



Sfäriska polynom och deras nollställen på sfären

Spherical polynomials and their nodal sets

Examensarbete för kandidatexamen i matematik vid Göteborgs universitet

Kandidatarbete inom civilingenjörsutbildningen vid Chalmers

August Hjelström

Levi Sundkvist

Pontus Bilén

Quentin Flodén

Sfäriska polynom och deras nollställen på sfären

Examensarbete för kandidatexamen i matematik vid Göteborgs universitet

Pontus Bilén Quentin Flodén

Examensarbete för kandidatexamen i matematik inom Matematikprogrammet vid Göteborgs universitet

Levi Sundkvist

Kandidatarbete i matematik inom civilingenjörsprogrammet Teknisk Fysik vid Chalmers

August Hjelström

Handledare: Genkai Zhang

Institutionen för Matematiska vetenskaper
CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
GÖTEBORGS UNIVERSITET
Göteborg, Sverige 2023

Förord

Här visas vilka delar av projektet som gruppens medlemmar bidragit till. En loggbok har även förts om när och hur mycket alla medverkande bidragit.

Kapitel och deras författare

Populärvetenskaplig Presentation:	
	August och Levi
Sammandrag och Abstract:	
	Levi
1. Inledning:	
	1.1 Levi och Pontus 1.2 August, Levi och Pontus 1.3 Levi 1.4 Levi och Pontus
2. Sfäriska Polynom:	
	2.1-2.3 Levi 2.4 August och Levi
3 Lateral- och Sektorialpolynom:	
	3.1-3.4 Levi och Pontus
4 Nodalkurvor för $h^{\mu,\ell}$	
	4.1 Levi och Pontus 4.2 Pontus 4.3 Levi, Pontus, Quentin och August 4.4 Levi
5 Diskussion	
	5.1-5.2 Levi
6 Appendix 1 - teori	
	6.1 Quentin
7 Appendix 2 - källkod	
	7.1 Levi 7.2 August

Bilder och deras skapare

Figur 1 och 2	August
Figur 3 och 4	August
Figur 5	Levi
Figur 6 och 7	August
Figur 8 och 9	Levi

Tack till vår handledare Genkai Zhang som har varit mycket engagerad under hela projektet och givit teoretisk vägledning vid många tillfällen, många fler än vad som förväntades av honom.

Populärvetenskaplig presentation

Om du någonsin har blickat ut över havet har du säkert undrat hur vågorna rör sig eller hur de till och med kan se stationära ut. Hur något låter beroende på ljudvågens karaktär. Du kanske har undrat om det finns någon koppling mellan dessa fenomen som tycks svänga fram och tillbaka. Svaren ligger i att studera sfäriska polynom.

Åren 1798 till 1825 publicerade Pierre-Simon Laplace sitt verk *Mécanique Céleste*, en matematiskt skrift som studerar hur planeterna påverkar varandra i tre dimensioner. Laplace förstod att deras beteende kunde beskrivas med harmoniska funktioner, vilka är lösningar till *Laplaces ekvation*

$$\Delta f = 0.$$

Ekvationen säger att om man tar hänsyn till alla riktningar samtidigt sker ingen acceleration, planeterna kan byta riktning, men de behåller konstant fart.

Samtidigt som Laplace arbetade Adrien-Marie Legendre med elektriska fält och utvecklade sina *Legendrepolynom*. Sfäriska harmoniska funktioner eller *sfäriska polynom* är en kombination av dessa och upptäcktes när man studerade rörelsen hos elektriskt laddade partiklar. Nu används de inom flera andra vågrelaterade fenomen, som kvantmekanisk beskrivning av en väteatom eller ljudvågor. De lever på ytan av ett klot, alltså en sfär.

Det andra ordet i namnet, *polynom* är för att de *sfäriska polynomen* tillhör en samling av de mest välstuderade matematiska objekten. *Polynom* är matematiska funktioner som beror på variabler av olika grad, i tre dimensioner säger man ofta x , y och z om de tre variablerna som representerar var sin riktning i det tredimensionella rummet. Ett exempel på ett tredimensionellt polynom är:

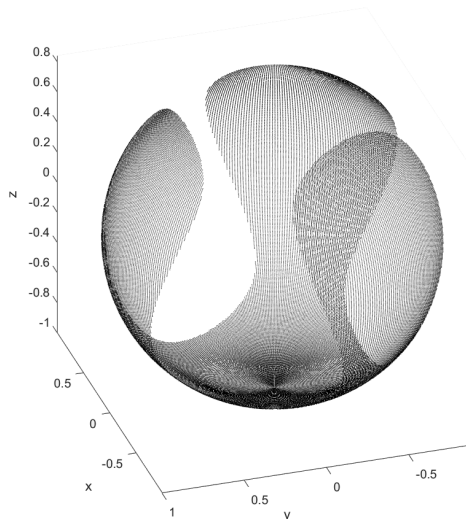
$$f(x, y, z) = 5x^2 + 4yx + 3z^2.$$

En av polynomens viktigaste egenskaper är deras nollställen. I exemplet ovan kan nollställen exempelvis vara när alla tre variabler är noll eller när $x = z = 1$ och $y = -2$.

$$f(1, 2, 1) = 5 \cdot 1 + 4 \cdot (-2) \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 8 - 8 = 0.$$

Sökandet efter nollställen för de sfäriska polynomen är ett problem som studeras än idag, över 200 år efter Laplace och Legendre började studera dem. På den tredimensionella ytan av en sfär, där de sfäriska polynomen lever, bildar nollställena kurvor som vi kallar *nodalkurvor*. Om nodalkurvorna går runt och sluter om ett område blir det som en liten ö omgiven av nollor, vi kallar en sådan ö för *nodaldomän*. Se figur 1 för ett exempel på detta där vi skurit ut den ena ön, så att resterande område kan ses som ett hav.

Figur 1: Ett sfäriskt polynom med dess ena nodaldomän utskuren.



Sammandrag

Bérard och Helffer visar i artikeln *A. Stern's analysis of the nodal sets of some families of spherical harmonics revisited* [BH] på existensen av sfäriska polynom med en känd mängd nodaldomäner, områden som omsluts av nodalkurvor. Mer specifikt är ett av deras resultat att för udda gradtal har deras polynom exakt 2 nodaldomäner och för jämna gradtal ℓ exakt $\ell + 1$ nodaldomäner.

En modern artikel i matematik kan vara svår att ta till sig för studenter på kandidatnivå, även de inom matematik. Mycket bakgrund ligger i varje mening för att det forskarna vill presentera skall komma fram effektivt för andra forskare.

Detta arbete syntetiserar deras studie med bakgrund om de sfäriska polynomen. Dessutom förklaras och förenklas deras artikel mer ingående och kräver mindre förkunskap. Slutligen simuleras och visualiseras några utvalda polynom och deras nodalkurvor och nodaldomäner.

Abstract

Bérard and Helffer shows in the article *A. Stern's analysis of the nodal sets of some families of spherical harmonics revisited* the existence of spherical harmonics with a known amount of *nodal domains*, areas enclosed by nodal curves. More specifically, one of their results is that the constructed polynomials of odd degree have exactly 2 nodal domains and $\ell + 1$ nodal domains for even degrees ℓ .

A modern mathematical article can be hard to understand for students at the undergraduate level, even for those within mathematics. A lot of background is put into every sentence so that the scientists can present their results in an efficient way for other scientists.

This project synthesizes their study with some background on spherical harmonics. Their article is explained more thoroughly, giving it fewer prerequisites. Finally, some polynomials are simulated and visualized.

Innehåll

1	Inledning	1
1.1	Polynom på \mathbb{R}^3	1
1.2	Rummet av homogena polynom	1
1.3	Dimension av \mathcal{P}^ℓ	2
1.4	Laplaceoperatorn och harmoniska funktioner i \mathbb{R}^3	3
2	Sfäriska Polynom	3
2.1	Dimension av \mathcal{H}^ℓ	4
2.2	Variabelbyte till sfäriska koordinater	6
2.3	Laplaceoperatorerna Δ och $\Delta_{\mathbb{S}^2}$ i \mathbb{R}^3 och \mathbb{S}^2	6
2.4	Ortogonalitet av sfäriska polynom av skild grad över \mathbb{S}^2	7
3	Lateral- och sektorialpolynom	9
3.1	Nollställen på sfären	9
3.2	Lateralpolynomet z_ℓ	9
3.3	Sektorialpolynomet w_ℓ	11
3.4	Polynomet $h^{\mu,\ell}$	11
4	Nodalkurvor för $h^{\mu,\ell}$	12
4.1	Kritiska nollpunkter och nodalkurvor	13
4.2	Beteende för $h^{\mu,\ell}$ på några meridianer	14
4.3	Egenskaper för nodalkurvorna till $h^{\mu,\ell}$ i rutorna $Q_{i,j}$	14
4.4	Huvudsatsen	16
5	Diskussion	19
5.1	Insikter	19
5.2	Förslag till framtida arbete	19
6	Appendix 1 – teori	21
6.1	Delar av beviset för Lemma 20	21
7	Appendix 2 – källkod	23
7.1	Matlabkod till tvådimensionella illustrationer	23
7.2	Matlabkod till tredimensionella illustrationer	24

1 Inledning

Vi kommer i detta arbete att presentera teori om homogena harmoniska funktioner, med enhetssfären \mathbb{S}^2 som definitionsområde. Dessa används till exempel inom fysikens potentiallära eller för att lösa den så kallade värmeekvationen.

Den inledande sektionen ämnar definiera *sfäriska polynom*. Den andra sektionen finner några viktiga egenskaper hos de sfäriska polynomen. I sektion tre och fyra går vi igenom några resultat från artikeln *A. Stern's analysis of the nodal sets of some families of spherical harmonics revisited* [BH].

Inledande resultat om sfäriska polynom är baserade på teori från läroböckerna *Linear Algebra Done Right* [A], *An elementary treatise on harmonic functions with applications* [M], och *introduction to Fourier Analysis on Euclidean spaces* [SW].

Artikeln [BH] är kortfattad och tung jämfört med de texter som är vanligt förekommande för studenter på kandidatnivå, därför används andra grundläggande texter för att förenkla och förtydliga resultaten i de avslutande delarna med målet att en tredjeårsstudent med huvudfokus i matematik kan ta sig igenom arbetet, kanske inte utan ansträngning, men relativt enkelt.

Vi använder beteckningen \mathbf{v} för en punkt $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ och $d\mathbf{v}$ för volymentelemnet $dx dy dz$.

Definition 1. Vi definierar *Enhetssfären* \mathbb{S}^2 som en delmängd av \mathbb{R}^3 bestående av alla punkter med euklidiskt avstånd 1 från origo.

1.1 Polynom på \mathbb{R}^3

Innan vi definierar sfäriska harmoniska polynom kan det vara viktigt att betrakta vanliga polynom på \mathbb{R}^3 . Vi betraktar först så kallade *monom* - polynom av en term på formen $x^\alpha y^\beta z^\gamma$ för α, β, γ positiva heltal. Vi formulerar följande grundläggande resultat om dessa funktioner.

Lemma 1. Låt m_1, m_2, \dots vara monom på formen $m_i = x^{\alpha_i} y^{\beta_i} z^{\gamma_i}$ för α, β, γ positiva heltal, där $m_i \neq m_j$ för $i \neq j$. Då gäller att monomen $\{m_i\}_{i=1}^\infty$ är linjärt oberoende.

Bevis. Vi betraktar ekvationen

$$\sum_{i=1}^n c_i m_i = 0. \quad (1)$$

Där n är ett godtyckligt ändligt heltal. Vi vill visa att $c_i = 0$ för alla i . Till detta ändamål fixerar vi $j > 0$ och differentierar ekvation (1) på följande vis

$$\frac{\partial^{\alpha_j}}{\partial x^{\alpha_j}} \frac{\partial^{\beta_j}}{\partial y^{\beta_j}} \frac{\partial^{\gamma_j}}{\partial z^{\gamma_j}} \sum_{i=1}^{\infty} c_i m_i = c_j \alpha_j! \beta_j! \gamma_j! + R(\mathbf{v}) = 0,$$

där R är en restterm bestående av en summa ickekonstanta monom på formen $m_i = x^{\alpha'_i} y^{\beta'_i} z^{\gamma'_i}$ för $\alpha'_i < \alpha_j, \beta'_i < \beta_j, \gamma'_i < \gamma_j$. Dock gäller att $R(0, 0, 0) = 0$, så att $c_j \alpha_j! \beta_j! \gamma_j! = 0$, och eftersom j är godtyckligt gäller detta för alla c_j , så att monomen är linjärt oberoende. \square

Det är enkelt att se att varje polynom på \mathbb{R}^3 kan skrivas som en linjärkombination av monom av olika grad.

1.2 Rummet av homogena polynom

Definition 2. En funktion $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ kallas för *homogen av grad ℓ* , där $\ell \in \mathbb{Z}^+$, om vi har att

$$f(r\mathbf{v}) = r^\ell f(\mathbf{v}), \quad \forall r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (2)$$

Vi observerar att ett homogent polynom i \mathbb{R}^3 av grad ℓ måste vara på formen

$$f(\mathbf{v}) = \sum_{i=0}^n c_i x^{\alpha_i} y^{\beta_i} z^{\gamma_i}, \quad (3)$$

där $c_i \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}^+$ och $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ är icke-negativa heltal som uppfyller $\alpha_i + \beta_i + \gamma_i = \ell$. Nedan följer några exempel på homogena polynom.

Exempel 1. Homogena polynom av grad 0 är konstanter.

Exempel 2. Homogena polynom av grad 1 är på formen $c_1x + c_2y + c_3z$, där c_1, c_2 och c_3 är reella konstanter.

Exempel 3. x^3, x^2y , och xyz är homogena av grad 3 eftersom $(rx)^3 = r^3x$, $(rx)^2(ry) = r^3x^2y$ och $(rx)(ry)(rz) = r^3xyz$

Vi kommer nu att införa notation samt formulera två lemmor relaterade till homogena polynom av en fix grad betraktade som vektorer i ett funktionsrum.

Definition 3. Vi betecknar mängden av alla homogena polynom av grad ℓ som \mathcal{P}^ℓ .

Lemma 2. Mängden \mathcal{P}^ℓ utgör ett vektorrum.

Bevis. Vi har slutenhet under addition, ty

$$p_1, p_2 \in \mathcal{P}^\ell \implies p_1(rx) + p_2(rx) = r^\ell p_1(x) + r^\ell p_2(x) = r^\ell(p_1(x) + p_2(x)).$$

Vi har slutenhet under multiplikation med skalär, ty

$$p_1, p_2 \in \mathcal{P}^\ell, a \in \mathbb{R} \implies ap_1(rx) = ar^\ell p_1(x) = r^\ell(ap_1(x)).$$

Övriga krav uppfylles likadant som för andra funktionsrum. □

Lemma 3. En lista av monom $m_1 \dots m_n$ på formen $m_i = x^{\alpha_i}y^{\beta_i}z^{\gamma_i}$ där $m_i \neq m_j$ för $i \neq j$, som innehåller alla unika kombinationer av potenser så att $\alpha_i + \beta_i + \gamma_i = \ell$ är en bas [A, 39] till rummet \mathcal{P}^ℓ .

