i=1}^n x_i U$. För varje x_i i följden måste då gälla att minst ett av snitten $x_iU \cap K_1$ och $x_iU \cap K_2$ är tomt, ty annars hade x_i tillhört $K_1U^{-1} \cap K_2U^{-1}$. Detta innebär att vi kan partitionera elementen i $(x_i)_{i=1}^n$ i två följder $(y_i)_{i=1}^j$ och $(z_i)_{i=1}^k$ så att $K_1 \subseteq \bigcup_{i=1}^j y_i U$ och så att $K_2 \subseteq \bigcup_{i=1}^k z_i U$. Alltså är $h_U(K_1) \leq j$ och $h_U(K_2) \leq k$, vilket medför att deras summa inte kan vara större än $j + k = n$. □

Nu ska vi titta närmare på kvoten $\#(K : U)/\#(K_0 : U)$ och utforska vad som händer när vi låter U bli mindre.

För varje kompakt delmängd K av G, låt I_K beteckna det slutna intervallet $[0, \#(K : K_0)]$, betraktat som ett delrum av $\mathbb{R}$. Definiera nu produktrummet X som den kartesiska produkten $\prod_{K \in \mathcal{K}} I_K$, försedd med produkttopologin. Observera att eftersom varje intervall I_K är kompakt, ger Tychonoffs sats (Sats 2.19) att även deras produkt X är kompakt.

Vi erinrar oss att enligt definitionen av den kartesiska produkten av en indexerad familj består X av alla funktioner $f \colon \mathcal{K} \to \bigcup_{K \in \mathcal{K}} I_K$ som för varje kompakt delmängd K uppfyller att $f(K)$ tillhör I_K. Påstående a) i Lemma 5.7 garanterar att alla funktioner h_U tillhör X.

För varje $V \in \mathcal{U}$, låt $S(V)$ vara det slutna höljet i X av mängden $\{h_U : U \in \mathcal{U} \text{ och } U \subseteq V\}$. Vi ska nu visa att samlingen $\{S(V)\}_{V \in U}$ har ändliga snittegenskapen. Låt $V_1, ..., V_n$ vara godtyckliga omgivningar till e och låt V vara deras snitt. Då är även V en omgivning till e, och eftersom det för varje i gäller att V är en delmängd av V_i så tillhör h_V varje mängd $S(V_i)$. Detta medför att $h_V \in \bigcap_{i=1}^n S(V_i)$, och vi kan dra slutsatsen att $\bigcap_{i=1}^n S(V_i)$ är icke-tom. Eftersom $V_1, ..., V_n$ valdes godtyckligt har vi därmed visat att $\{S(V)\}_{V \in \mathcal{U}}$ innehar ändliga snittegenskapen. Eftersom dessutom varje mängd $S(V)$ är sluten, ger det faktum att X är kompakt att snittet $\bigcap_{V \in \mathcal{U}} S(V)$ är icke-tomt (se Proposition 2.21). Ur denna mängd väljer vi en funktion, låt oss kalla den för $h_\bullet$, som från och med nu kommer att tjäna som vår gränsfunktion.

Lemma 5.8. För alla x i G och för alla K, K_1 och K_2 i $\mathcal{K}$ har funktionen $h_\bullet$ följande egenskaper:

a) $0 \leq h_\bullet(K)$,

b) $h_\bullet(\emptyset) = 0$,

c) $h_\bullet(K_0) = 1$,

d) $h_\bullet(xK) = h_\bullet(K)$,

e) $h_\bullet(K_1) \leq h_\bullet(K_2)$ om $K_1 \subseteq K_2$,

f) $h_\bullet(K_1 \cup K_2) \leq h_\bullet(K_1) + h_\bullet(K_2)$, och

g) $h_\bullet(K_1 \cup K_2) = h_\bullet(K_1) + h_\bullet(K_2)$ om $K_1 \cap K_2 = \emptyset$.

Bevis. Påstående a) följer direkt av att $h_\bullet \in X$. Påstående b) kan enkelt ses genom att observera att $I_\emptyset = [0, 0] = \{0\}$. Det följer att $h(\emptyset)$ antar värdet noll för alla $h \in X$, och i synnerhet även för $h_\bullet$. Vi går nu vidare till egenskap f). För varje kompakt mängd K, låt $p_K : X \to \mathbb{R}$ vara projektionen som för varje h i X definieras av $p_K(h) = h(K)$. Proposition 2.12 i kombination med att projektioner är kontinuerliga garanterar att p_K är kontinuerlig. Därmed gäller det att för varje par K_1 och K_2 av kompakta mängder är funktionen $\xi_{K_1,K_2} : X \to \mathbb{R}$ som definieras av $\xi_{K_1,K_2}(h) = h(K_1) + h(K_2) - h(K_1 \cup K_2)$ också kontinuerlig. Observera att funktionen är väldefinierad, eftersom mängden $K_1 \cup K_2$ är kompakt. Från Lemma 5.7 e) vet vi att ξ_{K_1,K_2} är icke-negativ för varje h_U. Proposition 2.10 (c) garanterar därmed att den även måste vara icke-negativ i varje punkt för varje $S(V)$. Därmed kan vi dra slutsatsen att den är icke-negativ i varje punkt av $h_\bullet$, vilket ger det önskade resultatet. Påståendena c), d) och e) visas på liknande sätt som f), genom att definiera lämpliga funktioner från X till $\mathbb{R}$ och jämföra med Lemma 5.7

Vi visar slutligen påstående g). Låt K_1 och K_2 vara två kompakta, disjunkta delmänger av G. Eftersom G är Hausdorff ger Proposition 2.27 att det finns två öppna, disjunkta mängder U_1 och U_2 som innehåller K_1 respektive K_2. Vidare ger Proposition 5.3 att det finns två omgivningar V_1 och V_2 till e sådana att $K_1V_1 \subseteq U_1$ och $K_2V_2 \subseteq U_2$. Låt nu $V = V_1 \cap V_2$. Eftersom V är en delmängd till både V_1 och V_2 följer det att K_1V och K_2V är disjunkta. Lemma 5.7 f) ger då att $h_{V^{-1}}(K_1 \cup K_2) = h_{V^{-1}}(K_1) + h_{V^{-1}}(K_2)$. Men då gäller även att för alla h_U sådana att $U \in \mathcal{U}$ och $U \subseteq V^{-1}$, det vill säga för alla funktioner h_U innehållna i $S(V^{-1})$, att likheten $h_U(K_1 \cup K_2) = h_U(K_1) + h_U(K_2)$ håller. Eftersom $h_\bullet$ tillhör $S(V^{-1})$ följer med samma argumentation som i det förra beviset det önskade resultatet. □

Med hjälp av gränsfunktionen kan vi nu definiera det yttre måttet. För varje öppen delmängd U av G definiera

$$\mu^*(U) = \sup\{h_\bullet(K) \colon K \subseteq U \text{ och } K \in \mathcal{K}\}, \tag{4}$$

och utvidga definitionen till varje delmängd A av G genom

$$\mu^*(A) = \inf\{\mu^*(U) : A \subseteq U \text{ och } U \text{ är öppen}\}. \tag{5}$$

Nästa steg är att visa att μ^* verkligen är ett yttre mått. Att μ^* är icke-negativ och att $\mu^*(\emptyset) = 0$ följer av motsvarande egenskaper för $h_\bullet$. Monotoniciteten inses också lätt: Om A är en delmängd av B så följer det att varje öppen mängd som innehåller B också innehåller A. Därmed är $\mu^*(A)$ infimum till en lika stor eller möjligtvis större mängd än mängden som $\mu^*(B)$ är infimum till. Den önskade olikheten följer.

Slutligen visar vi att μ^* är subadditiv. Vi börjar med att visa att subadditiviteten gäller för alla öppna delmängder av G. Låt $(U_i)_{i=1}^\infty$ vara en godtycklig följd av öppna mängder i G och låt K vara en kompakt delmängd av $\bigcup_{i=1}^\infty U_i$. Eftersom K är kompakt finns det ett positivt heltal n så att $K \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_i$. Proposition 2.28 i kombination med ett induktionsargument garanterar att det finns kompakta mängder $K_1, ..., K_n$ innehållna i $U_1, ..., U_n$ så att $K = \bigcup_{i=1}^n K_i$. Lemma 5.8 f) och definitionen av μ^* ger då att

$$h_\bullet(K) = h_\bullet\Big(\bigcup_{i=1}^n K_i\Big) \leq \sum_{i=1}^n h_\bullet(K_i) \leq \sum_{i=1}^n \mu^*(U_i) \leq \sum_{i=1}^\infty \mu^*(U_i). \tag{6}$$

Eftersom K valdes godtyckligt ur mängden av kompakta delmängder av $\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ kan vi ta supremum över samma mängd av det första och sista ledet i (6), och (4) ger då att $\mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(U_i)$, som önskat. Nu visar vi att detta medför subadditivitet för godtyckliga följder i G.

Låt $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ vara en godtycklig följd i G och låt ε vara ett positivt tal. För varje positivt heltal i, välj en öppen delmängd U_i av G sådan att $A_i \subseteq U_i$ och sådan att $\mu^*(U_i) < \mu^*(A_i) + \varepsilon/2^i$. Det följer av definitionen av μ^* att det är möjligt. Det följer nu av ovanstående olikheter, monotonicitet, samt det faktum att $\sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} = 1$ att

$$\mu^*\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) \leq \mu^*\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(U_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) + \varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) + \varepsilon. \tag{7}$$

Då ε valdes godtyckligt ger det första och det sista ledet i (7) att $\mu^*\big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\big) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$, och subadditiviteten är därmed visad.

Det står nu klart att μ^* är ett yttre mått, och enligt Carathéodorys utvidgningssats (Sats 3.9) vet vi att mängden $\mathcal{M}$ bestående av alla μ^*-mätbara delmängder av G är en σ-algebra. Nästa steg är att visa att Borel-σ-algebran av G är en delmängd av $\mathcal{M}$. Eftersom $\mathcal{B}(G)$ är den minsta σ-algebra som innehåller alla öppna delmängder av G räcker det att visa att varje öppen delmängd av G är innehållen i $\mathcal{M}$. Enligt Anmärkning 3.8 behöver vi alltså visa att det för varje delmängd A av G som uppfyller att $\mu^*(A) < \infty$, och för varje öppen delmängd U av G, gäller att

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap U) + \mu^*(A \cap U^c). \tag{8}$$

I själva verket kommer det under de rådande förutsättningarna räcka att kontrollera (8) då A är en öppen mängd, det vill säga att för varje par V och U av öppna mängder i G, där V uppfyller att $\mu^*(V) < \infty$, visa att olikheten

$$\mu^*(V) \geq \mu^*(V \cap U) + \mu^*(V \cap U^c). \tag{9}$$

håller. Detta inses genom att först konstatera att (9) är ekvivalent med att olikheten

$$\mu^*(V) > \mu^*(V \cap U) + \mu^*(V \cap U^c) - \varepsilon \tag{10}$$

håller för varje positivt tal ε. Låt nu A vara en godtycklig delmängd av G sådan att $\mu^*(A) < \infty$ och låt ε vara ett positivt tal. Därtill, låt V vara en öppen delmängd av G som innehåller A och som uppfyller att $\mu^*(V) < \mu^*(A) + \varepsilon$. Att detta är möjligt ses från definitionen av det yttre måttet. Monotonicitet, tillsammans med att A är en delmängd av V, ger nu att

$$\mu^*(A) + \varepsilon > \mu^*(A \cap U) + \mu^*(A \cap U^c) - \varepsilon. \tag{11}$$

Eftersom ε valdes godtyckligt implicerar detta att (8) håller. Därmed räcker det att visa (9), vilket vi nu gör.

