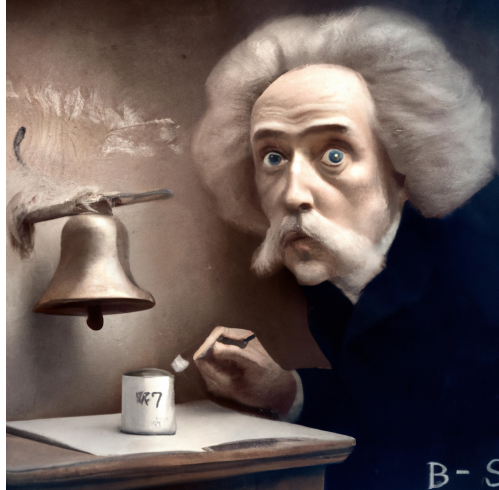




CHALMERS



GÖTEBORGS UNIVERSITET



Experimentell undersökning av Bells olikhet för att utvärdera möjligheten att skapa en fysiklaboration

Kandidatarbete inom fysik

Oscar Alkeskog
Melwin Andersson
Josef Jörgensen
Linnea Landstedt
Fredrik Sitje

INSTITUTIONEN FÖR FYSIK

CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
Göteborg 2023
www.chalmers.se

INSTITUTIONEN FÖR FYSIK

GÖTEBORGS UNIVERSITET
Göteborg 2023
www.gu.se

KANDIDATARBETE 2023

TIFX11-23-25
FYP415

Experimentell undersökning av Bells olikhet för att utvärdera möjligheten att skapa en fysiklaboration

Oscar Alkeskog, Melwin Andersson, Josef Jörgensen,
Linnea Landstedt, Fredrik Sitje

Handledare: Lars Hellberg, Chalmers
Examinator (Chalmers): Jan Swenson
Examinator (GU): Martina Ahlberg



GÖTEBORGS
UNIVERSITET



CHALMERS

Institutionerna för fysik
CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
GÖTEBORGS UNIVERSITET
Göteborg 2023

Experimentell undersökning av Bells olikhet för att utvärdera möjligheten att skapa en fysiklaboration

Oscar Alkeskog, Melwin Andersson, Josef Jörgensen, Linnea Landstedt, Fredrik Sitje
Institutionen för fysik

Chalmers Tekniska Högskola

Göteborgs Universitet

Abstract

This report investigates whether it is feasible for undergraduate students to conduct an experiment that violates Bell's inequality using polarization of entangled photons created in BBO-crystals, within a time frame of up to three days. For this, we conducted the experiment ourselves by drawing inspiration from other setups. This study covers the historical buildup and theory from the EPR-Paradox to the experiments that refuted Bell's inequality. We also lay out the fundamentals of spontaneous parametric down-conversion. In addition, this study gives detailed instructions on how to set up the experiment. Our results show that with a significance level of $p = 2 \cdot 10^{-5}$ that Bell's inequality ($S < 2$) was violated by measuring an S -value of $2,1577 \pm 0,0379$. From our method analysis we conclude that it is unlikely that undergraduate physics students can conduct the entire experiment within three days. However, we suggest two alternative laborations based on partially assembled setups. Either the students could optimize the quantum state of the incoming photons or they could align the laser and optical components. Another possibility is to give a demonstration or conduct a signal processing (coincidence) laboration using a fully assembled setup.

Sammandrag

Den här rapporten undersöker om det är möjligt för studenter att genomföra ett experiment som bryter mot Bells olikhet genom att använda polarisation hos sammanflätade fotoner som skapats i BBO-kristaller, inom en tidsram på upp till tre dagar. Som grund för bedömningen genomförde vi experimentet själva med inspiration från andra experimentuppställningar. Vi går igenom den historiska bakgrunden och teorin från EPR-paradoxen till experimenten som motbevisade Bells olikhet. Vi lägger också fram grunderna för spontan parametrisk nedkonvertering. Dessutom ges detaljerade instruktioner för hur man ställer upp experimentet. Våra resultat visar med en signifikansnivå på $p = 2 \cdot 10^{-5}$ att Bells olikhet ($S < 2$) bröts med ett uppmätt S -värde på $2,1577 \pm 0,0379$. Från vår metodanalys drar vi slutsatsen att det är osannolikt att fysikstudenter på kandidatnivå kan genomföra hela experimentet på tre dagar. Vi föreslår dock två alternativa laborationer baserade på delvis monterade uppställningar. Antingen kan studenterna optimera kvanttillståndet hos de inkommande fotonerna eller rikta in lasern och de optiska komponenterna. En annan möjlighet är att ge en demonstration eller genomföra en laboration om signalbehandling (koincidens) med hjälp av en färdigmonterad uppställning.

Innehåll

1	Inledning	1
1.1	Syfte	1
1.2	Bakgrund	1
1.2.1	Kvantmekanikens början	1
1.2.2	Debatten om kvantmekanikens fullständighet	2
1.2.3	Debattens upplösning	3
1.2.4	Experimenten som testade Bells olikhet	3
2	Teori	4
2.1	Einsteins, Podolskys och Rosens tankeexperiment	4
2.2	Bells sats	6
2.3	Bells olikhet på experimentell form	9
2.4	Sekundärfotoner och sammanflätning	12
2.4.1	Ljusets växelverkan med kristaller	12
2.4.2	Skapandet av en superposition av sammanflätade tillstånd	14
3	Metod	16
3.1	Experimentuppställning	16
3.2	Uppställning	18
3.2.1	Inriktning av laserstrålen	19
3.2.2	Bestämning av avstånd mellan speglar, BBO-kristaller och kollimatorer	20
3.2.3	Placering av hjälpspeglar och kollimatorer	20
3.2.4	Kalibrering av kollimatorer med hjälp av en laser	20
3.2.5	Placering och justering av BBO-kristallen	20
3.3	Optimering av kvanttillståndet	21
3.3.1	Komponenternas inverkan på kvanttillståndet	21
3.3.2	Optimeringsalgoritm för halvvågsplattan och fasjusterande BBO-kristallen	21
3.4	Mätpunkter och mätdata	23
3.5	Felanalys	24
4	Resultat	26
5	Diskussion	28
5.1	Resultat av S-värdesmätningarna	28
5.2	Möjliga felkällor och förbättringar	28

5.3	Reflektioner kring uppställning och metod	29
5.4	Experimentets relevans för utbildningarnas innehåll	30
5.5	Anpassning av experimentet till projektbaserade laborationer	31
5.5.1	Om valet mellan handvridna och motoriserade polarisatorer	32
5.5.2	Andra möjliga experiment med uppställningen	32
5.6	Risker med laseranvändning	32
6	Slutsats	34
	Litteratur	35
A	Beräkning av spinnproduktväntevärde för Bells olikhet	I
B	Matematisk härledning av Bells olikhet på CHSH-form	IV
B.1	Beräkning av sannolikheter att mäta ett givet tillstånd	V
B.2	Gömda variabel-teoriens förutsägelse	VII
B.3	Kvantmekanikens förutsägelse	X
C	Fullständig felanalys	XII
C.1	Osäkerhet från uppställningen	XII
C.2	Osäkerhet från mätdata	XIV
D	Mätdata	XV

1

Inledning

År 2022 gick nobelpriset i fysik till Alain Aspect, John F. Clauser samt Anton Zeilinger för deras arbete kring sammanflätade fotoner som motbevisade Bells olikhet [1]. Deras arbete bidrog till att teorier om lokala dolda variabler förkastades, och genom detta avgjordes fysikhistoriens uppmärksammade debatt kring kvantfysikens fullständighet. Kvantfysik är en av den moderna fysikens grundpelare och pristagarnas experiment samt teorier fastställde att vårt universum inte kan beskrivas med enbart klassisk fysik. Resultaten kring nobelpriset har möjliggjort utvecklingen av kvantdatorer vilket visar att sammanflätade partiklar är ett högaktuellt ämne och ett relevant vetenskapligt område.

Detta kandidatarbete baseras på en önskan från Göteborgs universitet och Chalmers tekniska högskola att kandidatprogrammen i fysik respektive teknisk fysik implementerar en projektlaboration i experimentell fysik med utgångspunkt i Bells olikhet.

1.1 Syfte

Syftet med detta kandidatarbete var dels att ställa upp ett experiment som motbevisar Bells olikhet och dels avgöra i vilken utsträckning fysikstudenter självständigt skulle kunna genomföra experimentet som en projektlaboration. Vi har studerat bakomliggande teori och själva konstruerat samt genomfört experimentet för att slutligen föreslå en lämpligt avgränsad laboration.

1.2 Bakgrund

För att förstå det experiment som presenteras i denna rapport krävs en kort genomgång av hur den moderna fysiken växte fram under 1900-talet.

1.2.1 Kvantmekanikens början

År 1900 introducerade Max Planck idén om att ljus förekommer i distinkta energipaket han kallade kvanta [2]. Denna idé spanns vidare på år 1905 när Albert Einstein förklarade den fotoelektriska effekten genom att beskriva ljus som en vågpartikel [3]. Senare samma år presenterade han den *speciella* relativitetsteorin där han postulerade att ljusets hastighet i vakuum är konstant för alla observatörer oberoende av deras relativa rörelse; universum har en hastighetsbegränsning som inte kan överskridas [4]. Under tiden Einstein jobbade vidare mot den *allmänna* relativitetsteorin [5] utvecklade Niels Bohr tillsammans med Ernest Rutherford en modell för atomer där elektroner befinner sig i kvantiserade energinivåer runt en kärna som publicerades

år 1913 [6]. Denna vad vi idag kallar kvantmekaniska modell skulle visa sig komma i konflikt med fundamentala principer inom klassisk fysik, något som Einstein hade svårt att acceptera.

Klassisk fysik bygger på tre centrala begrepp: realism, determinism och lokalitet [7]. I realismen har varje fysikaliskt system ett entydigt tillstånd oberoende av vad en observatör känner till om det. En partikel finns där utan att man kollar på den och desto mer kunskap vi har om systemet desto noggrannare förutsägelser kan vi göra. Determinism handlar om att en viss verkan har en viss kausal effekt som kan återupprepas och visa exakt samma resultat varje gång. Med andra ord är resultatet entydigt bestämt beroende på systemets begynnelsevärden. Lokalitet innebär att ett system endast kan påverkas av sin närliggande omgivning. Ett sätt att visualisera detta är att om ett system ska påverka ett annat måste någonting mellan dem förmedla den växelverkan. Detta är kopplat till att ingenting kan färdas snabbare än ljuset; eftersom det tar tid för information att transporteras till ett annat system är omedelbar verkan omöjlig. Problemet med kvantmekanik är dock att partiklar inte existerar förrän de mäts, identiska mätningar kan producera olika resultat och partiklar kan till synes växelverka omedelbart oberoende av deras relativa avstånd.

1.2.2 Debatten om kvantmekanikens fullständighet

Samtidigt som Bohr tillsammans med bland andra Werner von Heisenberg och Edwin Schrödinger vidareutvecklade kvantmekaniken började Einstein lyfta skepticism mot deras slutsatser vilket ledde till komplicerade filosofiska debatter mellan framförallt Bohr och Einstein. Deras meningsskiljaktigheter kulminerade år 1935 när Einstein tillsammans med Boris Podolsky och Nathan Rosen publicerade artikeln "Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete"[8] (EPR) där de uttryckte sina tvivel mot den kvantmekaniska beskrivningen av universum. Bohr svarade snabbt med en egen artikel [9] med exakt samma titel till samma tidskrift där han motsatte sig kritiken, men gjorde lite för att faktiskt lösa paradoxen.

Tankeexperimentet presenterat i artikeln av Einstein, Podolsky och Rosen har i efterhand blivit känt som "EPR-Paradoxen" efter författarnas initialer samt för hur det illustrerar att modern kvantfysik hävdar beteenden omöjliga ur ett klassiskt perspektiv. Paradoxen i fråga uppstår från ett begrepp som uppstår inom kvantmekaniken som saknar en klassisk motpart, så kallad sammanflätning: en mätning av en partikels egenskap bestämmer omedelbart entydigt en annan partikels egenskap oberoende av avståndet mellan dem. Enligt den speciella relativitetsteorin, som tidigare nämnts, kan ingenting färdas snabbare än ljuset, men sammanflätning tar ej hänsyn till denna rumsliga begränsning vilket skapar en motsägelse. Artikelns slutsats är att den kvantmekaniska beskrivningen av vågfunktionen måste vara ofullständig. Bohr besvarade detta med att deras antaganden leder till tvetydighet och fortsatte understryka kvantmekanikens matematiska fundament men presenterade inte en konkret lösning på frågeställningen.

Senare teoretiker [10] föreslog en lösning till dilemmat genom att introducera *lokala dolda variabler*: variabler vars värden är omöjliga för observatören att veta. Problemet med denna förklaring är dock att dessa dolda variabler är fundamentalt

omöjliga att interagera med experimentellt, och därmed blir dolda variabel-teorier omöjliga att verifiera.

1.2.3 Debattens upplösning

Tvivlen kring kvantmekanikens fullständighet hindrade dock inte forskare att framgångsrikt applicera dess principer på en rad olika frågeställningar. Kontinuerliga framsteg skapade en konsensus att Bohr besvarade alla Einsteins frågor kring kvantmekaniken eftersom framgångarna talade för sig själva [11].

Den nordirländske fysikern John Bell motsatte sig denna, vad han kände ”nästan oärlighet”, hos sina kollegor; Einsteins spörsmål förtjänade vidare eftertanke. I en videointervju [11] säger han att ”Kvantmekaniken har varit fantastiskt framgångsrik, så det är en väldigt fängslande situation att, i grunden för all denna imponerande framgång, finns dessa stora tvivel”. Detta ifrågasättande kulminerade 1964 i artikeln ”On The Einstein Podolsky Rosen Paradox” [12] som senare kom att bli känd som *Bells sats* eller endast *Bells olikhet*.

Den centrala idén i Bells resonemang är att en klassisk dold variabel-teori skiljer sig från den kvantmekaniska beskrivningen under specifika omständigheter. Trots att dolda variabler är fundamentalt omöjliga att interagera med kan att ett experiment avgöra om de existerar eller ej. Resonemanget baseras på ett fåtal grundläggande antaganden utlagda av David Bohm tillsammans med Yakir Aharonov 1957 [13], som måste gälla för alla klassiska situationer.

1.2.4 Experimenten som testade Bells olikhet

Med Bells olikhet som grund krävdes endast en mätning för att avgöra om lokala dolda variabler existerar eller ej. Att konstruera en sådan försöksupställning är en experimentell utmaning, men genom att formulera om Bells olikhet till en mer praktisk form föreslog Clauser, Horne, Shimony och Holt (CHSH) 1969 [14] den första uppställningen som skulle kunna utföra mätningar kopplade till Bells olikhet. Det föreslagna experimentet använder sig av sammanflätade fotonpar som skapas under en atomär strålningskaskad [15]. Fotonparet skickas sedan till var sin detektor som mäter polarisationen hos respektive foton. Med hjälp av olika polarisationsriktningar på detektorerna kan korrelationen mellan fotonparets polarisation mätas och om korrelationsvärdet bryter mot Bells olikhet kan slutsatsen att det inte finns några lokala dolda variabler dras [16]. Det första framgångsrika experimentet utfördes 1982 av Alain Aspect med kollegor som lade vägen för Anton Zeilinger som under 90-talet utförde dem första praktiska tillämpningarna av sammanflätning [1].

2

Teori

Följande avsnitt sammanfattar i kronologisk ordning de viktigaste artiklarna och argument som ledde fram till experimenten som bekräftade att verkligheten är inkonsistent med lokala dolda variabler. Därefter förklaras hur sammanflätade fotoner skapas och hur deras tillstånd kan utgöra en superposition.

2.1 Einsteins, Podolskys och Rosens tankeexperiment

I EPR-artikeln [8], argumenteras huruvida den kvantmekaniska teorin är komplett eller ej. Begreppen lokala dolda variabler och sammanflätning används inte här utan uppstår efter artikelns publicering.

En teori måste motsvara en objektiv verklighet, alltså ska den baseras på det som verkligen existerar oavsett människans syn på den och hennes teoretiska konstruktioner. Teorin ska även kunna bekräftas med experiment. Inledningvis i artikeln ges en definition av en fullständig teori där ”varje element i den fysikaliska verkligheten måste ha en motsvarighet i den fysikaliska teorin” och ett kriterium för realism; ”om man på ett ostört system kan förutsäga en storhet med hundra procent sannolikhet så existerar det ett element av en fysikalisk verklighet som motsvarar storheten”[8, s. 777]. Dessa är av stor vikt senare när författarna drar slutsatsen att teorin om kvantfysiken inte är fullständig.

För att avgöra om en storhet motsvarar ett element i den fysikaliska verkligheten får en operator \hat{A} med motsvarande storhet A och egenvärde a verka på en egenfunktion $|\psi\rangle$ enligt

$$\hat{A}\psi = a\psi. \quad (2.1)$$

Vid likhet existerar det en fysikalisk verklighet för storheten A . Ett specifikt exempel ges under antagandet att rörelsemängden för en partikel är känd, nämligen

$$\psi = e^{\frac{2\pi i}{h} p_0 x} \quad (2.2)$$

och rörelsemängdsoperatoren får verka på denna så att

$$\hat{P}\psi = \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x} e^{\frac{2\pi i}{h} p_0 x} = p_0 \psi. \quad (2.3)$$

Här framgår att operatoren \hat{P} motsvarar egenvärdet p_0 . Därmed tillhör rörelsemängden en fysikalisk verklighet. Men vid försök till förutsägelse av positionen x med en lägesoperator \hat{Q} på ekvation (2.2) så visar sig detta vara omöjligt och det går enbart att finna sannolikheten för att partikeln befinner sig i ett visst rumsligt intervall. Vid en sådan händelse sägs att de två operatorerna är icke-kommuterbara och beskrivs matematiskt som $\hat{P}\hat{Q} \neq \hat{Q}\hat{P}$.

I kvantmekaniken antas vågfunktionen vara fullständig utan att man nödvändigtvis känner till dess exakta egenskaper vilket författarna anser vara problematiskt på grund av deras kriterium för realism. De menar därför att något av följande alternativ är felaktigt: antingen är beskrivningen av vågfunktionen inte fullständig eller så kan två icke-kommuterbara operatorer som motsvarar två storheter inte ha element som existerar i samma verklighet. Om de skulle existera i samma verklighet så skulle det vara möjligt att förutsäga dess värden och därmed skulle vågfunktionens exakta egenskaper vara kända. Detta är grunden till den så kallade EPR-paradoxen där kvantmekaniken förutsätter att vågfunktionen är komplett samtidigt som det till exempel är omöjligt att ha kunskap om både rörelsemängd och läge, det vill säga dessa storheter svarar mot element som existerar i samma verklighet, men dessa går inte att förutsäga.

För att ta reda på vilket ovanstående alternativ som är felaktigt ställer Einstein, Podolsky och Rosen upp ett tankeexperiment där en härledning görs för att komma fram till om två icke-kommuterbara operatorer som motsvarar två storheter kan ha samma fysikaliska verklighet eller ej.

Tankeexperimentet behandlar två system som under en viss tid interagerar med varandra. Dessa benämns som system 1 och system 2. För tiden innan interaktionen antas att det finns full kännedom om vardera tillstånd. För tiden efter interaktionen är det inte längre möjligt att beskriva vardera system enskilt så länge mätningar inte utförs. Däremot kan en beskrivning ges av det sammansatta systemet Ψ .