Bevis. Att monomen spänner rummet följer direkt från (3), och att de är linjärt oberoende följer av Lemma 1. Alltså utgör dessa monom en bas till \mathcal{P}^ℓ . □

Homogenitet av fix grad ger att ett polynom i \mathbb{R}^3 är bestämt av sin restriktion i \mathbb{S}^2 . Detta är den huvudsakliga anledningen till denna begränsning.

Exempel 4. Givet en grad ℓ motsvarar det homogena polynomet $p_1 : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ exakt ett homogent polynom $p_\ell : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ genom förhållandet $p_\ell(\mathbf{v}) = |\mathbf{v}|^\ell p_1(\mathbf{v}/|\mathbf{v}|)$. Ifall vi inte fixerar gradtalet uppstår det tvetydlighet. Betrakta polynomen $p_1(\mathbf{v}) = x$ och $p_2(\mathbf{v}) = x(x^2 + y^2 + z^2)$. Dessa har samma restriktion på sfären, men korresponderar mot homogena polynom av grad 1 respektive 3.

Ett godtyckligt polynom $P : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ av grad n är en linjärkombination av mellan 1 och n stycken linjärt oberoende homogena polynom vilket ger att homogenitet inte är en stor begränsning.

1.3 Dimension av \mathcal{P}^ℓ .

Definition 4. Låt \mathcal{X} vara ett vektorrum, då betecknar $\dim \mathcal{X}$ antalet element i en bas till \mathcal{X} .

Lemma 4. $\dim \mathcal{P}^\ell = \frac{(\ell+1)(\ell+2)}{2}$. [SW, s. 139]

Bevis. Vi vill finna alla unika kombinationer av α, β, γ så att $\alpha + \beta + \gamma = \ell$. Detta kan ses som att α kan anta alla de $\ell + 1$ stycken värden mellan 0 och ℓ . För varje sådant värde kan β anta alla värden mellan 0 och $\ell - \alpha$, γ blir entydigt bestämd:

α	ℓ	$\ell - 1$	$\ell - 1$	$\ell - 2$	\dots	1	\dots	1	0	\dots	0
β	0	1	0	2	\dots	$\ell - 1$	\dots	0	ℓ	\dots	0
γ	0	0	1	0	\dots	0	\dots	$\ell - 1$	0	\dots	ℓ

Alltså får vi:

$$\dim \mathcal{P}^\ell = \sum_{k=1}^{\ell+1} k = \frac{(\ell+1)(\ell+2)}{2}.$$

□

Exempel 5. Vi har att $\dim \mathcal{P}^3 = \frac{(4) \cdot (5)}{2} = 10$, och en bas för \mathcal{P}^3 är

$$\{z^3, yz^2, xz^2, y^2z, xyz, x^2z, y^3, xy^2, x^2y, x^3\}.$$

1.4 Laplaceoperatoren och harmoniska funktioner i \mathbb{R}^3

Definition 5. En viktig operator som ligger till grund för en stor del av teorin är Laplaceoperatoren Δ i rummet, som definieras enligt

$$\Delta f := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Definition 6. En funktion $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ sägs vara en *harmonisk funktion* om den uppfyller Laplace ekvation

$$\Delta f = 0.$$

Laplaces ekvation dyker exempelvis upp när vi inom fysiken försöker lösa problemet med värmediffusion i en kub, en variant på värmeekvationen. För en härledning av detta i planet se [SS, s. 18]. Vi påminner om att andraderivatans kan tolkas som krökning (konvexa eller konkava områden). Det följer att alla ickekrökta funktioner, alltså konstanta, linjära eller affina, är harmoniska. För polynom innebär detta att polynom av grad ett eller lägre är harmoniska.

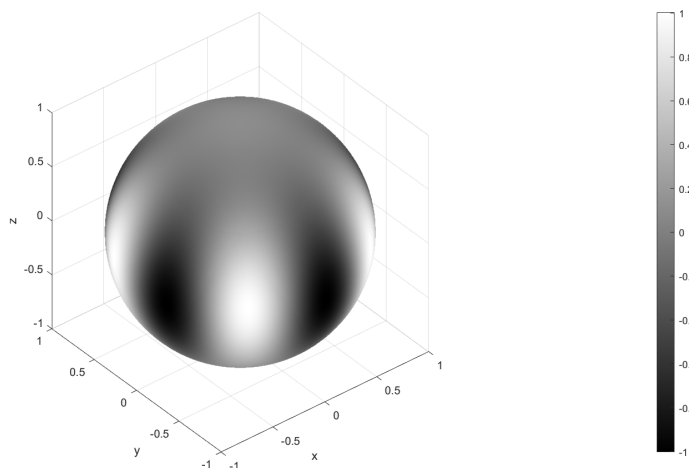
Exempel 6. $\Delta(c_1x + c_2y + c_3z) = 0$, $\forall c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

Det finns även harmoniska polynom av högre grad, men för högre grader är långt ifrån alla polynom harmoniska.

Exempel 7. $\Delta(x^2 + y^2 + z^2) = 6$ men $\Delta(x^2 + y^2 - 2z^2) = 0$.

Exempel 8. I Figur 2 ser vi de värden ett specifikt harmoniskt och homogent polynom antar på ytan av \mathbb{S}^2 .

Figur 2: Ett harmoniskt och homogent polynom av grad 5.



2 Sfäriska Polynom

Vi börjar detta kapitel med att göra en definition som utgår från teorin i kapitel 1.

Definition 7. Ett *sfäriskt polynom* p^ℓ av grad ℓ är ett harmoniskt och homogent polynom av grad ℓ med $p^\ell : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$.

Det går att definiera sfäriska polynom från \mathbb{R}^3 till \mathbb{C} men det kommer inte att behövas för den här texten. Ett harmoniskt polynom med bild i \mathbb{C} har harmonisk realdel och imaginärdel vilket vi kommer att använda i sektion 3.3.

Namnet *sfäriska polynom* kommer från att de är polynomlösningar till problemet

$$-\Delta_{\mathbb{S}^2} u + \ell(\ell + 1)u = 0|_{\mathbb{S}^2} \quad (4)$$

där $\Delta_{\mathbb{S}^2}$ är den sfäriska laplaceoperatoren som vi beskriver senare i kapitel 2.3, där vi också visar att de sfäriska polynomen är lösningar till (4). Innan det visar vi hur stor en bas till sfäriska polynom av given grad ℓ är. Vi avslutar denna sektion genom att visa att rum av sfäriska polynom av skild grad är ortogonala till varandra.

2.1 Dimension av \mathcal{H}^ℓ .

Vi ska undersöka *laplaceoperatoren* Δ och dess relation som linjär operator på vektorrummet \mathcal{P}^ℓ .

Lemma 5. Laplaceoperatoren $\Delta : \mathcal{P}^\ell \rightarrow \mathcal{P}^{\ell-2}$ är en linjär avbildning.

Bevis. Dubbel partiell derivation tar ett polynom av grad ℓ till ett polynom av grad $\ell - 2$ alltså avbildar Δ polynom från \mathcal{P}^ℓ till polynom i $\mathcal{P}^{\ell-2}$.

Kvar att visa är linjäritet [A, s. 52]. Låt $p_1, p_2 \in \mathcal{P}^\ell$ och $c \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} 1. \quad \Delta(p_1 + p_2) &= \frac{\partial^2(p_1 + p_2)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(p_1 + p_2)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(p_1 + p_2)}{\partial z^2} \\ &= \left(\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p_1}{\partial z^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 p_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p_2}{\partial z^2} \right) \\ &= \Delta p_1 + \Delta p_2. \end{aligned}$$

$$2. \quad \Delta c p_1 = c \left(\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p_1}{\partial z^2} \right) = c \Delta p_1.$$

□

Exempel 9. För $c x^2 y z + y^4 \in \mathcal{P}^4$ har vi:

$$\Delta (c x^2 y z + y^4) = c \Delta x^2 y z + \Delta y^4 = 2c y z + 12 y^2 \in \mathcal{P}^2.$$

Definition 8. För en linjär operator $T : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ där \mathcal{X} och \mathcal{Y} är vektorrum, så är $\text{Ker } T$, *kärnan* av T , vektorrummet som spänns av alla vektorer i \mathcal{X} som tas till 0 i \mathcal{Y} av T .

Notera att en harmonisk funktion är en funktion som tillhör kärnan av Laplaceoperatoren.

Definition 9. Låt $\mathcal{H}^\ell := \text{Ker } \Delta|_{\mathcal{P}^\ell}$, vektorrummet av *sfäriska polynom* av grad ℓ .

Vi skall bestämma $\dim \text{Ker } \Delta|_{\mathcal{P}^\ell}$ som är mängden vektorer i en bas till rummet av *sfäriska polynom*. Vi kommer använda teori om *adjunkt till en operator* för att visa att Δ är surjektiv, där efter använda ett algebraiskt samband mellan värdemängden och bildmängden till Δ . Teorin som kommer upp är baser, inreprodukter och adjunkter. Hela denna sektion är tolkning av motsvarande bevis i boken av Stein och Weiss [SW, s. 138-140].

Definition 10. Låt $p_1, p_2 \in \mathcal{P}^\ell$, vara polynom på formen $p_1 = \sum_{i=1}^n c_{1i} x^{\alpha_i} y^{\beta_i} z^{\gamma_i}$ och $p_2 = \sum_{i=1}^n c_{2i} x^{\alpha_i} y^{\beta_i} z^{\gamma_i}$ för något n . Vi definierar den bilinjära formen $\langle \cdot, \cdot \rangle_D$ enligt

$$\begin{aligned} 1. \quad \langle p_1, p_2 \rangle_D &:= \sum_{i=1}^n c_{1i} \langle x^{\alpha_i} y^{\beta_i} z^{\gamma_i}, p_2 \rangle_D, \\ 2. \quad \langle x^\alpha y^\beta z^\gamma, p_2 \rangle_D &:= \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^\beta}{\partial y^\beta} \frac{\partial^\gamma}{\partial z^\gamma} p_2 \Big|_{(x,y,z)=(0,0,0)}. \end{aligned}$$

Exempel 10. $\langle 3x^2 y z, 5x^2 y z \rangle_D = 15 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} x^2 y z \Big|_{(x,y,z)=(0,0,0)} = 30.$

Exempel 11. $\langle 3x^2yz, 5x^2y^2 \rangle_D = 5 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} x^2y^2 \Big|_{(x,y,z)=(0,0,0)} = 0$.

Exempel 12. $\langle 3x^2yz, 3x^2yz + 5x^2y^2 \rangle_D = 9\langle x^2yz, x^2yz \rangle_D = 18$.

Lemma 6. Den bilinjära formen $\langle \cdot, \cdot \rangle_D$ är en skalärprodukt och bildar med \mathcal{P}^ℓ ett inre produktsrum [A, s. 166].

Bevis. Linjäritet i den första positionen följer direkt av definitionen. Kvar att visa är positivitet, definitivitet och symmetri. Positivitet och definitivitet följer från att

$$\langle p_1, p_1 \rangle_D = \sum_{i=1}^n c_i \langle x^\alpha y^\beta z^\gamma, p_1 \rangle_D = \sum_{i=1}^n |c_i|^2 \frac{\partial^{\alpha_i} x^{\alpha_i}}{\partial x^{\alpha_i}} \frac{\partial^{\beta_i} y^{\beta_i}}{\partial y^{\beta_i}} \frac{\partial^{\gamma_i} z^{\gamma_i}}{\partial z^{\gamma_i}} \Big|_{(x,y,z)=(0,0,0)} = \sum_{i=1}^n |c_i|^2 \alpha_i! \beta_i! \gamma_i!$$

Detta ger att alla faktorer i högerledet är större än eller lika med 0, och 0 om och endast om alla konstanter $c_1 \dots c_n$ är lika med noll. Eftersom potenser av olika grad tas till 0 av inreprodukten som i exempel 11 så gäller att

$$\langle p_1, p_2 \rangle_D = \sum_{i=1}^n c_{1i} \langle x^{\alpha_i} y^{\beta_i} z^{\gamma_i}, p_2 \rangle_D = \sum_{i=1}^n c_{1i} c_{2i} \alpha_i! \beta_i! \gamma_i! = \sum_{i=1}^n c_{2i} \langle x^{\alpha_i} y^{\beta_i} z^{\gamma_i}, p_1 \rangle_D = \langle p_2, p_1 \rangle_D$$

vilket är symmetrin och vi är färdiga. \square

Vi påminner om att ifall vi har en operator T samt en inreprodukt så gäller det per definition att dess adjunkt T^* uppfyller $\langle Tv, w \rangle = \langle v, T^*w \rangle$ [A, s. 204]. Notera att

Lemma 7. Givet en fix grad ℓ och $\Delta : \mathcal{P}^\ell \rightarrow \mathcal{P}^{\ell-2}$ För $p \in \mathcal{P}^{\ell-2}$ gäller $\Delta^*p = (x^2 + y^2 + z^2)p$.

Bevis. Låt m_1 vara en basvektor till \mathcal{P}^ℓ och m_2 en till $\mathcal{P}^{\ell-2}$ på samma former som i Lemma 3. Då har vi

$$\begin{aligned} \langle \Delta m_1, m_2 \rangle_D &= \left\langle \frac{\partial^2 m_1}{\partial x^2}, m_2 \right\rangle_D + \left\langle \frac{\partial^2 m_1}{\partial y^2}, m_2 \right\rangle_D + \left\langle \frac{\partial^2 m_1}{\partial z^2}, m_2 \right\rangle_D \\ &= \langle m_1, x^2 m_2 \rangle_D + \langle m_1, y^2 m_2 \rangle_D + \langle m_1, z^2 m_2 \rangle_D \\ &= \langle m_1, (x^2 + y^2 + z^2) m_2 \rangle_D \\ &= \langle m_1, \Delta^* m_2 \rangle_D. \end{aligned}$$

\square

Notera att vi i den andra likheten använt att två av de tre termerna försvinner för mononom på formen av m_1 och m_2 . Den tredje termen är skild från 0 om och endast om $m_1 \in \{x^2 m_2, y^2 m_2, z^2 m_2\}$.