Låt V och U vara öppna mängder i G sådana att $\mu^*(V) < \infty$. Låt ε vara ett positivt tal och låt K vara en kompakt delmängd av $V \cap U$ sådan att $h_\bullet(K) > \mu^*(V \cap U) - \varepsilon$. Från definitionen av det yttre måttet ser vi att detta är möjligt. Därtill, låt L vara en kompakt delmängd av $V \cap K^c$ sådan att $h_\bullet(L) > \mu^*(V \cap K^c) - \varepsilon$. Även detta är möjligt enligt definitionen av μ^*, efter observationen att K^c är öppen (se Korollarium 2.26). Eftersom $V \cap U^c \subseteq V \cap K^c$ ger monotonicitet att $h_\bullet(L) > \mu^*(V \cap U^c) - \varepsilon$. Dessa olikheter, tillsammans med Lemma 5.8 g) och det faktum att K och L är disjunkta, ger nu att

$$h_\bullet(K \cup L) = h_\bullet(K) + h_\bullet(L) \geq \mu^*(V \cap U) + \mu^*(V \cap U^c) - 2\varepsilon. \tag{12}$$

Eftersom $K \cup L \subseteq V$ ger monotonicitet tillsammans med definitionen av det yttre måttet att $\mu^*(V) \geq h_\bullet(K \cup L)$. Detta, tillsammans med (12) och det faktum att ε valdes godtyckligt, ger det önskade resultatet. Därmed står det klart att $\mu := \mu^*|_{\mathcal{B}(G)}$ är ett mått. Vi visar nu att μ innehar egenskap (ii), (iii) och (iv) i Definition 5.6.

Först visar vi att varje kompakt mängd har ett ändligt mått. Låt K vara en kompakt mängd i G och låt U vara en öppen mängd i G som innehåller K. Från (4) följer det då att $h_\bullet(K) \leq \mu(U)$.

Vi har alltså att $h_\bullet(K)$ är en nedre begränsning till kvantiteter på formen $\mu(U)$, där U är en öppen mängd innehållande K. Tar vi infimum över alla sådana kvantiteter får vi med hjälp av (5) att

$$h_\bullet(K) \leq \mu(K). \tag{13}$$

Låt nu K vara en kompakt mängd och låt U vara en öppen mängd sådan att K är innehållen i U och sådan att $\overline{U}$ är kompakt. Korollarium 2.31 garanterar att en sådan mängd U existerar. För varje kompakt mängd L som är innehållen i U gäller då att $h_\bullet(L) \leq h_\bullet(\overline{U})$. Detta, tillsammans med monotonicitet och (4), ger att

$$\mu(K) \leq \mu(U) \leq h_\bullet(\overline{U}).$$

Eftersom $h_\bullet(\overline{U}) \leq \#(\overline{U} : K_0) < \infty$ är beviset färdigt.

Att μ är ytterreguljärt följer direkt av (5) medan innerreguljäriteten på öppna mängder följer av (4) och (13). Det enda som återstår att visa är att μ är translationsinvariant från vänster och inte identiskt noll. Translationsinvariansen fås av att observera att det följer av Proposition 5.1 att en delmängd U av G är öppen om och endast om delmängden aU av G, där $a \in G$, är öppen. Analogt gäller att en delmängd K av G är kompakt om och endast om delmängden aK av G är kompakt. Det följer av detta, samt av definitionen av μ, att det för varje $x \in G$ och för varje $A \in \mathcal{B}(G)$ gäller att $\mu(xA) = \mu(A)$.

Det faktum att $h_\bullet(K_0) = 1$, tillsammans med definitionen av μ, ger att μ inte är nollfunktionen. Därmed står det klart att varje lokalkompakt grupp har ett vänster-Haarmått. □

5.3 Haarmåttets entydighet

Med existensen klarlagd ska vi nu övergå till att bevisa entydighet, dock är detta bara möjligt upp till en multiplikativ konstant.

I denna del kommer vi att behöva åberopa ett klassiskt resultat från funktionalanalysen, nämligen Riesz representationssats. Beviset av denna är både intressant och relevant för konstruktionen av såväl Haarmåttet som Lebesguemåttet, då det utnyttjar den konstruktion av mått som beskrivs i avsnitt 3.3. Hela beviset av representationssatsen finnes i Appendix D, och den intresserade läsaren rekommenderas varmt att studera detta. För att formulera satsen behöver vi göra en definition.

Definition 5.9. Låt X vara ett vektorrum över $\mathbb{R}$. En ***linjär funktional*** $I\colon X \to \mathbb{R}$ är en linjär avbildning från vektorrummet till skalärmängden $\mathbb{R}$.

Sats 5.10 (Riesz representationssats)**.** *Låt X vara ett lokalkompakt Hausdorffrum och låt I vara en positiv linjär funktional på $C_c(X)$. Då finns ett unikt Borelmått μ på X som är ytterreguljärt, innerreguljärt på öppna mängder samt ändligt på kompakta mängder, sådant att för varje $f \in C_c(X)$ så gäller*

$$I(f) = \int_G f(x)d\mu(x).$$

Vi är nu redo att ta oss an det andra huvudresultatet, vi formulerar detta igen.

Sats 1.2 (Haarmåttets entydighet)**.** *Låt μ och ν vara vänster-Haarmått på en lokalkompakt grupp. Då finns ett positivt reellt tal c, så att $\nu = c\mu$.*

Bevis. Låt G vara en lokalkompakt grupp. Vi ska visa att för en godtycklig funktion $f \in C_c(G)$ så gäller $\int_G f d\nu = c\int_G f d\mu$, där $c = \frac{\int_G g d\nu}{\int_G g d\mu}$ för något $g \in C_c(G)$, och sedan använda Riesz representationssats för att erhålla $\nu = c\mu$. Men för att bilda kvoten c måste vi försäkra oss om att nämnaren är nollskild, för detta formulerar vi följande lemma.

Lemma 5.11. *För varje icke-tom öppen mängd $U \subseteq G$ så är $\mu(U) > 0$ och för varje icke-negativ funktion $g \in C_c(G)$ som inte är identiskt noll har vi*

$$\int_G g(x)d\mu(x) > 0.$$

Bevis av lemma. Då μ är ytterreguljärt så kan vi välja en kompakt delmängd $K \subseteq G$ så att $\mu(K) > 0$. Låt $U \subseteq G$ vara öppen och icke-tom. Då är $\{xU\}_{x\in K}$ en övertäckning av K och eftersom K är kompakt så finns $x_1, \ldots, x_n \in K$ så att $\{x_iU\}_{i=1}^n$ är en delövertäckning av K. Då $K \subseteq \bigcup_{i=1}^n x_iU$ (olikheten under), och vi vet att μ är ett vänster-Haarmått (första likheten) så har vi att

$$\mu(K) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu(x_iU) = \sum_{i=1}^{n} \mu(U) = n\mu(U).$$

Därför vet vi nu att $\mu(U) > 0$ för varje öppen icke-tom delmängd $U \subseteq G$, vilket visar första delen.

För den andra delen, tag $f \in C_c(G)$, sådan att $f \geq 0$ och icke-identiskt noll. Då finns det ett positivt tal ε och en öppen icke-tom mängd U så att $f \geq \varepsilon\chi_U$. Det följer av Proposition 4.6 (c) att

$$\int_G f(x)d\mu(x) \geq \int_G \varepsilon\chi_U(x)d\mu(x) = \varepsilon\int_G \chi_U(x)d\mu(x) = \varepsilon\mu(U).$$

Vi vet att $\varepsilon > 0$ och vi har redan visat att $\mu(U) > 0$ för varje icke-tom öppen delmängd $U \subseteq G$, alltså följer det andra påståendet i lemmat. □

Vi återgår nu till beviset av satsen. Fixera $g \in C_c(G)$ så att $g \geq 0$ och icke-identiskt noll, att en sådan funktion existerar följer av Korollarium 2.34. Av Lemma 5.11 följer att $\int g d\mu > 0$ och $\int g d\nu > 0$. Tag en godtycklig funktion $f \in C_c(G)$ och bilda kvoten $\frac{\int_G f d\mu}{\int_G g d\mu}$. Vi ska visa att denna kvot inte beror av måttet μ, men vi behöver ett resultat till.

Lemma 5.12. Om φ är en funktion i $C_c(G)$ så gäller för varje $x \in G$

$$\int_G \varphi(x^{-1}t)d\mu(t) = \int_G \varphi(t)d\mu(t).$$

Bevis av lemma. Vi erinrar oss att $\int \varphi d\mu = \int \varphi^+ d\mu - \int \varphi^- d\mu$, där φ^+ och φ^- är icke-negativa, så av linjäritet (Proposition 4.6) så kan vi helt enkelt visa påståendet för var och en av dessa, eller utan inskränkning anta att φ är icke-negativ.

Så antag att $\varphi \geq 0$, låt $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vara en växande följd av enkla funktioner, sådana att $\phi_n \leq \varphi$ för varje n och $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergerar punktvis mot φ (existensen av en sådan följd är icke-trivial, men motiveras av Lemma C.2 i Appendix C) samt fixera $x \in G$.

Vi kan konstatera att för varje $A \subseteq G$ och $x^{-1}, t \in G$ så gäller $x^{-1}t \in A$ om och endast om $t \in xA$, vilket medför att $\chi_A(x^{-1}t) = \chi_{xA}(t)$.

För varje enkel funktion i följden, säg $\phi_k = \sum_{i=1}^m c_i\chi_{A_i}$, använd linjäritet (Proposition 4.6), vårt konstaterande om indikatorfunktionen ovan, sedan utnyttja att $\mu(xA_i) = \mu(A_i)$ och till sist motsvarande steg i omvänd ordning och få

$$\begin{aligned}\int_G \phi_k(x^{-1}t)d\mu(t) &= \int_G \sum_{i=1}^m c_i\chi_{A_i}(x^{-1}t)d\mu(t) = \sum_{i=1}^m c_i \int_G \chi_{A_i}(x^{-1}t)d\mu(t) = \sum_{i=1}^m c_i \int_G \chi_{xA_i}(t)d\mu(t) \\ &= \sum_{i=1}^m c_i\mu(xA_i) = \sum_{i=1}^m c_i\mu(A_i) = \ldots = \int_G \phi_k(t)d\mu(t)\end{aligned}$$

Monotona konvergenssatsen (Sats 4.7, yttre likheterna) och resultatet ovan (mittersta likheten) ger

$$\int_G \varphi(x^{-1}t)d\mu(t) = \lim_{n\to\infty}\int_G \phi_n(x^{-1}t)d\mu(t) = \lim_{n\to\infty}\int_G \phi_n(t)d\mu(t) = \int_G \varphi(t)d\mu(t).$$ □

Vi är nu redo att slutföra beviset av entydigheten. För en funktion h i $C_c(G \times G)$ så gäller enligt Proposition 4.9 att integralerna

$$\int_G\int_G h(x,y)d\mu(x)d\nu(y) \text{ och } \int_G\int_G h(x,y)d\nu(y)d\mu(x) \tag{14}$$

existerar och är lika. Om vi betraktar den högra integralen i (14), använder Proposition 4.9, sedan Lemma 5.12 på funktionen $x \mapsto h(x,y)$, Proposition 4.9 igen och slutligen Lemma 5.12 en sista gång på funktionen $y \mapsto h(y^{-1}x, y)$ får vi identiteten

$$\int_G\int_G h(x,y)d\nu(y)d\mu(x) = \int_G\int_G h(x,y)d\mu(x)d\nu(y) = \int_G\int_G h(y^{-1}x,y)d\mu(x)d\nu(y)$$
$$= \int_G\int_G h(y^{-1}x,y)d\nu(y)d\mu(x) = \int_G\int_G h((xy)^{-1}x,xy)d\nu(y)d\mu(x) = \int_G\int_G h(y^{-1},xy)d\nu(y)d\mu(x).$$

Låt sedan $h(x,y) = \frac{f(x)g(yx)}{\int_G g(tx)d\nu(t)}$. Då $x \mapsto \int_G g(tx)d\nu(t)$ är nollskild enligt Lemma 5.11 och kontinuerlig enligt Sats 5.5 så är h kontinuerlig. Låt sedan $K_1 = \text{supp}(f)$ och $K_2 = \text{supp}(g)$. Om $f(x) \neq 0$ och $g(yx) \neq 0$ så har vi att $x \in K_1$ och $yx \in K_2$, eller ekvivalent $x \in K_1$ och $y \in K_2K_1^{-1}$, så $\text{supp}(h) \subseteq K_1 \times K_2K_1^{-1}$. Dessutom är K_2K^{-1} kompakt enligt Sats 5.1 och därav är $K_1 \times K_2K_1^{-1}$ kompakt enligt Tychonoffs sats (Sats 2.19), alltså gäller $h \in C_c(G\times G) \subseteq L^1(G\times G)$ så h är integrerbar.