Genom att utföra en mätning på system 1 kommer den sammansatta funktionen reduceras till ett specifikt egenvärde med en specifik koefficient. Denna koefficient svarar mot en specifik egenfunktion till system 2. Nedan följer två exempel som visar hur olika egenfunktioner erhålls beroende på vilken storhet som mäts på system 1.

Antag att en storhet A med en uppsättning egenvärden a_1, a_2, \dots ska mätas. Då kan det sammansatta systemet, Ψ , skrivas som en funktion av en variabel x_1 hos system 1 enligt

$$\Psi(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x_2) u_n(x_1), \quad (2.4)$$

där x_2 är en variabel för system 2 och $\psi_n(x_2)$ är koefficienter till egenfunktionen $u_n(x_1)$. Antag att mätningen ger resultatet a_k . Då händer för

- $\Psi(x_1, x_2) \rightarrow \Psi_A(x_1, x_2) = \psi_k(x_2) u_k(x_1)$
- system 1: $u_n(x_1) \rightarrow u_k(x_1)$
- system 2: $\psi_n(x_2) \rightarrow \psi_k(x_2)$.

Om istället en storhet B mäts på system 1 som har en annan uppsättning egenvärden b_1, b_2, \dots vars motsvarande egenfunktioner är v_1, v_2, \dots , med koefficienter $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ beskrivs det sammansatta systemet (istället för ekvation (2.4)) nu som

$$\Psi(x_1, x_2) = \sum_{s=1}^{\infty} \varphi_s(x_2) v_s(x_1). \quad (2.5)$$

Låt säga att b_r erhålls med egenfunktion v_r och motsvarande koefficient φ_r . Då händer för

- $\Psi(x_1, x_2) \rightarrow \Psi_B(x_1, x_2) = \varphi_r(x_2) v_r(x_1)$
- system 1: $v_s(x_1) \rightarrow v_r(x_1)$
- system 2: $\varphi_s(x_2) \rightarrow \varphi_r(x_2)$.

Beroende på valet av storhet tilldelades system 2 två helt olika vågfunktioner, ψ_k och φ_r . Mätningen på system 1 gjordes efter att systemen hade interagerat med varandra, med andra ord så kan mätningen på system 1 inte ha haft en inverkan på system 2. Därmed svarar storheterna mot element som existerar i samma verklighet.

Här framgår tydligt en konflikt mellan klassisk teori och modern kvantfysik. Författarna fick artikeln publicerad 1935 under en annan paradigm. De har beskrivit något som idag skulle sägas vara ett sammanflätat tillstånd men som för dem ansågs vara ett omöjligt tillstånd. Därför motsätter de sig att system 1 på något sätt skulle vara sammakopplat med system 2 och menar på att storheter som mäts indirekt på system 2 måste tillhöra en gemensam verklighet om detta system varit opåverkat.

För att återgå till de icke-kommuterbara operatorerna och visa att om dessa, trots sin icke-kommuterbarhet, kan motsvara element som tillhör samma verklighet så specificeras tankeexperimentet till att system 1 och 2 antas vara två partiklar. Ytterligare en matematisk härledning görs under samma förutsättningar som ovan men sammanfattas kort här.

Två olika tänkta mätningar utförs på partikel 1 vilket indirekt tilldelar två olika egenfunktioner för partikel 2 via det sammansatta systemet. Det visar sig att för partikel 2 existerar det en rörelsemängd $-p$ och ett läge $x + x_0$, (x_0 är en konstant), beroende på vilken storhet som mättes. Rörelsemängden och läget är egenvärden för motsvarande operatorer \hat{P} respektive \hat{Q} för detta system. Dessa operatorer visar sig vara icke-kommuterbara enligt

$$\hat{P}\hat{Q} - \hat{Q}\hat{P} = \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x_2} x_2 - x_2 \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{h}{2\pi i}. \quad (2.6)$$

Utifrån tänkta mätningar är kriteriet för realism uppfyllt. System 2 har inte på något sätt störs av mätningar på system 1 men två storheter ($-p$ och $x + x_0$) har kunnat förutsägas med hundra procent sannolikhet vilket medför att det existerar två element av samma fysikaliska verklighet som motsvarar storheterna. Dessa två storheter svarar mot operatorer som är icke-kommuterande. Definitionen av en fullständig teori kräver att deras element måste ha en motsvarighet i teorin men enligt kvantmekaniken så kan två icke-kommuterande operatorer inte ge fullständig kunskap om bägge motsvarande storheter. Det är exempelvis omöjligt att veta exakta läget om rörelsemängden är bestämd och vice versa. Baserat på allt detta drar EPR slutsatsen att teorin är ofullständig. Artikeln avslutas med att författarna skriver att de tror att det går att hitta en fullständig beskrivning av vågfunktionen.

2.2 Bells sats

John Bell publicerade 29 år efter EPR-artikeln utgivelse sin egen, propert titulerade "On the Einstein Podolsky Rosen Paradox", där han reflekterar kring en ny version av det ursprungliga tankeexperimentet [12].

Betrakta två sammanflätade spinn-halva-partiklar beskrivet av ett singlett-tillstånd

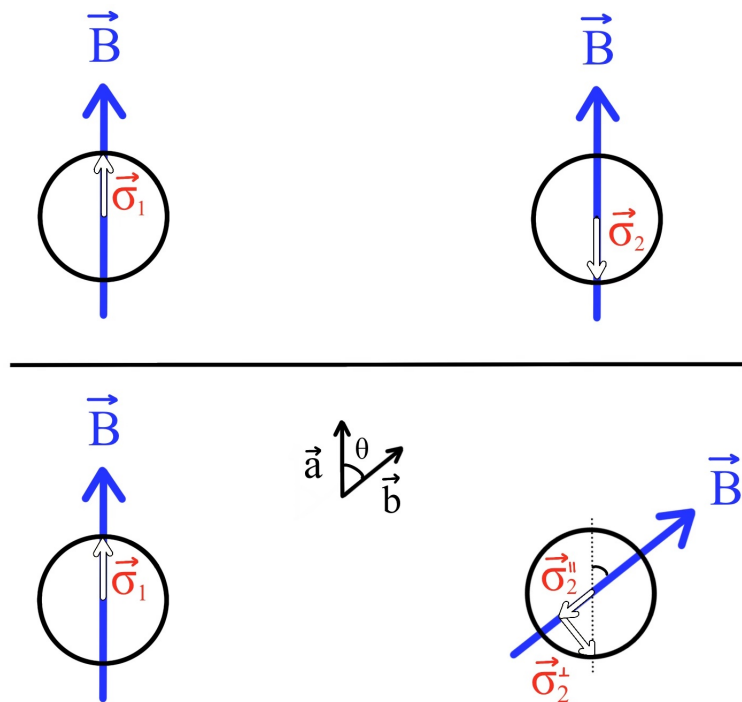
$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow_1\rangle \otimes |\downarrow_2\rangle + |\downarrow_1\rangle \otimes |\uparrow_2\rangle) \quad (2.7)$$

där $|\uparrow_{1,2}\rangle$ representerar partikel 1 respektive 2 som kan anta tillstånd spinn upp eller ner (relativt någon godtycklig axel) och \otimes är en tensorprodukt som definierar multiplikation av tillstånd. Beteckna en operator $\hat{\sigma}$ med egenvärden $\vec{\sigma} : |\sigma| = 1$ som indikerar åt vilket håll en partikels spinn pekar. Antag att det existerar en uppsättning lokala dolda variabler λ som bestämmer spinnets riktning enligt någon tillhörande sannolikhetsfördelning $\rho(\lambda)$. Objektet λ kan anta vilken matematisk form som helst, men för att underlätta visuellt kan en kontinuerlig vektorrepresentation $\lambda = \vec{\lambda}$ väljas där en mätning med $\hat{\sigma}$ helt enkelt avslöjar det momentana värdet $\vec{\sigma}$ som bestäms av $\vec{\lambda}$.

En partikels spinn kan mätas med hjälp av en Stern-Gerlach-magnet med en polarisationsaxel $\vec{a} : |a| = 1$. Betrakta två sådana magneter, A och B , med magnetfält i samma riktning, separerade med ett godtyckligt avstånd i rummet som respektive partikel anländer till samtidigt i tiden. Vid mätning erhålls egenvärdet σ parallellt eller antiparallellt mot detektorns polarisation. Det gäller då att om första partikelns spinn pekar upp, $\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{a} = +1$, så kommer den andra partikelns peka ner, $\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{a} = -1$, och vice versa. Tillåt nu magneternas polarisation att peka i olika riktningar, \vec{a} för A och \vec{b} för B , se figur 2.1. Resultaten av $\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{a}$ och $\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{b}$ kommer bero på dels magneternas polarisation och dels den dolda variabeln $\vec{\lambda}$, det vill säga

$$\begin{aligned} A(\vec{a}, \vec{\lambda}) &\equiv \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{a} = \pm 1, \\ B(\vec{b}, \vec{\lambda}) &\equiv \vec{\sigma}_2 \cdot \vec{b} = \pm 1. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Slutligen, om polarisationsriktningarna \vec{a} och \vec{b} antas ställas in precis innan partiklarna passerar magneterna kan resultaten antas vara oberoende av varandra, det vill säga att $A(\vec{a}, \vec{\lambda})$ för partikel 1 inte beror på polarisationsriktningen \vec{b} och vice versa. Om de skulle bero på varandra skulle information behöva färdas snabbare än ljuset: vilket är exakt det dilemma lokala dolda variabler avser lösa.



Figur 2.1: Illustration av Stern-Gerlach-magneter med utritade polarisationsriktningar av magnetfälten \vec{B} som mäter spinnets $\vec{\sigma}$ på två sammanflätade partiklar. θ är vinkeln mellan polarisationsriktningarna \vec{a} och \vec{b} för vardera magnet. Övre: magneter har samma polarisationsriktning. Undre: magneter har olika polarisationsriktningar. Spinnets kan enbart mätas längs en magnetfältetsriktning och om fältet har en lutning relativt fältet som bestämde $\vec{\sigma}_1$ kommer resultatet vara bestämt av λ . Vilken av vektorerna som ges påverkas av hur stor avvikelse θ som \vec{B} -fältet är lutat. Om spinnets orienteras ortogonalt så kommer partikeln inte att interagera med magnetfältet vilket resulterar i att spinnets inte mäts. För kvantfysik är dock resultatet slumpmässigt där amplituden på vektorerna $\vec{\sigma}_2^{\parallel}$ och $\vec{\sigma}_2^{\perp}$ motsvarar sannolikhetsamplituden att spinnets orienterar sig parallellt respektive ortogonalt mot \vec{B} -fältet.

Eftersom dolda variabler faller under klassisk teori blir väntevärdet, \mathbb{E} , för produkten $A(\vec{a}, \vec{\lambda})B(\vec{b}, \vec{\lambda})$:

$$\mathbb{E}[\vec{a}, \vec{b}] = \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \rho(\lambda) A(\vec{a}, \vec{\lambda}) B(\vec{b}, \vec{\lambda}), \quad (2.9)$$

vilket borde vara lika med det kvantmekaniska väntevärdet $\langle \cdot \rangle$ givet av

$$\begin{aligned} \langle \hat{\sigma} \rangle &= \langle \psi | \hat{\sigma} | \psi \rangle = \dots = \\ &= -\cos \theta = -\vec{a} \cdot \vec{b} \end{aligned} \quad (2.10)$$

där θ är den relativa vinkeln mellan polarisationsriktningarna (för fullständig härledning se appendix A). Men det är omöjligt att representera det kvantmekaniska värdet via det klassiska [12].

Eftersom $\rho(\lambda)$ är en *normaliserad* täthetsfunktion,

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \rho(\lambda) = 1 \quad (2.11)$$

samt ekvation (2.8) kan det klassiska (lokal dold variabel) väntevärdet inte understiga -1 . Detta minimum erhålles om och endast om magneterna är polariserade i samma riktning, $\vec{a} = \vec{b}$, var på

$$A(\vec{a}, \lambda) = -B(\vec{b}, \lambda). \quad (2.12)$$

Därför kan $B(\vec{b}, \lambda)$ generellt uttryckas som

$$B(\vec{b}, \lambda) = -A(\vec{b}, \lambda) \quad (2.13)$$

vilket betyder att det klassiska väntevärdet $\mathbb{E}[\vec{a}, \vec{b}]$ för produkten kan skrivas om som

$$\mathbb{E}[\vec{a}, \vec{b}] = - \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \rho(\lambda) A(\vec{a}, \vec{\lambda}) A(\vec{b}, \vec{\lambda}). \quad (2.14)$$

Om \vec{c} är en ny, godtycklig polarisationsriktning följer att

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\vec{a}, \vec{b}] - \mathbb{E}[\vec{a}, \vec{c}] &= - \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \rho(\lambda) [A(\vec{a}, \vec{\lambda}) A(\vec{b}, \vec{\lambda}) - A(\vec{a}, \vec{\lambda}) A(\vec{c}, \vec{\lambda})] \\ \rightarrow [A^2(\vec{b}, \vec{\lambda}) = 1] \rightarrow &= \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \rho(\lambda) A(\vec{a}, \vec{\lambda}) A(\vec{b}, \vec{\lambda}) [A(\vec{b}, \vec{\lambda}) A(\vec{c}, \vec{\lambda}) - 1] \end{aligned} \quad (2.15)$$

som enligt (2.8) kan skrivas som

$$|\mathbb{E}[\vec{a}, \vec{b}] - \mathbb{E}[\vec{a}, \vec{c}]| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\lambda) [1 - A(\vec{b}, \vec{\lambda}) A(\vec{c}, \vec{\lambda})] d\lambda. \quad (2.16)$$

Högerledets andra term är $\mathbb{E}[\vec{b}, \vec{c}]$ enligt ekvation (2.14), varför med hjälp av ekvation (2.11) ges

$$|\mathbb{E}[\vec{a}, \vec{b}] - \mathbb{E}[\vec{a}, \vec{c}]| \leq 1 + \mathbb{E}[\vec{b}, \vec{c}]. \quad (2.17)$$

Resultatet i ekvation (2.17) är Bells olikhet som måste uppfyllas under alla klassiska omständigheter men som kvantmekaniken bryter mot, till exempel då $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$ och $\vec{b} \cdot \vec{c} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ eftersom

$$\begin{aligned} \left| -\frac{1}{\sqrt{2}} + 0 \right| &= \frac{1}{\sqrt{2}} \not\leq 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{2} \not\leq 1. \end{aligned} \quad (2.18)$$

2.3 Bells olikhet på experimentell form

För att undersöka Bells sats experimentellt behöver olikheten transformeras till en mer praktisk form. Det gjordes först av Clauser, Holt, Shimony och Horne som generaliserade Bells resultat i en artikel utgiven endast fem år efter Bells publikation [14]. Till att börja med skiftas fokus från att abstrakt reflektera kring spinnet hos sammanflätade partiklar till att konkret betrakta polarisation av sammanflätade fotoner. När en ljuspartikel skickas genom en icke-linjär kristall finns det en chans att en spontan nedkonvertering sker, det vill säga det finns en chans att en inkommande primärfoton omvandlas till två sekundära utgående fotoner. En mer detaljerad förklaring av denna process presenteras i nästa avsnitt 2.4.

Eftersom de två sekundärfotonerna skapades från samma primärfoton är deras polarisation sammankopplad. Polarisationen av sekundärfotonerna är visserligen deterministiskt kopplade till primärfotonen, men genom att sammansätta två tunna kristaller med deras optiska axlar vinkelräta mot varandra erhålls en situation där de två sekundärfotonerna med lika stor sannolikhet är antingen vertikalt eller horisontellt polariserade relativt en detektor. Detta kan uttryckas med singlett-tillståndet

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H_1\rangle \otimes |H_2\rangle + |V_1\rangle \otimes |V_2\rangle) \quad (2.19)$$

där H och V betecknar horisontell respektive vertikal polarisation för partikel 1 och 2. Med denna konfiguration utgör två polarisationfilter samma funktion som två Stern-Gerlach magneter gör för partiklar med spinn. I detta fallet motsvarar ljusets polarisation partiklarnas spinn och polarisatorfiltrets riktning magnetfältets riktning. Vinkeln på polarisatorn relativt ljusets horisontella komponent benämns α och β för den första och andra polarisatorn. Detta kan jämföras med figur 2.1 där θ motsvarar differensen $\alpha - \beta$.

På motsvarande sätt som det i Bells sats 2.2 bildades storheterna A och B för att beskriva spinnens riktning bildas nu istället sannolikheterna P och P' som indikerar chansen att vardera sekundärfoton transmitteras genom sitt respektive filter. Utgå från en klassisk beskrivning och antag att dessa beror på dels vilken vinkel filtrets polarisationsaxel utgör med ljusets polarisation, dels några dolda variabler och konstruera sedan de sammansatta klassiska sannolikheterna $P_{1,2}$

$$\begin{aligned} P_{t,t} &= \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \rho(\lambda) P(\alpha, \lambda) P'(\beta, \lambda), \\ P_{r,t} &= \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \rho(\lambda) (1 - P(\alpha, \lambda)) P'(\beta, \lambda), \\ P_{t,r} &= \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \rho(\lambda) P(\alpha, \lambda) (1 - P'(\beta, \lambda)), \\ P_{r,r} &= \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \rho(\lambda) (1 - P(\alpha, \lambda)) (1 - P'(\beta, \lambda)) \end{aligned} \quad (2.20)$$

där kombinationerna av t och r beskriver de fyra fallen som uppstår när både foton 1 och 2 antingen kan transmitteras eller reflekteras. $\rho(\lambda)$ är som tidigare diskuterat i avsnitt 2.2 en sannolikhetsfördelning av lokala dolda variabler. Sedan definieras den dimensionslösa storheten S ,

$$S(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) = E(\alpha_1, \beta_1) + E(\alpha_1, \beta_2) + E(\alpha_2, \beta_1) - E(\alpha_2, \beta_2), \quad (2.21)$$

där korrelationen $E(\alpha, \beta)$ är en summering av de sammansatta sannolikheterna

$$E(\alpha, \beta) = P_{t,t}(\alpha, \beta) - P_{r,t}(\alpha, \beta) - P_{t,r}(\alpha, \beta) + P_{r,r}(\alpha, \beta). \quad (2.22)$$

Genom att stoppa in integraluttrycken för $P_{1,2}$ i ekvation (2.21) finner man att för lokala dolda variabler gäller

$$S(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) \leq 2 \quad (2.23)$$

som är Bells olikhet på CHSH-form (efter författarnas initialer).