Exempel 13.

$$\begin{aligned} \langle x^2yz, \Delta^*yz \rangle &= \langle x^2yz, (x^2 + y^2 + z^2)yz \rangle_D \\ &= \langle x^2yz, x^2yz \rangle_D + \langle x^2yz, y^3z \rangle_D + \langle x^2yz, yz^3 \rangle_D \\ &= 2 + 0 + 0 \\ &= 2\langle yz, yz \rangle_D + \langle 0, yz \rangle_D + \langle 0, yz \rangle_D \\ &= \langle \Delta x^2yz, yz \rangle_D. \end{aligned}$$

Vi vill visa att mängden av alla element i definitionsmängden som tas till noll av Δ^* , är endast nollvektorn. Sedan används ett viktigt samband från linjär algebra.

Lemma 8. $\text{Ker} \Delta^* = 0$.

Bevis. Låt $p_1 \in \mathcal{P}^\ell$ och $p_2 \in \mathcal{P}^{\ell-2}$. Antag att $p_2 \in \text{Ker} \Delta^*$. Då 0 är ortogonal till alla andra vektorer har vi att $\langle p_1, \Delta^* p_2 \rangle_D = 0$ för alla $p_1 \in \mathcal{P}^\ell$. Enligt Lemma 7 får vi då

$$\langle p_1, \Delta^* p_2 \rangle_D = \langle p_1, (x^2 + y^2 + z^2) p_2 \rangle_D = 0.$$

som är noll endast om $p_1 \notin \{x^2 p_2, y^2 p_2, z^2 p_2\}$ eller $p_2 = 0$. Eftersom p_1 är godtycklig är $p_2 = 0$, vilket skulle visas. \square

Vi påminner om att för en linjär operator T och för dess adjunkt gäller

$$\text{Ker}T^* = (\text{range}T)^\perp \text{ [A, 207]},$$

där $\text{range}T$ är bildmängden till T och $(\text{range}T)^\perp$ är rummet av vektorer ortogonala till $\text{range}T$. För en surjektiv linjär operator $T : V \rightarrow W$ gäller att

$$\dim W - \dim V = \dim \text{Ker}T \text{ [A, 63]}.$$

Nu har vi alla byggstenar för vår första sats.

Sats 1. $\dim \mathcal{H}^\ell = 2\ell + 1$.

Bevis.

$$\text{Ker}\Delta^* = (\text{range}\Delta)^\perp = 0$$

Alltså är endast nollvektorn ortogonal till bildmängden av Δ som alltså är surjektiv. Med hjälp av Lemma 4 kan vi då se att

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{H}^\ell &= \dim \mathcal{P}^\ell - \dim \mathcal{P}^{\ell-2} \\ &= \frac{(\ell+1)(\ell+2) - (\ell-1)(\ell)}{2} \\ &= \frac{4\ell+2}{2} \\ &= 2\ell+1. \end{aligned}$$

□

2.2 Variabelbyte till sfäriska koordinater

Vi påminner om sfäriska koordinater i \mathbb{R}^3 .

Definition 11. Låt $E : \mathbb{R}^+ \times [0, \pi] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ vara definierad av

$$E(r, \theta, \phi) = (r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta) = \mathbf{v}.$$

Vi använder ibland notationen $E(\theta, \phi)$ då vi arbetar på \mathbb{S}^2 , och med det menas $E(1, \theta, \phi)$. För en funktion $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ skriver vi $f(r, \theta, \phi)$ och för en funktion $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ skriver vi $f(\theta, \phi)$.

Notera att $\theta = 0$ korresponderar mot nordpolen $(0, 0, 1) \in \mathbb{S}^2$ och att E inte är injektiv. Notera även att med en geometrisk tolkning för denna konvention av sfäriska koordinater, så är θ vinkeln mellan z -axeln och vektorn \mathbf{v} , medan ϕ är vinkeln mellan x -axeln och projektionen av \mathbf{v} på planet $z = 0$.

2.3 Laplaceoperatorerna Δ och $\Delta_{\mathbb{S}^2}$ i \mathbb{R}^3 och \mathbb{S}^2

Vi definierar här laplaceoperatoren för \mathbb{S}^2 och visar sedan dess relation till laplaceoperorn för \mathbb{R}^3 . Slutligen visar vi dess relation till de sfäriska harmoniska polynomen.

Definition 12. Den sfäriska Laplaceoperatoren för en funktion f ges av

$$\Delta_{\mathbb{S}^2} f := \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}.$$

Notera att $\Delta_{\mathbb{S}^2}$ lämnar radien r opåverkad, vilket blir relevant i sektion 2.4. Med hjälp av beräkningar av repeterad produktregel som i [M, s. 74] får vi som i [RWW, s. 253] att Δ kan formuleras i sfäriska koordinater för en godtycklig funktion $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \Delta f &= \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} \right] \\ &= \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \Delta_{\mathbb{S}^2} f \right]. \end{aligned}$$

Lemma 9. För ett homogent polynom $p_1 \in \mathcal{P}^\ell$ har vi relationen

$$\Delta p_1 = \frac{1}{r^2} [(\ell(\ell + 1)p_1 + \Delta_{\mathbb{S}^2} p_1)].$$

Bevis. Låt p vara ett homogent polynom, för denna går det att bryta ut radien, vilket ger en möjlig definition

$$p_1(r, \theta, \phi) =: r^\ell p_2(\theta, \phi) \text{ som går att använda i formeln } \frac{\partial p_1}{\partial r} = \ell r^{\ell-1} p_2,$$

så att p_2 begränsad till \mathbb{S}^2 och oberoende av radien. Då får vi

$$\Delta p_1 = \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} (\ell r^{\ell+1} p_2) + \Delta_{\mathbb{S}^2} p_1 \right] = \frac{1}{r^2} [(\ell(\ell + 1)r^\ell p_2 + \Delta_{\mathbb{S}^2} p_1)] = \frac{1}{r^2} [(\ell(\ell + 1)p_1 + \Delta_{\mathbb{S}^2} p_1)]. \quad (5)$$

□

Relationen mellan $\Delta_{\mathbb{S}^2}$ och Δ leder till en sats som följer av den harmoniska egenskapen hos de sfäriska polynomen.

Sats 2. Ett sfäriskt polynom av grad ℓ är en egenfunktion till $\Delta_{\mathbb{S}^2}$ med egenvärde $-\ell(\ell + 1)$.

Bevis. För $h \in \mathcal{H}^\ell$ gäller $\Delta h = 0$, vilket med Lemma 9 ger att

$$0 = \frac{1}{r^2} [(\ell(\ell + 1)h + \Delta_{\mathbb{S}^2} h)].$$

Genom att multiplicera båda sidor med r^2 och flytta över ena termen får vi då

$$\Delta_{\mathbb{S}^2} h = -\ell(\ell + 1)h$$

vilket är den önskade identiteten. □

Vi påminner om att ett godtyckligt polynom är en linjärkombination av homogena polynom. Det följer att om H är ett godtyckligt harmoniskt polynom går det att skriva på formen $H = \sum_{\ell=0}^n c_\ell h^\ell$ där c_ℓ är konstanter och h^ℓ är sfäriska polynom. Det harmoniska polynomet H är en egenfunktion till $\Delta_{\mathbb{S}^2}$ tillhörande egenvärdet $\sum_{\ell=0}^n -\ell(\ell + 1)a_\ell$ där $a_\ell = 1$ om $c_\ell \neq 0$ och 0 annars.

2.4 Ortogonalitet av sfäriska polynom av skild grad över \mathbb{S}^2

Vi kommer i denna sektion integrera *sfäriska polynom* över ytan av \mathbb{S}^2 . För detta krävs lite bakgrund i Differentialgeometri.

Definition 13. Låt $f : U \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ vara en bijektiv och differentierbar parametrisering av en yta och låt $(u, v) \in U$. Då definierar vi *areaelementet* till avbildningen dS i punkten (u, v) med

$$dS = \left| \frac{\partial f(u, v)}{\partial u} \times \frac{\partial f(u, v)}{\partial v} \right| dudv.$$

Där \times symboliserar *kryssprodukten*.

Lemma 10. Ytintegralen av areaelementet över hela den parametriserade ytan $\int_U 1 dS$ ger arean av U och är oberoende av parametrisering.

Detta fundamentala resultat inom Differentialgeometri kommer inte att bevisas här, men ett bevis går att återfinna i [C, s.117].

Exempel 14. Vi påminner om bytet till sfäriska koordinater. Vid en parametrisering av ytan till \mathbb{S}^2 får vi $dS = \sin \theta d\theta d\phi$ [RWW, s.237].

För nästa definition kommer vi att vilja integrera över hela \mathbb{S}^2 . Parametriseringen i exempel 14, missar att täcka en kurva av \mathbb{S}^2 som går från nordpolen till sydpolen. Detta är inte något problem eftersom arean av kurvan är noll.

Definition 14. Låt $h_1, h_2 \in \mathcal{H}$, där $\mathcal{H} := \bigcup_{\ell \in \mathbb{Z}^+} \mathcal{H}^\ell$. Vi definierar den bilinjära formen $\langle \cdot, \cdot \rangle_I$ med

$$\langle h_1, h_2 \rangle_I = \int_{\mathbb{S}^2} h_1 h_2 \, dS.$$

Lemma 11. Den bilinjära formen $\langle \cdot, \cdot \rangle_I$ är en skalärprodukt och bildar med \mathcal{H} ett inre produktsrum [A, s. 166].

Bevis. Linjäritet i den första positionen följer från linjäritet hos integraler. Symmetri följer direkt av kommutativitet av multiplikation. Kvar att visa är positivitet och definitivitet som följer från att

$$\langle h_1, h_1 \rangle_I = \int_{\mathbb{S}^2} |h_1|^2 \, dS \geq 0.$$

Med likhet endast om h_1 är lika med 0 över hela \mathbb{S}^2 . □

För satsen kommer vi först att behöva en känd identitet. Vi påminner om *Gauss sats* [RWW, s.259]. Låt \mathbf{K} vara ett begränsat sammanhängande område i \mathbb{R}^3 med den glatta randen $\partial\mathbf{K}$. Då gäller för ett vektorfält \mathbf{F} i rummet att

$$\int_{\partial\mathbf{K}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_{\mathbf{K}} \nabla \cdot \mathbf{F} \, dv \quad (6)$$

där \mathbf{n} är *normalvektorn* med riktning ut ur kroppen och ∇ är gradienten. Notera att $\nabla \mathbf{F} \neq \nabla \cdot \mathbf{F}$, där högerledet kallas *divergensen* av \mathbf{F} och tillhör \mathbb{R} . Notera även relationen till Δ definierad av $\nabla \cdot \nabla = \Delta$.

Lemma 12. (Greens andra identitet [RWW, s.259]) Låt K vara som ovan. Då gäller

$$\int_{\partial\mathbf{K}} u \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} - v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \, dS = \int_{\mathbf{K}} (u\Delta v - v\Delta u) \, dv.$$

Bevis. Låt u och v vara deriverbara funktioner i kroppen \mathbf{K} och ta vektorfältet $\mathbf{F} = u\nabla v - v\nabla u$. Placering i (6) ger

$$\begin{aligned} \int_{\partial\mathbf{K}} u \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} - v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \, dS &= \int_{\mathbf{K}} \nabla \cdot (u\nabla v - v\nabla u) \, dv \\ &= \int_{\mathbf{K}} \nabla u \cdot \nabla v (1-1) + (u\Delta v - v\Delta u) \, dv \\ &= \int_{\mathbf{K}} (u\Delta v - v\Delta u) \, dv. \end{aligned}$$

□

Sats 3. Låt $h_1 \in \mathcal{H}^\ell$ och $h_2 \in \mathcal{H}^{\ell'}$ med $\ell \neq \ell'$ då gäller att $\langle h_1, h_2 \rangle_I = 0$.

Bevis. Vi har genom den harmoniska egenskapen att

$$h_1(\mathbf{v})\Delta h_2(\mathbf{v}) - h_2(\mathbf{v})\Delta h_1(\mathbf{v}) = 0.$$

Då är vi redo att färdigställa beviset. Låt $\text{int } \mathbb{S}^2 = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 : v < 1\}$.

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\text{int } \mathbb{S}^2} (h_1(\mathbf{v})\Delta h_2(\mathbf{v}) - h_2(\mathbf{v})\Delta h_1(\mathbf{v})) \, d\mathbf{v} \\ &= \int_{\mathbb{S}^2} h_1(r, \theta, \phi) \frac{\partial r^{\ell'} h_2(\theta, \phi)}{\partial \mathbf{n}} - h_2(r, \theta, \phi) \frac{\partial r^\ell h_1(\theta, \phi)}{\partial \mathbf{n}} \, dS \quad \text{- enligt Lemma 12,} \\ &= \int_{\mathbb{S}^2} r^{\ell+\ell'-1} (\ell - \ell') h_1(\theta, \phi) h_2(\theta, \phi) \, dS \quad \text{- då } r \text{ är den utåtpekande normalen till } \mathbb{S}^2, \\ &= (\ell - \ell') \langle h_1, h_2 \rangle_I \quad \text{- då } r=1 \text{ på } \mathbb{S}^2. \end{aligned}$$

Eftersom $\ell \neq \ell'$ kan vi dela med $(\ell - \ell')$ och vi får den önskade identiteten. □

Alla funktioner på \mathbb{S}^2 begränsade med avseende till normen inducerad av $\langle \cdot, \cdot \rangle_I$ spänner ett fullständigt metriskt rum tillsammans med denna norm. Detta kallas ett *hilbertrum* betecknat $L^2(\mathbb{S}^2)$. Vi påminner om att ett godtyckligt harmoniskt polynom är en summa av sfäriska polynom. $L^2(\mathbb{S}^2)$ är just det slutna höljet till de sfäriska polynomen. Med sats 3 blir de en ortogonal bas som spänner ett delrum tät i $L^2(\mathbb{S}^2)$ [SW, s.138].

3 Lateral- och sektorialpolynom

I den här delen definierar vi två klasser av sfäriska polynom som vi kallar för lateralpolynom och sektorialpolynom [M, s. 131-132]. Vi definierar även två specifika funktioner $z_\ell : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ och $w_\ell : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, som är av respektive klass. Notera att även om polynomen är definierade på hela \mathbb{R}^3 undersöker vi dem över \mathbb{S}^2 . Beteckningen z_ℓ ska inte förvirras med variabeln z .

3.1 Nollställena på sfären

De polynom vi definierar i detta kapitel kommer att klassificeras baserat på hur deras nollställena är fördelade över \mathbb{S}^2 . För att förenkla detta kommer vi börja med definitioner. Vi börjar med att hämta intuition från enhetscirkeln.

Exempel 15. Betrakta $\sin(n\omega)$, där n är ett fixt heltal. Denna trigonometriska funktion har $2n$ nollställena på intervallet $[0, 2\pi)$. Mängden $M = \{\omega \in \mathbb{R} : \sin(n\omega) \neq 0\}$ består av $2n$ öppna sammanhängande områden. n stycken där $\sin(n\omega)$ är positiv, så kallade *positiva områden*, och n stycken *negativa områden*.