Notera sedan att $h(y^{-1},xy) = \frac{f(y^{-1})g(x)}{\int_G g(ty^{-1})d\nu(t)}$ och använd identiteten ovan för att erhålla

$$\int_G\int_G \frac{f(x)g(yx)}{\int_G g(tx)d\nu(t)}d\nu(y)d\mu(x) = \int_G\int_G \frac{f(y^{-1})g(x)}{\int_G g(ty^{-1})d\nu(t)}d\nu(y)d\mu(x).$$

Vidare har vi att vänsterledet med linjäritet kan förenklas genom att konstatera att

$$\int_G \frac{f(x)g(yx)}{\int_G g(tx)d\nu(t)}d\nu(y) = \frac{f(x)}{\int_G g(tx)d\nu(t)}\int_G g(yx)d\nu(y) = f(x), \text{ så att högerledet blir } \int_G f(x)d\mu(x).$$

På liknande sätt får vi om vi konstaterar att $\int g d\mu$ är ett reellt tal, som kan betraktas som en konstant då vi integrerar över y, och således kan flyttas ur den yttre integralen att högerledet blir

$$\int_G g(x)d\mu(x)\int_G \frac{f(y^{-1})}{\int_G g(ty^{-1})d\nu(t)}d\nu(y).$$

Det följer att kvoten kan uttryckas med

$$\frac{\int_G f(x)d\mu(x)}{\int_G g(x)d\mu(x)} = \int_G \frac{f(y^{-1})}{\int_G g(ty^{-1})d\nu(t)}d\nu(y),$$

ett uttryck som beror av f och g men inte av μ, så kvoten är oberoende av måttet μ. Vi kunde alltså lika gärna gjort samma steg för ν och det följer att

$$\frac{\int_G fd\nu}{\int_G gd\nu} = \frac{\int_G fd\mu}{\int_G gd\mu}, \text{ eller ekvivalent } \int_G fd\nu = c\int_G fd\mu, \text{ för } c = \frac{\int_G gd\nu}{\int_G gd\mu}.$$

Nu ger Riesz representationssats att Borelmåtten μ och ν är unika för de linjära funktionalerna $I_\mu(f) = \int_G fd\mu$ och $I_\nu(f) = \int_G fd\nu$ på $C_c(G)$, alltså gäller $\nu = c\mu$, som hävdat. □

Referenser

[1] Donald L. Cohn. *Measure Theory*, volume 2. Springer, 2013.

[2] John R. Durbin. *Modern Algebra: An Introduction*. John Wiley & Sons, 2008.

[3] Gerald B. Folland. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*. John Wiley & Sons, 2013.

[4] Alfred Haar. Der Massbegriff in der Theorie der kontinuierlichen Gruppen. *Annals of mathematics*, pages 147–169, 1933.

[5] James R. Munkres. *Topology*, volume 2. Pearson, 2018.

[6] John von Neumann. Die Einführung analytischer Parameter in topologischen Gruppen. *Annals of Mathematics*, pages 170–190, 1933.

[7] Jeffrey Steif. Lecture notes on measure theory, integration theory and differentiation theory (courses TMV100 / MMA110). Unpublished, August 2022.

Appendix

A Topologi

A.1 Mängdteoretiskt bakgrundsmaterial

Definition A.1. Låt $\{A_\alpha\}_{\alpha\in J}$ vara en samling av mängder, indexerad av en mängd J, och låt X beteckna unionen av alla mängder i samlingen. Den ***kartesiska produkten*** av $\{A_\alpha\}_{\alpha\in J}$ betecknas med

$$\prod_{\alpha\in J} A_\alpha$$

och definieras som samlingen bestående av alla funktioner $f : J \to X$ sådana att $f(\alpha) \in A_\alpha$ för alla $\alpha \in J$.

Anmärkning A.2. Definition A.1 är i strikt mening inte en generalisering av definitionen av den kartesiska produkten av två mängder. Om X och Y är två mängder rum och samlingen $\{X, Y\}$ är indexerad av någon mängd J består som bekant $X \times Y$ av *ordnade par* av element från X respektive Y, medan produkten $\Pi_{\alpha\in J} Z_\alpha$ består av *funktioner* från J till $X \cup Y$. I fallet då $J = \{1, 2\}$ finns emellertid en uppenbar bijektion mellan de två mängderna; motsvarande topologiska rum är till och med homeomorfa.

A.2 Några bevis av satserna i kapitel två

Vi inleder med att presentera beviset av den alternativa formuleringen av kompakthet samt beviset av (följd-) satsen om kontinuerliga funktioners största och minsta värde på kompakta rum.

Proposition A.3. Låt X vara ett topologiskt rum. Då är X kompakt om och endast om det för varje samling $\mathcal{C}$ av slutna delmängder av X som har ändliga snittegenskapen gäller att snittet $\cap_{C\in\mathcal{C}} C$ av alla mängder i $\mathcal{C}$ är icke-tomt.

Bevis. Vi inleder, av pedagogiska skäl, med tre generella observationer. För varje samling $\mathcal{A}$ av delmängder av X, låt $\mathcal{C} = \{X \setminus A : A \in \mathcal{A}\}$. Då gäller följande:

1. $\mathcal{A}$ är en samling av öppna delmängder av X om och endast om $\mathcal{C}$ är en samling av slutna delmängder av X.
2. $\mathcal{A}$ täcker X om och endast om snittet $\bigcap_{C\in\mathcal{C}} C$ är tomt.
3. En ändlig delsamling $\{A_1, \ldots, A_n\}$ av $\mathcal{A}$ täcker X om och endast om snittet av mängderna $C_i := X \setminus A_i$ är tomt.

Den första punkten är uppenbar. De två senare punkterna följer av De Morgans lag: $X \setminus \bigcup_\alpha A_\alpha = \bigcap_\alpha X \setminus A_\alpha$. Vi kan nu visa satsen. Per definition är påståendet att X är kompakt ekvivalent med implikationen: "För varje samling $\mathcal{A}$ av öppna delmängder av X sådan att $\mathcal{A}$ täcker X, så finns det en ändlig delsamling av $\mathcal{A}$ som täcker X". Denna implikation är i sin tur ekvivalent med den kontrapositiva implikationen: "Òm $\mathcal{A}$ är en samling av öppna delmängder av X sådan att ingen ändlig delsamling av $\mathcal{A}$ täcker X, så täcks inte X av $\mathcal{A}$". Denna implikation är nu, i tur och ordning, på grund av punkterna (1), (3) och (2), ekvivalent med utsagan: "För varje samling $\mathcal{C}$ av slutna delmängder av X med ändliga snittegenskapen, så gäller att snittet $\bigcap_{C\in\mathcal{C}} C$ av alla mängder i $\mathcal{C}$ är icke-tomt". □

Korollarium A.4. Låt X vara ett kompakt topologiskt rum. För varje kontinuerlig funktion $f\colon X \to \mathbb{R}$ finns då punkter x_1, x_2 i X sådana att $f(x_1) \le f(x) \le f(x_2)$ för varje punkt x i X.

Bevis. Vi visar att f antar ett största värde; beviset av att f antar ett minsta värde är analogt. Låt $M := \sup_{x\in X} f(x)$ och notera att M är ändligt. Vi ska visa att $f(x_0) = M$ för något x_0 i X. Låt för den skull $F_n := \{x \in X : f(x) \ge M - \frac{1}{n}\}$ för varje positivt heltal n. Kontinuiteten[6] av f medför

[6] Här använder vi det (lättbevisade) faktum att en funktion $g\colon X \to Y$ är kontinuerlig om och endast om $g^{-1}(C)$ är sluten i X för varje sluten delmängd C av Y.

varje F_n är sluten i X och definitionen av M medför att varje ändligt snitt av mängder $F_{n_1}, \ldots, F_{n_k}$ är icke-tomt. Enligt Proposition A.3 finns därför en punkt x_0 i X sådan att $M - \frac{1}{n} \leq f(x_0) \leq M$ för varje positivt heltal n. Låter vi nu $n \to \infty$ så följer att $f(x_0) = M$. □

Härnäst presenterar vi bevisen av samtliga topologiska hjälpsatser från avsnitt tre i kapitel två rörande rum som är Hausdorff och/eller lokalkompakta.

Proposition A.5. Kompakta mängder i Hausdorffrum är slutna.

Bevis. Låt X vara Hausdorff och K vara en kompakt delmängd av X. Antag att y_0 är en punkt i X som inte ligger i K. Vi kommer att visa att det finns en omgivning V av y_0 som inte innehåller några punkter från K. För den sakens skull, utnyttja hypotesen att X är Hausdorff och välj för varje punkt x i K disjunkta omgivningar U_x och V_x till x respektive y_0. Samlingen $\{U_x : x \in K\}$ är en övertäckning av K med mängder öppna i X, så vi kan välja $x_1, \ldots, x_n$ från K så att K är innehållen i $\cup_{i=1}^n U_{x_i}$. Mängden $V := V_{x_1} \cap \ldots \cap V_{x_n}$ är nu en omgivning till y_0 som är disjunkt från K. Beviset är därmed klart. □

I beviset ovan visade vi i att det för den godtyckligt valda punkten y_0 från $X \setminus K$ fanns disjunkta omgivningar U och V innehållande y_0 respektive K. Detta resultat utgör Proposition 2.25 men får här namnet Proposition A.6.

Proposition A.6. Låt X vara Hausdorff och K vara en kompakt delmängd av X. För varje punkt y som inte ligger i K finns disjunkta, öppna mängder U och V som innehåller y respektive K.

Bevis. Se beviset av Proposition A.5 □

Proposition A.7. Varje par av disjunkta kompakta mängder i ett Hausdorffrum kan separeras med disjunkta öppna mängder.

Bevis. Låt X vara Hausdorff och K och L vara disjunkta, kompakta delmängder av X. För varje punkt x i K finns det enligt Proposition A.6 disjunkta öppna mängder U_x och V_x innehållande x respektive L. Samlingen bestående av mängderna U_x är en öppen övertäckning av K, så vi kan välja ändligt många punkter $x_1, \ldots, x_n$ från K sådana att unionen $\cup_1^n U_{x_i}$ täcker K. Med $U := \cup_1^n U_{x_i}$ och $V := \cap_i^n V_{x_i}$ är U och V disjunkta, öppna mängder innehållande K respektive L. □

Korollarium A.8. Låt X vara Hausdorff och antag att K är en kompakt delmängd av X. Om U_1 och U_2 är två öppna mängder sådana att $K \subseteq U_1 \cup U_2$, så kan K skrivas som unionen av två kompakta mängder K_1 och K_2 som är innehållna i U_1 respektive U_2.

Bevis. Låt E_1 och E_2 beteckna mängderna $K \cap U_1^c$ och respektive $K \cap U_2^c$. Eftersom E_1 och E_2 är kompakta och disjunkta finns det enligt Proposition A.7 disjunkta, öppna mängder V_1 och V_2 sådana att $E_1 \subseteq V_2$ och $E_2 \subseteq V_2$. Det är nu en enkel sak att kontrollera att $K_1 := K \cap V_1^c$ och $K_2 := K \cap V_2^c$ är kompakta, har unionen K, samt är innehållna i U_1 respektive U_2. □

Proposition A.9. Låt X vara lokalkompakt Hausdorff och U en omgivning till punkten $x \in X$. Då finns en omgivning till x vars slutna hölje är kompakt och innehållet i U.

Bevis. Välj en omgivning W till x sådan att $\overline{W}$ är kompakt. Vi kan dessutom välja W så att $W \subseteq U$ gäller (tag bara $U \cap W$ som ny definition på W). Det slutna höljet av W är dock inte nödvändigtvis innehållet i U. För att komma tillrätta med det, betrakta mängden $\overline{W} \setminus W$ och mängden bestående av endast punkten x; bägge är kompakta och de är parvis disjunkta. Enligt Proposition A.7 kan vi välja disjunkta, öppna mängder V_1 och V_2 innehållande x respektive $\overline{W} \setminus W$. Mängden $V_1 \cap W$ är nu en omgivning till x vars slutna hölje är kompakt och innehållet i U. □

Korollarium A.10. Om X är lokalkompakt Hausdorff, K en kompakt delmängd av X, och U en öppen mängd innehållande K, så finns en öppen mängd V som har kompakt slutet hölje $\overline{V}$ och som uppfyller $K \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.