Om en kvantmekanisk beskrivning betraktas, uppstår, på samma sätt som i Bells sats, ett samband som kan bryta mot olikheten. Man finner att sannolikheterna $P_{1,2}$ istället blir

$$\begin{aligned} P_{t,t} = P_{r,r} &= \frac{1}{2} \cos^2(\alpha - \beta) \\ P_{r,t} = P_{t,r} &= \frac{1}{2} \sin^2(\alpha - \beta). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Detta ger korrelationen

$$E(\alpha, \beta) = \cos 2(\alpha - \beta) \quad (2.25)$$

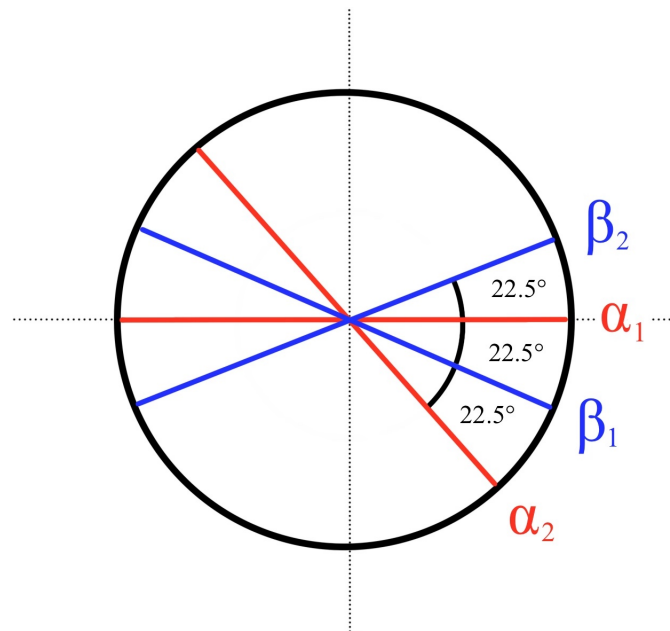
vilket resulterar i att förhållandet S blir

$$S(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) = \cos 2(\alpha_1 - \beta_1) + \cos 2(\alpha_1 - \beta_2) + \cos 2(\alpha_2 - \beta_1) - \cos 2(\alpha_2 - \beta_2) \quad (2.26)$$

som för väl valda α och β bryter mot olikheten. För fullständig härledning se appendix B. Exempelvis kan ett maximalt $S = 2\sqrt{2}$ erhållas vid

$$\begin{aligned} \alpha_1 - \beta_1 &= \frac{\pi}{8}, \\ \alpha_1 - \beta_2 &= -\frac{\pi}{8}, \\ \alpha_2 - \beta_1 &= -\frac{\pi}{8}, \\ \alpha_2 - \beta_2 &= -\frac{3\pi}{8}, \end{aligned} \quad (2.27)$$

visualiserat i figur 2.2.



Figur 2.2: Illustration av polarisationsriktningar för de olika filtrena (α_1 , α_2 , β_1 och β_2) där α motsvarar ena filtret och β det andra som genererar ett maximalt S . Mätningarna utförs för alla kombinationer av α_i, β_j .

Ovanstående resonemang är helt analogt med det presenterat i Bells sats. Varför denna omskrivning görs överhuvudtaget är för att till skillnad från Bells teoretiska förhållande är S ett experimentellt mätbart värde. Ett empiriskt värde på S kan därmed avgöra om lokala dolda variabler existerar eller ej.

2.4 Sekundärfotoner och sammanflätning

För att kunna undersöka Bells olikhet behövs det en möjlighet att skapa en lämplig superposition av polarisationen av sammanflätade fotoner, vilket kan åstadkommas med hjälp av icke-linjära kristaller. I de följande avsnitten kommer interaktionen mellan ljus och icke-linjära kristaller analyseras närmare och ursprunget till superpositionen av sammanflätade tillstånd kommer att klargöras.

2.4.1 Ljusets växelverkan med kristaller

Då ljus är en form av elektromagnetisk strålning kan det interagera med elektroner på atomnivå, där elektroner betraktas som en laddningsfördelning som är elastiskt bundna till sina atomkärnor. När ljus passerar en bunden elektron växelverkar den elektriska fältkomponenten, \vec{E} , med elektronen och beroende på den atomära polariserbarheten, α_0 skapas en oscillerande dipol, $\vec{p} = \alpha_0 \vec{E}$ proportionell mot ljusets frekvens. Det gäller att ju högre polariserbarheten är desto lättare framkallas ett dipolmoment.

Polarisationen, $\vec{P} = \frac{1}{V} \sum \vec{p}$, kan användas för att beskriva det oscillerande dipolmomentet som induceras av ljus i en kristall med volymen V . Genom att ersätta polariserbarheten α_0 med vakuumpervitiveteten ϵ_0 och den materialberoende elektriska susceptibiliteten χ kan polarisationen för linjära kristaller uttryckas med $\vec{P} = \epsilon_0 \chi^{(1)} \vec{E}$ där $\chi^{(1)}$ beskriver den *linjära* elektriska susceptibiliteten.

Anledningen till varför linjära kristallers polarisation kan beskrivas på detta sätt beror på att det finns en förutsättning för ett linjärt förhållande mellan polarisation och elektrisk fältstyrka. Polarisationen blir då proportionell mot förflyttningen av elektronen på grund av den elektriska fältstyrkan. Detta gäller endast då fältstyrkan är låg eftersom elektronen då befinner sig i en parabelpotential där elektronen kan oscillera harmoniskt.

Vid högre elektriska fältstyrkor kan elektronerna å andra sidan lämna det harmoniska potentialområdet och i stället oscillera i en allt mer anharmonisk potential. Polarisationen beskrivs då som $\vec{P} = \epsilon_0 (\chi^{(1)} \vec{E} + \chi^{(2)} \vec{E} \vec{E} + \chi^{(3)} \vec{E} \vec{E} \vec{E} + \dots)$. Elektriska susceptibilitet av ordning två, $\chi^{(2)}$, eller högre uppträder i icke-linjära kristaller och de nya termerna av högre ordning beskriver icke-linjära effekter som bland annat kan förändra ljusets polarisation helt och hållet [17].

Särskilt intressant är den elektriska susceptibilitet av andra ordningen $\chi^{(2)}$ eftersom den möjliggör spontan parametrisk nedkonvertering (SPDC från eng. spontaneous parametric down conversion) i BBO-kristaller. Det kan förstås som en omvänd frekvensfördubbling vilket skapar två sammanflätade fotoner [18].

För att få till frekvensfördubbling i en icke-linjär kristall behövs det ett starkt elektriskt fält som framkallas av många koherenta fotoner, skapade i en laser, som

leds genom kristallen. Under processen uppstår på grund av den icke-linjära polarisationen av andra ordningen $\vec{P}^{(2)} = \epsilon_0 \chi^{(2)} \vec{E} \vec{E}$, en inducerad elektromagnetisk våg med dubbel frekvens [19]. Under den omvända processen, dvs spontan parametrisk nedkonvertering, kan det uppstå två sammanflätade sekundärfotoner γ_2 och γ_3 var och en med halva frekvensen av primärfotonen γ_1 , det vill säga deras frekvenser ω uppfyller

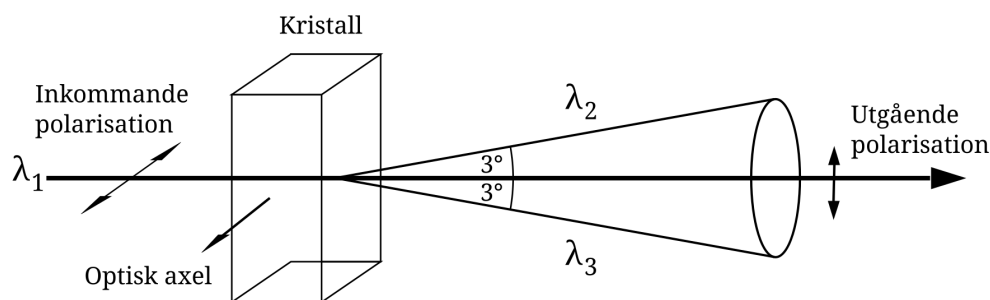
$$\omega_1 = \omega_2 + \omega_3. \quad (2.28)$$

Denna process måste dock bevara energi och rörelsemängd och sker endast om fotonernas vågvektorer \vec{k} överensstämmer i storlek och riktning [18] enligt

$$\vec{k}_1 = \vec{k}_2 + \vec{k}_3. \quad (2.29)$$

Villkoren beskrivna i ekvationerna (2.28) och (2.29) kallas för "fasmatchningsvillkoret" och endast när det uppfylls kan nedkonvertering hända. Eftersom en BBO-kristall är dubbelbrytande, dvs att dess brytningsindexet beror på fotonens polarisation vilken i sin tur är beroende av frekvensen ω , kan det uppstå situationer där sekundärfotonerna med lämplig frekvens kommer brytas på ett sådant sätt att fotonernas vågvektorer uppfyller ekvation (2.29). Därigenom är fasmatchningsvillkoret uppfyllt och sammanflätade sekundärfotoner skapas.

Det finns olika typer av BBO-kristaller som ger olika typer av nedkonvertering där sekundärfotonernas polarisation, och därmed deras brytning, varierar. Det är dock tillräckligt att betrakta nedkonverteringen som händer i en BBO-kristall av typ-1. Sekundärfotonerna som skapas i en sådan får identisk polarisation, som alltid är ortogonal mot polarisationen av primärfotonen. Sekundärfotoner med lika våglängder kommer lämna kristallen längs en kon med 3° vinkel från primärfotonernas riktning som illustrerad i figur 2.3. Dessutom måste sekundärfotonernas bana på konen på grund av rörelsemängdens bevarande alltid vara diametrala.



Figur 2.3: Schematisk bild av spontan parametrisk nedkonvertering, SPDC i en BBO-kristall av typ-1. Primärfotoner med våglängd λ_1 och horisontell polarisation kommer in i kristallen vars optiska axel är parallell med primärfotonens polarisering och omvandlas till två sekundärfotoner med våglängden $\lambda_{2,3} = 2\lambda_1$ med vertikal polarisation. Sekundärfotonerna lämnar kristallen diametralt längs en kon [20].

2.4.2 Skapandet av en superposition av sammanflätade tillstånd

Som just nämnts kan det skapas sammanflätade sekundärfotoner med samma våglängd i en BBO-kristall av typ-1. Detta är ett idealt fall. I verkligheten är det så att om primärfotonernas polarisation stämmer överens med den optiska axeln och fasmatchningsvillkoret är uppfyllt, skapas det sekundärfotoner i ett våglängdsspektrum som är fördelat runt $\lambda_{2,3} = 2\lambda_1$. Om däremot primärfotonernas polarisation är vinkelrätt mot den optiska axeln, fortplantar sig primärfotonerna ostört genom kristallen. Eftersom specialfallet som utgörs av $\lambda_{2,3} = 2\lambda_1$ är av intresse kan alla andra sekundärfotoner ignoreras.

För att kunna analysera superpositionen av sekundärfotonernas sammanflätade tillstånd är det nödvändigt att beskriva fotonernas polarisationsförändring i kvantmekanisk notation. Här antas polarisationen hos primärfotoner vara antingen horisontell $|H\rangle$ eller vertikal $|V\rangle$. Om polarisationen för en primärfoton är parallell med BBO-kristallens optiska axel kan polarisationen för sekundärfotonerna beskrivas på följande sätt

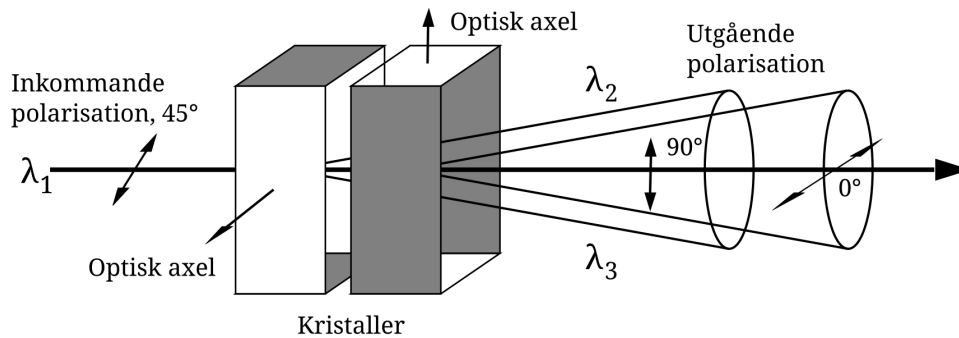
$$\begin{aligned} |H\rangle &\rightarrow |VV\rangle, \\ |V\rangle &\rightarrow |HH\rangle. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Om istället diagonalt polariserade primärfotoner $|D\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle + |V\rangle)$ infaller på en vertikal eller horisontell liggande optisk axel beskrivs polariseringsförändringen med

$$|D\rangle \rightarrow \begin{cases} |HH\rangle, & \text{om } |D\rangle \text{ blir parallell till vertikal optisk axel} \\ |VV\rangle, & \text{om } |D\rangle \text{ blir parallell till horisontell optisk axel} \\ \text{ingen SPDC,} & \text{om } |D\rangle \text{ blir ortogonal till optisk axel.} \end{cases} \tag{2.31}$$

Att det uppstår tre olika fall beror på att diagonalt polariserat ljus är ett överlapp av vertikalt och horisontellt polariserat ljus. Det innebär att primärfotonernas polarisation inte blir bestämd förrän de interagerar med kristallen. Fallen i ekvation (2.31) är en kvalitativ beskrivning av de tre möjliga polarisationsändringar. I verkligheten är nedkonvertering en process som är väldigt osannolik så det krävs ett högt antal primärfotoner för att skapa ett sekundärfotonpar [21].

Processen är deterministisk. Om man vet riktningen på kristallens optiska axel så är det möjligt att avgöra i efterhand vilken polarisation ljuset hade innan det passerade kristallen. I experiment om Bells olikhet måste kunskapen om sekundärfotonernas polarisation vara oviss. För att lösa detta leds diagonalt polariserade primärfotoner genom två tunna BBO-kristaller som ligger tätt mot varandra med sina optiska axlar vinkelrätt mot varandra.



Figur 2.4: Schematisk bild av spontan parametrisk nedkonvertering, SPDC av typ-1 med diagonalt polariserade primärfotoner i två identiska BBO-kristaller med ortogonalt liggande optiska axlar. Primärfotoner med våglängd λ_1 kommer in i kristallerna och omvandlas till två sekundärfotoner med våglängd $\lambda_{2,3} = 2\lambda_1$ med orthogonal polarisation jämfört med primärfotonen. Fotonerna lämnar kristallen på koniska banor. På grund av att sekundärfotonernas banor överlappar varandra är det inte möjligt att avgöra i vilken kristall fotonerna har sitt ursprung och därför uppstår en superposition $|\psi_{EPR}\rangle$ [20].

Fotonpar som skapas i en sådan uppställning kommer ha överlappande banor när de lämnar kristallerna, se figur 2.4. Därmed blir det omöjligt att veta vilken av kristallerna som primärfotonerna nedkonverterades i. Detta gör det möjligt att utföra experiment som testar kvantmekanikens förutsägelser om icke-lokalitet, utan att introducera några lokala dolda variabler som skulle kunna förklara de observerade resultaten på ett klassiskt sätt. Den ideala mätbara superposition av sammanflätade fotoner vilken uppfyller kravet på oskiljbarhet beskrivs därmed av

$$|\psi_{EPR}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle|H\rangle + |V\rangle|V\rangle). \quad (2.32)$$

Men eftersom det är svårt att ställa in polarisationen perfekt, och eftersom kristallen dessutom introducerar en fasskillnad mellan tillstånden ges tillståndet i verkligheten av

$$|\psi\rangle = \cos(\theta) |H\rangle |H\rangle + e^{i\varphi} \sin(\theta) |V\rangle |V\rangle \quad (2.33)$$

där θ är polarisationsriktningen som idealt är 45° och φ är den kvantmekaniska fasskillnaden som idealt är 0° [21].

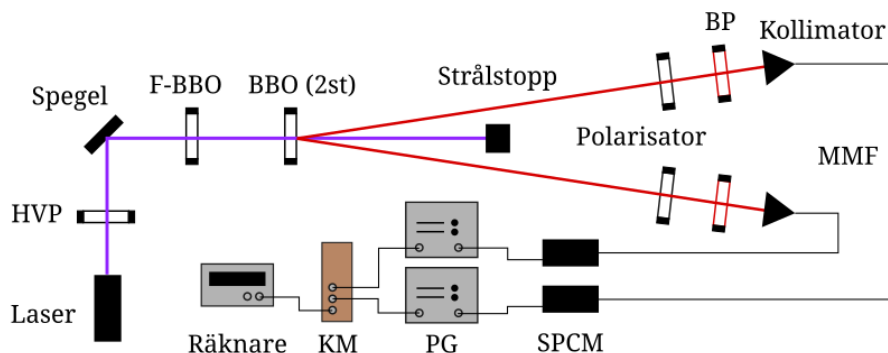
3

Metod

För att testa Bells olikhet undersöktes sammanflätade fotonpar och hur deras respektive polarisation korrelerar. Experimentellt genomfördes detta genom att via en nedkonverterande kristall och en laser generera sammanflätade fotonpar. För att ställa in positionerna för BBO-kristaller och kollimatorer användes hjälpspeglar för att emulera de nedkonverterade fotonernas bana [22]. Dessa fotoner passerade genom varsin polarisator och kunde därefter detekteras i en fotonräkningsmodul. Genom att mäta koincidensfrekvensen för dessa två signaler, det vill säga hur ofta två fotoner passerade respektive polarisator samtidigt, och sedan upprepa denna mätning för olika polarisatorinställningar kunde ett värde beräknas från vilket Bells olikhet kunde motbevisas. Först gjordes justeringar och mätningar för att ställa in ett kvanttillstånd som skulle kunna generera önskat resultat, och därefter gjordes mätningar i syfte att motbevisa Bells olikhet. Dessa mätningar, här efter kallade S -värdesmätningar, samlade in den uppsättning mätvärden som krävdes för att generera ett S -värde likt det i ekvation (2.21).

3.1 Experimentuppställning

Experimentet som utfördes utgick från uppställningen i figur 3.1.



Figur 3.1: Schematisk bild över den experimentella uppställningen. Uppställningen består av en laser, halvvågspatta (HVP), spegel, faskorrigerande BBO-kristall (F-BBO), två nedkonverterande BBO-kristaller (BBO) och ett strålstopp. För uppfångandet av fotonerna används symmetriskt på båda sidor en polarisator, bandpassfilter (BP), kollimator och multimodfibrer (MMF). För signalhantering används fotonräkningsmoduler (SPCM), pulsgeneratorer (PG), koincidensmätare (KM) och en pulsräknare. Hjälpspeglarna som användes för att placera BBO-kristall och kollimatorer är ej utritade, för dessa se figur 3.2. Figuren är inte skalenlig.

Som källa för fotoner med våglängd 405 nm användes en horisontellt linjärpolariserad diodlaser (Laserglow LLD-0405). För att få ljuset linjärpolariserat i 45°

från horisontalplanet användes en halv vågsplatta (Newlight Photonics WPA03-H-505) vars ordinära axel (eng. fast axis) sattes till cirka $22,5^\circ$ från horisontalplanet. För fullständig procedur se avsnitt 3.3. Lasern reflekterades här efter på en spegel (Thorlabs ME1-G01) för att riktningen skulle kunna bestämmas enkelt och noggrant. Efter detta passerade fotonerna genom två uppsättningar BBO-kristaller ($5\text{ mm} \times 5\text{ mm} \times 0,5\text{ mm}$, $\theta = 29,3^\circ$ utformade för typ-1 SPDC av Newlight Photonics).

För att kunna justera det undersökta kvantsystemets interna fasskillnad, φ , mellan polarisationstillstånden sattes först en enkel BBO-kristall. Denna sattes i en hållare som kunde roteras fritt kring vertikalaxeln samt en horisontell axel.

För nedkonvertering användes två på varandra fastsatta BBO-kristaller. BBO-kristallerna var vridna vinkelrätt mot varandra. För att kunna finjustera de två fastsatta BBO-kristallernas riktning fästes de i en justerbar hållare (Thorlabs KM100).