Vi vill utöka detta till funktioner på \mathbb{S}^2 .

Definition 15. Om $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ är en funktion så kallar vi mängden $f^{-1}(0)|_{\mathbb{S}^2} = \{p \in \mathbb{S}^2 : f(p) = 0\}$ för *nodalkurvorna* till f .

3.2 Lateralpolynomet z_ℓ

Vi kommer i denna sektion att definiera ett specifikt lateralpolynom, men innan det definierar vi allmänna lateralpolynom.

Definition 16. Givet ett fixt $\theta \in [0, \pi]$ är en delmängd av \mathbb{S}^2 på formen $\{E(\theta, \phi) : \phi \in [0, 2\pi]\}$ en *latitudcirkel*. Det vill säga att vi väljer en *höjd* på enhetssfären med fixt θ och låter vinkeln ϕ löpa runt ett varv, vilket ger oss en cirkel. Vi kallar θ för *latitud*.

Exempel 16. Om vi betraktar Jorden som \mathbb{S}^2 med nordpolen som punkten $(0, 0, 1)$ är ekvatorn en latitudcirkel med latitud $\theta = \pi/2$.

Definition 17. Ett polynom $p : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ kallas för *lateralpolynom* om dess nodalkurvor bildar latitudcirklar på \mathbb{S}^2 .

Exempel 17. polynomet $x^2 + y^2 - 2z^2$ från exempel 7 är ett lateralpolynom på \mathbb{S}^2 . Detta följer från att

$$x^2 + y^2 - 2z^2 = 0 \iff 1 - 3z^2 = 0 \iff z = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Polynomet är även *rotationsinvariant* på \mathbb{S}^2 med avseende på rotationer i z -axeln, det vill säga att dess värde bestäms direkt av variabeln z .

Lateralpolynomen vi väljer för detta arbete kommer att vara så kallade Legendrepolynom P_ℓ .

Definition 18. Ett *Legendrepolynom* av grad n ges av

$$P_n(\rho) = \frac{1}{n!} \left[\frac{\partial^n}{\partial \tau^n} f(\tau; \rho) \right] \Bigg|_{\tau=0},$$

där $f : B_{\mathbb{R}}(0, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ är en funktion definierad av $f(\tau) = (1 + \tau^2 - 2\tau\rho)^{-1/2}$. Konstanten $\epsilon > 0$ är vald baserad på ρ så att f är väldefinierad på bollen $B_{\mathbb{R}}(0, \epsilon)$.

Definitionen ovan utgår från Taylorutvecklingen av funktionen f . Utvecklingen sker med avseende på variabeln $\tau \in \mathbb{R}$ i punkten $\tau = 0$, och ρ betraktas som en konstant. Vi har sambandet

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \tau^2 - 2\tau\rho}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\rho)\tau^n, \quad (7)$$

där Legendrepolyomen är koefficienterna i Taylorserien [M, s. 72].

Man kan även definiera Legendrepolyomen direkt från Laplaceekvationen i sfäriska koordinater. Med antagandet att lösningsfunktionen u i (4) är oberoende av ϕ erhåller vi

$$u''(\theta) + \cot(\theta)u'(\theta) + \ell(\ell + 1)u(\theta) = 0,$$

som är en andragradens ordinär differentialekvation i en variabel. Det visar sig att Legendrepolyomet av grad ℓ löser denna ekvation, se [M, s. 75-77] för bevis. Notera att vi i detta fallet skulle få att Legendrepolyomen är harmoniska per definition.

En något enklare derivering av specifika Legendrepolyom ges av Rodriguez formel [M, s. 88],

$$P_n(\rho) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d\rho^n} (\rho^2 - 1)^n. \quad (8)$$

Exempel 18. Via (8) får vi fram att $P_1(\rho) = \rho$ och $P_2(\rho) = (3\rho^2 - 1)/2$. Vi kan även notera en likhet mellan exempel 17 och $P_2(\rho)$.

Definition 19. Vi definierar $z_\ell : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ med

$$z_\ell(\mathbf{v}) := |\mathbf{v}|^\ell P_\ell(z/|\mathbf{v}|) \text{ när } |\mathbf{v}| \neq 0 \text{ och } z_\ell(0) := 0.$$

z_ℓ är rotationsinvariant med avseende på rotationer runt z-axeln, och är därmed ett lateralpolynom eftersom den är oberoende av x och y på \mathbb{S}^2 . När vi betraktar z_ℓ i sfäriska koordinater på ytan av \mathbb{S}^2 använder vi notationen $z_\ell(\theta, \phi) = P_\ell(\cos \theta)$.

Exempel 19. Genom kombination av exempel 18 och definition 19 får vi att

$$z_1(\mathbf{v}) = |\mathbf{v}| \frac{z}{|\mathbf{v}|} = z \quad \text{och} \quad z_2(\mathbf{v}) = \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} \left(\frac{3z^2}{|\mathbf{v}|^2} - 1 \right) = \frac{1}{2} (2z^2 - (x^2 + y^2)).$$

Vi ser också att på \mathbb{S}^2 gäller det att $z_2(\mathbf{v}) = (1/2)(3z^2 - 1)$, ty $|\mathbf{v}| = 1$.

Lemma 13. Funktionen z_ℓ är ett sfäriskt polynom.

Bevis. Homogeniteten följer direkt från definitionen, kvar att visa är att z_ℓ är ett polynom och att det är harmoniskt. För beviset om harmonicitet refererar vi till [M, s. 75-77]. Vi visar att z_ℓ är ett polynom. Vi utgår från Rodriguez formel (7). Vi har enligt binomialsatsen att

$$(\rho^2 - 1)^\ell = \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k} \rho^{2(\ell-k)} (-1)^k.$$

Om vi deriverar högerledet ℓ gånger får vi

$$\sum_{k=0}^n \binom{\ell}{k} \frac{(2\ell - 2k)!}{(\ell - 2k)!} \rho^{\ell-2k} (-1)^k.$$

där $n = \ell/2$ om ℓ är jämn eller $(\ell - 1)/2$ om ℓ är udda. Om vi lägger in $\rho = z/|\mathbf{v}|$ och multiplicerar hela ekvationen med $|\mathbf{v}|^\ell$ får vi

$$\sum_{k=0}^n \binom{\ell}{k} (2\ell - 2k)! |\mathbf{v}|^{2k} (z)^{\ell-2k} (-1)^k.$$

Eftersom alla faktorer i alla termer är polynom är också summan det. □

3.3 Sektorialpolynomet w_ℓ

Vi kommer i denna sektion att definiera ett specifikt sektorialpolynom, men innan det definierar vi sektorialpolynom.

Definition 20. Givet ett fixt $\phi \in [0, 2\pi]$, definierar vi en *meridian* som delmängden $\{E(\theta, \phi) : \theta \in [0, \pi]\}$.

Definition 21. Ett polynom $p : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ kallas för *sektorialpolynom* om dess nodalkurvor bildar meridianer på \mathbb{S}^2 .

Exempel 20. Betrakta mängden $\{E(\theta, \phi) : \phi = j\frac{\pi}{2}, \theta \in [0, \pi]\}$ där $0 \leq j \leq 3$. Denna mängd består utav fyra meridianer som delar enhets sfären i fyra så kallade *sektorer*. Vi kan notera att två väl utvalda meridianer som sitter ihop kan betraktas som enhetscirkclar i \mathbb{R}^2 , medan latitudcirkclar betraktade i planet bara har enhetsradie ifall latituden är $\theta = \pi/2$. Vi återkommer till sektorer i sektion 4.4.

Exempel 21. På jordklotet kallas koordinaten på en meridian löpande från nord till syd för *longitud*, det vill säga att för punkter på halvcirkelsegmentet $\{E(\theta, \phi) : \theta \in [0, \pi]\}$ så säger vi att ϕ är punkternas longitud.

Definition 22. Låt $w_\ell : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ vara definierad med $w_\ell(x, y, z) = \Im(x + iy)^\ell$, där $\ell \in \mathbb{Z}^+$, och \Im är *imaginärdelen* av funktionen. I *polära koordinater* på ytan av \mathbb{S}^2 får vi

$$w_\ell(\theta, \phi) = \sin(\theta)^\ell \Im(\cos \phi + i \sin \phi)^\ell = \sin^\ell(\theta) \Im(e^{i\ell\phi}) = \sin^\ell(\theta) \sin(\ell\phi).$$

Lemma 14. Funktionen w_ℓ är ett periodiskt sektorialpolynom och uppfyller $w_\ell(\theta, \phi + 2\pi/\ell) = w_\ell(\theta, \phi)$.

Bevis. Detta följer direkt genom observation av w_ℓ i sfäriska koordinater då sinusfunktionen är periodisk. \square

Nodalkurvorna till w_ℓ består av mängden $\{E(\theta, \phi) : \phi = j\frac{\pi}{\ell}, 0 \leq j \leq 2\ell - 1\}$ där $j \in \mathbb{Z}$. Vi har alltså ℓ stycken meridianer som delar sfären i 2ℓ sektorer.

Lemma 15. Funktionen w_ℓ är ett *sfäriskt polynom*.

Bevis. w_ℓ är ett homogent polynom, ty

$$w_\ell(k\mathbf{v}) = \Im(kx + kiy)^\ell = k^\ell \Im(x + iy)^\ell \quad \forall k \in \mathbb{R}.$$

Den är även harmonisk, ty

$$\Delta_{\mathbb{R}^3} w_\ell = \Im \left(\frac{\partial^2 (x + iy)^\ell}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (x + iy)^\ell}{\partial y^2} \right) = \Im \left(\ell(\ell - 1)[(x + iy)^{\ell-2} + i^2(x + iy)^{\ell-2}] \right) = 0.$$

Sista likheten eftersom $i^2 = -1$. Alltså är w_ℓ ett sfäriskt polynom. \square

3.4 Polynomet $h^{\mu, \ell}$

Definition 23. Vi definierar nu polynomet $h^{\mu, \ell} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ som

$$h^{\mu, \ell} = w_\ell + \mu z_\ell.$$

I sfäriska koordinater på \mathbb{S}^2 har vi

$$h^{\mu, \ell}(\theta, \phi) = \sin^\ell(\theta) \sin(\ell\phi) + \mu P_\ell(\cos \theta).$$

Polynomet $h^{\mu, \ell}$ beror på parametern $\mu \in \mathbb{R}$ och heltalet $\ell > 0$.

Sats 4. Polynomet $h^{\mu, \ell}$ är ett sfäriskt polynom av grad ℓ .

Bevis. Eftersom homogenitet är en linjär egenskap givet konsekvent grad ℓ och harmonicitet också är en linjär egenskap, så följer det direkt från Lemma 13 och Lemma 15 att en linjärkombination av z_ℓ och w_ℓ är ett sfäriskt polynom. \square

Lemma 16. Polynomet $h^{\mu,\ell}$ är periodiskt över \mathbb{S}^2 och uppfyller att $h^{\mu,\ell}(\theta, \phi + 2\pi/\ell) = h^{\mu,\ell}(\theta, \phi)$.

Bevis. Eftersom z_ℓ är rotationsinvariant har vi att

$$h^{\mu,\ell}(\theta, \phi) - h^{\mu,\ell}(\theta, \phi + 2\pi/\ell) = w_\ell(\theta, \phi) - w_\ell(\theta, \phi + 2\pi/\ell).$$

Enligt Lemma 14 är även högerledet noll och vi får den sökta likheten. \square

Det är delvis dessa polynom $h^{\mu,\ell}$ som [BH] har studerat i sin artikel, och det är deras resultat om $h^{\mu,\ell}$ som vi vill göra begripbara i nästa sektion.

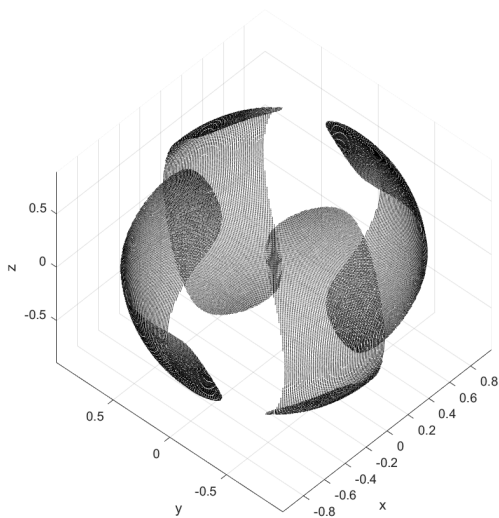
4 Nodalkurvor för $h^{\mu,\ell}$

Vi kommer i denna sektion inledningsvis formulera och bevisa specifika egenskaper som polynomen $h^{\mu,\ell}$ uppfyller. Vi formulerar även en sats som beskriver nodalkurvorna för $h^{\mu,\ell}$ i detalj. Detta gör vi utefter artikeln av Bérard P. och Helffer B. [BH].

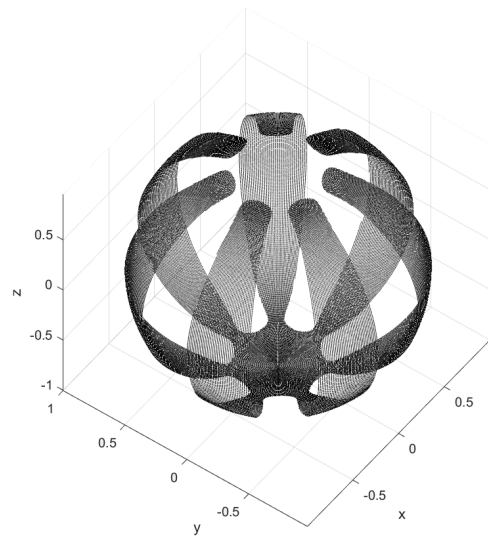
Definition 24. En *nodaldomän* till en funktion f är ett sammanhängande område i $\mathbb{S}^2 \setminus C$ där C är nodalkurvorna till f .

Exempel 22. Vi betraktar $\sin(n\omega)$ från exempel 15 och ser att nodaldomänerna utgörs av de n positiva och de n negativa områdena.

Innan vi börjar med bevisen kan det vara givande att se nodalkurvorna för några exempelvärden på μ och ℓ . Vi har i Figur 3 och 4 nedan ritat upp ett jämnt respektive udda gradtal. Notera att vi i Figur 3 har fem nodaldomäner, medan vi i Figur 4 bara har två, något som speglar ett mönster som vi bevisar i Sats 5. I bilderna skuggar vi de negativa områdena så att nodalkurvorna blir de skuggade områdenas kant.



Figur 3: $h^{\mu,4}$.



Figur 4: $h^{\mu,7}$.