Bevis. För varje punkt x i K, välj en omgivning V_x till x som är innehållen i U och som har kompakt slutet hölje $\overline{V_x}$. Välj sedan punkter $x_1, \ldots, x_n$ från K sådana att $V_{x_1}, \ldots, V_{x_n}$ täcker K. Mängden $V := \cup_1^n V_{x_i}$ täcker nu K och har kompakt slutet hölje $\overline{V}$ som är innehållet i U. □

För beviset av arbetets entydighetsresultat behövs en viss funktion g. Existensen av denna funktion garanteras av Korollarium 2.34 (som här får namnet Korollarium A.11) vars bevis presenteras härnäst.

Korollarium A.11. Antag att X är lokalkompakt Hausdorff och låt K vara en kompakt delmängd av X. Om U är en öppen delmängd av X innehållande K så finns det en funktion $g \in C_c(X)$ vars stöd är innehållet i U och som är sådan att $\chi_K \leq g \leq \chi_U$.

Bevis. Oberoende av hypoteserna, observera först att Proposition 2.18 tillsammans med Proposition A.7 medför att kompakta Hausdorffrum är normala.

Antag nu att X är lokalkompakt Hausdorff och låt K vara en kompakt delmängd av X. Om U är en öppen delmängd av X innehållande K så kan vi, enligt Proposition 2.31, välja en öppen mängd V med kompakt slutet hölje $\overline{V}$ sådan att $K \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$. Eftersom $\overline{V}$ är ett kompakt delrum av X och delrum av Hausdorffrum också är Hausdorff, är $\overline{V}$, på grund av den inledande observationen, ett normalt delrum av X. Eftersom K är en kompakt delmängd av X som är innehållen i $\overline{V}$, är K kompakt även i delrummet $\overline{V}$, så enligt Proposition 2.26 är K sluten i $\overline{V}$. Även mängden $\overline{V} \setminus V$ är sluten i $\overline{V}$, varför Urysohns lemma medför att finns det en kontinuerlig funktion $f : \overline{V} \to [0, 1]$ som är 1 på K och 0 på $\overline{V} \setminus V$. Definiera nu $g : X \to [0, 1]$ genom att sätta $g(x) = f(x)$ för $x \in \overline{V}$ och $g(x) = 0$ för $x \in X \setminus V$ (man kontrollerar att detta definierar en funktion genom att verifiera att definitionerna sammanfaller på mängden $\overline{V} \setminus V$). Enligt Proposition 2.11 är g kontinuerlig och eftersom $\operatorname{supp} g \subseteq \overline{V} \subseteq U$ så har g kompakt stöd som är innehållet i U. □

B Måtteori

I det här kapitlet presenteras beviset av Carathéodorys utvidgningssats, samt definitionen och konstruktionen av Lebesguemåttet. Innehållet baseras på kapitel 3 i [7].

B.1 Bevis av Carathéodorys utvidgningssats

Sats B.1 (Carathéodorys utvidgningssats)**.** Låt μ^* vara ett yttre mått på en mängd X. Då utgör samlingen $\mathcal{M}$ av μ^*-mätbara mängder en σ-algebra och restriktionen av μ^* till $\mathcal{M}$ är ett mått.

Bevis. Vi delar upp beviset i två delar:

(i): $\mathcal{M}$ är en σ-algebra.

(ii): $\mu^*|_{\mathcal{M}}$ är ett mått på $(X, \mathcal{M})$.

Låt oss först se att $\mathcal{M}$ är en σ-algebra. $\emptyset$ och X tillhör $\mathcal{M}$, eftersom

$$\mu^*(E \cap \emptyset) + \mu^*(E \cap X) = \mu^*(\emptyset) + \mu^*(E) = \mu^*(E)$$

för alla delmängder $E \subseteq X$. Att $\mathcal{M}$ är sluten under komplement följer direkt av att definitionen av μ^*-mätbarhet är symmetriskt med avseende på komplement. För att visa att $\mathcal{M}$ är sluten under uppräkneliga unioner krävs lite mer arbete. Vi börjar med att visa att $\mathcal{M}$ är sluten under ändliga unioner.

Låt A_1 och A_2 tillhöra $\mathcal{M}$ och låt $E \subseteq X$ vara fix. Enligt Anmärkning 3.8 räcker det att visa att

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap (A_1 \cup A_2)) + \mu^*(E \cap (A_1 \cup A_2)^c),$$

för att kunna dra slutsatsen att $A_1 \cup A_2$ tillhör $\mathcal{M}$.

Notera att

$$A_1 \cup A_2 = (A_1 \cap A_2) \cup (A_1^c \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_2^c).$$

Med hjälp av ovanstående omskrivning, De Morgans lag, distributivitet, associativitet och subadditivitet följer det att

$$\begin{aligned}
\mu^*(E \cap (A_1 \cup A_2)) + \mu^*(E \cap (A_1 \cup A_2)^c) \leq \\
\mu^*((E \cap A_2) \cap A_1) + \mu^*((E \cap A_2) \cap A_1^c) + \mu^*((E \cap A_2^c) \cap A_1) + \mu^*((E \cap A_2^c) \cap A_1^c) = \\
\mu^*(E \cap A_2) + \mu^*(E \cap A_2^c) = \\
\mu^*(E),
\end{aligned}$$

där vi i de två sista stegen utnyttjar att A_1 respektive A_2 är μ^*-mätbara. Det följer att $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{M}$. Med hjälp av induktion visas att detta leder till att $\mathcal{M}$ är sluten under alla ändliga unioner.

Nu visar vi att $\mathcal{M}$ även är slutliga under uppräkneliga unioner. Notera att det räcker att visa att $\mathcal{M}$ är sluten under disjunkta uppräkneliga unioner, ty om $E_1, E_2, ...$ alla tillhör $\mathcal{M}$, låt $F_1 := E_1$ och $F_n := E_n \backslash \bigcup_{i=1}^{n-1} F_i$ för alla $n \geq 2$. Eftersom $\mathcal{M}$ är sluten under komplement och ändliga unioner ger De Morgans lag att varje F_i tillhör $\mathcal{M}$. Dessutom består (F_i) av disjunkta mängder och $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$. Därmed är det tillräckligt att visa påståendet för disjunkta mängder.

Låt $A_1, A_2, ...$ vara parvis disjunkta mängder i $\mathcal{M}$ och låt $B_n := \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ och $B := \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Vi vill visa att $\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap B) + \mu^*(E \cap B^c)$.

Eftersom A_n är μ^*-mätbar följer det för varje B_n och varje $E \subseteq X$ att

$$\mu^*(E \cap B_n) = \mu^*(E \cap B_n \cap A_n) + \mu^*(E \cap B_n \cap A_n^c) = \mu^*(E \cap A_n) + \mu^*(E \cap B_{n-1}).$$

På samma sätt får vi att $\mu^*(E \cap B_{n-1}) = \mu^*(E \cap A_{n-1}) + \mu^*(E \cap B_{n-2})$ och ett induktivt resonemang ger att

$$\mu^*(E \cap B_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu^*(E \cap A_i).$$

Om vi nu utnyttjar ovanstående resultat och det faktum att B_n, eftersom den är en ändlig union av μ^*-mätbara mängder, är μ^*-mätbar, följer det att

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap B_n) + \mu^*(E \cap B_n^c) = \sum_{i=1}^{n} \mu^*(E \cap A_i) + \mu^*(E \cap B_n^c) \geq \sum_{i=1}^{n} \mu^*(E \cap A_i) + \mu^*(E \cap B^c),$$

där det sista steget följer av subadditivitet och att $B^c \subseteq B_n^c$. Om vi nu jämför den första och den sista termen och låter $n \to \infty$ följer det att

$$\mu^*(E) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E \cap A_i) + \mu^*(E \cap B^c) \geq \mu^*(E \cap B) + \mu^*(E \cap B^c), \tag{15}$$

där vi i det sista steget använder definitionen av B samt subadditivitet. Det står nu klart att $\mathcal{M}$ är sluten under uppräkneliga disjunkta unioner, och därmed är $\mathcal{M}$ en σ-algebra.

Vi har nu visat att $\mathcal{M}$ är en σ-algebra, och därmed att $(X, \mathcal{M})$ är ett mätbart rum. För att visa att μ^* är ett mått på $(X, \mathcal{M})$ återstår det endast att visa att μ^* är uppräkneligt additiv. Men notera att subadditivitet ger att högerledet i (15) är större än eller lika med $\mu^*(E)$, vilket medför att alla olikheterna i (15) i själva verket är likheter. Om vi låter $E = B$ följer det att

$$\mu^*(B) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i),$$

vilket är det önskade resultatet. □

B.2 Konstruktionen av Lebesguemåttet

Ett viktigt och välkänt mått på $\mathbb{R}$ är det så kallade Lebesguemåttet, λ. Det uppfyller den intuitiva idén om att måttet av ett intervall är dess längd, det vill säga att $\lambda((a, b)) = b - a$, närhelst $b > a$. Samma resultat gäller även för halvöppna och slutna intervall. Lebesguemåttet är ett Borelmått som för varje $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ definieras genom

$$\lambda(A) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i) : (a_i, b_i) \text{ är öppna intervall i } \mathbb{R} \text{ som uppfyller att } A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i) \right\}.$$

Lebesguemåttet visar sig vara ett exempel på ett Haarmått på den lokalkompakta gruppen $(\mathbb{R}, +)$. Ett bevis för att λ är ett icke-trivialt, translationsinvariant mått som uppfyller att måttet av ett intervall är dess längd återfinns nedan. De sista nödvändiga egenskaperna för att λ ska vara ett Haarmått, det vill säga ytterreguljäriteten, innerreguljäriteten på öppna mängder, samt att måttet av kompakta mängder är ändligt, hänvisas till [1].

Sats B.2. Lebesguemåttet, λ, är ett icke-trivialt, translationsinvariant mått på $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, som uppfyller att $\lambda((a,b)) = b - a$, närhelst $b > a$.

Bevis. I den här konstruktionenen av Lebesguemåttet kommer vi följa metoden som presenterades i avsnitt 3.3, vilket innebär att det första steget kommer vara att konstruera ett yttre mått. Därefter visar vi att det yttre måttet har de önskade egenskaperna, och slutligen visar vi att alla Borelmängder är mätbara med avseende på det yttre måttet.

Först behöver vi lite notation. Om I är ett intervall i $\mathbb{R}$ med ändpunkter a och b låter vi $|I|$ beteckna dess längd, det vill säga $|I| = b - a$ närhelst $b > a$. Vi använder samma notation vare sig intervallet är öppet, slutet eller halvöppet. Nu följer definitionen av det yttre måttet.

Definition B.3. Låt $\lambda^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ vara den funktion som för varje mängd $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ definieras genom

$$\lambda^*(A) \coloneqq \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |I_i| : I_1, I_2, ... \text{ är öppna intervall som uppfyller att } A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \right\}.$$

Vi kallar λ^* för det ***yttre Lebesguemåttet***.

Tanken med det yttre Lebesguemåttet är alltså att vi täcker över delmängden A med öppna intervall, så att summan av intervallens längder blir så liten som möjligt. Notera att det yttre Lebesguemåttet är translationsinvariant, i bemärkelsen att det för alla reella tal t och för alla delmängder $A \subseteq \mathbb{R}$ gäller att

$$\mu^*(A) = \mu^*(A + t),$$

där $A + t \coloneqq \{x + t : x \in A\}$. Låt oss nu se att det yttre Lebesguemåttet verkligen är ett yttre mått.

Sats B.4. Det yttre Lebesguemåttet är ett yttre mått på $\mathbb{R}$.

Bevis. Vi visar att $\lambda^*(\emptyset) = 0$, samt att det yttre Lebesguemåttet är monotont och subadditivt.

(i) För varje $\varepsilon > 0$ är det möjligt att välja en följd av öppna intervall så att likheten $|I_i| = \varepsilon/2^i$ håller för varje positivit heltal i. Den totala summan av intervallens längder blir då ε, vilket ges av formeln för geometrisk serie. Eftersom $\emptyset \subseteq \cup_{i=1}^{\infty} |I_i|$ följer det att $\lambda^*(\emptyset) = 0$.

(ii) Låt A_1 och A_2 vara delmängder av $\mathbb{R}$ sådana att $A_1 \subseteq A_2$. Eftersom A_1 är en delmängd av A_2, täcker varje öppen övertäckning av A_2 även A_1. Därmed är $\lambda^*(A_1)$ ett infimum till en större eller möjligtvis lika stor mängd som den mängden som $\lambda^*(A_2)$ är ett infimum till. Därför kan inte $\lambda^*(A_1)$ anta ett större värde än $\lambda^*(A_2)$.