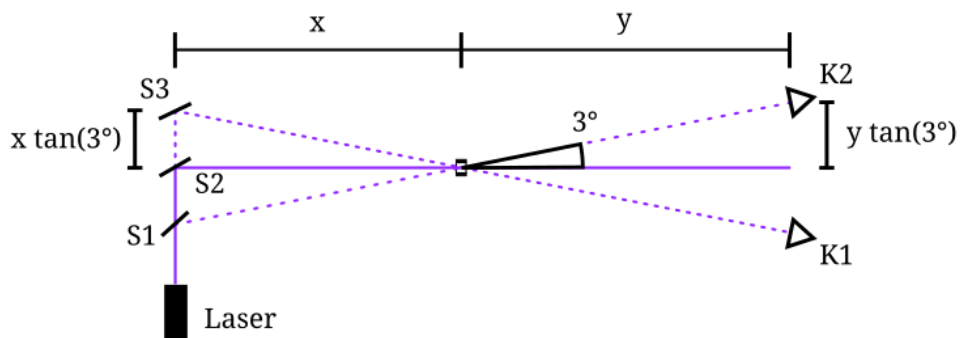
Större delen av strålningen från lasern passerade BBO-kristallerna utan att nedkonverteras och behövde därmed fångas upp med ett strålstopp för att inte utgöra en skaderisk.

De nedkonverterade fotonerna passerade polarisatorer (Thorlabs LPVISE100-A) som under experimentet sattes till olika vinklar. Polarisationsfiltrena sattes först i hållare som roterades för hand (Thorlabs RSP1) för en första serie S -värdesmätningar och sedan i hållare som styrdes elektriskt (Thorlabs PRM1/MZ8) för en andra serie mer noggranna S -värdesmätningar. Efter dessa sattes bandpassfilter (Thorlabs FBH810-10) med centrumvåglängd 810 nm och halvvaldesbredd 10 nm för att endast det önskade ljuset skulle nå detektorerna. Slutligen träffade ljuset en kollimator (Thorlabs F220FC-780) som förde ljuset in i en optisk multimodfiber. Denna fiber transporterade ljuset in i en fotonräkningsmodul (SPCM från eng. Single Photon Counting Module). I experimentet användes två SPCM:er av typ SPCM-EDU CD3375H från Excelitas Technologies. Kollimatorerna var placerade så att de stod med en vinkelavvikelse på 3° från den inkommande laserns riktning.

Från SPCM:erna skickades TTL-signalerna ($2,2\text{ V}$, 15 ns breda) varje gång en foton detekterades. Vardera signal kopplades till TRIGGER-ingången på pulsgeneratorer (HP 8013B) för att invertera pulserna, detta eftersom nästkommande komponent endast kunde hantera negativa spänningar. Från den negativa OUTPUT-utgången kopplades signalerna till en ORTEC 567 kombinerad tid-till-amplitudkonverterare (TAC från eng. Time to amplitude converter) och enkanalanalysator (SCA från eng. Single channel analyzer). Den ena pulsgeneratoren via en ungefär 1 m lång kabel och den andra via en 20 m lång kabel (motsvarande cirka 100 ns fördröjning) för att säkerställa att tidsskillnaden mellan pulserna var tillräckligt stor för att instrumentet skulle kunna mäta koincidens för de sammafötade fotonparen. Den kortare kabeln kopplades till START-ingången och den längre till STOP-ingången. Det tillåtna tidsfönstret för koincidenser, det vill säga den tidsseparation mellan fotonernas detektion som tillåts för att räknas som en koincidens, varierades mellan olika mätningar. Det var i regel centererat kring 100 ns och mellan 1 ns och 20 ns långt. Instrumentets SCA-utgång kopplades sedan till en HP-53131A universalräknare kopplad till en PC via GPIB för styrning och datainsamling med LabVIEW. För LabVIEW-program se [23].

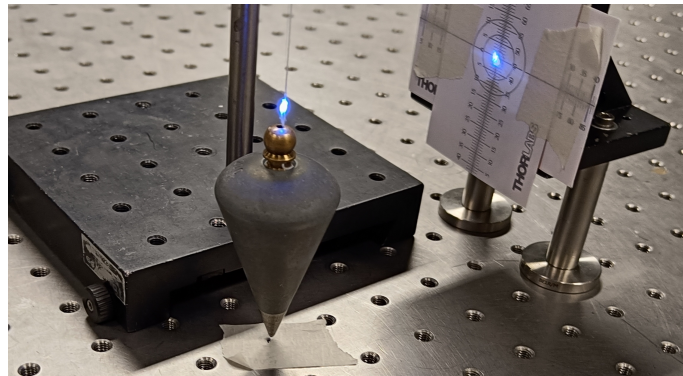
3.2 Uppställning

Innan uppställningen började byggas var ett par parametrars värden tvungna att bestämmas. Dessa var avståndet mellan spegeln och BBO-kristallen respektive avståndet mellan BBO-kristallen och kollimatorerna. Då de nedkonverterade fotonerna har en fix vinkelavvikelse på 3° är detta ekvivalent med att bestämma avståndet mellan speglarna respektive mellan kollimatorerna, se figur 3.2. För att få plats med speglarna bredvid varandra valdes ett avstånd mellan mittspegeln och BBO-kristallen på $x = 1,15$ m och för enkel inställning av kollimatorerna valdes ett avstånd på $y = 1$ m från BBO-kristallen till kollimatorernas mittpunkt.



Figur 3.2: Villkoren som avstånden mellan komponenterna måste uppfylla. Minsta avståndet från en komponent till BBO-kristallen är begränsat av hur nära varandra det går att ställa speglar ($S1$, $S2$ och $S3$) och kollimatorer ($K1$ och $K2$). $S1$ och $S2$ fästes i fällbara hållare för att underlätta byte av vilken spegel som skulle användas. $S1$ och $S3$ användes för att positionera $K2$ respektive $K1$, $S2$ användes för att generera sammanflätade fotonpar. Avståndet mellan mittspegeln och BBO-kristallen var $x = 1,15$ m och avståndet från BBO-kristallen till kollimatorernas mittpunkt var $y = 1$ m.

För att garantera att laserstrålen passerade rakt över en markerad position i bordets plan användes ett lod. Detta gjordes genom att sätta lodets spets mot en önskad punkt på bordet och rikta lasern mot tråden som lodet hängde i, se figur 3.3.

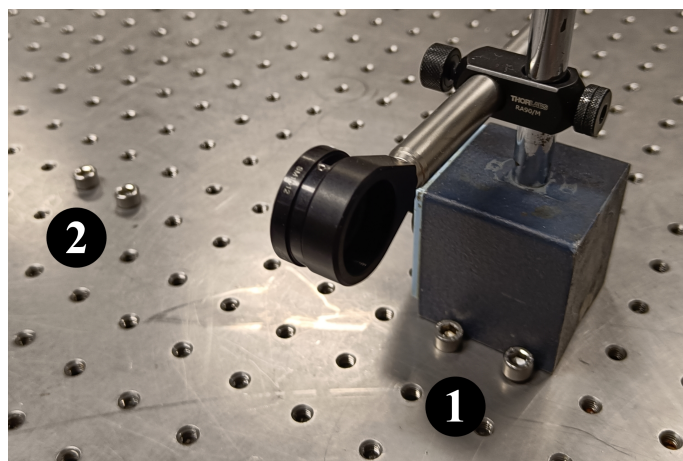


Figur 3.3: I bild ses hur lodet har placerats över en markering på tejbiten. Lasern (405 nm) har sedan justerats så att ljuset träffar lodsnöret och därmed färdas ljuset exakt över markeringen.

3.2.1 Inriktning av laserstrålen

Första steget vid uppställningen var att säkerställa att lasern gick parallellt med bordet och i önskad riktning. Detta behövdes göras dels för strålgången mellan lasern och speglarna och dels mellan spegeln och BBO-kristallen, där samma tillvägagångssätt användes i båda fallen.

Vid två propagationspunkter fästes skruvar på ett bestämt avstånd transversellt mot laserns bana, mot vilka aperturuppställningar likt den i figur 3.4 kunde ställas. Genom att flytta aperturen fram och tillbaka mellan dessa positioner, och justera aperturens position relativt foten i den närmre punkten och spegelns eller laserns (beroende på vilken inställning som gjordes) lutning i den bortre punkten. Därmed säkerställdes att laserns riktning konvergerade mot att peka i önskad riktning både vertikalt och horisontellt.



Figur 3.4: Aperturuppställningen som användes för att rikta in laserstrålen. I bilden syns de två skruvstoppen utmarkerade mot vilka hållarens fot fixerades. Om lasern antas komma från höger i bilden justerades aperturens position i sid- och höjdlid i punkt 1 medan spegelns eller laserns riktning justerades i punkt 2.

3.2.2 Bestämning av avstånd mellan speglar, BBO-kristaller och kollimatorer

De longitudinella avstånden från speglarna till BBO-kristallen och därefter till kollimatorerna markerades genom att mäta längs med bordet. De avstånd som valdes var multipler av bordets hålavstånd för att underlätta mätningarna. På punkten som valdes för BBO-kristallens position gjordes en markering och en apertur placerades över denna. Dess höjd ställdes in så att lasern passerade mitt i aperturen. Aperturens diameter ställdes in så att den var precis lika stor som laserstrålens diameter. Punkten mittemellan kollimatorerna markerades på rätt avstånd från BBO-kristallen och de avstånd vinkelrätt mot laserns riktning som motsvarar 3° mättes med linjal och markerades på bordet.

3.2.3 Placering av hjälpspeglar och kollimatorer

När kollimatorernas position hade markerats på bordet ställdes lodet över dessa. Genom att placera hjälpspeglarna så att laserstrålen passerade genom aperturen på BBO-kristallens position samt träffade lodsnöret kunde de nedkonverterade fotonernas bana följas. Efter detta togs lodet bort och kollimatorerna placerades så att den nyligen inställda laserstrålen träffade mitt på dem.

De två speglarna närmast lasern sattes i fällbara hållare (Thorlabs FM90/M) så att det vid behov var möjligt att gå tillbaka och göra justeringar utan att större ändringar i uppställningen behövde göras.

3.2.4 Kalibrering av kollimatorer med hjälp av en laser

När positionen för kollimatorerna bestämts behövdes deras riktning ställas in. För att göra detta fästes en röd fiberlaser i andra ändan av kollimatorns fiberkabel. Ljuset från denna propagerade åt motsatt håll genom uppställningen. Kollimatorns lutning justerades tills laserpricken träffade mitt på den blåa laserns öppning. Den blåa lasern var avstängd under denna process. Efter detta togs fiberlasern bort och en kollimator sattes i dess plats. Den blåa lasern startades och när blått laserljus lös från den bakre kollimatorn ansågs justeringen av den insamlade kollimatorn färdig.

3.2.5 Placering och justering av BBO-kristallen

Då alla strålgångar bestämts byttes aperturen ut mot den dubbla BBO-kristallen. Denna sattes i en stabil ställning, där BBO-kristallernas vinkel kunde ändras med hög precision utan att den flyttas. För att vara säker på att kristallen har rätt lutning kan laserljus med olika polarisationer lysa genom BBO-kristallen. Då den har rätt lutning ges samma mängd nedkonverterat ljus för samtliga polarisationer som justerades med hjälp av halv vågsplattan, samma som senare användes för att se till att ljuset var polariserat med en vinkel på 45° .

3.3 Optimering av kvanttillståndet

För att kunna mäta ett så högt S -värde som möjligt måste de nedkonverterade fotonernas kvanttillstånd

$$|\psi\rangle = \cos(\theta) |V\rangle |V\rangle + e^{i\varphi} \sin(\theta) |H\rangle |H\rangle \quad (3.1)$$

så väl som möjligt approximera tillståndet $|\psi_{EPR}\rangle$, ekvation (2.32) genom att ställa in optimala värden på θ och φ som betecknar polarisationsvinkel respektive kvantfasen. Hur detta gjordes experimentellt redovisas nedan.

3.3.1 Komponenternas inverkan på kvanttillståndet

Tillståndets polarisationsvinkel θ ställdes primärt in genom att justera halvvågsplattans vinkel runt propagationsaxeln, där en justering $\Delta\theta$ på halvvågsplattan gav en förändring $2\Delta\theta$ på tillståndets polarisation. Justering av fasskillnaden φ gjordes genom att rotera fas-BBO-kristallen runt propagationsaxeln. Det är möjligt att rotera kring vertikalaxeln, men med uppställningen som användes gick inte denna vinkel att kvantifiera med tillräcklig noggrannhet. Då det inte var känt exakt hur fas-BBO-kristallens vinkel påverkar tillståndet ställdes den in på ett godtyckligt värde och justerades därifrån. Rotation av fas-BBO-kristallen ger utöver fasskiftet även upphov till en liten ändring av polarisationsvinkeln θ , denna ändring var för stor för att försumma.

3.3.2 Optimeringsalgoritm för halvvågsplattan och fasjusterande BBO-kristallen

För att kunna ställa in kvanttillståndet $|\psi\rangle$ krävdes ett sätt att mäta systemets polarisationsvinkel θ och fas φ . Både halvvågsplattan och fas-BBO-kristallen påverkade både θ och φ krävde en algoritm som kunde konvergera mot det optimala tillståndet $|\psi_{EPR}\rangle$.

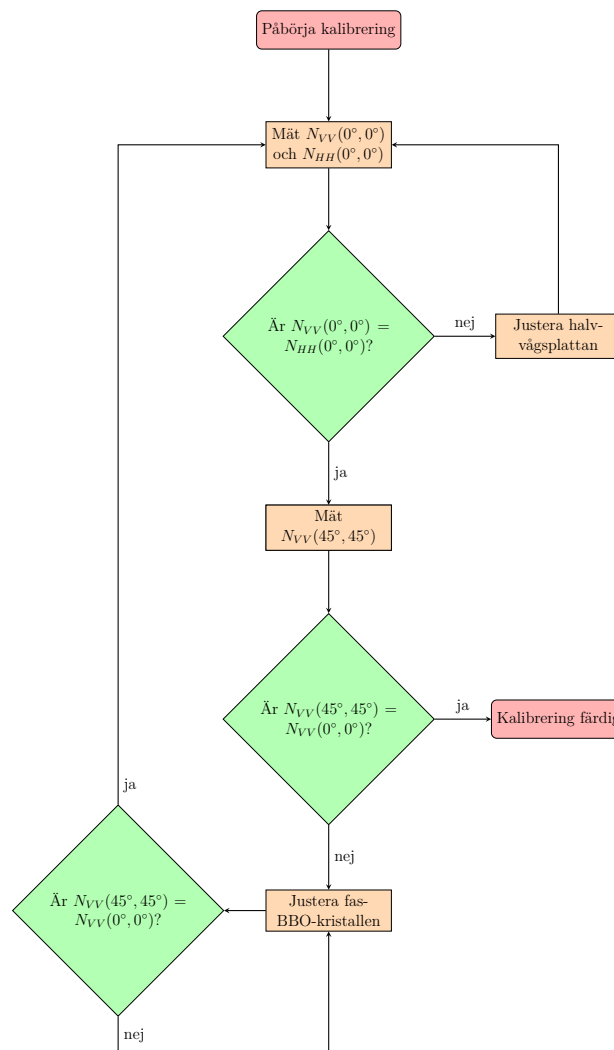
Algoritmen som användes var till stor del baserad på den inställning av kvanttillståndet som föreslås av Dehlinger och Mitchell i "Entangled photons, nonlocality, and Bell inequalities in the undergraduate laboratory" [21]. För att mäta vinklarna användes antalet koincidensdetektioner för olika polarisationsvinklar, exempelvis är $N_{HV}(\alpha, \beta)$ antalet koincidenser med polarisationsinställningar horisontellt och vertikalt relativt vinklarna α och β på första respektive andra polarisatorn (horisontellt avser parallellt med vinkeln). I det tillstånd som maximerar S -värdet, $\theta = 45^\circ$, gäller för antalet koincidenser som detekteras för två vertikalt inställda polarisatorer, $N_{VV}(0^\circ, 0^\circ)$, respektive för två horisontellt inställda polarisatorer, $N_{HH}(0^\circ, 0^\circ)$, att $N_{VV}(0^\circ, 0^\circ) = N_{HH}(0^\circ, 0^\circ)$. Detta eftersom

$$\begin{aligned} N_{VV}(0^\circ, 0^\circ) &\sim \cos^2(\theta) \\ N_{HH}(0^\circ, 0^\circ) &\sim \sin^2(\theta) \end{aligned} \quad (3.2)$$

där likhet endast råder för $\theta = \pm 45^\circ$. Detta kunde därför användas som ett experimentellt sätt att optimera θ . För fasskillnaden φ gäller

$$N_{VV}(45^\circ, 45^\circ) \sim \cos(\varphi) \quad (3.3)$$

och alltså kunde fasskillnaden minimeras genom att maximera $N_{VV}(45^\circ, 45^\circ)$. För matematisk härledning av dessa samband se appendix B.1. Med de ovanstående observationerna som grund följde en metod för justering av kvanttillståndet enligt flödesschemat i figur 3.5. Metoden gick ut på att först ställa in polarisationsvinkeln θ genom att justera halvvågsplattan tills $N_{VV}(0^\circ, 0^\circ) = N_{HH}(0^\circ, 0^\circ)$ erhöles. Efter detta mättes $N_{VV}(45^\circ, 45^\circ)$, ifall $N_{VV}(45^\circ, 45^\circ) = N_{VV}(0^\circ, 0^\circ)$ var kalibreringen klar. Annars justerades fas-BBO-kristallen tills det nya värdet på $N_{VV}(45^\circ, 45^\circ)$ var ungefär samma som det gamla värdet på $N_{VV}(0^\circ, 0^\circ)$. Eftersom detta ändrat värdet på θ börjades nu proceduren om på nytt. Detta upprepades tills $N_{VV}(45^\circ, 45^\circ) = N_{VV}(0^\circ, 0^\circ)$ vid första mätningen av $N_{VV}(45^\circ, 45^\circ)$, det vill säga tills fassen φ var rätt precis efter att polarisationsvinkel θ kalibrerats klart. Ju lägre tolerans som tilläts för likheterna desto bättre kvanttillstånd erhöles.



Figur 3.5: Flödesschema över kvanttillståndsoptimeringsalgoritmen.