4.1 Kritiska nollpunkter och nodalkurvor

Vi vill kunna säkerställa att nodalkurvorna till $h^{\mu,\ell}$ är enkelt slutna, det vill säga att de inte självkorsar. Ifall en kurva på \mathbb{S}^2 är enkelt sluten vet vi att den kommer att dela \mathbb{S}^2 i exakt två områden, ett på var sin sida av kurvan. En självkorsande sluten kurva kan däremot dela samma område i tre eller fler delar. Eftersom vi vill att nodalkurvorna ska vara förutsägbara måste vi kunna undvika detta. Självkorsning av nodalkurvor hos en egenfunktion till Laplaceoperatoren korresponderar mot så kallade kritiska nollpunkter till funktionen, se (5) i [B, s.2].

Definition 25. En *kritisk nollpunkt* $(\theta, \phi) \in \mathbb{S}^2$ till en funktion $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ är en punkt som uppfyller

$$f(\theta, \phi) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \theta}(\theta, \phi) = 0 \quad \text{och} \quad \frac{\partial f}{\partial \phi}(\theta, \phi) = 0. \quad (9)$$

Vi kommer inte att kunna testa det andra villkoret för kritiska nollpunkter hos $h^{\mu,\ell}$ i polerna eftersom derivatan av $\theta \in [0, \pi]$ inte är definierad i parametreringen. Detta kommer inte vara ett problem så länge $|\mu| > 0$ på grund av nästa lemma.

Lemma 17. Låt $h^{\mu,\ell}(\theta, \phi)$ vara definierad som ovan. Då gäller att $|h^{\mu,\ell}(0, \phi)| = |h^{\mu,\ell}(\pi, \phi)| = \mu$.

Bevis. Insättning av $\rho = \pm 1$ i ekvation (7) ger oss

$$\frac{1}{\sqrt{1+z^2 \mp 2z\rho}} = \frac{1}{|1 \mp z|}.$$

Därmed vet vi enligt Taylorexansion att koefficienterna $P_\ell(1) = 1$ och $P_\ell(-1) = (-1)^\ell$. Eftersom w_ℓ är noll vid polerna gäller alltså att $|h^{\mu,\ell}| = \mu$ vid dessa punkter. \square

Definition 26. För en fix grad ℓ låt $\theta_{i,\ell}$ vara det i :te nollstället till $P_\ell(\cos \theta)$ där $1 \leq i \leq \ell$.

Lemma 18. För $\ell \geq 1$ gäller att Legendrepolynomet P_ℓ har ℓ nollor på intervallet $(-1, 1)$ och att P_ℓ och $P_{\ell-1}$ saknar gemensamma nollor på intervallet, mer precist gäller för nollorna att

$$0 < \theta_{1,\ell} < \theta_{1,\ell-1} < \theta_{2,\ell} < \theta_{2,\ell-1} \cdots \theta_{\ell-1,\ell-1} < \theta_{\ell,\ell} < \pi.$$

Detta är allmänna egenskaper för ortogonala egenfunktioner i hilbertrum vilket vi visade att de sfäriska polynomen är med Sats 3. För dessa egenskaper refererar vi till [BH, s.6].

Lemma 19. Låt

$$\mu_i = \frac{\sin^\ell(\theta_{i,\ell-1})}{|P_\ell(\cos(\theta_{i,\ell-1}))|},$$

som är väldefinierad genom Lemma 18. μ_i motsvarar alla kritiska nollställen hos $h^{\ell,\mu}$ på \mathbb{S}^2 .

Bevis. Insättning av $h^{\mu,\ell}$ i (9) och lite omskrivningar ger oss tre ekvationer för kritiska punkter i sfäriska koordinater,

$$\mu = \frac{\sin^\ell(\theta) \sin(\ell\phi)}{P_\ell(\cos\theta)}, \quad \ell \sin(\ell\phi) \cos\theta \sin^{\ell-1}\theta = \mu \sin\theta P'_\ell(\cos\theta) \quad \text{och} \quad \cos(\ell\phi) = 0. \quad (10)$$

Vi får av den sista ekvationen att $\sin(\ell\phi) = \pm 1$. För $|\sin\theta| \neq 0$ gäller identiteten

$$P'_\ell(\cos\theta) = \ell(\sin^{-2}\theta)(P_{\ell-1}(\cos\theta) - \cos\theta P_\ell(\cos\theta)),$$

se [BH, s. 5]. I kombination med de övriga ekvationerna i (10) får vi att $P_{\ell-1}(\cos\theta) = 0$, vilket med notationen i Definition 26 ger att $\theta = \theta_{i,\ell-1}$ för något $1 \leq i \leq \ell-1$. Vi har alltså enbart kritiska nollpunkter för de θ som korresponderar mot de $\ell-1$ nollställena för $P_{\ell-1}$, och för dessa värden på θ måste μ uppfylla den första ekvationen i (10). \square

Definition 27. Låt $\mu_c := \inf_{1 \leq i \leq \ell-1} \mu_i$.

Om $0 < \mu < \mu_c$ har $h^{\mu,\ell}$ inga kritiska nollställen, och därmed är nodalkurvorna till funktionen enkelt slutna. Vi kommer hädanefter att anta för μ att $0 < \mu < \mu_c$.

4.2 Beteende för $h^{\mu,\ell}$ på några meridianer

Definition 28. Vi låter B_j beteckna en meridian definierad enligt

$$B_j = \{(\theta, \phi) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi] : \phi = (j + \frac{1}{2})\frac{\pi}{\ell}\}, \text{ där } 0 \leq j \leq 2\ell - 1.$$

Exempel 23. För $h^{\mu,3}$ kommer indexet j för meridianerna att löpa från 0 till 5 och alltså bilda 6 meridianer. Alla meridianer $B_0 - B_5$ tillhörande $h^{\mu,3}$ finns illustrerade i figur 5.

Vi vill karaktärisera hur $h^{\mu,\ell}$ beter sig på meridianer av formen B_j för att kartlägga nollställena. Det här leder oss till ett Lemma [BH, s. 10].

Lemma 20. Låt B_j vara som ovan och betrakta $h^{\mu,\ell}$ längs B_j . Då gäller

- (i) Om $\theta \in [\theta_{1,\ell}, \pi - \theta_{1,\ell}]$ är $h^{\mu,\ell}(\theta, \phi) \neq 0$.
- (ii) Om både ℓ och j är jämna så är $h^{\mu,\ell}(\theta, \phi) > 0$ för $\theta \in [0, \theta_{1,\ell}] \cup [\pi - \theta_{1,\ell}, \pi]$.
- (iii) När ℓ är jämn men j är udda så är $h^{\mu,\ell}(\theta, \phi) = 0$ på exakt två ställen, för exakt ett θ i intervallet $(0, \theta_{1,\ell})$ och exakt ett i intervallet $(\pi - \theta_{1,\ell}, \pi)$.
- (iv) Om ℓ är udda och j är jämn så är $h^{\mu,\ell}(\theta, \phi) > 0$ för $\theta \in [0, \theta_{1,\ell}]$ och $h^{\mu,\ell}(\theta, \phi) = 0$ för exakt ett $\theta \in (\pi - \theta_{1,\ell}, \pi)$.
- (v) Om både ℓ och j är udda $h^{\mu,\ell}(\theta, \phi) < 0$ för $\theta \in [\pi - \theta_{1,\ell}, \pi]$ och $h^{\mu,\ell}(\theta, \phi) = 0$ för exakt ett $\theta \in (0, \theta_{1,\ell})$.

Betrakta figur 3 och figur 4 för exempel på hur detta kan se ut. Bevisen för egenskaper (ii)–(v) finns i appendix 1, då de liknar beviset för egenskap (i) som återges nedan.

Bevis (i). Anta att $h^{\mu,\ell}(\theta, \phi) = 0$ längs B_j , vilket är ekvivalent med att

$$(-1)^j \sin^\ell(\theta) + \mu P_\ell(\cos \theta) = 0,$$

ty $(-1)^j = \sin(\frac{\pi}{2} + j\pi)$. Omskrivning ger oss

$$\frac{P_\ell(\cos \theta)}{\sin^\ell(\theta)} = \frac{(-1)^{j+1}}{\mu}. \quad (11)$$

Vänsterledet är väldefinierat, ty $\sin^\ell(\theta) = 0$ enbart på polerna, och intervallet är valt så att vi undviker detta. Deriverar vi vänsterledet med avseende på θ kan vi identifiera $\ell - 1$ stycken extrempunkter som vi kallar $1/\mu_i$, $1 \leq i \leq \ell - 1$ i enlighet med Lemma 19. Dessa extrempunkter ligger på intervallet $(\theta_{1,\ell}, \pi - \theta_{1,\ell})$ enligt Lemma 18. Insättning i (11) ger

$$\frac{1}{\mu_i} = \frac{(-1)^{j+1}}{\mu},$$

vilket är en motsägelse då $0 < \mu < \inf_{1 \leq i \leq \ell-1} \mu_i$. □

4.3 Egenskaper för nodalkurvorna till $h^{\mu,\ell}$ i rutorna $Q_{i,j}$

I den här sektionen kommer vi att dela in enhetssfären i ett antal rutor, för att sedan beskriva hur nodalkurvorna till $h^{\mu,\ell}$ beter sig inom dessa.

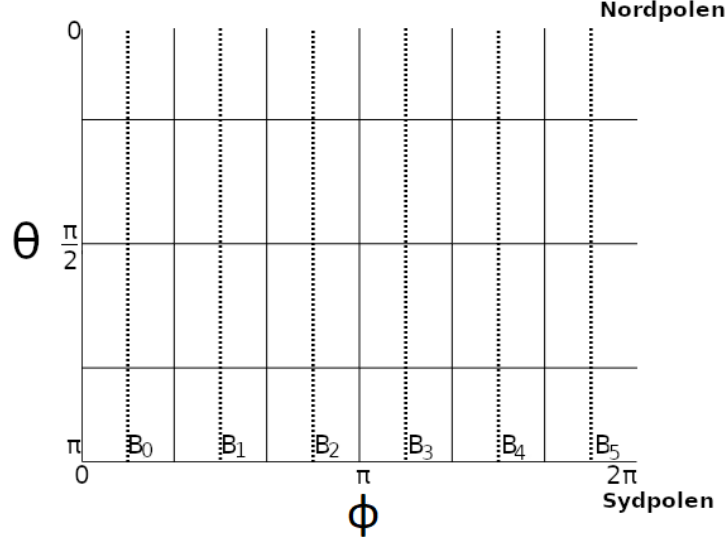
Definition 29. Givet lateralpolynomet z_ℓ samt sektorialpolynomet w_ℓ bildar unionen av deras nodalkurvor ett rutmönster på sfären. Givet ett fixt i och j bildar vi

$$Q_{i,j} = \{E(\theta, \phi) : \theta_{i,\ell} < \theta < \theta_{i+1,\ell}, j\frac{\pi}{\ell} < \phi < (j+1)\frac{\pi}{\ell}\}. \quad (12)$$

Mängden $Q_{i,j}$ är en sammanhängande mängd på sfären där produkten av polynomen $z_\ell w_\ell$ är nollskild, omgiven av nodalkurvor till $z_\ell w_\ell$. Vi kallar $Q_{i,j}$ för en *ruta*. Vi observerar även att $z_\ell w_\ell$ har tecknet $(-1)^{i+j}$ inom rutan $Q_{i,j}$. $Q_{i,j}$ kallas *jämn Q-ruta* om $z_\ell w_\ell > 0$ respektive *udda Q-ruta* om $z_\ell w_\ell < 0$.

Om en meridian B_j och en ruta Q_{ij} definierade för samma ℓ illustreras på \mathbb{S}^2 , så kommer varje B_j att skära mitt genom Q -rutor med samma j , en kolonn av rutor. Om Lemma 20 betraktas utifrån denna illustration så beskriver specifika delar av lemmat beteendet för $h^{\ell, \mu}$ på specifika rutor i kolumnen.

Exempel 24. Givet $\ell = 3$ så bildar nodalkurvorna till $z_3 w_3$ 24 rutor, 4 rader och 6 kolumner med 6 meridianer som delar kolumnerna på mitten. Dessa finns illustrerade i Figur 5.



Figur 5: Q_{ij} -rutor för $\ell = 3$ heldragna. Meridianer B_j i prickade linjer.

Lemma 21. Funktionen $h^{\mu, \ell}$ har följande egenskaper inom rutorna $Q_{i,j}$:

- (i) Om $Q_{i,j}$ är en jämn Q -ruta finns det ingen nodalkurva eller del av en nodalkurva till $h^{\mu, \ell}$ inom $Q_{i,j}$.
- (ii) Nodalkurvorna till $h^{\mu, \ell}$ är transversala till hörnen av Q -rutorna.

Bevis.

- (i) Utifrån definitionen av jämna Q -rutor gäller det att z_ℓ och w_ℓ har samma tecken och är nollskilda inom dessa. Det ger att linjärkombinationen $h^{\mu, \ell}$ är nollskild eftersom $\mu > 0$. Det ger att nodalkurvan ej kan befinna sig i jämna Q -rutor.
- (ii) Låt unionen av alla udda Q -rutor och nodalkurvorna till $w_\ell z_\ell$ betecknas N . N är bägvis sammanhängande endast vid hörnen till Q -rutorna. Lämna en nodalkurva till $h^{\mu, \ell}$ unionen N så befinner den sig i en jämn Q -ruta vilket den inte kan enligt (i).

Slutligen visar vi att nodalkurvor för $h^{\mu, \ell}$ endast kan korsa nodalkurvor för $w_\ell z_\ell$ i hörnen till Q -rutor med motsägelser i två fall. Antag först att en nodalkurva γ till $h^{\mu, \ell}$ vidrör en punkt $E(\theta_{i,\ell}, \phi)$ på nodalkurvan för z_ℓ där $\phi \notin j\frac{\pi}{\ell}$ för något $j \in \mathbb{N}$. Då får vi att

$$h^{\mu, \ell}(\theta_{i,\ell}, \phi) = \sin^\ell(\theta_{i,\ell}) \sin(\ell\phi) + \mu P_\ell(\cos(\theta_{i,\ell})) = \sin^\ell(\theta_{i,\ell}) \sin(\ell\phi) = 0.$$

Eftersom $\theta_{i,\ell} \in (0, \pi)$ och $\phi \neq j\frac{\pi}{\ell}$ är både $\sin^\ell(\theta_{i,\ell})$ och $\sin(\ell\phi)$ nollskilda, vilket är en motsägelse.