(iii) Om $\lambda^*(A_n) = \infty$ för något n följer subadditivitet direkt, så vi kan anta att $\lambda^*(A_n)$ är ändligt för alla n.

Låt $\varepsilon > 0$. För varje A_j, välj öppna intervall $I_1^j, I_2^j, I_3^j, ...$ så att $A_j \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i^j$ och $\sum_{i=1}^{\infty} |I_i^j| \leq \lambda^*(A_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}$. Det följer att den uppräkneliga mängden $\{I_i^j\}_{i,j \in \mathbb{Z}_+}$ täcker hela $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$, eftersom den täcker varje A_j. Vi får alltså att

$$\lambda^*\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \Big(\sum_{i=1}^{\infty} |I_i^j|\Big) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \Big(\lambda^*(A_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}\Big) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^*(A_j) + \varepsilon \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^*(Aj) + \varepsilon,$$

där det sista steget följer av formeln för geometrisk serie. Eftersom ovanstående håller för godtyckligt litet ε kan vi låta $\varepsilon \to 0$, och från den första och den sista termen erhålls då det önskade resultatet. $\square$

Vi visar nu att det yttre Lebesguemåttet har den önskade egenskapen att det yttre måttet av ett intervall motsvarar dess längd.

Sats B.5. För varje begränsat intervall I gäller att $\lambda^*(I) = |I|$.

Bevis. Vi antar först att $I = [a, b]$ är ett slutet begränsat intervall, och visar att $\lambda^*(I) \leq |I|$, samt att $\lambda^*(I) \geq |I|$.

För varje $\varepsilon > 0$ gäller att $(a - \varepsilon, b + \varepsilon)$ täcker I så

$$\lambda^*\big([a, b]\big) \leq |(a - \varepsilon, b + \varepsilon)| = b - a + 2\varepsilon.$$

Eftersom ovanstående gäller för alla $\varepsilon > 0$ följer det att $\lambda^*([a, b]) \leq b - a$.

Låt nu $\{I_i\}_{i \in J}$ vara en godtycklig övertäckning av $[a, b]$ bestående av öppna intervall. Eftersom $[a, b]$ är kompakt finns det en ändlig delövertäckning A av $\{I_i\}_{i \in J}$ som täcker $[a, b]$. Detta medför att det finns ett intervall $I_i \in A$ som innehåller a; låt oss kalla det $I_1 = (a_1, b_1)$. Om $b \in I_1$ är I_1 en övertäckning av $[a, b]$. I annat fall finns det ett intervall $I_i \in A$ så att $b_1 \in I_i$; låt oss kalla det $I_2 = (a_2, b_2)$. På samma sätt kan vi fortsätta att välja ut överlappande intervall ur A tills vi till slut får en följd $(I_i)_{i=1}^k$ som täcker $[a, b]$ och som uppfyller att $a_{i+1} < b_i < b_{i+1}$. Detta ger att

$$\sum_{i \in J} |I_i| \geq \sum_{i=1}^{k} |I_i| = \sum_{i=1}^{k} (b_i - a_i) = b_k - a_1 + \sum_{i=1}^{k-1} (b_i - a_{i+1}) > b_k - a_1 > b - a.$$

Eftersom ovanstående gäller för godtycklig övertäckning $\{I_i\}$ av $[a, b]$ bestående av öppna intervall följer det att $\lambda^*([a, b]) \geq b - a$, och påståendet är därmed bevisat för slutna, begränsade intervall. För att inse att detta medför att satsen håller även för godtyckliga begränsade intervall räcker det att observera att varje begränsat intervall I innehåller, och är innehållet i, slutna, begränsade intervall vars längd är godtyckligt nära |I|. $\square$

Vi har nu visat att λ^* är ett translationsinvariant yttre mått som uppfyller att det yttre måttet av ett intervall är lika med intervallets längd. Det enda som kvarstår att visa är att alla Borelmängder av $\mathbb{R}$ är λ^*-mätbara, det vill säga att de är innehållna i den σ-algebra $\mathcal{M}$ som skapades i beviset till Carathéodorys utvidgningssats. Nästa sats garanterar att så är fallet.

Sats B.6. Låt $\mathcal{M}$ beteckna mängden av alla λ^*-mätbara delmängder av $\mathbb{R}$. Då är $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ innehållen i $\mathcal{M}$.

Bevis. Eftersom $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ är den minsta σ-algebran över $\mathbb{R}$ som innehåller de öppna intervallen räcker det att visa att varje öppet intervall är innehållet i $\mathcal{M}$. Eftersom varje öppet intervall kan skrivas som ett snitt av de obegränsade intervallen $(-\infty, a)$ och (b, ∞) räcker det att visa att dessa två är innehållna i $\mathcal{M}$. Vi visar att $(-\infty, a)$ är innehållen i $\mathcal{M}$, och beviset för att även (b, ∞) är innehållen i $\mathcal{M}$ är analogt och lämnas till läsaren.

Låt E vara en godtycklig delmängd av $\mathbb{R}$. Vi kan anta att $a \notin E$, eftersom en punkt inte förändrar värdet av λ^*. Vi vill alltså visa att

$$\lambda^*(E) \geq \lambda^*(E \cap (-\infty, a)) + \lambda^*(E \cap (a, \infty)).$$

Låt $\{I_i\}_{i \in J}$ vara en godtycklig övertäckning av E bestående av öppna intervall. Låt $I_i' := I_i \cap (-\infty, a)$ och $I_i'' := I_i \cap (a, \infty)$. Notera att $\{I_i'\}_{i \in J}$ och $\{I_i''\}_{i \in J}$ är övertäckningar av I' respektive I'', båda bestående av öppna intervall. Det följer att

$$\sum_{i \in J} |I_i| = \sum_{i \in J} (|I_i'| + |I_i''|) = \sum_{i \in J} |I_i'| + \sum_{i \in J} |I_i''| \geq \lambda^*(E \cap (-\infty, a)) + \lambda^*(E \cap (a, \infty)).$$

Eftersom $\{I_i\}$ är vald godtyckligt kan vi ta infimum av vänsterledet ovan över alla möjliga övertäckningar av E bestående av intervall, och erhåller då det önskade resultatet. $\square$

Därmed står det klart att $\lambda := \lambda^*|_{\mathcal{B}(\mathbb{R})}$ är ett translationsinvariant mått på $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ som uppfyller att måttet av ett intervall motsvarar intervallets längd. Följaktligen är λ det önskade måttet och konstruktionen är färdig. $\square$

C Integrationsteori

C.1 Bevis av regler för Lebesgueintegralen

Vi ska nu bevisa de räkneregler för Lebesgueintegraler som vi använder oss av i uppsatsen. Innehållet i denna sektion är baserat på [7] samt [3]. Vi visar först motsvarande (a) och (b) i Proposition 4.6 för enkla funktioner.

Lemma C.1. För $h_1, h_2 \in \mathcal{S}^+(X, \mathcal{M}, \mu)$, $\alpha \geq 0$ så gäller:

(a)
$$\int_X \alpha h_1(x) d\mu(x) = \alpha \int_X h_1(x) d\mu(x),$$

(b)
$$\int_X h_1(x) + h_2(x) d\mu(x) = \int_X h_1(x) d\mu(x) + \int_X h_2(x) d\mu(x),$$

Bevis. Det mesta av beviset görs med direkta beräkningar och utgår från definitionen av Lebesgueintegralen för enkla funktioner. Så fixera de enkla funktionerna

$$h_1(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n \chi_{A_n}(x), \quad h_2(x) = \sum_{m=1}^{M} b_m \chi_{B_m}(x),$$

där $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ och $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ är två ändliga följder av disjukta delmängder av X, så att de enkla funktionernas integraler fås av

$$\int_X h_1(x) d\mu(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n \mu(A_n), \quad \int_X h_2(x) d\mu(x) = \sum_{m=1}^{N} b_m \mu(B_m).$$

Då är

$$(h_1 + h_2)(x) := h_1(x) + h_2(x) = \sum_{n=1}^{N} \left(\sum_{m=1}^{M} (a_n + b_m) \chi_{A_n \cap B_m}(x) \right). \tag{16}$$

a) Om $\alpha = 0$ så gäller likhet trivialt, så antag att $\alpha > 0$. Nu ger definitionen för Lebesgueintegralen och linjäritet för summor

$$\int_X \alpha h_1(x) d\mu(x) = \sum_{n=1}^{N} \alpha a_n \mu(A_n) = \alpha \sum_{n=1}^{N} a_n \mu(A_n) = \alpha \int_X h_1(x) d\mu(x).$$

b) Även denna del visas enkelt efter att vi konstaterat (16) med definitionen för Lebesgueintegralen och summans linjäritet

$$\begin{aligned}
\int_X (h_1 + h_2)(x) d\mu(x) &= \sum_{n=1}^{N} \left(\sum_{m=1}^{M} (a_n + b_m) \mu(A_n \cap B_m) \right) \\
&= \sum_{n=1}^{N} \left(\sum_{m=1}^{M} a_n \mu(A_n \cap B_m) \right) + \sum_{n=1}^{N} \left(\sum_{m=1}^{M} b_m \mu(A_n \cap B_m) \right) \\
&= \sum_{n=1}^{N} a_n \mu(A_n) + \sum_{m=1}^{M} b_m \mu(B_m) = \int_X h_1(x) d\mu(x) + \int_X h_2(x) d\mu(x).
\end{aligned}$$

□

Lemma C.2. Låt $(X, \mathcal{M})$ vara ett mätbart rum och $f : X \to [0, \infty]$ vara mätbar. Då finns en följd $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ av enkla funktioner, sådana att $0 \leq h_1 \leq h_2 \leq \ldots$ och $h_n \to f$ punktvis på X. Om dessutom f är begränsad på en delmängd $A \subseteq X$ så gäller där att $h_n \to f$ likformigt på A.

Vi gör enbart en kort motivering, hämtad från [3]. För $n = 0, 1, 2, \ldots$ och $0 \leq k \leq 2^n - 1$, låt $E_k^n := f^{-1}((k2^{-n}, (k+1)2^{-n}]), F_n := f^{-1}((2^n, \infty])$ och definiera

$$h_n(x) := \sum_{k=0}^{2^{2n}-1} \left(k2^{-n} \chi_{E_k^n} + 2^n \chi_{F_n} \right).$$

Då är $h_0 \equiv 0$ eftersom summan saknar termer, $h_n(x) \leq h_{n+1}(x)$ för varje $n \geq 1$ och varje $x \in X$, då antalet termer ökar i n och dessa är alla positiva eller 0. Det gäller även att $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergerar punktvis mot f. Om dessutom $f(x) \leq 2^n$ för alla $x \in A \subseteq X$ så är $0 \leq f(x) - h_n(x) \leq 2^{-n}$ för varje $x \in A$ och därför $h_n \to f$ likformigt på A.

Lemma C.3. För $f, g \in L^+(X, \mathcal{M}, \mu)$ så gäller

$$\int_X f(x) + g(x) d\mu(x) = \int_X f(x) d\mu(x) + \int_X g(x) d\mu(x).$$

Bevis. Använd Lemma C.2 för att välja följder av enkla funktioner $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ och $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ som konvergerar punktvis mot f respektive g. Då är $(\phi_n + \varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en följd av enkla funktioner som konvergerar punktvis mot $f + g$. Nu ger monotona konvergenssatsen (Sats 4.7, yttre likheterna under) samt Lemma C.1 (b) (mittersa likheten under)

$$\begin{aligned}\int_X (f+g)(x) d\mu(x) &= \lim_{n\to\infty} \int_X (\phi_n + \varphi_n)(x) d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int_X \phi_n(x) d\mu(x) + \lim_{n\to\infty} \int_X \varphi_n(x) d\mu(x) \\ &= \int_X f(x) d\mu(x) + \int_X g(x) d\mu(x).\end{aligned}$$

□

Proposition C.4. För $f, g \in L^1(X, \mathcal{M}, \mu)$, $\widetilde{f} \in L^+(X, \mathcal{M}, \mu)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ och $E \in \mathcal{M}$ så gäller:

(a) $$\int_X \alpha f(x) d\mu(x) = \alpha \int_X f(x) d\mu(x),$$

(b) $$\int_X f(x) + g(x) d\mu(x) = \int_X f(x) d\mu(x) + \int_X g(x) d\mu(x),$$

(c) $$f \leq g \quad \text{implicerar} \quad \int_X f(x) d\mu(x) \leq \int_X g(x) d\mu(x),$$

(d) $$\left| \int_X f(x) d\mu(x) \right| \leq \int_X |f(x)| \, d\mu(x),$$

(e) $$\text{avbildningen } E \mapsto \int_E \widetilde{f}(x) d\mu(x) \text{ är ett mått.}$$

Bevis. De mesta av beviset bygger på Lemma C.1 och C.3 samt definitionen av Lebesgueintegralen och välkända räkneregler för reella tal.