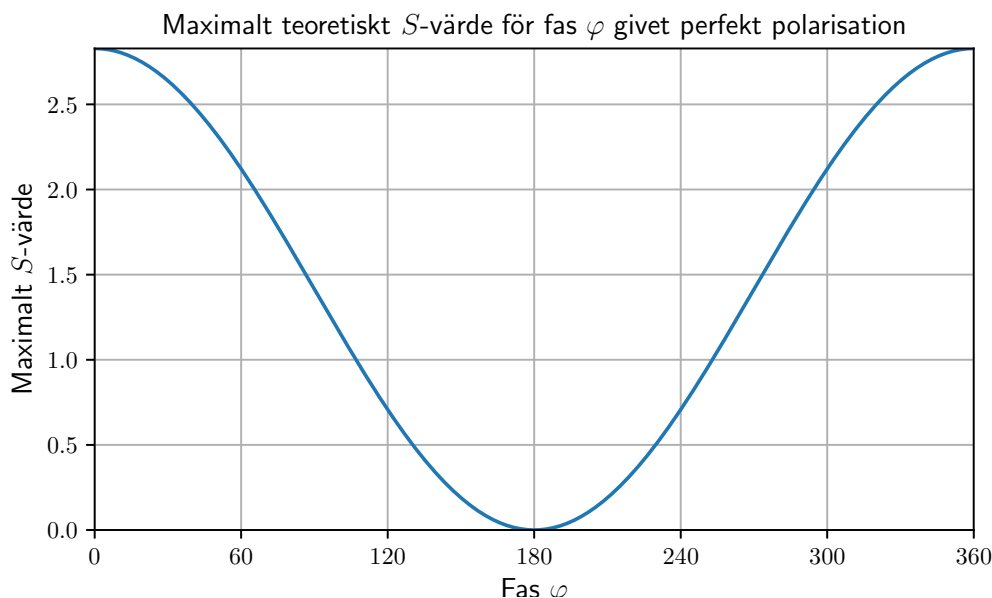
När ett tillstånd hade kalibrerats klart kunde fassen φ beräknas genom

$$P_{VV}(45^\circ, 45^\circ) = \frac{1}{4} + \frac{\cos(\varphi)}{4} \quad (3.4)$$

där $P_{VV}(45^\circ, 45^\circ)$ är sannolikheten att mäta koincidens med båda polarisatorerna inställda diagonala och parallella med varandra, för härledning se appendix B.1. Värdet på $P_{VV}(45^\circ, 45^\circ)$ uppskattades från

$$P_{VV}(45^\circ, 45^\circ) = \frac{N_{VV}(45^\circ, 45^\circ)}{N_{VV}(0^\circ, 0^\circ) + N_{HH}(0^\circ, 0^\circ)}. \quad (3.5)$$

Detta värde kunde sedan användas för att numeriskt beräkna det teoretiskt största möjliga S -värdet genom tillämpning av ekvation (2.21), (2.22) och de oförenklade uttrycken för $P_{VV}(\alpha, \alpha', \beta, \beta')$ etc. i appendix B.1, där $(\alpha, \alpha', \beta, \beta')$ är polarisationsvinklar. S -värdet beräknades för vinklar $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ som maximerar S då polarisationen $\theta = 45^\circ$ och fasen $\varphi = 0^\circ$. Dessa återfinns i tabell 3.1. En figur som visar hur S beror på fasen φ är given i figur 3.6, ur vilket man ser att $S(\varphi) = \sqrt{2}(\cos(\varphi) + 1)$. Med det beräknade värdet på φ och uttrycket för $S(\varphi)$ kunde det avgöras om kvanttillståndet var bra nog för att teoretiskt kunna mäta ett S -värde större än 2.



Figur 3.6: $S(\alpha, \alpha', \beta, \beta', \varphi)$ med polarisatorvinklar $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ som maximerar S för polarisation $\theta = 45^\circ$ och fas $\varphi = 0^\circ$, givet som funktion av fas φ .

3.4 Mätpunkter och mätdata

För att kunna mäta S -värdet definierat av ekvation (2.21) och därigenom motbevisa Bells olikhet krävdes de fyra termerna $E(\alpha, \beta)$, $E(\alpha, \beta')$, $E(\alpha', \beta)$ och $E(\alpha', \beta')$. Dessa bestämdes i sin tur enligt ekvation (2.22) av de fyra sannolikheterna $P_{VV}(\alpha, \beta)$, $P_{VH}(\alpha, \beta)$, $P_{HV}(\alpha, \beta)$ och $P_{HH}(\alpha, \beta)$. För att empiriskt beräkna ett värde på S approximerades sannolikheterna med de olika utfallens relativa frekvens, exempelvis gavs

$$P_{VV}(\alpha, \beta) = \frac{N_{VV}(\alpha, \beta)}{N_{VV}(\alpha, \beta) + N_{VH}(\alpha, \beta) + N_{HV}(\alpha, \beta) + N_{HH}(\alpha, \beta)}. \quad (3.6)$$

Totalt krävdes därmed 16 mätningar med olika polarisationsvinklar, givna av vinklarna i tabell 3.1.

Tabell 3.1: *Polarisationsvinklar för respektive mätning.*

Vinklar	Polarisator	Polarisatorinställning			
		VV	VH	HV	HH
$\alpha = 45^\circ$	A	135°	135°	45°	45°
$\beta = 22,5^\circ$	B	$112,5^\circ$	$22,5^\circ$	$112,5^\circ$	$22,5^\circ$
$\alpha' = 0^\circ$	A	90°	90°	0°	0°
$\beta = 22,5^\circ$	B	$112,5^\circ$	$22,5^\circ$	$112,5^\circ$	$22,5^\circ$
$\alpha = 45^\circ$	A	135°	135°	45°	45°
$\beta' = -22,5^\circ$	B	$67,5^\circ$	$157,5^\circ$	$67,5^\circ$	$157,5^\circ$
$\alpha' = 0^\circ$	A	90°	90°	0°	0°
$\beta' = -22,5^\circ$	B	$67,5^\circ$	$157,5^\circ$	$67,5^\circ$	$157,5^\circ$

Dessa mätningar och ändringar av polarisationsvinklar utfördes automatiskt via ett egenskrivet LabVIEW-program som även styrde datainsamlingen och gjorde de nödvändiga beräkningarna för att få fram ett värde på S . Datan kunde därefter exporteras och analyseras vidare i Python. För fullständig kod se [23].

3.5 Felanalys

För att avgöra om värdena på S motbevisar Bells olikhet måste mätningarnas osäkerhet bestämmas. För en skattning av felet kan felfortplantningsformeln

$$\sigma_{y(x_1, x_2, x_3, \dots)} = \sqrt{\sum_i \left| \frac{\partial y}{\partial x_i} \right|^2 \sigma_{x_i}^2} \quad (3.7)$$

användas, där $\sigma_{y(x_1, x_2, x_3, \dots)}$ är osäkerheten i det uppmätta värdet $y(x_1, x_2, x_3, \dots)$ och σ_{x_i} är osäkerheterna i de ingående värdena x_i [24]. Värdet S består av fyra olika $E(\alpha_i, \beta_i)$ -termer där (α_i, β_i) är alla kombinationer av α , α' och β , β' , på grund av detta kan osäkerheten i S beräknas som osäkerheten av $\sum_i E(\alpha_i, \beta_i)$ där osäkerheterna kan beräknas för varje $E(\alpha_i, \beta_i)$ separat.

Osäkerheterna i S kan beräknas på två olika sätt: antingen från osäkerheter i variablerna i det teoretiska uttrycket för S orsakade av osäkerheter i uppställningen, exempelvis polarisationsvinkeln θ , eller från osäkerheter i mätdata som påverkar det beräknade värdet på S . Eftersom dessa två osäkerheter är oberoende av varandra gäller att den totala variansen σ_S^2 ges som summan av den teoretiska variansen $\sigma_{(\alpha, \beta, \varphi, \theta)}^2$ och variansen från mätdata, σ_N^2 , det vill säga

$$\sigma_S = \sqrt{\sigma_{(\alpha, \beta, \varphi, \theta)}^2 + \sigma_N^2}. \quad (3.8)$$

Alternativt kan detta ses som tillämpning av ekvation (3.7) på alla typer av osäkerheter. Tillämpning av ekvation (3.7) på det teoretiska uttrycket för S givet i ekvation (2.26) ger osäkerheten

$$\sigma_{(\alpha, \beta, \varphi, \theta)} = 2\sqrt{6} \sigma_{\text{pol}} \quad (3.9)$$

där polarisatorernas osäkerhet σ_{pol} antas vara samma för båda polarisatorerna. Fullständig härledning av uttrycket ges i appendix C.1. I de manuella respektive automatiska mätningarna uppskattas osäkerheterna i polarisatorerna, $\sigma_{\text{pol}}^{\text{man}}$ respektive $\sigma_{\text{pol}}^{\text{auto}}$ till

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{pol}}^{\text{man}} &\approx 1^\circ = 0,0175 \text{ rad}, \\ \sigma_{\text{pol}}^{\text{auto}} &\approx 0,3^\circ = 0,00524 \text{ rad}\end{aligned}\quad (3.10)$$

där de automatiserade mätningarnas osäkerhet kommer från att enheten har en referensnoggrannhet på $0,2^\circ$ och en dubbelriktad repeterbarhet på $0,1^\circ$ [25]. Insättning av polarisationsosäkerheterna i ekvation (3.9) ger de teoretiska osäkerheterna för den manuella mätningen $\sigma_{(\alpha,\beta,\varphi,\theta)}^{\text{man}}$ respektive automatiska mätningen $\sigma_{(\alpha,\beta,\varphi,\theta)}^{\text{auto}}$ till

$$\begin{aligned}\sigma_{(\alpha,\beta,\varphi,\theta)}^{\text{man}} &= 0,0855, \\ \sigma_{(\alpha,\beta,\varphi,\theta)}^{\text{auto}} &= 0,0257.\end{aligned}\quad (3.11)$$

För osäkerhet från mätdata ges uttrycket

$$\sigma_N = \sqrt{\sum_i \sum_{AB} \left| \frac{\partial E_{\alpha_i, \beta_i}}{\partial N_{AB}} \right|^2 \sigma_{N_{AB}}^2} \quad (3.12)$$

där (α_i, β_i) är alla kombinationer av α , α' och β , β' , AB är alla kombinationer av vertikal V och horisontell H , derivatorna $\frac{\partial E_{\alpha_i, \beta_i}}{\partial N_{AB}}$ ges av

$$\nabla E_{\alpha, \beta}(N_{VV}, N_{VH}, N_{HV}, N_{HH}) = \begin{bmatrix} (N_{VV} + N_{VH} + N_{HV} - N_{HH})/N_{\text{tot}}^2 \\ (-N_{VV} - N_{VH} + N_{HV} - N_{HH})/N_{\text{tot}}^2 \\ (-N_{VV} + N_{VH} - N_{HV} - N_{HH})/N_{\text{tot}}^2 \\ (-N_{VV} + N_{VH} + N_{HV} + N_{HH})/N_{\text{tot}}^2 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

där $N_{\text{tot}} = \sum_{AB} N_{AB}$ och osäkerheterna $\sigma_{N_{AB}}^2$ beräknas från mätdata. För fullständig härledning se appendix C.2. Numeriska beräkningar av dessa ger osäkerheterna från mätdata för manuella mätningar σ_N^{man} respektive automatiserade mätningar σ_N^{auto} som

$$\begin{aligned}\sigma_N^{\text{man}} &= 0,0468, \\ \sigma_N^{\text{auto}} &= 0,0295.\end{aligned}\quad (3.14)$$

Om båda typer av osäkerhet kombineras enligt ekvation (3.8) ges då den totala osäkerheten för den manuella mätningen $\sigma_{\text{tot}}^{\text{man}}$ respektive automatiska $\sigma_{\text{tot}}^{\text{auto}}$ av

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{tot}}^{\text{man}} &= 0,0974, \\ \sigma_{\text{tot}}^{\text{auto}} &= 0,0378.\end{aligned}\quad (3.15)$$

För att räkna ut S -värde och de olika osäkerheterna användes ett Pythonprogram [23].

4

Resultat

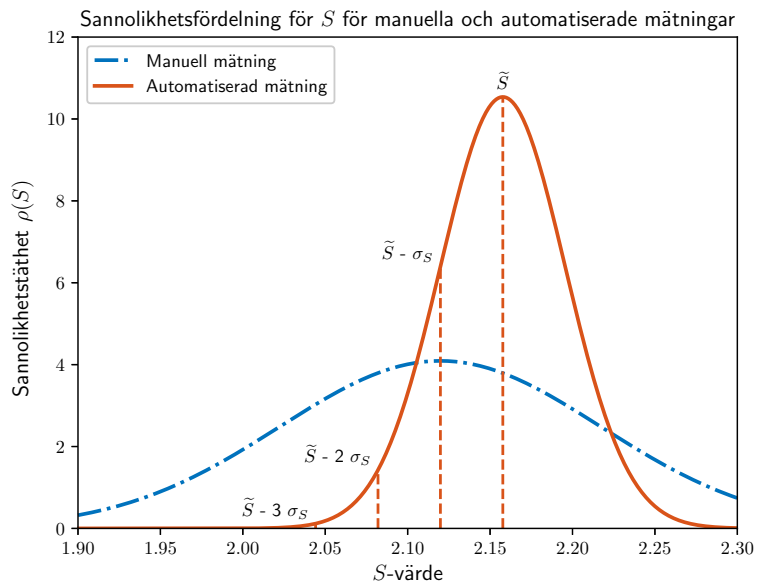
Under projektets gång gjordes flera mätserier. Se appendix D för mätdata. Inför den bästa manuella S -värdes-mätningen var kvanttillståndet sådant att det genererade värdena i tabell D.1 efter tillämpning av kvanttillståndsoptimeringsalgoritmen i figur 3.5. Efter tillämpning av ekvation (3.4) på datan erhöles ett maximalt teoretiskt $S = 2,654$. Medelvärde och standardavvikelse för S -värdesmätning redovisas i tabell D.2, och tillämpning av ekvation (3.6) på samtliga mätpunkter i tabellen följt av tillämpning av ekvation (2.22) och (2.21) ger det experimentella värdet $S = 2,1198 \pm 0,0975$.

Efter detta gjordes mätningar med automatiserade polarisatorer, med kvanttillstånd sådant att det genererade de kalibreringsmätningar som syns i tabell D.3. Tillämpning av ekvation (3.4) gav från dessa värden ett maximalt teoretisk $S = 2,662$. För detta tillstånd gjordes två mätningar, en första med 20 ns koincidensfönster och en andra med 1 ns koincidensfönster. Resultaten för dessa presenteras i tabell D.4 respektive D.5. Värdena i respektive tabell ger de experimentella värdena $S = 2,1527 \pm 0,0363$ respektive $S = 2,1577 \pm 0,0379$ efter samma beräkningar som gjordes ovan för de manuella mätningarna. Eftersom de två mätningarna är så lika används endast den sista vid vidare analys.

Med de givna S -värdena och standardavvikelsena från felanalysen i avsnitt 3.5 kan en sannolikhetstäthet $\rho(S)$ anpassas till resultaten. Eftersom S är en summa av flera (approximativt) oberoende variabler är det rimligt att ansätta en normalfördelning

$$\rho(S) = N e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{S - \tilde{S}}{\sigma_S} \right)^2} \quad (4.1)$$

där \tilde{S} är det uppmätta värdet på S , σ_S är den beräknade standardavvikelsen och N är en normaliseringskonstant. Visualisering av denna anpassning ges i figur 4.1.



Figur 4.1: Sannolikhetstäthetsanpassning för respektive S -värdesmätning som redovisar det uppmätta värdet samt dess osäkerhet. För den automatiserade mätningen är det uppmätta värdet $\tilde{S} = 2,1577$ markerat samt en serie punkter med inbördes avstånd på en standardavvikelse $\sigma_S = 0,0379$. Den manuella mätningen gav det uppmätta värdet $S = 2,1198$ med standardavvikelse $0,0975$.

5

Diskussion

Detta projekt behandlar flera olika aspekter kring vår experimentella undersökning av Bells olikhet. Vikt läggs på att kommentera det experiment som utfördes med det resultat som gavs, samt att diskutera experimentets applicerbarhet för fysikutbildningarna.

5.1 Resultat av S -värdesmätningarna

Från resultaten i avsnitt 4 framgår att ett S -värde på $S = 2,1577 \pm 0,0379$ uppmättes, vilket överskrider gränsen för Bells olikhet med cirka 4 standardavvikelsers marginal. Om den ansatta normalfördelningsanpassningen används för att testa hypotesen $S < 2$ så beräknas p -värdet till $p = \int_{-\infty}^2 \rho(S) dS = 0.00002$. En accepterad gräns för signifikans är $p < 0.005$. Med detta värde på p kan därmed hypotesen $S < 2$ förkastas och således har Bells olikhet motbevisats [26]. För de manuella mätningarna applicerades samma procedur som ovan vilket gav ett p -värde på $p = 0.11$ vilket överskrider signifikansgränsen. Därför behövdes de automatiska mätningarna för att erhålla signifikanta resultat.

Värdet på S försökte maximeras genom att justera kvanttillståndet med hjälp av optimeringsalgoritmen i avsnitt 3.3. Användning av ekvation (3.4) gav värden på fasen φ omkring 30° för vilken teoretiska värden på S upptill 2,6 är möjliga, se figur 3.6. Eftersom detta är betydligt högre än värdena som erhöles försökte andra parametrar förbättras för att få ett högre värde på S .

För att bli av med slumpmässiga koincidenser (som sänker värdet på S) minskades koincidensfönstret från 20 ns till 1 ns vilket förväntade minska de slumpmässiga koincidenserna med en faktor 20. Detta gav emellertid försumbar skillnad på S -värdet, $S = 2,1527$ för 20 ns fönster och $S = 2,1577$ för 1 ns koincidensfönster. Detta talar för att någon annan komponent av uppställningen är orsaken till de lägre S -värdena än teoretiskt möjligt. Trots att värdena inte var så höga som teoretisk möjligt motbevisades Bells olikhet med så stor säkerhet att teorier kring lokala dolda variabler kan anses ha motbevisats.

5.2 Möjliga felkällor och förbättringar

Den mest uppenbara osäkerheten som också är enklast att åtgärda är vilken typ av polarisationsfilter som används. De polarisationsfilter som användes i det utförda experimentet, Thorlabs LPVISE100-A, har för en våglängd på 810 nm ett utsläckningsförhållande på 26,89 [27] (andel transmitterat ljus av den önskade polarisationen delat med andelen av den blockerade) vilket är ett lågt värde. Detta innebär att en relativ stor andel oönskade fotoner släpps igenom vilket leder till felaktiga koincidenser. Detta i sin tur leder till ett minskat S -värde.

Det kan diskuteras hur bakgrund och brus har påverkat resultatet. Vid mätningar av antal inkommande fotoner med lasern avstängd uppmättes bakgrunden till omkring 300 fotoner per sekund, medan signalen med lasern på gav ungefär 1600 fotoner per sekund. Under koincidensmätningar utan laser uppmättes ett fåtal (0-5, i de flesta fall noll) koincidensdetektioner under ett intervall på 20 sekunder. Jämförelsevis erhöles minst 340 koincidensdetektioner under samma tidsintervall under S -värdesmätningar (med lasern på).

Det sämsta tänkbara sättet som bakgrund och brus kan påverka värdet på S är genom att interferera så att det uppmätta värdet blir större än det faktiska värdet. Detta genom att höja de värden som ska vara höga och inte påverka de som ska vara låga. Om detta antas ha hänt med maximal uppmätt brusamplitud på samtliga mätningar som gav det uppmätta värdet $S = 2,1577$ kan det faktiska värdet i värsta fall ha varit $S = 2,1464$. Detta resultat skiljer sig försumbart från de redovisade resultaten och bedöms därmed vara litet nog för att ej behöva tas hänsyn till.

En annan osäkerhet, som vi inte undersökt, kan vara defekter i alla de komponenter som vardera sammanflätad foton passerar efter polarisationsfiltrena, närmare bestämt bandpassfilter, kollimator, multimodfiber och fotondetektor. I samtliga komponenter kan fotoner ha absorberats eller reflekterats beroende på dess polarisation och därmed bidragit till minskat antal koincidenser för vissa polarisatoruppställningar. Detta då det finns ett polarisationsberoende för reflektion och transmission mellan medium med olika brytningsindex. Om däremot alla typer av polariserade fotoner berörts lika mycket av samma problem så bör inte detta inverkat på S -värdet. Det antas att sannolikheten för inverkan är mycket låg.

Då det var mycket noggrant hur kollimatorerna orienterades kan det vara värt att undersöka om det finns alternativ för att fånga upp de sammanflätade fotonerna. En alternativ metod till att använda kollimatorer, som har använts i andra test av Bells olikhet, är att använda SPCM:er med ytmonterade sensorer [20]. Då vi inte har personlig erfarenhet av att använda dessa kan det inte ges vidare analys om dessa hade underlättat uppställningen eller ej.