Antag istället att en nodalkurva till $h^{\mu, \ell}$ vidrör en punkt $E(\theta, j\frac{\pi}{\ell})$ på nodalkurvan för sektorialpolynomet w_ℓ där $\theta_{i,\ell} < \theta < \theta_{i+1,\ell}$, för något $i \in \mathbb{N}$. Vi får att

$$h^{\mu, \ell}(\theta, j\frac{\pi}{\ell}) = \sin^\ell(\theta) \sin(j\pi) + \mu P_\ell(\cos(\theta)) = \mu P_\ell(\cos(\theta)) = 0.$$

Men om $\theta_{i,\ell} < \theta < \theta_{i+1,\ell}$ är $P_\ell(\cos(\theta))$ nollskild, vilket är en motsägelse.

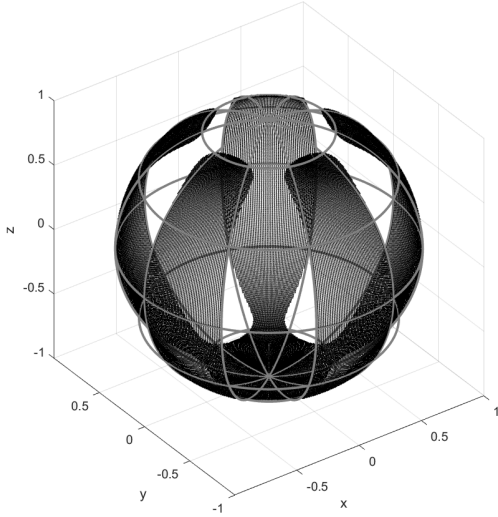
□

Lemma 22. Det finns ingen enkelt sammanhängande delkurva av nodalkurvorna till $h^{\mu,\ell}$ som ligger helt inkaplad i någon ruta $Q_{i,j}$.

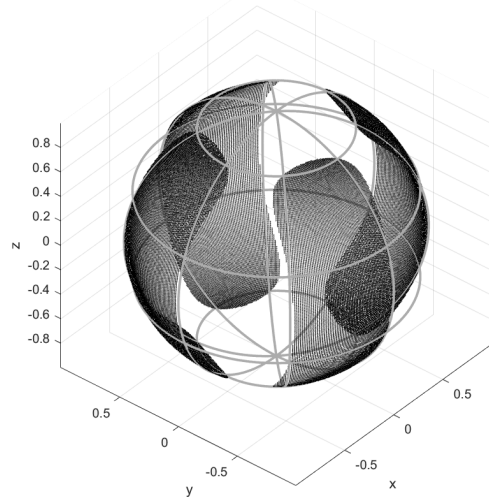
Bevis. Fixera en punkt längs en meridian B_j i en godtycklig Q_{ij} och benäm θ -koordinaten som θ_0 . Låt ϕ variera från $j(\frac{\pi}{\ell})$ till $(j + \frac{1}{2})(\frac{\pi}{\ell})$. Eftersom $\sin(\ell\phi)$ är monotont växande eller monotont avtagande på intervallet är $h^{\mu,\ell}(\theta_0, \phi) = \sin^\ell(\theta_0) \sin(\ell\phi) + \mu P_\ell(\cos(\theta_0))$ antingen monotont växande eller monotont avtagande på intervallet. Alltså kan $h^{\mu,\ell}(\theta_0, \phi)$ maximalt anta ett nollställe på intervallet.

Samma resultat erhålls för intervallet mellan $(j - \frac{1}{2})(\frac{\pi}{\ell})$ och $j(\frac{\pi}{\ell})$. För fix θ_0 inom en Q_{ij} -ruta finns alltså maximalt två nollpunkter fördelat på var sin sida av B_j . För att sluta en enkelt sammanhängande delkurva inom Q_{ij} -rutan behöver nollpunkterna vara på samma kurva som korsar B_j minst två gånger. Men med Lemma 20 har vi att B_j har maximalt ett nollställe i en enskild Q_{ij} -ruta, en motsägelse. □

Exempel 25. Betrakta Figur 6 och Figur 7 nedan. Vi ser att för $\ell = 5$ så är $h^{\mu,\ell}$ positiv i nordpolen och negativ i sydpolen. När istället $\ell = 4$ så är $h^{\mu,\ell}$ positiv i båda polerna. Notera också hur nodalkurvorna beter sig enligt de hittills formulerade resultaten.



Figur 6: Negativa nodaldomänerna för $\mu = \frac{\mu_c}{2}$ och $\ell = 5$ med dess Q_{ij} -rutor.



Figur 7: Negativa nodaldomänerna för $\mu = \frac{\mu_c}{2}$ och $\ell = 4$ med dess Q_{ij} -rutor.

4.4 Huvudsatsen

Definition 30. Givet en grad ℓ , låt en *klyfta* av \mathbb{S}^2 vara definierad av området

$$\{E(\theta, \phi) : 0 \leq \theta \leq \pi, (2k + 1/2)\pi \leq \phi \leq (2k + 5/2)\pi\}, \text{ för något heltal } k.$$

I varje klyfta kommer det att finnas 3 stycken meridianer på formen från definition 28, nämligen $B_{2k}, B_{2k+1}, B_{2k+2}$.

Som med sektorerna i exempel 20 kan en partition av \mathbb{S}^2 bildas av klyftor. Varje rad av Q -rutor i klyftan kommer att bestå av en hel och två halva rutor.

Nedan följer en bearbetad version av satsen och beviset från [BH, s.13] som i detalj beskriver nodalkurvor och nodaldomäner för $h^{\mu,\ell}$.

Sats 5. För $h^{\mu,\ell}$ gäller att

- (i) Om ℓ är udda bildar mängden av nodalkurvor på sfären en sammanhängande sluten enkel kurva och $h^{\mu,\ell}$ har exakt två nodaldomäner på sfären.
- (ii) Om ℓ är jämn formar mängden av nodalkurvor på sfären en union av ℓ enkla sammanhängande separerade slutna kurvor och $h^{\mu,\ell}$ har exakt $(\ell + 1)$ nodaldomäner på sfären.

Bevis. För detta bevis kallar vi riktningen där ϕ ökar längst \mathbb{S}^2 för höger och motsatt riktning för vänster. Vi kallar riktningen där θ minskar för uppåt och motsatt för nedåt. Till båda bevisen finns tillhörande figurer, figur 8 för (i) och figur 9 för (ii). Enligt Lemma 22 så kan ingen nodalkurva γ vara helt inkapslad i någon Q -ruta.

- (i) ℓ udda. Enligt Lemma 20 korsas varje meridian B_k exakt en gång av någon nodalkurva, i den översta $Q_{i,j}$ rutan som skärs av B_{2k} och B_{2k+2} , i den understa för B_{2k+1} .

I en klyfta, längst B_{2k} finns någon nodalkurva γ som korsar meridianen i den översta Q -rutan vid en punkt som vi kallar x_1 . Från x_1 följer vi γ åt höger och noterar att γ måste röra sig ut ur rutan nedåt till rutans högra nedre hörn eftersom nordpolen är nollskild enligt Lemma 17. Då hamnar γ i en ruta som delas på mitten av B_{2k+1} som saknar nollställen i denna Q -ruta enligt Lemma 20. Alltså lämnar γ rutan nere åt vänster.

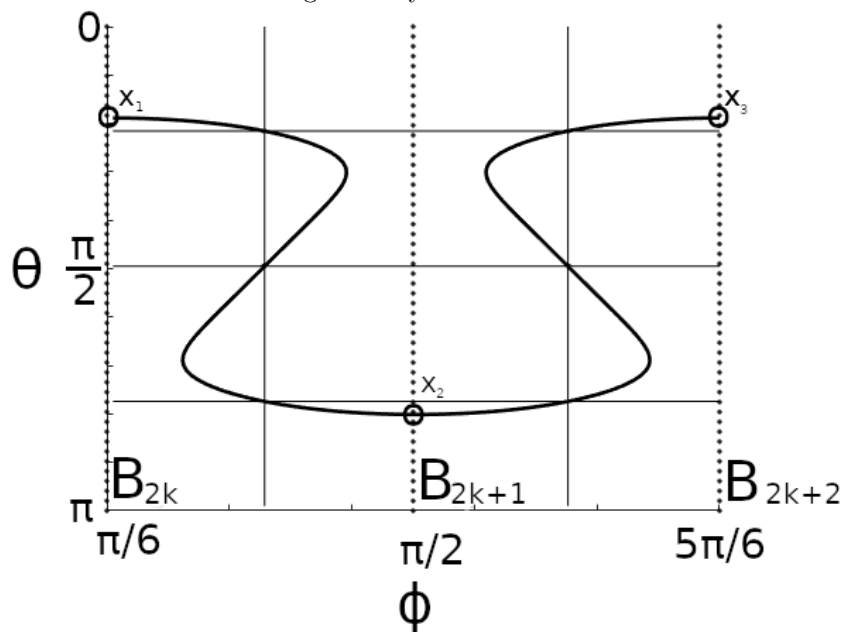
Nodalkurvan γ hamnar i en ruta som skärs av B_{2k} som γ inte kan korsa, enligt Lemma 20 som innan. Här måste γ lämna rutan nere åt höger och processen repeteras tills γ når den understa raden av Q -rutor.

I den understa raden måste γ korsa B_{2k+1} i någon punkt x_2 , eftersom den har en nollpunkt i detta område enligt Lemma 20, och ingen mer kurva kan komma in i rutan på vänstersidan av B_{2k+1} eftersom sydpolen som nordpolen är nollskild.

Nodalkurvan blir speglad över B_{2k+1} med identiska argument tills den når den översta raden där den lämnar klyftan genom skärningspunkten x_3 i B_{2k+2} . Eftersom γ korsat alla hörn till $Q_{i,j}$ rutor i klyftan och inga nodalkurvor kan korsa varandra finns inga fler nodalkurvor i klyftan.

Eftersom γ börjar och slutar på motsvarande höjd i klyftan finns bara en enda nodalkurva på hela \mathbb{S}^2 . Alltså finns det endast två nodaldomäner.

Figur 8: Klyfta från $\ell = 3$



(ii) ℓ jämn. Enligt Lemma 20 korsar ingen nodalkurva jämna meridianer B_{2k} , $k \in \mathbb{N}$. Då kommer varje nodalkurva att vara helt innesluten i en klyfta.

I mitten av klyftan finns en udda meridian B_{2k+1} , enligt Lemma 20 finns det exakt två stycken nollpunkter på denna, kalla dessa x_1 , x_2 . Vidare enligt samma Lemma kommer en av dessa, x_1 att hamna i den översta raden av rutor och x_2 i den understa raden av rutor.

Låt γ vara en nodalkurva i klyftan som korsar punkten x_1 , vi följer sedan γ åt höger från x_1 . Först måste γ röra sig nedåt i halvrutan till höger om B_{2k+1} . Annars hade γ hamnat i nordpolen som är nollskild enligt Lemma 20. Sedan hamnar γ repeterat i rutor där den inte kan korsa mitten då rutorna skärs av B_{2k+1} eller B_{2k+2} . Efter ett antal repetitioner når γ den sista raden av rutor där den korsar över till andra sidan av B_{2k+1} genom punkten x_2 .

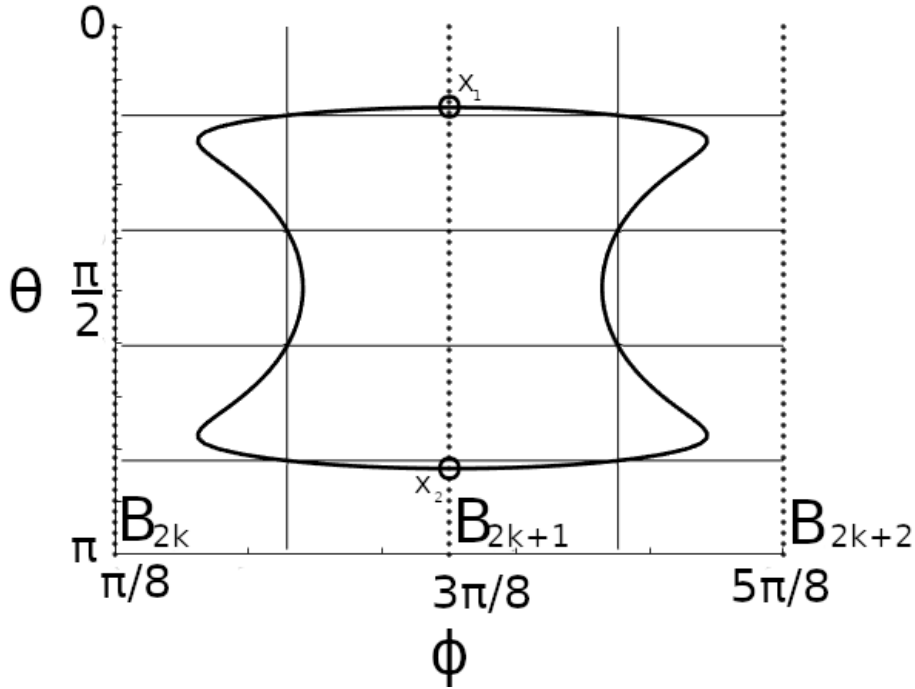
På samma sätt kommer γ att färdas upp för klyftan tills den blir sluten vid x_1 .

Efter att γ ritats ut är alla hörn till alla rutor i klyftan täckta av en nodalkurva. Alltså finns det exakt en nodalkurva i klyftan som formar exakt ett sammanhängande område.

Alltså finns det exakt ℓ små nodaldomäner, en för varje klyfta, samt en yttre nodaldomän vilket ger $\ell + 1$ nodaldomäner.

□

Figur 9: klyfta från $\ell = 4$



5 Diskussion

5.1 Insikter

Av alla steg i arbetet visade sig det sista vara det enklaste att förstå. Det tydligt visuella resonemanget var enkelt. Om ett liknande bevis skulle konstrueras från grunden skulle det förmodligen vara enklast att *gissa* sig till slutmålet, det vill säga att göra en ansats, och från ansatsen leta fram bevis för de olika stegen som finns.

5.2 Förslag till framtida arbete

Arbetet fungerar som ett tydligt avstamp för andra potentiella arbeten. En av de mest självklara för någon annan på kandidatnivå är kanske att fortsätta förklara resultat från [BH], till exempel deras sats på sidan 20 där de använder ett annat sfäriskt polynom med exakt tre nodaldomäner för jämna gradtal. Det finns också mer detaljer att dyka ned i kring de satser som ingått i detta arbete.

Ett fortsatt arbete skulle kunna studera statistiska egenskaper av antalet nodaldomäner för ett slumpmässigt polynom. I en artikel av F. Nazarov och M. Sodin [NS] visar de att för slumpmässiga sfäriska polynom gäller att antalet nodaldomäner oftast är $a\ell^2$, där a är medianvärdet av antalet nodaldomäner delat på gradtalet ℓ , hos en större samling sfäriska polynom. Detta resultat kanske går att förfina genom att studera en specifik mängd sfäriska polynom, så som i det här arbetet och att undersöka deras nodaldomäner för att sedan jämföra med dess koefficienter a .