(a) Om $\alpha = 0$ så gäller likhet trivialt. Antag att $\alpha > 0$. Vi har att $f = f^+ - f^-$, där $f^+, f^- \in L^+(X, \mathcal{M}, \mu)$. Av definitionen av Lebesgueintegralen samt Lemma C.1 (a) får vi (vi skriver $\mathcal{S}^+ = \mathcal{S}^+(X, \mathcal{M}, \mu)$ här under)

$$\begin{aligned}\int_X \alpha f(x) d\mu(x) &= \int_X \alpha f^+(x) d\mu(x) - \int_X \alpha f^-(x) d\mu(x) \\ &= \sup\left\{ \int_X h(x) d\mu(x) : h \leq \alpha f^+, h \in \mathcal{S}^+ \right\} - \sup\left\{ \int_X h(x) d\mu(x) : h \leq \alpha f^-, h \in \mathcal{S}^+ \right\} \\ &= \alpha \left(\sup\left\{ \int_X h(x) d\mu(x) : h \leq f^+, h \in \mathcal{S}^+ \right\} - \sup\left\{ \int_X h(x) d\mu(x) : h \leq f^-, h \in \mathcal{S}^+ \right\} \right) \\ &= \alpha \left(\int_X f^+(x) d\mu(x) - \int_X f^-(x) d\mu(x) \right) = \alpha \int_X f(x) d\mu(x).\end{aligned}$$

Beviset för fallet då $\alpha < 0$ är analogt då vi noterat att $\alpha f = \alpha f^+ - \alpha f^-$, där ju $\alpha f^+ = \max\{\alpha f, 0\} = -\alpha \max\{-f, 0\} = -\alpha f^-$.

(b) Låt $\varphi := f + g$ så att $\varphi^+ - \varphi^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-$, där alla inblandade funktioner är positiva och integrerbara. Vi kan konstatera att denna likhet är ekvivalent med

$$\varphi^+ + f^- + g^- = \varphi^- + f^+ + g^+.$$

Notera nu att både höger och vänsterled är summor av positiva funktioner. Integrera sedan båda led, använd Lemma C.3 (att vi kan använda detta resultat för ändliga summor av flera funktioner följer med induktion) och få

$$\int \varphi^+(x) d\mu(x) + \int f^-(x) d\mu(x) + \int g^-(x) d\mu(x) = \int \varphi^-(x) d\mu(x) + \int f^+(x) d\mu(x) + \int g^+(x) d\mu(x).$$

Arrangerar vi om termerna får vi

$$\int \varphi^{+}(x)d\mu(x) - \int \varphi^{-}(x)d\mu(x) = \int f^{+}(x)d\mu(x) - \int f^{-}(x)d\mu(x) + \int g^{+}(x)d\mu(x) - \int g^{-}(x)d\mu(x),$$

och eftersom $\varphi = f + g$ har vi nu

$$\int \varphi(x)d\mu(x) = \int (f+g)(x)d\mu(x) = \int f(x)d\mu(x) + \int g(x)d\mu(x).$$

(c) Om $f \leq g$ så har vi också att $f - g \leq 0$. Integrerar vi och använder linjäritet, (a) och (b), får vi

$$\int (f-g)(x)d\mu(x) \leq 0 \iff \int f(x)d\mu(x) - \int g(x)d\mu(x) \leq 0 \iff \int f(x)d\mu(x) \leq \int g(x)d\mu(x).$$

(d) Detta är en följd av definitionen av Lebesgueintegralen för $f \in L^1(X, \mathcal{M}, \mu)$, som vi minns delas upp med positiva funktioner $f^+, f^- \in L^+(X, \mathcal{M}, \mu)$ så att $f = f^+ - f^-$ och $|f| = f^+ + f^-$, samt triangelolikheten för reella tal. Vi får

$$\begin{aligned}\left|\int f(x)d\mu(x)\right| &= \left|\int f^{+}(x)d\mu(x) - \int f^{-}(x)d\mu(x)\right| \leq \left|\int f^{+}(x)d\mu(x)\right| + \left|\int f^{-}(x)d\mu(x)\right| \\ &= \int f^{+}(x)d\mu(x) + \int f^{-}(x)d\mu(x) = \int f^{+}(x) + f^{-}(x)d\mu(x) = \int |f(x)|\, d\mu(x).\end{aligned}$$

(e) För att försäkra oss om att avbildningen är ett mått behöver vi enligt definitionen av ett sådant kontrollera att avbildningen är icke-negativ, det vill säga $\int_E \tilde{f} d\mu \geq 0$, för varje delmängd E av X, samt kraven

(i) $\emptyset$ avbildas till 0,

(ii) om (E_n) är en uppräknelig följd av disjunkta mänder i X så gäller $\int_{\bigcup_n E_n} \widetilde{f} d\mu = \sum_n \int_{E_n} \widetilde{f} d\mu$.

Vi skriver

$$\int_E \widetilde{f}(x)d\mu(x) = \int \widetilde{f}\chi_E(x)d\mu(x).$$

Då $\tilde{f} \geq 0$ så följer direkt av definitionen av Lebesgueintegralen av icke-negativa funktioner att

$$\int_E \widetilde{f}(x)d\mu(x) = \int \widetilde{f}\chi_E(x)d\mu(x) \geq 0,$$

det vill säga att avbildningen är icke-negativ. Givet att indikatorfunktionen är identiskt noll på tomma mängden så får vi dessutom att

$$\emptyset \mapsto \int_{\emptyset} \widetilde{f}(x)d\mu(x) = \int \widetilde{f}\chi_{\emptyset}(x)d\mu(x) = \int 0 d\mu(x) = 0,$$

därmed återstår endast (ii). Så låt (E_n) vara en uppräknelig följd av disjukta delmängder av X. Vi konstaterar att $(\tilde{f}\chi_{\bigcup_{k=1}^n E_k})$ är en växande funktionsföljd i n med gränsfunktionen $\tilde{f}\chi_E = \lim_{n\to\infty} \tilde{f}\chi_{\bigcup_{k=1}^n E_k}$, så enligt monotona konvergenssatsen (Sats 4.7) gäller

$$\int_{\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k} \widetilde{f}(x)d\mu(x) = \int \lim_{n\to\infty} \widetilde{f}\chi_{\bigcup_{k=1}^n E_k}(x)d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int \widetilde{f}\chi_{\bigcup_{k=1}^n E_k}(x)d\mu(x). \tag{17}$$

Vi gör sedan följande observation; om A och B är disjunkta delmängder av X så gäller $\chi_{A\cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x)$, och med induktion ($\bigcup_{k=1}^n E_k = (\bigcup_{k=1}^{n-1} E_k) \cup E_n$) följer att

$$\chi_{\bigcup_{k=1}^n E_k}(x) = \sum_{k=1}^{n} \chi_{E_k}(x)$$

gäller för varje positivt heltal n. Vi använder induktion igen (över summor av funktioner) och kan med linjäritet (b) konstatera att

$$\int \widetilde{f}\chi_{\bigcup_{k=1}^{n} E_k}(x)d\mu(x) = \int \sum_{k=1}^{n} \widetilde{f}\chi_{E_k}(x)d\mu(x) = \sum_{k=1}^{n} \int \widetilde{f}\chi_{E_k}(x)d\mu(x) = \sum_{k=1}^{n} \int_{E_k} \widetilde{f}(x)d\mu(x). \quad (18)$$

Med (17) och (18) har vi därför visat (ii), alltså

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \mapsto \int_{\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k} \widetilde{f}(x)d\mu(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} \widetilde{f}(x)d\mu(x).$$

Med det har vi nu verifierat att $E \mapsto \int_E \widetilde{f}d\mu$ är icke-negativ samt att (i) och (ii) är uppfyllda för avbildningen, alltså är denna ett mått som hävdat. □

C.2 Att byta integrationsordning

I denna sektion bevisas Proposition 4.9, detta bevis är baserat på kapitel 7 i [1].

Proposition C.5. Låt X och Y vara lokalkompakta Hausdorffrum, låt μ och ν vara Borelmått på X respektive Y och antag att $f \in C_c(X \times Y)$. Då gäller

(a) för varje $x \in X$ så har vi $f^x \in C_c(Y)$, och för varje $y \in Y$, så gäller $f^y \in C_c(X)$,

(b) avbildningarna $x \mapsto \int_Y f d\nu$ och $y \mapsto \int_X f d\mu$ tillhör klasserna $C_c(X)$ respektive $C_c(Y)$,

(c) $$\int_X \int_Y f(x,y)d\nu(y)d\mu(x) = \int_Y \int_X f(x,y)d\mu(x)d\nu(x).$$

Som många bevis inom analysen kommer vi visa kontinuiteten i (b) genom att visa att skillnaden mellan integralerna för två tillräckligt närliggande punkter kan göras godtyckligt liten. Vi kommer i detta steg behöva följande icke-triviala resultat.

Lemma C.6. Låt S och T vara topologiska rum och antag att T är kompakt, samt att $f : S \times T \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig. Då gäller att för varje $s_0 \in S$ och varje positivt tal ε så finns en omgivning U av s_0 så att

$$|f(s,t) - f(s_0,t)| < \varepsilon,$$

för varje $s \in S$ och varje $t \in T$.

Bevis av lemma. Fixera $s_0 \in S$ och tag $\varepsilon > 0$. För varje $t \in T$, välj en omgivningar $U_t \subseteq S$ av s_0 och $V_t \subseteq T$ av t, sådan att

$$(s,\tilde{t}) \in U_t \times V_t \implies |f(s,\tilde{t}) - f(s_0,t)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Med dessa valda så gäller enligt triangelolikheten för $(s,\tilde{t}) \in U_t \times V_t$ att

$$\begin{aligned}|f(s,\tilde{t}) - f(s_0,\tilde{t})| &= |f(s,\tilde{t}) - f(s_0,t) + f(s_0,t) - f(s_0,\tilde{t})| \\ &\le |f(s,\tilde{t}) - f(s_0,t)| + |f(s_0,\tilde{t}) - f(s_0,t)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Eftersom att $\{V_t\}_{t\in T}$ är en övertäckning av T som är kompakt då finns $t_1, \ldots, t_n \in T$ så att $\{V_{t_i}\}_{i=1}^n$ är en delövertäckning av T. Nu är $U = \bigcap_{i=1}^n U_{t_i}$ den sökta omgivningen. □

Vi övergår till beviset av propositionen.

Bevis. Tag $f \in C_c(X \times Y)$, låt $K = \mathrm{supp}(f)$ och K_1 samt K_2 vara projektionen av K på X respektive Y. Vi kan konstatera att K_1 och K_2 är kompakta, detta då projektioner är kontinuerliga avbildningar och bilden av en kompakt mängd under en kontinuerlig avbildning alltid är kompakt. Notera sedan att f^x är kontinuerlig, detta inses till exempel genom att konstatera att $g(y) = (x,y)$ samt f är kontinuerliga, $f^x = f \circ g$ och kontinuitet är invariant under komposition. Notera också att för varje $x \in X$ så är $\operatorname{supp}(f^x) \subseteq K_2$, så f^x har kompakt stöd och därmed vet vi att $f^x \in C_c(Y)$, för varje $x \in X$. Ett liknande argument ger att $f^y \in C_c(X)$, för varje $y \in Y$, vilket bevisar (a) i propositionen.