En annan metod, som skulle underlätta inställningen av kollimatorerna och BBO-kristallen, är att kunna se antal fotoner som träffar vardera detektor samt koincidensdetektioner i realtid. Detta kan realiseras exempelvis med hjälp av en FPGA (från eng. Field-Programmable Gate Array) [22]. Genom att kunna se alla värden samtidigt är det lättare att optimera uppställningen. Små justeringar kan göras och regleras i realtid vilket kan ge betydligt snabbare inställningstid.

5.3 Reflektioner kring uppställning och metod

Här följer motiveringar för den uppställningsprocedur som förklaras i metodavsnittet 3.2, samt viktiga aspekter att tänka på vid uppställning.

Under projektets gång testades flera olika uppställningar. Inledningsvis testades att placera komponenterna på uppmätta positioner utan att ta tillräcklig hänsyn till deras känslighet i riktning. Det visade sig att denna uppställning inte var tillräckligt precis då den inte kunde detektera några nedkonverterade fotoner, trots att positionerna finjusterades med hjälp av linjärtranslatorer. Då flera parametrar visade sig vara väldigt känsliga för avvikelser från den korrekta positionen användes

istället en metod för att bygga uppställningen baserad på en metod av Kiko Galvez vid Colgate University [22]. Metoden bygger på att man emulerar de osynliga nedkonverterade fotonernas strålgång med en synlig laser för att kunna ställa alla komponenters position och riktning med mycket hög noggrannhet.

För att hålla uppställningen enkel användes samma laser för att visa strålgång och skapa nedkonverterade fotoner. Spegel användes för att kunna styra lasern i önskade riktningar. Ytterligare en fördel med att använda samma laser till alla tre strålgångar är att det garanterar att alla reflekterade strålar som används för att positionera kollimatorerna och BBO-kristallen utgår från samma höjd relativt bordet, förutsatt att lasern monterats horisontellt. Lasern måste vara horisontell för att inte störa senare inställningar.

Anledningen till att en apertur användes på BBO-kristallens position istället för att sätta dit BBO-kristallen direkt är att laserstrålen måste passera ett hål som är lika litet som dess diameter. Detta är möjligt med aperturens hål som kan anpassas och inte BBO-kristallens som är fixt. Om hålet är för stort kommer ett spann av propagationsbanor uppfylla kravet att de både passerar genom kristallen och träffar lodsnoet. Risken är därmed stor att en inställning väljs som är nära 3° men tillräckligt avvikande för att störa mätningen.

Värt att notera är också att under en tidig version av mätuppställning detekterades ströljus när strålstoppen var placerad bakom kollimatorerna, detta eftersom laserljus reflekterades på strålstoppen och baksidan av bandpassfiltret för att nå kollimatorerna. I den senaste uppställningen var strålstoppen framför kollimatorerna och då detekterades inget ströljus.

5.4 Experimentets relevans för utbildningarnas innehåll

För att komma fram till experimentets relevans för utbildningarna som den skulle kunna bli en del av, behöver experimentets teoretiska bakgrund sättas i kontext kring fysikkursernas innehåll. Avsnitt 2.1 om EPR-paradoxen beskriver de skillnader mellan klassisk och modern fysik som studenterna får lära sig under kurser i speciell relativitetsteori och kvantfysik. Även avsnitt 2.2 behandlar grundläggande kvantfysik som lärs ut i kurser för respektive utbildning. I nuläget har dock inte de effekter av kvantfysik som diskuteras i ovanstående avsnitt någon större vikt i undervisningen utan nämns enbart översiktligt. Det är därför viktigt att studenterna förbereds inför laborationen. Kvantfysiken är en vedertagen teori idag varför det finns risk att experimentet upplevs meningslöst. För att förstå relevansen av projektlaborationen och hur experimentet revolutionerade fysikvärlden behöver studenter förstå den historiska kontexten.

Ett sådant här experiment kan ge studenter en insyn i modern forskning och hur det faktiskt är att undersöka osynliga fenomen. För den intresserade studenten som vill fortsätta en forskningskarriär eller fördjupa sig i kvantfysiken kan detta experiment vara en givande erfarenhet.

I det fall laborationen ska användas i kurser i experimentell fysik bör det även undersökas vilken referenslitteratur studenter behöver. Förmodligen behöver denna

innehålla både grundläggande teori kring sammanflätning samt mer specifik information om vilka mätningar som är relevanta och hur datan kan behandlas.

5.5 Anpassning av experimentet till projektbase- rade laborationer

En tidig insikt i arbetsprocessen var att experimentuppställningen behöver vara helt eller delvis uppställd innan laborationstillfället om studenterna förväntas genomföra ett experiment som genererar önskat resultat på en så kort tid som en eller två arbetsdagar. Själva uppställningen av laser, speglar och kollimatorer tar en arbetsdag, förutsatt att studenterna har planerat en korrekt uppställning samt är bekanta med den utrustning som används. Då en projektbaserad laboration i experimentell fysik sträcker sig över tre arbetsdagar är det osäkert hur stor andel av studenterna som skulle få resultat. Under dessa tre dagar ska studenterna även haft möjlighet att utföra en extra laboration för att kunna få högre betyg. På grund av detta anser vi att de mer tidskrävande delarna av uppställningsprocessen, placering och linjering av laser, speglar, BBO-kristall och kollimatorer bör vara färdigjusterade innan labbtillfället.

Det som skulle ge en rimlig mängd arbete för kortare laborationer på en till två dagar är att först justera fotonernas kvanttillstånd och sedan mäta ett S -värde som motsäger Bells olikhet. Den kristall som används för justering av fas påverkar både polarisation och kvantfas. Den största delen av inställning av polarisation är dock främst halv vågsplattan. På grund av detta blir inställningen av polarisation och kvantfas en iterativ process som är tidskrävande. Då placeringen av halv vågsplattan och fas-BBO-kristallen inte kräver samma noggrannhet som övriga komponenter är det möjligt att låta studenterna placera dem rätt i både position och riktning. Den elektroniska utrustning som används för att mäta och analysera datan från detektorerna kräver ingen större noggrannhet för att koppla in men kan för någon som inte använt den förut innebära en del arbete för att få allt att fungera korrekt. Dessa skulle därför kunna lämnas åt studenten att koppla in och ställa in för att ge laborationen en rimlig arbetsbörda.

Experimentet skulle även gå att använda för demonstrativt syfte och genomföras som en kortare laboration (en halv dag eller kortare) i kurser inom kvantfysik. I dessa fall rekommenderas hela uppställningen vara korrekt uppställd från start. För att få ut så mycket som möjligt från laborationen föreslås att handledare har en noga utvald samling vinklar att demonstrera på de komponenter som ska vridas så att ett önskat S -värde kan nås. En sådan laboration rekommenderas vara mer teori-baserad och demonstrera hur teorin kopplar till komponenterna i uppställningen. Då det krävs många mätningar för att få fram ett resultat och detta dessutom är intetsägande om deltagarna inte läst in sig på teorin, är det viktigt att studenterna gjort detta i förväg. Om kursen inte direkt behandlar Bells olikhet är det tveksamt om en handledarledd laboration skulle ge en ökad förståelse för kvantfysik. För utformning av en laboration i demonstrativt syfte bör man ha i åtanke att de nedkonverterade fotonerna finns i det infraröda spektrat och går därmed inte att se. Dessutom görs alla mätningar i mörker och tar förhållandevis lång tid att genomföra, vilket betyder

att mätningarna utöver den direkta mätdata är förhållandevis ointressanta för en observatör. På grund av allt detta är det viktigt att fråga sig om en sådan laboration fyller en pedagogisk funktion i undervisningen.

5.5.1 Om valet mellan handvridna och motoriserade polarisatorer

Under projektets gång användes två olika sorters polarisationshållare, en manuell som justerades för hand och en motoriserad som justerades via en dator. I de flesta fall är de motoriserade hållarna det bästa alternativet. Programvaran för att styra dem är enkel att använda och går snabbare än att justera manuellt. Mätningarna går dessutom att automatisera med exempelvis LabVIEW, vilket ytterligare underlättar genomförande av mätningar. Som visats i felanalysen i avsnitt 3.5 ger detta även betydligt lägre osäkerhet vilket innebär att det är lättare att motbevisa Bells olikhet.

Fördelen med manuella hållare är att de inte kräver en dator och övrig utrustning för motorisering, de ökar även interaktiviteten något. Utöver detta finns det få anledningar att använda de handvridna polarisatorerna. De motoriserade hållarna bör därmed vara det primära valet vid konstruktion av laborationen. De handvridna polarisatorerna gav ändå ett resultat som kan påvisa brott mot Bells olikhet och kan därmed vara ett bra reservalternativ om exempelvis motorerna inte fungerar.

5.5.2 Andra möjliga experiment med uppställningen

Runt den använda uppställningen finns möjlighet till att göra laborationer med andra syften än att motbevisa Bells olikhet. Att ställa upp uppställningen som används för att registrera nedkonverterade fotoner skulle kunna vara en laborationsuppgift för att träna på inriktning av lasrar. I detta fall bör instruktioner lika de som anges i denna rapport finnas tillgängliga för laboranterna då inställningarna i sig kan ta en dag eller mer även då laboranterna vet vad de ska göra.

Det är också möjligt att utföra laborationer kring enbart koincidensmätning. I detta fallet bör uppställningen vara färdig så att de nedkonverterade fotonerna når kollimatorerna och registreras av SPCM:erna. Laboranternas uppgift blir då att koppla in signalerna på rätt sätt mellan rätt moduler och ställa in de korrekt. Det är dock tveksamt om denna laboration skulle få en pedagogisk funktion eftersom den i sådant fall främst går ut på att läsa manualer och inte resulterar i någonting som är fysikaliskt intressant annat än slutsatsen att det går att mäta koincidens.

5.6 Risker med laseranvändning

I experimentet används en laser som var inställd på ungefär 5 mW under hela undersökningen. Denna effekt är skadlig för ögonen om de utsätts för direkt exponering. Under laborationen användes glasögon med skydd OD2+ för ljus med våglängd 405 nm. Detta skyddar ögonen mot reflektioner och mot kort (ungefär en sekund) exponering av direkt laserljus. Också värt att notera är att laserns spänningsaggregat kan tillåta effekter upp till 40 mW, vilket är mycket starkt laserljus. I det fall att experimentet används i en miljö där studenterna laborerar självständigt är

det därmed viktigt att de får en säkerhetsgenomgång och regler för användandet av lasern. Det bör övervägas att byta ut aggregatet alternativt modifiera det som användes i experimentet till att enbart tillåta effekter på 5 mW eller lägre för att minska risken för permanenta skador. Vid en färdig uppställning där lasern inte ska flyttas av laboranterna är risken för att få laserstrålning direkt i ögat liten, men kan öka om exempelvis speglar flyttas.

Eventuellt kan denna risk minskas ytterligare genom att bygga in delar av eller hela laborationen i ljustäta behållare. Detta medför emellertid en minskad interaktivitet som förstör syftet med laborationen. En uppställning som helt eliminerar risken för laserexponering omöjliggör inställning av andra parametrar än polarisationsriktning. En laboration som enbart går ut på att välja en uppsättning polarisationsinställning där laboranterna aldrig får se uppställningen kan förmodligen lika gärna göras som en teoretisk övning.

6

Slutsats

Vi gjorde en experimentell undersökning av Bells olikhet och fick som bäst ett S-värde på $2,1577 \pm 0,0379$ vilket motbevisar Bells olikhet $S < 2$ med en signifikansnivå $p = 2 \cdot 10^{-5}$. Från vår metodanalys har vi kommit fram till att det är för tidskrävande och svårt att utföra experimentet i sin helhet på den tid studenterna ges för en ordinarie projektlaboration. Däremot har vi gett förslag på alternativa delmoment av experimentet som skulle kunna genomföras för olika syften.

Litteratur

- [1] NobelPrize.org. "The Nobel Prize in Physics 2022." (2022), URL: <https://www.nobelprize.org/prizes/physics/2022/summary/> (hämtad 2023-03-18).
- [2] M. J. Klein, "Max Planck and the Beginnings of the Quantum Theory," *Archive for History of Exact Sciences*, årg. 1, nr 5, s. 459–479, 1962, ISSN: 00039519, 14320657. URL: <http://www.jstor.org/stable/41133222> (hämtad 2023-05-05).
- [3] A. Einstein, "Kinetische Theorie des Wärmegleichgewichtes und des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik [AdP 9, 417 (1902)]," *Annalen der Physik*, årg. 517, nr S1, s. 117–134, 1905. DOI: <https://doi.org/10.1002/andp.2005517S108>.
- [4] A. Einstein, "Zur Elektrodynamik bewegter Körper," *Annalen der Physik*, årg. 322, nr 10, s. 891–921, 1905. DOI: <https://doi.org/10.1002/andp.19053221004>.
- [5] A. Einstein, "Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie," *Annalen der Physik*, årg. 354, nr 7, s. 769–822, 1916. DOI: <https://doi.org/10.1002/andp.19163540702>.
- [6] N. Bohr, "I. On the constitution of atoms and molecules," *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, årg. 26, nr 151, s. 1–25, 1913. DOI: [10.1080/14786441308634955](https://doi.org/10.1080/14786441308634955).
- [7] M. Henningson, *Börja med kvantfysik*. Studentlitteratur, 2018, ISBN: 978-91-44-12388-2.
- [8] A. Einstein, B. Podolsky och N. Rosen, "Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?" *Phys. Rev.*, årg. 47, s. 777–780, 10 maj 1935. DOI: [10.1103/PhysRev.47.777](https://doi.org/10.1103/PhysRev.47.777).
- [9] N. Bohr, "Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality be Considered Complete?" *Phys. Rev.*, årg. 48, s. 696–702, 8 okt. 1935. DOI: [10.1103/PhysRev.48.696](https://doi.org/10.1103/PhysRev.48.696).
- [10] D. Bohm, "A Suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of "Hidden" Variables. I," *Phys. Rev.*, årg. 85, s. 166–179, 2 jan. 1952. DOI: [10.1103/PhysRev.85.166](https://doi.org/10.1103/PhysRev.85.166).
- [11] GBH. "Einstein's Quantum Riddle | Full Documentary | NOVA | PBS," PBS. (2019), URL: <https://youtu.be/068rdc75mHM?t=1479> (hämtad 2023-05-09).
- [12] J. S. Bell, "On the Einstein Podolsky Rosen paradox," *Physics Physique Fizika*, årg. 1, s. 195–200, 3 nov. 1964. DOI: [10.1103/PhysicsPhysiqueFizika.1.195](https://doi.org/10.1103/PhysicsPhysiqueFizika.1.195).

-
- [13] D. Bohm och Y. Aharonov, "Discussion of Experimental Proof for the Paradox of Einstein, Rosen, and Podolsky," *Phys. Rev.*, årg. 108, s. 1070–1076, 4 nov. 1957. DOI: 10.1103/PhysRev.108.1070.
- [14] J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony och R. A. Holt, "Proposed Experiment to Test Local Hidden-Variable Theories," *Phys. Rev. Lett.*, årg. 23, s. 880–884, 15 okt. 1969. DOI: 10.1103/PhysRevLett.23.880.
- [15] R. Bertlmann, "Quantum [Un]Speakables II," i Springer Cham, 2017, kap. Bell's Universe: A Personal Recollection, s. 17–80, ISBN: 978-3-319-38985-1.
- [16] S. J. Freedman och J. F. Clauser, "Experimental Test of Local Hidden-Variable Theories," *Phys. Rev. Lett.*, årg. 28, s. 938–941, 14 april 1972. DOI: 10.1103/PhysRevLett.28.938.
- [17] W. Zimmer, "Nichtlineare optische Effekte bei der Wechselwirkung von Femtosekundenlaserpulsen mit Mikrotropfen," doktorsavhandling, Fachbereich Physik, Freie Universität Berlin, 2001. URL: <http://www.diss.fu-berlin.de/2001/30/index.html>.
- [18] R. Y. Chiao, P. G. Kwiat och A. M. Steinberg, "Quantum Nonlocality in Two-Photon Experiments," i *Advances in Atomic, Molecular, and Optical Physics*, B. Bederson och H. Walther, utg., vol. 34, New York: Academic Press, 1995, ISBN: 9780080561455.
- [19] G. A. Reider, *Photonik, Eine Einführung in die Grundlagen*, 1. utg. Springer-Verlag, 2005, ISBN: 3-211-21901-3.
- [20] D. Dehlinger och M. Mitchell, "Entangled photon apparatus for the undergraduate laboratory," *American Journal of Physics*, årg. 70, nr 9, s. 898–902, 2002. DOI: 10.1119/1.1498859.
- [21] D. Dehlinger och M. W. Mitchell, "Entangled photons, nonlocality, and Bell inequalities in the undergraduate laboratory," *American Journal of Physics*, årg. 70, s. 903–910, 9 juni 2002. DOI: 10.1119/1.1498860.
- [22] K. Galvez. "How to set up parametric down-conversion experiments." (2013), URL: <https://www.youtube.com/watch?v=PhJtL97VNEI> (hämtad 2023-04-14).
- [23] M. Andersson. "Github med LabVIEW- och Python-kod." (9 maj 2023), URL: <https://github.com/aniwlem/BellsOlikhet>.
- [24] C. Nordling och J. Österman, *Physics handbook for science and engineering*, 9. utg. Studentlitteratur, 2020, s. 464, ISBN: 978-91-44-12806-1.
- [25] Thorlabs. "PRM1Z8 Motorized Rotation Stage User Guide." (2022), URL: https://www.thorlabs.com/newgrouppage9.cfm?objectgroup_id=2875 (hämtad 2023-04-19).
- [26] D. J. Benjamin, J. O. Berger och M. Johannesson, "Redefine statistical significance," *Nature Human Behaviour*, årg. 2, s. 6–10, 2018. DOI: 10.1038/s41562-017-0189-z.
- [27] Thorlabs. "Economy Glass Polarizer Transmission Data." (9 maj 2023), URL: https://www.thorlabs.com/images/TabImages/LPWISE-A_data.xlsx (hämtad 2023-04-19).