En tredje fortsättning är att hitta exakta mängden av nodaldomäner hos andra familjer av sfäriska polynom. Det skulle i bästa fall visa sig på sikt att det går att bygga en bas till hela \mathcal{H}^ℓ rummen av polynom med kända nodaldomäner och i förlängningen kanske beskriva nollställen hos godtyckliga sfäriska polynom genom att då bryta ned dem till denna bas.

Slutligen skulle det vara möjligt att undersöka hur upptäckter om nollställen till sfäriska polynom kan användas inom fysik.

Referenser

- [A] Axler S. Linear Algebra Done Right. 3 ed. London, New York: Springer; 2015
- [B] Bérard P. Inégalités isopérimétriques et applications. Domaines nodaux des fonctions propres. Palaiseau: Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) dit aussi "Séminaire Goulaouic-Schwartz" (1981-1982). Presentation nr. 11, 9 s. s.2. Hämtad från: http://www.numdam.org/item/SEDP_1981-1982_____A10_0/
- [BH] Bérard P. Helffer B. A. Stern's analysis of the nodal sets of some families of spherical harmonics revisited. Wien: Monatshefte für Mathematik; 2016;180(3):s435-468
- [C] do Carmo M. P. Differential geometry of curves & Surfaces: Revised & Updated Second Edition. New York: Dover; 2016.
- [CH] Courant R. Hilbert D. Methods of Mathematical Physics, Vol 1. New York City, New York: Interscience; 1953.
- [GG] Gorbachuk V. Gorbachuck M. Boundary Value Problems for Operator Differential Equations (Mathematics and its Applications, 48). New York: Springer; 2010.
- [M] MacRobert T. An elementary treatise on harmonic functions with applications. 2 ed. London: Methuen & Co. LTD; 1947.
- [NS] Nazarov F. och Sodin M. On the number of nodal domains of random spherical harmonics. Baltimore, Maryland: John Hopkins University Press; 2007
- [RWW] Råde L. Westergren B. Wikström F. Mathematics Handbook For Science and Engineering 6 ed. Lund: Studentlitteratur AB; 2019.
- [S] Strauss W. Partial Differential Equations An Introduction 2 ed. Wiley; 2007.
- [SS] Stein E. Shakarchi R. Fourier Analysis An Introduction. Princeton: Princeton Uni. Press; 2003.
- [SW] Stein E. Weiss G. Introcuton to Fourier Analysis on Eucledian spaces. Princeton, New Jersey: Princeton University Press; 1971
- [T] Taylor M. Partial Differential Equations I: Basic Theory (Applied Mathematical Sciences (115)). New York: Springer; 2010.

6 Appendix 1 – teori

6.1 Delar av beviset för Lemma 20

Inför detta bevis återger vi följande definition:

$$h^{\mu,\ell}(\theta_{i,\ell}, \phi) = (-1)^j \sin^\ell(\theta_{i,\ell}) + \mu P_\ell(\cos(\theta_{i,\ell})),$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} h^{\mu,\ell}(\theta_{i,\ell}, \phi) = (-1)^j \ell \sin^{\ell-1}(\theta_{i,\ell}) \cos(\theta_{i,\ell}) + \mu P'_\ell(\cos(\theta_{i,\ell})) \sin(\theta_{i,\ell})$$

för $(\theta_i, \phi) \in B_j$ i någon meridian B_j . Utifrån detta har vi följande egenskaper:

$$\begin{cases} \sin^\ell(\theta) > 0 \text{ för } \theta \in [0, \pi] \\ P_\ell(\cos(\theta)) > 0 \text{ för } \theta \in [0, \theta_{1,\ell}] \\ P_\ell(\cos(\theta)) > 0 \text{ för } \theta \in (\pi - \theta_{1,\ell}, \pi] \text{ när } j \text{ är jämnt} \\ P_\ell(\cos(\theta)) < 0 \text{ för } \theta \in (\pi - \theta_{1,\ell}, \pi] \text{ när } j \text{ är udda} \end{cases}$$

Det som återstår att visas från Lemma 20 är följande:

- (i) Om både ℓ och j är jämna så är $h^{\mu,\ell}(\theta, \phi) > 0$ för $\theta \in [0, \theta_{1,\ell}] \cup [\pi - \theta_{1,\ell}, \pi]$.
- (ii) När ℓ är jämn men j är udda så är $h^{\mu,\ell}(\theta, \phi) = 0$ på exakt två ställen, för exakt ett θ i intervallet $(0, \theta_{1,\ell})$ och exakt ett i intervallet $(\pi - \theta_{1,\ell}, \pi)$.
- (iii) Om ℓ är udda och j är jämn så är $h^{\mu,\ell}(\theta, \phi) > 0$ för $\theta \in [0, \theta_{1,\ell}]$ och $h^{\mu,\ell}(\theta, \phi) = 0$ för exakt ett $\theta \in (\pi - \theta_{1,\ell}, \pi)$.
- (iv) Om både ℓ och j är udda $h^{\mu,\ell}(\theta, \phi) < 0$ för $\theta \in [\pi - \theta_{1,\ell}, \pi]$ och $h^{\mu,\ell}(\theta, \phi) = 0$ för exakt ett $\theta \in (0, \theta_{1,\ell})$.

Fall (i): ℓ är jämn, j är jämn:

Då både ℓ samt j är jämna är varje term i $h^{\mu,\ell}(\theta_{i,\ell}, \phi)$ positiv i intervallet $[0, \pi]$. Vidare är $h^{\mu,\ell}(\theta_{i,\ell}, \phi) \neq 0$ i hela intervallet $[0, \pi]$, detta följer ifrån $\sin^\ell(\theta) = 0 \Rightarrow \theta \in \{0, \pi\}$ och $P_\ell(\cos(\theta)) = 1$ för $\theta \in \{0, \pi\}$.

Fall (ii): ℓ är jämn, j är udda:

För j udda, så ges $(-1)^j \sin^\ell(\theta) < 0$ för $\theta \in (0, \pi)$. Med detta har vi följande:

$$\begin{cases} h^{\mu,\ell}(\theta_{i,\ell}, \phi) < 0 \text{ för } \theta \in \{\theta_{1,\ell}, \pi - \theta_{1,\ell}\} \\ h^{\mu,\ell}(\theta_{i,\ell}, \phi) > 0 \text{ för } \theta \in \{0, \pi\} \end{cases}$$

Detta anger att det finns minst en punkt inom $(0, \theta_{1,\ell})$ och $(\pi - \theta_{1,\ell}, \pi)$ där $h^{\mu,\ell}(\theta_{i,\ell}, \phi) = 0$. För att visa att $h^{\mu,\ell}(\theta_{i,\ell}, \phi) = 0$ i exakt en punkt inom $(0, \theta_{1,\ell})$ respektive $(\pi - \theta_{1,\ell}, \pi)$ räcker det att visa att $\frac{\partial}{\partial \theta} h^{\mu,\ell}(\theta_{i,\ell}, \phi) \neq 0$ inom respektive intervall, då flera nollställen för $h^{\mu,\ell}(\theta_{i,\ell}, \phi)$ medför ett lokalt extremvärde.

I detta mån delar vi upp detta för två fall:

Inom intervallet $(0, \theta_{1,\ell})$ har vi $(-1)^j \ell \sin^{\ell-1}(\theta_{i,\ell}) \cos(\theta_{i,\ell}) < 0$ då $\theta_{1,\ell} < \frac{\pi}{2}$, samt $P'_j(\cos(\theta_{i,\ell})) < 0$, då $P_j(\cos(\theta_{i,\ell}))$ är en strikt avtagande funktion inom detta intervall för alla ℓ . Med detta får vi $\frac{\partial}{\partial \theta} h^{\mu,\ell}(\theta_{i,\ell}, \phi) < 0$ inom hela intervallet, som medför endast ett nollställe.

Inom intervallet $(\pi - \theta_{1,\ell}, \pi)$ har vi $(-1)^j \ell \sin^{\ell-1}(\theta_{i,\ell}) \cos(\theta_{i,\ell}) > 0$ då $\cos(\theta_{i,\ell}) < 0$ inom detta intervall, vidare har vi att $P_\ell(\cos(\theta_{i,\ell}))$ är en strikt växande funktion i detta intervall för alla jämna ℓ som medför $P'_j(\cos(\theta_{i,\ell})) > 0$. Samma resonemang som ovan ger att $h^{\mu,\ell}(\theta_{i,\ell}, \phi) = 0$ vid endast en punkt.

Fall (iii): ℓ är udda, j är jämn:

Inom intervallet $[0, \theta_{1,\ell}]$ gäller samma argument som för ℓ jämn och j jämn, dvs att varje term är positiv. I intervallet $(\pi - \theta_{1,\ell}, \pi)$ har vi minst en nollpunkt, då $h^{\mu,\ell}(\pi - \theta_{1,\ell}, \phi) > 0$ samt $h^{\mu,\ell}(\pi, \phi) < 0$. För att visa entydighet för $h^{\mu,\ell}(\theta_{i,\ell}, \phi) = 0$ inom $(\pi - \theta_{1,\ell}, \pi)$ räcker det att visa att $\frac{\partial}{\partial \theta} h^{\mu,\ell}(\theta_{i,\ell}, \phi) < 0$ i hela intervallet. Detta får vi från:

$$\theta_{1,\ell} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \pi > \pi - \theta_{1,\ell} > \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos(\theta_i) < 0, \theta_i \in (\pi - \theta_{1,\ell}, \pi)$$

samt att $P_\ell(\cos(\theta))$ är strikt avtagande för udda ℓ inom $[\pi - \theta_{1,\ell}, \pi]$, vilket ger $P'_\ell(\cos(\theta_{i,\ell})) < 0$.

Fall (iv): ℓ är udda, j är udda:

Eftersom udda och jämna ℓ beter sig likadant inom $[0, \theta_{1,\ell}]$ används samma argument som Fall (ii) för att hitta ett entydigt nollställe inom det intervallet. I intervallet $(\pi - \theta_{1,\ell}, \pi)$ är varje term negativ, med $(-1)^j \sin^\ell(\pi - \theta_{1,\ell}) < 0$ och $P_\ell(\cos(\pi)) = -1$.

7 Appendix 2 – källkod

7.1 Matlabkod till tvådimensionella illustrationer

```
1 %Author Levi Sundkvist
2 %returns a noncritical mu
3 function mu =mufinder(l,q)
4 syms z;
5 %find zeroes od the l-1 degree legendre polynomial and thier angle
6 %representation
7 p=sym2poly(legendreP(l-1,z));
8 tj=roots(p);
9 thetaj=acos(tj);
10 %finding critical zeros
11 legendreP(l,cos(thetaj));
12 sin(thetaj);
13 mui=((sin(thetaj)).^l)/(abs(legendreP(l,cos(thetaj))));
14 %multipling the smallest critical zero by q
15 mu=min(mui)*q;
```

```
1 %Author Levi Sundkvist
2 %draws one period of the polynomial
3 %l is the degree of the polynomial
4 %mu should be a number in [0,1) where 1 is the first critical 0
5 function polynomialpicture(l,mu)
6 %defines appropriate interval of phi and theta
7 [phi,theta]=meshgrid(linspace(pi/(2*1),5*pi/(2*1)),linspace(0,pi));
8 %finds the values of the 3 relevant functions
9 Wl=((sin(theta)).^l).*sin(l*phi);
10 Zl=legendreP(l,cos(theta));
11 Hl=Wl+mufinder(l,mu)*Zl;
12 hold on;
13 %plot the square grid
14 contour(Zl*Wl,[0,0],'k',LineWidth=0.5);
15 %plot the nullline
16 contour(Hl,[0,0],'k',LineWidth=2);
17 plot(ones(50)*50,linspace(0,100,50),'.','MarkerEdgeColor','k');
18 plot(ones(50)*0,linspace(0,100,50),'.','MarkerEdgeColor','k');
19 plot(ones(50)*100,linspace(0,100,50),'.','MarkerEdgeColor','k');
```

```
1 %Author Levi Sundkvist
2 %draws one period of the squarepattern
3 %mu should be a number in [0,1) where 1 is the first critical 0
4 function squareplotter(l)
5 %defines appropriate interval of phi and theta
6 [phi,theta]=meshgrid(linspace(0,2*pi),linspace(0.01,0.99*pi));
7 %finds the values of the 3 relevant functions
8 Wl=((sin(theta)).^l).*sin(l*phi);
9 Zl=legendreP(l,cos(theta));
10 Bl=cos(phi*l)
11 hold on;
12 %plot the square grid
13 contour(Zl,[0,0],'k',LineWidth=0.5);
14 contour(Wl,[0,0],'k',LineWidth=0.5);
15 contour(Bl,[0,0],':k',LineWidth=2);
```

```
16 set(gca, 'XTick', [], 'YTick', [])
```

7.2 Matlabkod till tredimensionella illustrationer

```
1 %%Författare: August Hjelstrom
2 %%
3 clc, clf, clear
4 tic %tidtagarstart
5 n = 200; %välj antal punkter, men inte mer än 100
6 tol = 1e-100; %feltolerans från 0 i x-led
7
8 L=5; %Gradtal på polynomet
9 mu=mu_c_func(L)*0.5 %hittas av funktion
10
11
12
13
14 [X,Y,Z]=sphere(n); %skapar punkter som ligger på sfären
15 X(X==0)=tol; % om x vore 0 blir det division med noll
16 % nedan
17 x=X(:); % gör om x-matris till kolumner
18 y=Y(:); % gör om y-matris till kolumner
19 z=Z(:); % gör om z-matris till kolumner
20
21 r = (x.^2+y.^2+z.^2).^0.5; %nya koordinater
22 phi = atan(y./x); %nya koordinater
23 theta = acos(z./(r)); %nya koordinater
24
25 W_l=sin(theta).^L.*sin(L*phi);
26
27 syms t; %derivering
28 f_t=(t^2-1).^L; %derivering
29 ddt(t)=diff(f_t,L); %derivering
30 Z_l=double(1/(2^L*factorial(L)) .* ddt(cos(theta)));
31
32 H_l=W_l+mu*Z_l;
33
34
35 if mod(L, 2)==1 %L udda eller jämn
36 for ii=1:length(x) %denna chunk är för att motverka
37 nat
38 if x(ii)<0 %konstigt i matlab som flippar
39 grafen
40 y(ii)=-y(ii); %i y-led
41 end
42 end
43
44
45 toc %tidtagarstopp
46
47 %%
48 figure %0modifierad plot på
```



```

49 scatter3(x,y,z,10,H_1, 'filled')
50 colormap(gray)
51 colorbar
52 xlabel('x')
53 ylabel('y')
54 zlabel('z')
55
56 hold on
57
58
59
60 axis equal
61 %%
62 figure          %plotten for sfarsikt polyno och nagra utvalda
    linjer
63 scatter3(x,y,z,10,H_1, 'filled')
64 colormap(gray)
65 colorbar
66 xlabel('x')
67 ylabel('y')
68 zlabel('z')
69 theta_circ = linspace(0, 2*pi, 10000);
70 x_circ = cos(theta_circ);
71 y_circ = sin(theta_circ);
72 z_circ=y_circ*0;
73 ekvator=z_circ;
74 x_circ2 = 0.867*cos(theta_circ);
75 y_circ2 = 0.867*sin(theta_circ);
76 z_circ2=y_circ2*0+.5;
77 ekvator=z_circ;
78
79 z_circ3 = cos(theta_circ);
80 y_circ3 = sin(theta_circ);
81 x_circ3=y_circ3*0;
82 ekvator=z_circ;
83 z_circ4 = 0.867*cos(theta_circ);
84 y_circ4 = 0.867*sin(theta_circ);
85 x_circ4=y_circ2*0+.5;
86
87 z_circ5 = cos(theta_circ);
88 x_circ5 = sin(theta_circ);
89 y_circ5=y_circ*0;
90 ekvator=z_circ;
91 z_circ6 = 0.867*cos(theta_circ);
92 x_circ6 = 0.867*sin(theta_circ);
93 y_circ6=y_circ2*0+.5;
94
95 z_circ7 = cos(theta_circ);
96 x_circ7 = 1/sqrt(2)*sin(theta_circ);
97 y_circ7=1/sqrt(2)*sin(theta_circ);
98
99 z_circ8 = cos(theta_circ);
100 x_circ8 = 1/sqrt(2)*sin(theta_circ);
101 y_circ8=1/sqrt(2)*sin(theta_circ);
102
103 hold on