Vi verifierar nu att $x \mapsto \int_Y f d\nu$ är kontinuerlig. Då $C_c(Y) \subseteq L^1(Y)$ så följer att integralen existerar. Tag $x_0 \in X$ och välj $\varepsilon > 0$. Vi applicerar Lemma C.6 på rummet $X \times K_2$ och får att det existerar en omgivning U av x_0, sådan att

$$(x, y) \in U \times K_2 \implies |f(x, y) - f(x_0, y)| < \varepsilon.$$

Därav, om $x \in U$, så följer

$$\begin{aligned} &\left| \int_Y f(x,y) d\nu(y) - \int_Y f(x_0, y) d\nu(y) \right| = \left| \int_{K_2} f(x,y) - f(x_0,y) d\nu(y) \right| \\ &\leq \int_{K_2} |f(x,y) - f(x_0,y)| d\nu(y) < \varepsilon \int_{K_2} d\nu(y) = \varepsilon \nu(K_2). \end{aligned}$$

Då $\varepsilon > 0$ är godtyckligt vald så följer kontinuiteten för avbildningen. Vi noterar sedan att $f \equiv 0$ för $(x, y) \in K^c$, så $x \mapsto \int_Y f d\nu$ är noll för $x \in K_1^c$. Därav har vi etablerat att denna avbildning tillhör $C_c(X)$. Liknande argument ger att $y \mapsto \int_X f d\mu$ tillhör $C_c(Y)$, vilket visar (b).

För den sista delen av propositionen ska vi börja med att konstatera att dubbelintegralerna existerar. Mycket riktigt vi har i (a) verifierat att $f^x \in C_c(Y) \subseteq L^1(Y)$, så den inre integralen är väldefinierad, och i (b) visade vi att $h(x) := \int_Y f^x(y) d\nu(y) \in C_c(X) \subseteq L^1(X)$. Vi kan därför som påstått konstatera att $\int_X \int_Y f(x, y) d\nu(y) d\mu(x)$ existerar, ett liknande argument bekräftar den andra dubbelintegralens existens.

Välj nu ett positivt tal ε. Vi kommer att approximera f men enkla funktioner, för detta ändamål behöver vi en partition av K_1 och vi bildar denna med hjälp av Lemma C.6. Alltså, för varje $x \in K_1$, välj en öppen omgivning U_x av x, sådan att

$$(\tilde{x}, y) \in U_x \times K_2 \implies |f(x, y) - f(\tilde{x}, y)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$\{U_x\}_{x \in K_1}$ är nu en övertäckning av K_1, och då denna är kompakt då finns $x_1, \ldots, x_n$ sådana att $\{U_{x_i}\}_{i=1}^n$ är den delövertäckning. Vi använder dessa för att konstruera Borelmängderna (notera att $K_1, U_{x_1}, \ldots, U_{x_n}$ alla är Borelmängder, och minns att Borel-σ-algebran är sluten under unioner, snitt och komplement)

$$\begin{aligned} A_1 &= U_{x_1} \cap K_1, \\ A_k &= (U_{x_k} \cap K_1) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} A_i \right)^c, \text{ för } k = 2, \ldots, n. \end{aligned}$$

Nu har vi $A_i \cap A_j = \emptyset$ för $i \neq j$, $\bigcup_{i=1}^n A_i = K_1$ och $A_i \subseteq U_i$ för $i = 1, \ldots, n$ och dessa utgör vår partition. Definiera sedan $g : X \times Y \to \mathbb{R}$ enligt

$$g(x, y) := \sum_{i=1}^n f(x_i, y) \chi_{A_i}(x).$$

Vi har nu att både f och g är noll för $(x, y) \in (K_1 \times K_2)^c$ samt att

$$(x, y) \in K_1 \times K_2 \implies |f(x, y) - g(x, y)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Betrakta nu uttrycken

$$\int_Y \int_X f(x, y) d\mu(x) d\nu(y) - \int_Y \int_X g(x, y) d\mu(x) d\nu(y) \tag{19}$$

$$\int_X \int_Y f(x, y) d\nu(y) d\mu(x) - \int_X \int_Y g(x, y) d\nu(y) d\mu(x) \tag{20}$$

Med resultatet ovan, linjäritet samt triangelolikheten (Proposition 4.6 (b) och (d)) får vi för (19) att

$$\left|\int_Y\int_X f(x,y)d\mu(x)d\nu(y) - \int_Y\int_X g(x,y)d\mu(x)d\nu(y)\right| = \left|\int_{K_2}\int_{K_1} f(x,y) - g(x,y)d\mu(x)d\nu(y)\right|$$
$$\leq \int_{K_2}\int_{K_1} |f(x,y) - g(x,y)|\, d\mu(x)d\nu(y) < \frac{\varepsilon}{2}\int_{K_2}\int_{K_1} d\mu(x)d\nu(y) = \frac{\varepsilon}{2}\mu(K_1)\nu(K_2),$$

och på liknande sett får vi för (20) att

$$\left|\int_X\int_Y f(x,y)d\nu(y)d\mu(x) - \int_X\int_Y g(x,y)d\nu(y)d\mu(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2}\mu(K_1)\nu(K_2).$$

Av linjäritet följer också att

$$\int_X\int_Y g(x,y)d\nu(y)d\mu(x) = \int_X\int_Y \sum_{i=1}^n f(x_i,y)\chi_{A_i}(x)d\nu(y)d\mu(x)$$
$$= \sum_{i=1}^n \int_X \chi_{A_i}(x)d\mu(x)\int_Y f(x_i,y)d\nu(y) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i)\int_Y f(x_i,y)d\nu(y),$$

och på liknande sätt

$$\int_Y\int_X g(x,y)d\mu(x)d\nu(y) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i)\int_Y f(x_i,y)d\nu(y) = \int_X\int_Y g(x,y)d\nu(y)d\mu(x).$$

Tar vi nu beloppet av skillnaden mellan (19) och (20) får vi därför

$$\left|\int_Y\int_X f(x,y)d\mu(x)d\nu(y) - \int_Y\int_X f(x,y)d\mu(x)d\nu(y)\right| < \varepsilon\mu(K_1)\nu(K_2).$$

Då $\varepsilon > 0$ är vald godtyckligt så kan vi dra slutsatsen att

$$\int_Y\int_X f(x,y)d\mu(x)d\nu(y) = \int_X\int_Y f(x,y)d\nu(y)d\mu(x),$$

vilket visar (c) och därmed är propositionen bevisad. □

D Riesz representationssats

Här följer ett bevis av Sats 5.10 och är baserat på kapitel 7 i [1].

Sats D.1 (Riesz representationssats)**.** Låt X vara ett lokalkompakt Hausdorffrum och låt I vara en positiv linjär funktional på $C_c(X)$. Då finns ett unikt Borelmått μ på X som är ytterreguljärt, innerreguljärt på öppna mängder samt ändligt på kompakta mängder, sådant att för varje $f \in C_c(X)$ så gäller

$$I(f) = \int f(x)d\mu(x).$$

Om U är öppen i X och $f \in C_c(X)$ sådan att $0 \leq f \leq \chi_U$ och $\mathrm{supp}(f) \subseteq U$ så kommer vi att skriva $f \prec U$.

I existensdelen av beviset av Riesz representationssats kommer vi behöva konstruera måttet μ, detta görs i likhet med de andra mått som konstrueras i denna uppsats via ett yttre mått μ^* som sedan inskränks till ett mått på Borel-σ-algebran med hjälp av Carathéodorys utvidgningssats. Vi kommer även behöva följande hjälpsats.

Lemma D.2. Låt X vara ett lokalkompakt Hausdorffrum och låt μ vara ett Borelmått på X som är ytterreguljärt, innerreguljärt på öppna mängder samt ändligt på kompakta mängder. Om U är öppen i X så gäller

$$\mu(U) = \sup\left\{\int f d\mu : f \in C_c(X), f \prec U\right\}.$$

Bevis. Av definitionen för Lebesgueintegralen har vi att $\mu(U) = \int \chi_U d\mu$, alltså har vi $\mu(U) \geq \sup\{\int f d\mu : f \in C_c(X), 0 \leq f \leq \chi_U\}$. Då alla funktioner f som uppfyller $f \prec U$ säkerligen uppfyller $0 \leq f \leq \chi_U$ gäller även $\sup\{\int f d\mu : f \in C_c(X), 0 \leq f \leq \chi_U\} \geq \sup\{\int f d\mu : f \in C_c(X), f \prec U\}$, Det räcker alltså att visa olikheten

$$\mu(U) \leq \sup\left\{ \int f d\mu : f \in C_c(X), f \prec U \right\}.$$

För detta endamål, välj något reellt tal $\alpha < \mu(U)$. Eftersom att μ är ytterreguljärt så kan vi välja en kompakt mängd $K \subseteq U$ så att $\alpha < \mu(K)$. Enligt Korrolarium 2.34 finns en funktion $f \in C_c(X)$ sådan att $\chi_K \leq f \leq \chi_U$ och $f \prec U$. För denna funktion gäller även enligt Proposition 4.6 (c) att $\mu(K) \leq \int f d\mu \leq \mu(U)$, varpå det följer att $\alpha < \int f d\mu$. Nu har vi

$$\alpha < \sup\left\{ \int f d\mu : f \in C_c(X), f \prec U \right\},$$

och vi kan dra slutsatsen att $\mu(U) \leq \sup\{\int f d\mu : f \in C_c(X), f \prec U\}$ eftersom α är godtyckligt vald. □

Bevis av Riesz representationssats. Låt oss börja med att för varje mängd U öppen i X definiera funktionen

$$\mu^*(U) := \sup\{I(f) : f \in C_c(X), f \prec U\}, \tag{21}$$

och utvidga denna till alla delmängder A av X med

$$\mu^*(A) := \inf\{\mu^*(U) : A \subseteq U, U \text{ öppen i } X\}. \tag{22}$$

Dessa, samt rummet X och funktionalen I i satsens hypotes kommer bestå definerade på detta vis resten av beviset. Vi kommer att visa följande två påståenden:

I μ^* uppfyller kraven för ett yttre mått på X och alla Borelmängder är μ^*-mätbara.

II Om $\mathcal{M}_{\mu^*}$ är σ-algebran bestående av alla μ^*-mätbara mängder så är restriktionerna $\mu = \mu^*|_{\mathcal{B}(X)}$ och $\tilde{\mu} = \mu^*|_{\mathcal{M}_{\mu^*}}$ mått som är ytterreguljära, innerreguljära på öppna mängder samt ändliga på kompakta mängder, och för varje $f \in C_c(X)$ så gäller $\int f d\mu = \int f d\tilde{\mu} = I(f)$.

Vi kommer att börja med att visa entydigheten med hjälp av Lemma D.2 för att sedan visa I och II, som bekräftar existensen av måttet μ. För I behöver vi följande resultat.

Lemma D.3. Låt A vara en delmängd av X och tag $f \in C_c(X)$.

(a) Om $\chi_A \leq f$ så gäller $\mu^*(A) \leq I(f)$.

(b) Om $0 \leq f \leq \chi_A$ och A är kompakt så gäller $I(X) \leq \mu^*(A)$.

Bevis. (a) Välj $\varepsilon \in (0, 1)$ och definiera $U_\varepsilon = \{x \in X : \frac{1}{1-\varepsilon} f > 1\}$, som är en öppen delmängd av X som innehåller A. Tag sedan $g \in C_c(X)$ sådan att $g \leq \chi_{U_\varepsilon}$. Vi kan konstatera att om $\frac{f(x)}{1-\varepsilon} > 1$ så är $g(x) \leq 1$, och om $\frac{f(x)}{1-\varepsilon} \leq 1$ så är $g(x) \leq 0$. Alltså är $g \leq \frac{1}{1-\varepsilon} f$.

Nu har vi

$$\mu^*(U_\varepsilon) = \sup\{I(g) : g \in C_c(X), g \prec U_\varepsilon\} \leq I(\frac{1}{1-\varepsilon} f) = \frac{1}{1-\varepsilon} I(f).$$

Då $A \subseteq U_\varepsilon$ implicerar monotonicitet att $\mu^*(A) \leq \mu^*(U_\varepsilon)$ och då ε kan väljas godtyckligt nära 0 så gäller det att $\mu^*(A) \leq I(f)$, vilket visar (a).

(b) Välj en mängd U öppen i X som innehåller A. Vi har då $0 \leq f \leq \chi_A \leq \chi_U$ och $\text{supp}(f) \subseteq A \subseteq U$, så $f \prec U$. Av detta följer $I(f) \leq \mu^*(U)$ av (21). Då U är godtyckligt vald så gäller denna olikhet för alla öppna mängder som innehåller A, vilket med (22) implicerar att $I(f) \leq \mu^*(A)$, därmed är (b) bevisad.