A

Beräkning av spinnproduktväntevärde för Bells olikhet

Som ett mellansteg i Bells olikhet måste det kvantmekaniska väntevärdet av produkten av två spinn beräknas

$$\langle \hat{\sigma}_a^{(1)} \hat{\sigma}_b^{(2)} \rangle \quad (\text{A.1})$$

där $\hat{\sigma}_a^{(1)}$ är det första spinnet i riktning \vec{a} , och $\hat{\sigma}_b^{(2)}$ är ett annat spinn i riktning \vec{b} . Väntevärdet beräknas för ett spinn-singlettillstånd $|0,0\rangle$, givet av

$$|0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle |\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle |\uparrow\rangle) \quad (\text{A.2})$$

där $|\uparrow\rangle$ avser tillstånd spinn up i z -led och $|\downarrow\rangle$ avser tillståndet med spinn ned i z -led. För att underlätta kommande beräkningar kan tillstånden skrivas om på matrisform

$$\begin{aligned} |\uparrow\rangle |\uparrow\rangle &= [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T, \\ |\uparrow\rangle |\downarrow\rangle &= [0 \ 1 \ 0 \ 0]^T, \\ |\downarrow\rangle |\uparrow\rangle &= [0 \ 0 \ 1 \ 0]^T, \\ |\downarrow\rangle |\downarrow\rangle &= [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Detta ger att singlettillståndet kan skrivas om som

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle |\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle |\uparrow\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} [0 \ 1 \ -1 \ 0]^T. \quad (\text{A.4})$$

Utan att förlora generalitet kan $\hat{\sigma}_a^{(1)}$ antas vara riktad längs z -axeln och $\hat{\sigma}_b^{(2)}$ kan antas sakna y -komponent, detta ger

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_a^{(1)} &= \hat{\sigma}_z^{(1)}, \\ \hat{\sigma}_b^{(2)} &= \sin(\theta) \hat{\sigma}_x^{(2)} + \cos(\theta) \hat{\sigma}_z^{(2)} \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

där $\hat{\sigma}_j^{(i)}$ är spinn-tillståndet i längs den j :te basvektorn. För att beräkna spinnet längs en godtycklig riktning kan Paulimatriserna användas. Dessa ges, för ett spinn-tillstånd skrivet på matrisformen

$$\begin{aligned} |\uparrow\rangle &= [1 \ 0]^T, \\ |\downarrow\rangle &= [0 \ 1]^T \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

enligt

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_x &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ \hat{\sigma}_z &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.\end{aligned}\tag{A.7}$$

Med detta kan spinnoperatorerna för det sammansatta systemet $\hat{\sigma}_z^{(1)}$, $\hat{\sigma}_z^{(2)}$ och $\hat{\sigma}_x^{(1)}$ skrivas på matrisform enligt

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_z^{(1)} &= \sigma_z \otimes \mathbb{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \\ \hat{\sigma}_z^{(2)} &= \mathbb{I}_2 \otimes \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \\ \hat{\sigma}_x^{(2)} &= \mathbb{I}_2 \otimes \sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},\end{aligned}\tag{A.8}$$

där \mathbb{I}_2 är den tvådimensionella enhetsmatrisen och \otimes avser tensorprodukt. Detta kan då användas för att beräkna väntevärdet av produkten av $\hat{\sigma}_a^{(1)}$ och $\hat{\sigma}_b^{(2)}$ givet ett singlettillstånd. Detta ger

$$\begin{aligned}\langle \hat{\sigma}_a^{(1)} \hat{\sigma}_b^{(2)} \rangle &= \langle 0, 0 | \left(\hat{\sigma}_a^{(1)} \hat{\sigma}_b^{(2)} \right) | 0, 0 \rangle \\ &= \langle 0, 0 | \left(\hat{\sigma}_z^{(1)} \left[\sin(\theta) \hat{\sigma}_x^{(2)} + \cos(\theta) \hat{\sigma}_z^{(2)} \right] \right) | 0, 0 \rangle\end{aligned}\tag{A.9}$$

där omskrivningen följer av ekvation A.5. Skrivet på matrisform ger detta de två matriserna $\hat{\sigma}_z^{(1)} \hat{\sigma}_x^{(2)}$ och $\hat{\sigma}_z^{(1)} \hat{\sigma}_z^{(2)}$ enligt

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_z^{(1)} \hat{\sigma}_x^{(2)} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \\ \hat{\sigma}_z^{(1)} \hat{\sigma}_z^{(2)} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.\end{aligned}\tag{A.10}$$

Detta kan då användas för att räkna ut $\langle \hat{\sigma}_a^{(1)} \hat{\sigma}_b^{(2)} \rangle$ vilket ger

$$\begin{aligned}
 \langle \hat{\sigma}_a^{(1)} \hat{\sigma}_b^{(2)} \rangle &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}^\top \left(\begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 & 0 \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \sin(\theta) \\ -\cos(\theta) \\ \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{bmatrix} \\
 &= -\cos(\theta).
 \end{aligned} \tag{A.11}$$

Eftersom riktningvektorererna \vec{a} och \vec{b} är enhetsvektorer gäller att

$$-\cos(\theta) = -\vec{a} \cdot \vec{b}. \tag{A.12}$$

B

Matematisk härledning av Bells olikhet på CHSH-form

Som tidigare presenterats i rapporten kan en BBO-kristall konvertera en foton till två nya fotoner med lägre energier. I laborationen användes en BBO med nedkonvertering av typ-1. Om BBO:n är riktad vertikalt sker nedkonvertering av vertikalt polariserade primärfotoner till ett par horisontellt polariserade fotoner enligt

$$|V\rangle \rightarrow |H\rangle |H\rangle \quad (\text{B.1})$$

där $|V\rangle$ och $|H\rangle$ är vertikalt respektive horisontellt polariserat. För just de kristaller som användes i laborationen nedkonverteras primärfotonen till två identiska fotoner. Om två kristaller placeras direkt efter varandra orienterade vertikalt respektive horisontellt gäller för inkommande ljus att

$$\begin{aligned} |V\rangle &\rightarrow |H\rangle |H\rangle \\ |H\rangle &\rightarrow |V\rangle |V\rangle. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

För 45° linjärpolariserat ljus

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|V\rangle + |H\rangle) \quad (\text{B.3})$$

kan fotonen nedkonvertera i antingen den första eller den andra BBO:n med lika stor sannolikhet. Eftersom fotonerna har samma energi och deras propagation överlappar med varandra går det inte att avgöra i vilken kristall fotonen nedkonverterades. Alltså ges tillståndet efter kristallerna av

$$|\psi_{EPR}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|V\rangle |V\rangle + |H\rangle |H\rangle). \quad (\text{B.4})$$

I verkligheten introduceras osäkerheter i det diagonalpolariserade ljusets polarisation samt i fasskillnaden mellan tillstånden. Den första av dessa effekter försummas i följande beräkningar, medan den andra inte gör det. Detta ger

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|V\rangle |V\rangle + e^{i\varphi} |H\rangle |H\rangle) \quad (\text{B.5})$$

där fasen φ primärt introduceras av BBO-kristallen. För att kompensera för denna kan ett fasskifte mellan polarisationstillstånden i ekvation (B.3) introduceras, se metodavsnittet 3.

B.1 Beräkning av sannolikheter att mäta ett givet tillstånd

Då mätningar genomförs i fler polarisationsriktningar än de helt vertikala och horisontella, introduceras tillstånden

$$\begin{aligned} |H_\theta\rangle &= \sin(\theta) |V\rangle + \cos(\theta) |H\rangle \\ |V_\theta\rangle &= \cos(\theta) |V\rangle - \sin(\theta) |H\rangle \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

vilket är tillstånden $|H\rangle$ och $|V\rangle$ roterade en godtycklig vinkel θ . Om polarisatorerna A och B ställs in med vinklarna α och β ges sannolikheten att mäta en foton i båda detektorerna av

$$\begin{aligned} P_{AB}(\alpha, \beta) &= |\langle A_\alpha | \langle B_\beta | \psi \rangle|^2 \\ &= \left| \langle A_\alpha | \langle B_\beta | \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (|V\rangle |V\rangle + e^{i\varphi} |H\rangle |H\rangle) \right] \right|^2 \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

av vilket det framgår att de inre produkterna lättast beräknas om tillstånden $\langle A_\alpha | \langle B_\beta |$ skrivs i samma bas som $|\psi_{EPR}\rangle$. I följande delavschnitt presenteras därför beräkningarna att få fram $\langle A_\alpha | \langle B_\beta |$ och sedan sannolikheterna $P_{AB}(\alpha, \beta)$.

Tillståndet $|V\rangle |V\rangle$

Bra:en $\langle V_\alpha | \langle V_\beta |$ ges i den vertikal-horisontella basen av

$$\begin{aligned} \langle V_\alpha | \langle V_\beta | &= [\cos(\alpha) \langle V | - \sin(\alpha) \langle H |] [\cos(\beta) \langle V | - \sin(\beta) \langle H |] \\ &= \cos(\alpha) \cos(\beta) \langle V | \langle V | + \sin(\alpha) \sin(\beta) \langle H | \langle H | \\ &\quad - \cos(\alpha) \sin(\beta) \langle V | \langle H | - \cos(\beta) \sin(\alpha) \langle H | \langle V |. \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Sannolikheten att mäta tillståndet $|V_\alpha\rangle |V_\beta\rangle$, $P_{VV}(\alpha, \beta)$ ges då av

$$\begin{aligned} P_{VV}(\alpha, \beta) &= |\langle V_\alpha | \langle V_\beta | \psi \rangle|^2 = \frac{1}{2} \left| \cos(\alpha) \cos(\beta) + \sin(\alpha) \sin(\beta) e^{i\varphi} \right|^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(\cos^2(\alpha) \cos^2(\beta) \right. \\ &\quad \left. + \cos(\alpha) \cos(\beta) \sin(\alpha) \sin(\beta) \cdot 2 \cos(\varphi) \right. \\ &\quad \left. + \sin^2(\alpha) \sin^2(\beta) \right). \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Valet $\varphi = 0$ ger

$$\begin{aligned} P_{VV}(\alpha, \beta) &= |\langle V_\alpha | \langle V_\beta | \psi \rangle|^2 \\ &= \frac{1}{2} (\cos(\alpha) \cos(\beta) + \sin(\alpha) \sin(\beta))^2 \\ &= \frac{1}{2} \cos^2(\alpha - \beta) \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

vilket endast beror på vinkelskillnaden mellan detektorerna.

Tillstånd $|V\rangle |H\rangle$

Bra:en $\langle V_\alpha | \langle H_\beta |$ ges i den vertikal-horisontella basen av

$$\begin{aligned} \langle V_\alpha | \langle H_\beta | &= [\cos(\alpha) \langle V | - \sin(\alpha) \langle H |] [\sin(\beta) \langle V | + \cos(\beta) \langle H |] \\ &= \cos(\alpha) \sin(\beta) \langle V | \langle V | - \sin(\alpha) \cos(\beta) \langle H | \langle H | \\ &\quad + \cos(\alpha) \cos(\beta) \langle V | \langle H | - \sin(\alpha) \sin(\beta) \langle H | \langle V |. \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Sannolikheten att mäta tillståndet $|V_\alpha\rangle |H_\beta\rangle$, $P_{VH}(\alpha, \beta)$ ges då av

$$\begin{aligned} P_{VH}(\alpha, \beta) &= |\langle V_\alpha | \langle H_\beta | |\psi\rangle|^2 = \frac{1}{2} \left| \cos(\alpha) \sin(\beta) - \sin(\alpha) \cos(\beta) e^{i\varphi} \right|^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(\cos^2(\alpha) \sin^2(\beta) \right. \\ &\quad \left. - \cos(\alpha) \sin(\beta) \sin(\alpha) \cos(\beta) \cdot 2 \cos(\varphi) \right. \\ &\quad \left. + \sin^2(\alpha) \cos^2(\beta) \right). \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Valet $\varphi = 0$ ger

$$\begin{aligned} P_{VH}(\alpha, \beta) &= |\langle V_\alpha | \langle H_\beta | |\psi\rangle|^2 \\ &= \frac{1}{2} (\cos(\alpha) \sin(\beta) - \sin(\alpha) \cos(\beta))^2 \\ &= \frac{1}{2} \sin^2(\alpha - \beta) \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

vilket endast beror på vinkelskillnaden mellan detektorerna.

Tillstånd $|H\rangle |V\rangle$

Bra:en $\langle H_\alpha | \langle V_\beta |$ ges i den vertikal-horisontella basen av

$$\begin{aligned} \langle H_\alpha | \langle V_\beta | &= [\sin(\alpha) \langle V | + \cos(\alpha) \langle H |] [\cos(\beta) \langle V | - \sin(\beta) \langle H |] \\ &= \sin(\alpha) \cos(\beta) \langle V | \langle V | - \cos(\alpha) \sin(\beta) \langle H | \langle H | \\ &\quad - \sin(\alpha) \sin(\beta) \langle V | \langle H | + \cos(\alpha) \cos(\beta) \langle H | \langle V |. \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Sannolikheten att mäta tillståndet $|H_\alpha\rangle |V_\beta\rangle$, $P_{HV}(\alpha, \beta)$ ges då av

$$\begin{aligned} P_{HV}(\alpha, \beta) &= |\langle H_\alpha | \langle V_\beta | |\psi\rangle|^2 = \frac{1}{2} \left| \sin(\alpha) \cos(\beta) - \cos(\alpha) \sin(\beta) e^{i\varphi} \right|^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(\sin^2(\alpha) \cos^2(\beta) \right. \\ &\quad \left. - \sin(\alpha) \cos(\beta) \cos(\alpha) \sin(\beta) \cdot 2 \cos(\varphi) \right. \\ &\quad \left. + \cos^2(\alpha) \sin^2(\beta) \right). \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Valet $\varphi = 0$ ger

$$\begin{aligned} P_{HV}(\alpha, \beta) &= |\langle H_\alpha | \langle V_\beta | |\psi\rangle|^2 \\ &= \frac{1}{2} (\sin(\alpha) \cos(\beta) - \cos(\alpha) \sin(\beta))^2 \\ &= \frac{1}{2} \sin^2(\alpha - \beta) \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

vilket endast beror på vinkelskillnaden mellan detektorerna.

Tillstånd $|H\rangle |H\rangle$

Bra:en $\langle H_\alpha | \langle H_\beta |$ ges i den vertikal-horisontella basen av

$$\begin{aligned} \langle H_\alpha | \langle H_\beta | &= [\sin(\alpha) \langle V | + \cos(\alpha) \langle H |] [\sin(\beta) \langle V | + \cos(\beta) \langle H |] \\ &= \sin(\alpha) \sin(\beta) \langle V | \langle V | + \cos(\alpha) \cos(\beta) \langle H | \langle H | \\ &\quad + \sin(\alpha) \cos(\beta) \langle V | \langle H | + \cos(\alpha) \sin(\beta) \langle H | \langle V |. \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

Sannolikheten att mäta tillståndet $|H_\alpha\rangle |H_\beta\rangle$, $P_{HH}(\alpha, \beta)$ ges då av

$$\begin{aligned} P_{HH}(\alpha, \beta) &= |\langle H_\alpha | \langle H_\beta | \psi \rangle|^2 = \frac{1}{2} \left| \sin(\alpha) \sin(\beta) + \cos(\alpha) \cos(\beta) e^{i\varphi} \right|^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(\sin^2(\alpha) \sin^2(\beta) \right. \\ &\quad \left. + \sin(\alpha) \sin(\beta) \cos(\alpha) \cos(\beta) \cdot 2 \cos(\varphi) \right. \\ &\quad \left. + \sin^2(\alpha) \sin^2(\beta) \right). \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

Valet $\varphi = 0$ ger

$$\begin{aligned} P_{HH}(\alpha, \beta) &= |\langle H_\alpha | \langle H_\beta | \psi \rangle|^2 \\ &= \frac{1}{2} (\sin(\alpha) \sin(\beta) + \cos(\alpha) \cos(\beta))^2 \\ &= \frac{1}{2} \cos^2(\alpha - \beta) \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

vilket endast beror på vinkelskillnaden mellan detektorerna.

Sammanfattning av sannolikheterna

Sammantaget ges då de olika sannolikheterna av

$$\begin{aligned} P_{VV}(\alpha, \beta) &= P_{HH}(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} \cos^2(\alpha - \beta) \\ P_{VH}(\alpha, \beta) &= P_{HV}(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} \sin^2(\alpha - \beta) \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

innan något kan göras med detta måste först sannolikheterna givna av en lokal gömdvariabelteori och Bells olikhet presenteras.

B.2 Gömda variabel-teoriens förutsägelse

Följande avsnitt är till stor del baserat på appendix i D. Dehlinger och M. W. Mitchells artikel om experiment om Bells olikhet [21]. För alla lokala dolda variabel-teorier bestäms mätningens utfall helt deterministiskt av polarisatorns vinkel θ och

den dolda variabeln λ . Kalla polarisationsvinkeln för den första och andra detektorn α respektive β . Definiera funktionerna

$$\begin{aligned} A(\alpha, \lambda) &= \begin{cases} +1, \text{ detektor 1 kommer ge } V_\alpha \\ -1, \text{ detektor 1 kommer ge } H_\alpha \end{cases} \\ B(\beta, \lambda) &= \begin{cases} +1, \text{ detektor 2 kommer ge } V_\beta \\ -1, \text{ detektor 2 kommer ge } H_\beta \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

som deterministiskt avgör mätningens utfall för ett givet värde på polarisationsriktningen α eller β och den dolda variabeln λ 's värde. Av detta ges då sannolikheterna att få respektive utfall av

$$\begin{aligned} P_{V_1}(\alpha, \lambda) &= \frac{1 + A(\alpha, \lambda)}{2}, \\ P_{H_1}(\alpha, \lambda) &= \frac{1 - A(\alpha, \lambda)}{2}, \\ P_{V_2}(\beta, \lambda) &= \frac{1 + B(\beta, \lambda)}{2}, \\ P_{H_2}(\beta, \lambda) &= \frac{1 - B(\beta, \lambda)}{2} \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

där exempelvis $P_{V_1}(\alpha, \lambda)$ betyder sannolikheten att mäta vertikal polarisation på polarisator 1. Då det i mätningen kommer mätas på båda detektorerna samtidigt är sannolikheterna för mätningens totala utfall av intresse. Av ekvation (B.22) ges dessa enligt

$$\begin{aligned} P_{VV}(\alpha, \beta) &= \int \rho(\lambda) \frac{1 + A(\alpha, \lambda)}{2} \cdot \frac{1 + B(\beta, \lambda)}{2} d\lambda, \\ P_{VH}(\alpha, \beta) &= \int \rho(\lambda) \frac{1 + A(\alpha, \lambda)}{2} \cdot \frac{1 - B(\beta, \lambda)}{2} d\lambda, \\ P_{HV}(\alpha, \beta) &= \int \rho(\lambda) \frac{1 - A(\alpha, \lambda)}{2} \cdot \frac{1 + B(\beta, \lambda)}{2} d\lambda, \\ P_{HH}(\alpha, \beta) &= \int \rho(\lambda) \frac{1 - A(\alpha, \lambda)}{2} \cdot \frac{1 - B(\beta, \lambda)}{2} d\lambda \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

där exempelvis $P_{VV}(\alpha, \beta)$ är sannolikheten att mäta vertikal polarisation på både den första och andra polarisatorn. Integralen tas över alla λ då dess specifika värde är okänt och $\rho(\lambda)$ är sannolikhetstätheten att den gömda variabeln har ett givet värde λ . Funktionerna $A(\alpha, \lambda)$, $B(\beta, \lambda)$ och $\rho(\lambda)$ specificeras av den valda lokala dolda variabel-teorin, exakt vad de är visar sig vara irrelevant. För att underlätta kommande beräkningar kan följande omskrivningar göras

$$\begin{aligned}
 P_{VV}(\alpha, \beta) &= \int \rho(\lambda) \left(\frac{1}{4} + \frac{A(\alpha, \lambda)}{2} + \frac{B(\beta, \lambda)}{2} + \frac{A(\alpha, \lambda)B(\beta, \lambda)}{4} \right) d\lambda, \\
 P_{VH}(\alpha, \beta) &= \int \rho(\lambda) \left(\frac{1}{4} + \frac{A(\alpha, \lambda)}{2} - \frac{B(\beta, \lambda)}{2} - \frac{A(\alpha, \lambda)B(\beta, \lambda)}{4} \right) d\lambda, \\
 P_{HV}(\alpha, \beta) &= \int \rho(\lambda) \left(\frac{1}{4} - \frac{A(\alpha, \lambda)}{2} + \frac{B(\beta, \lambda)}{2} - \frac{A(\alpha, \lambda)B(\beta, \lambda)}{4} \right) d\lambda, \\
 P_{HH}(\alpha, \beta) &= \int \rho(\lambda) \left(\frac{1}{4} - \frac{A(\alpha, \lambda)}{2} - \frac{B(\beta, \lambda)}{2} + \frac{A(\alpha, \lambda)B(\beta, \lambda)}{4} \right) d\lambda.
 \end{aligned} \tag{B.24}$$

Från detta ses enklare att

$$\begin{aligned}
 E(\alpha, \beta) &= P_{VV}(\alpha, \beta) - P_{VH}(\alpha, \beta) - P_{HV}(\alpha, \beta) + P_{HH}(\alpha, \beta) \\
 &= \int \rho(\lambda) A(\alpha, \lambda) B(\beta, \lambda) d\lambda
 \end{aligned} \tag{B.25}$$

där $E(\alpha, \beta)$ är ett korrelationsvärde som ger värdet $+1$ om mätningarna alltid håller med varandra, -1 om de aldrig håller med varandra och någonting emellan för alla andra möjliga utfall. Definiera ifrån detta

$$\begin{aligned}
 s(\alpha, \beta, \alpha', \beta') &= A(\alpha, \lambda)B(\beta, \lambda) - A(\alpha, \lambda)B(\beta', \lambda) \\
 &\quad + A(\alpha', \lambda)B(\beta, \lambda) + A(\alpha', \lambda)B(\beta', \lambda) \\
 &= A(\alpha, \lambda) [B(\beta, \lambda) - B(\beta', \lambda)] \\
 &\quad + A(\alpha', \lambda) [B(\beta, \lambda) + B(\beta', \lambda)].
 \end{aligned} \tag{B.26}$$

Det är tydligt att om

$$B(\beta, \lambda) = B(\beta', \lambda) \tag{B.27}$$

är den första parantesen 0 och den andra 2, om istället

$$B(\beta, \lambda) = -B(\beta', \lambda) \tag{B.28}$$

gäller det omvända. Då $|A| = 1$ gäller därför att

$$s(\alpha, \beta, \alpha', \beta') = \pm 2. \tag{B.29}$$

Om s mäts många gånger ges dess väntevärde $\langle s \rangle =: S$ av

$$S = \int A(\alpha, \lambda) [B(\beta, \lambda) - B(\beta', \lambda)] + A(\alpha', \lambda) [B(\beta, \lambda) + B(\beta', \lambda)] d\lambda \tag{B.30}$$

eftersom $s = \pm 2$ måste det gälla att

$$|S| \leq 2 \tag{B.31}$$

vilket är en version Bells olikhet. Från sammansättning av ekvation (B.25) och (B.30) ses att

$$S = E(\alpha, \beta) - E(\alpha, \beta') + E(\alpha', \beta) + E(\alpha, \beta') \tag{B.32}$$

vilket är hur S mäts experimentellt.