```

```

104 scatter3(x_circ,y_circ,z_circ,10,ekvator-1,'filled')
105 scatter3(x_circ2,y_circ2,z_circ2,10,ekvator-1,'filled')
106 scatter3(x_circ2,y_circ2,-z_circ2,10,ekvator-1,'filled')
107
108 scatter3(x_circ3,y_circ3,z_circ3,10,ekvator-1,'filled')
109 %scatter3(x_circ4,y_circ4,z_circ4,10,ekvator-1,'filled')
110 %scatter3(-x_circ4,y_circ4,z_circ4,10,ekvator-1,'filled')
111
112 scatter3(x_circ5,y_circ5,z_circ5,10,ekvator-1,'filled')
113 %scatter3(x_circ6,y_circ6,z_circ6,10,ekvator-1,'filled')
114 %scatter3(x_circ6,-y_circ6,z_circ6,10,ekvator-1,'filled')
115
116 scatter3(x_circ7,-y_circ7,z_circ7,10,ekvator-1,'filled')
117 scatter3(x_circ8,y_circ8,z_circ8,10,ekvator-1,'filled')
118 axis equal
119 %%
120 clf
121 figure %plotten for sfarsikt ploynom med nodallinjer
122 scatter3(x,y,z,10,H_1,'filled')
123 colormap(gray)
124 colorbar
125 xlabel('x')
126 ylabel('y')
127 zlabel('z')
128 theta_circ = linspace(0, 2*pi, 10000);
129
130 x_circ = cos(theta_circ);
131 y_circ = sin(theta_circ);
132 z_circ=y_circ*0;
133 ekvator=z_circ;
134 x_circ2 = 0.845*cos(theta_circ);
135 y_circ2 = 0.845*sin(theta_circ);
136 z_circ2=y_circ2*0+.54;
137 x_circ22 = 0.435*cos(theta_circ);
138 y_circ22 = 0.435*sin(theta_circ);
139 z_circ22=y_circ2*0+.9048;
140 ekvator=z_circ;
141
142 z_circ3 = cos(theta_circ);
143 y_circ3 = -.951*sin(theta_circ);
144 x_circ3=-0.309*sin(theta_circ);
145
146 z_circ9 = cos(theta_circ);
147 y_circ9 = -.5878*sin(theta_circ);
148 x_circ9=0.809*sin(theta_circ);
149
150
151 z_circ5 = cos(theta_circ);
152 x_circ5 = sin(theta_circ);
153 y_circ5=y_circ*0;
154
155
156 z_circ7 = cos(theta_circ);
157 x_circ7 = .309*sin(theta_circ);
158 y_circ7=.951*sin(theta_circ);
159

```

```

160 z_circ8 = cos(theta_circ);
161 x_circ8 = .809*sin(theta_circ);
162 y_circ8=.5878*sin(theta_circ);
163
164 hold on
165 scatter3(x_circ,y_circ,z_circ,10,ekvator-1,'filled')
166 scatter3(x_circ2,y_circ2,z_circ2,10,ekvator-1,'filled')
167 scatter3(x_circ2,y_circ2,-z_circ2,10,ekvator-1,'filled')
168 scatter3(x_circ22,y_circ22,z_circ22,10,ekvator-1,'filled')
169 scatter3(x_circ22,y_circ22,-z_circ22,10,ekvator-1,'filled')
170
171 scatter3(x_circ3,y_circ3,z_circ3,10,ekvator-1,'filled')
172
173
174 scatter3(x_circ5,y_circ5,z_circ5,10,ekvator-1,'filled')
175 scatter3(x_circ9,y_circ9,z_circ9,10,ekvator-1,'filled')
176
177 scatter3(x_circ7,-y_circ7,z_circ7,10,ekvator-1,'filled')
178 scatter3(x_circ8,y_circ8,z_circ8,10,ekvator-1,'filled')
179 axis equal
180 %%
181 tic
182 nod_tol=1e-12; %bredd pa nodallinjen
183
184
185 new_H_1 = zeros(size(H_1)); %plottar badboll pattern med
    nodallinje
186
187 new_H_1(H_1 > nod_tol) = .8;
188 new_H_1(H_1 < -nod_tol) = -1;
189 new_H_1(1,:)=1;
190
191 figure %plotten for badboll
192 scatter3(x,y,z,3,new_H_1,'filled')
193 colormap(gray)
194 colorbar
195 xlabel('x')
196 ylabel('y')
197 zlabel('z')
198 axis equal
199 hold on
200 theta_circ = linspace(0, 2*pi, 10000); %nedan beraknas nodallinjer
    manuellt
201
202 x_circ = cos(theta_circ);
203 y_circ = sin(theta_circ);
204 z_circ=y_circ*0;
205 ekvator=z_circ;
206 x_circ2 = 0.845*cos(theta_circ);
207 y_circ2 = 0.845*sin(theta_circ);
208 z_circ2=y_circ2*0+.54;
209 x_circ22 = 0.435*cos(theta_circ);
210 y_circ22 = 0.435*sin(theta_circ);
211 z_circ22=y_circ2*0+.9048;
212 ekvator=z_circ;
213

```

```

214 z_circ3 = cos(theta_circ);
215 y_circ3 = -.951*sin(theta_circ);
216 x_circ3=-0.309*sin(theta_circ);
217
218 z_circ9 = cos(theta_circ);
219 y_circ9 = -.5878*sin(theta_circ);
220 x_circ9=0.809*sin(theta_circ);
221
222
223 z_circ5 = cos(theta_circ);
224 x_circ5 = sin(theta_circ);
225 y_circ5=y_circ*0;
226
227
228 z_circ7 = cos(theta_circ);
229 x_circ7 = .309*sin(theta_circ);
230 y_circ7=.951*sin(theta_circ);
231
232 z_circ8 = cos(theta_circ);
233 x_circ8 = .809*sin(theta_circ);
234 y_circ8=.5878*sin(theta_circ);
235
236 hold on
237 scatter3(x_circ,y_circ,z_circ,4,ekvator,'filled')
238 scatter3(x_circ2,y_circ2,z_circ2,4,ekvator,'filled')
239 scatter3(x_circ2,y_circ2,-z_circ2,4,ekvator,'filled')
240 scatter3(x_circ22,y_circ22,z_circ22,4,ekvator,'filled')
241 scatter3(x_circ22,y_circ22,-z_circ22,4,ekvator,'filled')
242
243 scatter3(x_circ3,y_circ3,z_circ3,4,ekvator,'filled')
244
245
246 scatter3(x_circ5,y_circ5,z_circ5,4,ekvator,'filled')
247 scatter3(x_circ9,y_circ9,z_circ9,4,ekvator,'filled')
248
249 scatter3(x_circ7,-y_circ7,z_circ7,4,ekvator,'filled')
250 scatter3(x_circ8,y_circ8,z_circ8,4,ekvator,'filled')
251 axis equal
252 toc
253 %%
254 %%
255                                     %transparent plot
256 clf
257 tic
258 nod_tol=1e-12;                                     %bredd pa nodallinjen
259
260
261 new_H_1 = zeros(size(H_1));                                     %plottar genomskinlig badboll-
    monster
262
263 new_H_1(H_1 > nod_tol) = .8;
264 new_H_1(H_1 < -nod_tol) = -1;
265 new_H_1(1,:)=1;
266
267 k=0;
268 for i=1:length(new_H_1)

```

```

269     if new_H_1(i)>0
270         k=k+1;
271         HL(k)=new_H_1(i);
272         x_new(k)=x(i);
273         y_new(k)=y(i);
274         z_new(k)=z(i);
275     end
276 end
277 HL(1)=-1;
278
279 figure %plotten
280 scatter3(x_new,y_new,z_new,.7,-HL,'filled')
281 colormap(gray)
282 colorbar
283 xlabel('x')
284 ylabel('y')
285 zlabel('z')
286 axis equal
287 hold on
288 theta_circ = linspace(0, 2*pi, 10000);
289 %%
290                                     %beraknar nodallinjer
291                                     %manuellt da
292                                     %det kan va svart att hitta
293                                     %ratt
294                                     %tolerans for att fa en
295                                     %kontinuerlig
296                                     %nodallinje
297                                     %Maste anpassas efter givet L
298                                     ,mu
299
300 theta_circ = linspace(0, 2*pi, 10000);
301 x_circ = 1*cos(theta_circ);
302 y_circ = 1*sin(theta_circ);
303 z_circ=y_circ*0+.3505;
304 ekvator=z_circ;
305 x_circ2 = 0.94*cos(theta_circ);
306 y_circ2 = 0.94*sin(theta_circ);
307 z_circ2=y_circ2*0-.3505;
308 x_circ22 = 0.52*cos(theta_circ);
309 y_circ22 = 0.52*sin(theta_circ);
310 z_circ22=y_circ2*0+.86;
311 ekvator=z_circ;
312
313 z_circ3 = cos(theta_circ);
314 y_circ3 = 1*sin(theta_circ);
315 x_circ3=-0*sin(theta_circ);
316
317 z_circ9 = cos(theta_circ);
318 y_circ9 = 1/sqrt(2)*sin(theta_circ);
319 x_circ9=1/sqrt(2)*sin(theta_circ);
320
321
322 z_circ5 = cos(theta_circ);
323 x_circ5 = sin(theta_circ);
324 y_circ5=y_circ*0;

```

```

321
322 z_circ7 = cos(theta_circ);
323 x_circ7 = 1/sqrt(2)*sin(theta_circ);
324 y_circ7=1/sqrt(2)*sin(theta_circ);
325
326 z_circ8 = cos(theta_circ);
327 x_circ8 = .809*sin(theta_circ);
328 y_circ8=.5878*sin(theta_circ);
329
330 hold on
331 %scatter3(x_circ,y_circ,z_circ,4,ekvator,'filled')
332 scatter3(x_circ2,y_circ2,z_circ2,4,ekvator,'filled')
333 scatter3(x_circ2,y_circ2,-z_circ2,4,ekvator,'filled')
334 scatter3(x_circ22,y_circ22,z_circ22,4,ekvator,'filled')
335 scatter3(x_circ22,y_circ22,-z_circ22,4,ekvator,'filled')
336
337 scatter3(x_circ3,y_circ3,z_circ3,4,ekvator,'filled')
338
339
340 scatter3(x_circ5,y_circ5,z_circ5,4,ekvator,'filled')
341 scatter3(x_circ9,y_circ9,z_circ9,4,ekvator,'filled')
342
343 scatter3(x_circ7,-y_circ7,z_circ7,4,ekvator,'filled')
344 %scatter3(x_circ8,y_circ8,z_circ8,4,ekvator,'filled')
345 toc
346
347
348 %%
349 tic
350 nod_tol=1e-7; %bredd pa nodallinjen
351 H_l_mod=W_l.*Z_l;
352
353 Wl_Zl = zeros(size(H_l_mod)); %plottar checkerboard pattern
354
355 Wl_Zl(H_l_mod > nod_tol) = 1;
356 Wl_Zl(H_l_mod < -nod_tol) = -1;
357
358
359 figure %plotten
360 scatter3(x,y,z,10,Wl_Zl,'filled')
361 colorbar
362 xlabel('x')
363 ylabel('y')
364 zlabel('z')
365 axis equal
366 hold on
367
368 toc
369 %%
370 clf
371 tic
372 nod_tol=1e-7; %bredd pa nodallinjen
373 H_l_mod=W_l.*Z_l;
374
375 Wl_Zl = zeros(size(H_l_mod));
376

```

```

377 Wl_Zl(H_l_mod > nod_tol) = 1;
378 Wl_Zl(H_l_mod < -nod_tol) = -1;
379
380
381 figure %plottar checkerboard pattern
382 scatter3(x,y,z,10,Wl_Zl,'filled')
383 colorbar
384 xlabel('x')
385 ylabel('y')
386 zlabel('z')
387 axis equal
388 hold on
389 j=0;
390 for i=1:length(H_1) %sorterar ut nodallinjerna
391     if Wl_Zl(i)==0
392         j=j+1;
393         Wl_Zl_new(j)=Wl_Zl(i);
394         x_new(j)=x(i);
395         y_new(j)=y(i);
396         z_new(j)=z(i);
397     end
398 end
399 figure %plottar nodallinjerna
400 scatter3(x_new,y_new,z_new,10,Wl_Zl_new,'filled')
401 axis equal
402 toc
403 %%
404 function mu = mu_c_func(L)
405     %se sa att t_j har L element, annars andra
406     %toleransen
407     syms t; %derivering
408     P_L=sym2poly(legendreP(L-1,t));
409     t_j=roots(P_L);
410
411     theta_j = acos(t_j) ; %t till theta enligt
412     %berardhelfer
413     taljaren = sin(theta_j).^L;
414     namnaren = legendreP(L,cos(theta_j));
415     mu_i =taljaren./abs(namnaren); % mu_i
416
417
418     mu_c = min(mu_i) ; % raknar ut slutgiltiga mu_c
419
420 mu=mu_c
421
422 end

```