□

D.1 Entydighet

Antag att μ och ν båda är Borelmått på X som är ytterreguljära, innerreguljära på öppna mängder samt ändliga på kompakta mängder och som uppfyller

$$\int f d\mu = \int f d\nu = I(f), \text{ för varje } f \in C_c(X). \tag{23}$$

Vi visar att $\mu = \nu$ för öppna respektive godtyckliga mängder separat. För U öppen i X så gäller enligt Lemma D.2 (den mittersta likheten följer av (23))

$$\mu(U) = \sup\{\int f d\mu : f \in C_c(X), f \prec U\} = \sup\{\int f d\nu : f \in C_c(X), f \prec U\} = \nu(U),$$

vi har alltså likhet för alla öppna mängder. Då μ och ν är ytterreguljära så gäller per definition för en godtycklig Borelmängd A att

$$\mu(A) = \inf\{\mu(U) : A \subseteq U, U \text{ öppen i } X\}, \; \nu(A) = \inf\{\nu(U) : A \subseteq U, U \text{ öppen i } X\}$$

men då vi redan vet att $\mu(U) = \nu(U)$ för alla öppna mängder U så gäller därför $\mu(A) = \nu(A)$ för varje Borelmängd A. Därmed är entydigheten bekräftad.

D.2 Existens

Vi visar nu påstående I. Vi ska alltså först visa att μ^* är ett yttre mått, och för att göra det behöver vi bekräfta de tre kraven i definitionen av ett sådant (se definition 3.6). Efter att detta är gjort ska vi verifiera att alla Borelmängder av X är μ^*-mätbara.

(i) $\emptyset$ är öppen i X, så enligt (21) så är $\mu^*(\emptyset) = \sup\{I(f) : f \in C_c(X), f \prec \emptyset\}$.

Men om $f \prec \emptyset$ så är $f \equiv 0$, och eftersom I är en linjär funktional (och därför en linjär avbildning) så vet vi att $I(f) = 0$. Alltså har vi

$$\mu^*(\emptyset) = 0.$$

(ii) Fixera två godtyckliga delmängder A_1, A_2 av X så att $A_1 \subseteq A_2$. Om U öppen i X så att $U \subseteq A_1$ så vet vi direkt att $U \subseteq A_2$, men det omvända är inte nödvändigtvis sant. Detta faktum tillsammans med (22) ger att

$$\mu^*(A_1) \leq \mu^*(A_2).$$

(iii) Denna del kräver lite mer arbete. Vi börjar med att visa subadditivitet för öppna mängder. Så låt $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vara en följd av mängder öppna i X och välj $f \in C_c(X)$ sådan att $f \prec \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$. Vi har då att $\text{supp}(f) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$, så $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ är en öppen övertäckning av $\text{supp}(f)$ som är en kompakt mängd. Det följer att det finns ett ändligt heltal N så att $\text{supp}(f) \subseteq \bigcup_{n=1}^{N} U_n$.

I nästa steg utnyttjar vi att det finns funktioner $f_1, \ldots, f_N \in C_c(X)$ med egenskaperna

$$f = \sum_{n=1}^{N} f_n \text{ och } f_n \prec U_n,$$

vilket är ett icke-trivialt resultat som vilar på faktumet att disjukta kompakta mängder kan separeras med disjukta omgivningar, Urysohns lemma samt induktion. Detaljerna utelämnas och den nyfikna läsaren hänvisas till [1], specifikt Proposition 7.1.11.

Då I är en linjär funktional, och därför en linjär avbildning, så vet vi nu att

$$I(f) = I\Big(\sum_{n=1}^{N} f_n\Big) = \sum_{n=1}^{N} I(f_n) \tag{24}$$

och av $f \prec U_n$, Definition (21) samt att I är positiv följer

$$I(f_n) \geq \mu^*(U_n), \text{ för varje n.} \tag{25}$$

Nu ger (24) och (25), och monotonicitet för mått att

$$I(f) \leq \sum_{n=1}^{N} \mu^*(U_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(U_n).$$

Detta, tillsammans med Definition (21), gör att vi kan dra slutsatsen att uppräknelig subadditivitet gäller för öppna mängder, det vill säga

$$\mu^*\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n\Big) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(U_n). \tag{26}$$

Med detta klart går vi vidare och verifierar uppräknelig subadditivitet för godtyckliga mängder. Så tag en uppräknelig följd av delmängder $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i X och välj ett positivt reellt tal ε. Vi kan direkt konstatera att om serien konvergerar mot ∞ så gäller olikheten trivialt, så antag att

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(U_n) < \infty.$$

För varje A_n, använd Definition (22) för att välja en öppen mängd U_n som innehåller A och som uppfyller

$$\mu^*(U_n) \leq \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Utnyttja sedan hur vi valt de öppna mänderna U_n och använd (26) (i andra olikheten) för att erhålla

$$\begin{aligned}\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(U_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\Big) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) + \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) + \varepsilon.\end{aligned}$$

Efter som att ε är godtyckligt vald så följer uppräknelig subadditivitet även för följden $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, det vill säga

$$\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

Med (i),(ii) och (iii) verifierade så kan vi dra slutsatsen att μ^* är ett yttre mått. Slutligen skal vi visa att alla Borelmänder är μ^*-mätbara. Av Carathéodorys utvidgningssats (Sats 3.9) så har vi att samlingen av alla μ^*-mätbara mängder bildar en σ-algebra. Om vi kan visa att alla öppna mängder är μ^*-mätbara så vet vi således att Borel-σ-algebran, som ju genereras av de öppna mängderna, kommer att vara en del av σ-algebran av alla μ^*-mätbara mängder. Så välj en godtycklig mängd U som är öppen i X. Vi skal alltså visa att för varje $A \subseteq X$ så gäller

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap U) + \mu^*(A \cap U^c),$$

men eftersom att $A = (A \cap U) \cup (A \cap U^c)$ så ger subadditivitet att vi har

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap U) + \mu^*(A \cap U^c).$$

Det räcker alltså att visa

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap U) + \mu^*(A \cap U^c).$$

Fixera nu $A \subseteq X$, välj ett positivt reellt tal ε och antag att $\mu^*(A) < \infty$ (om $\mu^*(A) = \infty$ så är olikheten trivial). Använd sedan Definition (22) för att välja en öppen mängd V som uppfyller

$$A \subseteq V \text{ och } \mu^*(V) < \mu^*(A) + \varepsilon.$$

Tag sedan $f_1 \in C_c(X)$ sådan att

$$f_1 \prec V \cap U \text{ och } I(f_1) > \mu^*(V \cap U) - \varepsilon.$$

Låt $K = \text{supp}(f_1)$ och tag $f_2 \in C_c(X)$ sådan att

$$f_2 \prec V \cap K^c \text{ och } I(f_2) > \mu^*(V \cap K^c) - \varepsilon.$$

Vi kan konstatera att $(V \cap U^c) \subseteq (V \cap K^c)$ samt att $\text{supp}(f_1) \cap \text{supp}(f_2) = \emptyset$, så att $f_1(x) = 0$ för $x \in \text{supp}(f_2)$ och $f_2(x) = 0$ för $x \in \text{supp}(f_1)$, varpå det följer att $(f_1 + f_2) \prec V$. Enligt Definition (21) så har vi därför

$$\mu^*(V) \geq I(f_1 + f_2) = I(f_1) + I(f_2) > \mu^*(V \cap U) + \mu^*(V \cap U^c) - 2\varepsilon.$$

Eftersom vi valt V så att $\mu^*(A) + \varepsilon > \mu^*(V)$ så har vi även att

$$\mu^*(A) + \varepsilon > \mu^*(V \cap U) + \mu^*(V \cap U^c) - 2\varepsilon,$$

och då $\varepsilon > 0$ är vald godtyckligt så följer det att

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(V \cap U) + \mu^*(V \cap U^c),$$

därmed är påstående I bevisad.

Vi övergår nu till att visa påstående II. Från I vet vi att Borel-σ-algebran $\mathcal{B}(X)$ är inkluderad i $\mathcal{M}_{\mu^*}$, så Carathéodorys utvidgningssats (Sats 3.9) ger att både μ och $\tilde{\mu}$ är mått. Tag nu en kompakt mängd $K \subseteq X$. Enligt Korrolarium 2.34 så finns en funktion $f \in C_c(X)$ som uppfyller $\chi_K \leq f \leq \chi_U$, och enligt Lemma D.3 (a) så har vi

$$\mu^*(K) \leq I(f)$$

och då funktionalen I är en linjär avbildning $I : C_c(X) \to \mathbb{R}$ så vet vi att I tar ändliga värden för varje $f \in C_c(X)$ så följer det att μ och $\tilde{\mu}$ är ändliga på kompakta mängder. Ytterreguljäritet följer direkt av Definition (22) och innerreguljäritet på öppna mängder följer av Lemma D.3 (b) samt Definition (21), eftersom $0 \leq f \leq \chi_{\text{supp}(f)}$ implicerar att $I(f) \leq \mu^*(\text{supp}(f))$.

Vi har alltså visat att μ och $\tilde{\mu}$ är mått ytterreguljära, innerreguljära på öppna mängder samt ändliga på kompakta mängder. Vi skall till sist visa att $I(f) = \int f d\mu = \int f d\tilde{\mu}$. Vi minns att om f antar negativa värden så kan vi skriva $f = f^+ - f^-$, där $f^+, f^- \in C_c(X)$ med $f^+, f^- \geq 0$. Av linjäriteten för I har vi således att $I(f) = I(f^+) - I(f^-)$ och eftersom att I är positiv så vet vi att $\int f d\mu \geq 0$ och $\int f d\tilde{\mu} \geq 0$, så vi kan utan inskränkning anta att $f \geq 0$. Fixera denna funktion och välj ett positivt reellt tal ε. Definera sedan för varje positivt heltal n den kontinuerliga funktionen

$$f_n(x) := \begin{cases} 0, & \text{om } f(x) \leq (n-1)\varepsilon, \\ f(x) - (n-1)\varepsilon, & \text{om } (n-1)\varepsilon < f(x) \leq n\varepsilon, \\ n\varepsilon, & \text{om } n\varepsilon < f(x). \end{cases}$$

Eftersom $f_n = 0$ för $x \in (\text{supp}(f))^c$ så har vi att $f_n \in C_c(X)$ för varje n. Vidare har vi att

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n,$$

och eftersom f är begränsad så finns ett ändligt heltal N, så att $f_n \equiv 0$ för varje $n > N$ och således

$$f = \sum_{n=1}^{N} f_n, \tag{27}$$

Låt nu $K_0 = \text{supp}(f)$ och för varje n låt $K_n = \{x \in X : f(x) \geq n\varepsilon\}$. Nu har vi att $\varepsilon\chi_{K_n} \leq f_n \leq \varepsilon\chi_{K_{n-1}}$ och av Proposition 4.6 (c) samt att $\int \chi_A d\mu = \mu(A)$ för varje $A \subseteq X$ så följer

$$\varepsilon\mu(K_n) \leq \int f_n(x) d\mu(x) \leq \varepsilon\mu(K_{n-1}),$$

och vi kan använda Lemma D.3 (a) samt Lemma D.3 (b) för att konstatera att

$$\varepsilon\mu(K_n) \leq I(f_n) \leq \varepsilon\mu(K_{n-1}),$$

gäller för varje n. Med (27) får vi därför att

$$\sum_{n=1}^{N} \varepsilon\mu(K_n) \leq \int f(x)d\mu(x) \leq \sum_{n=1}^{N} \varepsilon\mu(K_{n-1}), \text{ respektive } \sum_{n=1}^{N} \varepsilon\mu(K_n) \leq I(f) \leq \sum_{n=1}^{N} \varepsilon\mu(K_{n-1}).$$

Vi kan dra slutsatsen att både $\int f d\mu$ och $I(f)$ kommer tillhöra intervallet

$$J = \Big[\sum_{n=1}^{N} \varepsilon\mu(K_n), \sum_{n=1}^{N} \varepsilon\mu(K_{n-1})\Big] \subseteq \mathbb{R},$$

och att detta intervall har längd (λ betecknar här Lebesguemåttet)

$$\lambda(J) = \sum_{n=1}^{N} \varepsilon\mu(K_{n-1}) - \sum_{n=1}^{N} \varepsilon\mu(K_n) = \varepsilon(\mu(K_0) - \mu(K_N)).$$

Då $\varepsilon > 0$ är godtyckligt valt så har vi att $\int f d\mu = I(f)$. Notera att vi aldrig specifikt använt oss av Borelmängder i argumentet ovan, så på samma sätt visas att även $\int f d\tilde{\mu} = I(f)$. $\square$