B.3 Kvantmekanikens förutsägelse

För alla lokala dolda variabel-teorier måste det gälla att $|S| \leq 2$. För kvantmekanik ges med sannolikheter från ekvation (B.20) insatt i ekvation (B.25) att

$$\begin{aligned} E(\alpha, \beta) &= P_{VV}(\alpha, \beta) - P_{VH}(\alpha, \beta) - P_{HV}(\alpha, \beta) + P_{HH}(\alpha, \beta) \\ &= \cos^2(\alpha - \beta) - \sin^2(\alpha - \beta) \\ &= \cos(2\alpha - 2\beta). \end{aligned} \tag{B.33}$$

Detta insatt i ekvation (B.32) ger då

$$\begin{aligned} S(\alpha, \beta, \alpha', \beta') &= E(\alpha, \beta) - E(\alpha, \beta') + E(\alpha', \beta) + E(\alpha', \beta') \\ &= \cos(2\alpha - 2\beta) - \cos(2\alpha - 2\beta') \\ &\quad + \cos(2\alpha' - 2\beta) + \cos(2\alpha' - 2\beta') \end{aligned} \tag{B.34}$$

Om vinklarna kan väljas på ett sätt så att S blir större än 2 kan Bells olikhet motbevisas. Detta kan uppnås om varje term är $1/\sqrt{2}$ vilket går om

$$\begin{aligned} \alpha - \beta &= \pm_1 \pi/8 \\ \alpha - \beta' &= \pm_2 3\pi/8 \\ \alpha' - \beta &= \pm_3 \pi/8 \\ \alpha' - \beta' &= \pm_4 \pi/8 \end{aligned} \tag{B.35}$$

där \pm_i är ett tecken som väljs för att systemet ska vara konsistent. Omskrivet på matrisform ges detta

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & \pm_1 \pi/8 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & \pm_2 3\pi/8 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \pm_3 \pi/8 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \pm_4 \pi/8 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & \pm_1 \pi/8 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \pm_2 3\pi/8 - \pm_1 \pi/8 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \pm_3 \pi/8 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \pm_4 \pi/8 - \pm_3 \pi/8 \end{array} \right] \tag{B.36}$$

av vilket det framgår att

$$\begin{aligned} 3 \pm_2 - \pm_1 &= \pm_4 - \pm_3 \Rightarrow \\ \pm_1 &= \pm_2 = \pm_4 = -\pm_3 \end{aligned} \tag{B.37}$$

för färre minustecken välj $\pm_1 = 1$. Detta ger då

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & \pi/8 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \pi/4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -\pi/8 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \pi/4 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & \pi/8 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \pi/4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -\pi/8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \tag{B.38}$$

vilket kan skrivas på formen

$$\begin{aligned} \alpha - \beta &= \pi/8 \\ \beta - \beta' &= \pi/4 \\ \alpha' - \beta &= -\pi/8 \\ \beta' &= \theta \end{aligned} \tag{B.39}$$

där θ är en fri variabel. Detta kan skrivas om till

$$\begin{aligned}\alpha &= \theta + 3\pi/8 \\ \alpha' &= \theta + \pi/8 \\ \beta &= \theta + \pi/4 \\ \beta' &= \theta.\end{aligned}\tag{B.40}$$

I undersökningne användes valet $\theta = -\pi/8$.

Detta kan bekräftas vara ett maximum till S genom att sätta in värdena i gradienten, vilket ges av

$$\begin{aligned}\nabla S(\alpha, \beta, \alpha', \beta') &= \nabla [\cos(2\alpha - 2\beta) - \cos(2\alpha - 2\beta') + \cos(2\alpha' - 2\beta) + \cos(2\alpha' - 2\beta')] \\ &= \begin{bmatrix} -2 \sin(2\alpha - 2\beta) + 2 \sin(2\alpha - 2\beta') \\ 2 \sin(2\alpha - 2\beta) + 2 \sin(2\alpha' - 2\beta) \\ -2 \sin(2\alpha' - 2\beta) - 2 \sin(2\alpha' - 2\beta') \\ -2 \sin(2\alpha - 2\beta') + 2 \sin(2\alpha' - 2\beta') \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{B.41}$$

Insättning av de tidigare erhållna värdena ger, med $\theta = 0$ (då de ändå kancelleras) och alla 2:or strukna

$$\begin{aligned}-\sin(3\pi/4 - \pi/2) + \sin(3\pi/4) &= 0 \\ \sin(3\pi/4 - \pi/2) + \sin(\pi/4 - \pi/2) &= 0 \\ -\sin(\pi/4 - \pi/2) - \sin(\pi/4) &= 0 \\ -\sin(3\pi/4) + \sin(\pi/4) &= 0\end{aligned}\tag{B.42}$$

Vilket betyder att S för dessa värden antar ett maximum.

C

Fullständig felanalys

Här visas de beräkningar som gjordes för att bestämma resultatets osäkerhet. För att skatta felet användes felfortplantningsformeln

$$\sigma_{y(x_1, x_2, x_3, \dots)} = \sqrt{\sum_i \left| \frac{\partial y}{\partial x_i} \right|^2 \sigma_{x_i}^2} \quad (\text{C.1})$$

där $\sigma_{y(x_1, x_2, x_3, \dots)}$ är osäkerheten i det uppmätta värdet $y(x_1, x_2, x_3, \dots)$ och σ_{x_i} är osäkerheterna i de ingående värdena x_i . För att beräkna felet i värdet på S kan först ekvation (2.21) användas, vilket ger att S är en summa av fyra olika $E(\alpha_i, \beta_i)$ -termer där (α_i, β_i) är alla kombinationer av α, α' och β, β' . På grund av detta kan osäkerheten i S beräknas som osäkerheten av $\sum_i E(\alpha_i, \beta_i)$ där osäkerheterna kan beräknas för varje $E(\alpha_i, \beta_i)$ separat.

$E(\alpha_i, \beta_i)$ beräknas via ekvation (2.22), där sannolikheterna $P_{VV}(\alpha_i, \beta_i)$ kan skrivas på två olika former. Antingen kan de skrivas på teoretisk form som funktion av fysiska variabler som påverkas av uppställningen, det vill säga fasen φ , laserns polarisationsvinkel θ och de två polarisatorernas vinklar α och β , som därmed ger osäkerheten $\sigma_{(\alpha, \beta, \varphi, \theta)}$. Alternativt kan $P_{VV}(\alpha_i, \beta_i)$ uppskattas ur antalet koincidenser med vinkel α på polarisator A och β på polarisator B , $N_{AB}(\alpha_i, \beta_i)$, med hjälp av ekvation (3.6), vilket ger osäkerheten σ_N . Eftersom dessa två olika typer av osäkerheter är oberoende av varandra ges den totala variansen σ_S^2 som summan av de två typerna av varianser, det vill säga

$$\sigma_S = \sqrt{\sigma_{(\alpha, \beta, \varphi, \theta)}^2 + \sigma_N^2}.$$

C.1 Osäkerhet från uppställningen

Osäkerheten i värdet på $S(\alpha, \beta, \varphi, \theta)$ ges enligt ekvation (C.1) av

$$\sigma_{(\alpha, \beta, \varphi, \theta)} = \sqrt{\sum \left| \frac{\partial S}{\partial E(\alpha, \beta, \varphi, \theta)} \right|^2 \sigma_{E(\alpha, \beta, \varphi, \theta)}^2}. \quad (\text{C.2})$$

eftersom $\left| \frac{\partial S}{\partial E} \right| = 1$ förenklas det till

$$\sigma_{(\alpha, \beta, \varphi, \theta)} = \sqrt{\sum_i \sigma_{E(\alpha, \beta, \varphi, \theta)}^2} \quad (\text{C.3})$$

där summering sker över alla vinkelpar α_i, β_i . Av detta framgår att osäkerheterna $\sigma_{E(\alpha, \beta, \varphi, \theta)}$ behövs. För att beräkna dessa krävs ett uttryck för $E(\alpha, \beta, \varphi, \theta)$. Om inga

antaganden angående φ och θ görs ges uttryck för dessa av

$$E(\alpha, \beta, \varphi, \theta) = \cos(2\alpha) \cos(2\beta) + \cos(\varphi) \sin(2\alpha) \sin(2\beta) \sin(2\theta) \quad (\text{C.4})$$

härledning av detta ges genom att generalisera uttrycken i avsnitt B.1 för godtycklig polarisation θ och sedan stoppa in i uttrycken för $E(\alpha_i, \beta_i)$ och sedan dessa in i uttrycket för S , följt av en lång serie av förenklingar. Härledningen anses för lång för att sätta in här, speciellt då alla effekter av denna generalisering försvinner i de vidare beräkningarna. Med detta uttryck ges att

$$\nabla E(\alpha, \beta, \varphi, \theta) = \begin{bmatrix} -2 \sin(2\alpha) \cos(2\beta) + 2 \cos(\varphi) \cos(2\alpha) \sin(2\beta) \sin(2\theta) \\ -2 \cos(2\alpha) \sin(2\beta) + 2 \cos(\varphi) \sin(2\alpha) \cos(2\beta) \sin(2\theta) \\ -2 \sin(\varphi) \sin(2\alpha) \cos(2\beta) \sin(2\theta) \\ 4 \cos(\varphi) \sin(2\alpha) \cos(2\beta) \cos(2\theta) \end{bmatrix}. \quad (\text{C.5})$$

Detta evalueras för $\varphi = 0^\circ$ och $\theta = 45^\circ$ vilket förenklar $\nabla E(\alpha, \beta, \varphi, \theta)$ till

$$\begin{aligned} \nabla E(\alpha, \beta, \varphi, \theta) &= \begin{bmatrix} -2 \sin(2\alpha) \cos(2\beta) + 2 \cos(2\alpha) \sin(2\beta) \\ -2 \cos(2\alpha) \sin(2\beta) + 2 \sin(2\alpha) \cos(2\beta) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= [-2 \sin(2(\alpha - \beta)), 2 \sin(2(\alpha - \beta)), 0, 0]^T. \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

Av detta ges från ekvation (C.1) att

$$\sigma_{E(\alpha, \beta, \varphi, \theta)} = 2 |\sin(2(\alpha - \beta))| \sqrt{\sigma_\alpha^2 + \sigma_\beta^2} \quad (\text{C.7})$$

eftersom det finns samma osäkerhet i båda polarisatorerna förenklas detta till

$$\sigma_{E(\alpha, \beta, \varphi, \theta)} = 2\sqrt{2} |\sin(2(\alpha - \beta))| \sigma_{\text{pol}} \quad (\text{C.8})$$

där σ_{pol} är polarisatorernas osäkerhet. För varje vinkelpar ges värden på vinkelskillnaden $\alpha_i - \beta_i$ och $\sin^2(2(\alpha_i - \beta_i))$ i tabell C.1.

Tabell C.1: Värden på $\alpha_i - \beta_i$ och $\sin^2(2(\alpha_i - \beta_i))$ för samtliga vinkelpar.

Vinkelpar	$ \alpha_i - \beta_i $	$\sin^2(2(\alpha_i - \beta_i))$
α, β	$\pi/8$	$1/2$
α, β'	$3\pi/8$	$3/2$
α', β	$\pi/8$	$1/2$
α', β'	$\pi/8$	$1/2$

Med värdena från tabell C.1 instoppade i ekvation (C.8) och dessa i sin tur instoppade i ekvation (C.3) ges

$$\sigma_{(\alpha, \beta, \varphi, \theta)} = 2\sqrt{6} \sigma_{\text{pol}}. \quad (\text{C.9})$$

C.2 Osäkerhet från mätdata

Osäkerheten σ_N från de uppmätta värdena som användes för att skatta sannolikheterna $P_{AB}(\alpha_i, \beta_i)$ ges av applicering av felfortplantningsformeln från ekvation (C.1) på $E(\alpha_i, \beta_i)$ skrivet på formen i ekvation (3.6). För detta uttryck ges exempelvis

$$\nabla P_{VV}(N_{VV}, N_{VH}, N_{HV}, N_{HH}) = \begin{bmatrix} N_{VV}/N_{\text{tot}}^2 \\ -N_{VV}/N_{\text{tot}}^2 \\ -N_{VV}/N_{\text{tot}}^2 \\ -N_{VV}/N_{\text{tot}}^2 \end{bmatrix} \quad (\text{C.10})$$

där $N_{\text{tot}} = N_{VV} + N_{VH} + N_{HV} + N_{HH}$. Tillämpning av detta på samtliga $P_{AB}(\alpha, \beta)$, där AB är alla kombinationer av V och H , ger att

$$\begin{aligned} \nabla E_{\alpha,\beta}(N_{VV}, N_{VH}, N_{HV}, N_{HH}) &= \nabla(P_{VV} - P_{VH} - P_{HV} + P_{HH}) \\ &= \begin{bmatrix} (N_{VV} + N_{VH} + N_{HV} - N_{HH})/N_{\text{tot}}^2 \\ (-N_{VV} - N_{VH} + N_{HV} - N_{HH})/N_{\text{tot}}^2 \\ (-N_{VV} + N_{VH} - N_{HV} - N_{HH})/N_{\text{tot}}^2 \\ (-N_{VV} + N_{VH} + N_{HV} + N_{HH})/N_{\text{tot}}^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

vilket för numeriska beräkningar kan skrivas på formen

$$\nabla E_{\alpha,\beta}(N_{VV}, N_{VH}, N_{HV}, N_{HH}) = \frac{1}{N_{\text{tot}}^2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{VV} \\ N_{VH} \\ N_{HV} \\ N_{HH} \end{bmatrix}. \quad (\text{C.12})$$

Detta sätts sedan in i ekvation (C.1) och ger

$$\sigma_{E_{\alpha,\beta}} = \sqrt{\sum_{A,B} \left| \frac{\partial E_{\alpha,\beta}}{\partial N_{AB}} \right|^2 \sigma_{N_{AB}}^2} \quad (\text{C.13})$$

som sedan ger osäkerheten i S via

$$\sigma_N = \sqrt{\sum_i \sigma_{E_{\alpha_i, \beta_i}}^2}. \quad (\text{C.14})$$

Om dessa uttryck sätts ihop ges

$$\sigma_N = \sqrt{\sum_i \sum_{AB} \left| \frac{\partial E_{\alpha_i, \beta_i}}{\partial N_{AB}} \right|^2 \sigma_{N_{AB}}^2} \quad (\text{C.15})$$

där återigen AB är alla kombinationer av vertikal V och horisontell H och α_i, β_i är alla vinkelpär.

D

Mätdata

Tabell D.1: Mätningar som användes för att uppskatta kvanttillståndet för de manuella mätningarna. Medelvärde μ_{koinc} och standardavvikelse σ_{koinc} efter 10 st mätningar på 10 s visas i antal per sekund.

polarisatorinställning		μ_{koinc}	σ_{koinc}
A	B		
90°	90°	90	5
0°	0°	89	5
45°	45°	84	4

Tabell D.2: Mätvärden som erhöles vid den bästa manuella S-värdesmätningen, för varje vinkelpar gjordes totalt 12 st mätningar vardera 15 s långa. Tidsfönstret för koincidenser var satt till 20 ns. För varje position beräknades medelvärde μ_{koinc} och standardavvikelse σ_{koinc} som sedan har normaliserats till antal per sekund.

μ_{koinc}	$\alpha' = 0^\circ$	$\alpha = 45^\circ$	$\alpha'_\perp = 90^\circ$	$\alpha_\perp = 135^\circ$
$\beta' = -22,5^\circ$	88,81	29,96	28,35	77,37
$\beta = 22,5^\circ$	66,01	82,41	29,07	18,23
$\beta'_\perp = 67,5^\circ$	11,04	73,02	87,22	27,47
$\beta_\perp = 112,5^\circ$	13,60	24,72	69,50	52,54

σ_{koinc}	$\alpha' = 0^\circ$	$\alpha = 45^\circ$	$\alpha'_\perp = 90^\circ$	$\alpha_\perp = 135^\circ$
$\beta' = -22,5^\circ$	3,747	1,907	1,693	3,708
$\beta = 22,5^\circ$	3,254	3,699	1,785	1,957
$\beta'_\perp = 67,5^\circ$	0,810	3,479	3,812	1,687
$\beta_\perp = 112,5^\circ$	1,993	2,058	4,221	1,957

Tabell D.3: Mätningar som används för att uppskatta kvanttillståndet för de automatiska mätningarna. Medelvärde μ_{koinc} och standardavvikelse σ_{koinc} efter 6 st mätningar på 10 s visas i antal per sekund.

polarisatorinställning		μ_{koinc}	σ_{koinc}
A	B		
90°	90°	128	3
0°	0°	127	2
45°	45°	120	4.5

Tabell D.4: Mätvärden som erhöles vid första automatiserade S-mätningen, för varje vinkelpar gjordes totalt 20 st mätningar vardera 20 s långa. Tidsfönstret för koincidens var satt till 20 ns. För dessa beräknades medelvärde μ_{koinc} och standardavvikelse σ_{koinc} som sedan har normaliserats till antal per sekund.

μ_{koinc}	$\alpha' = 0^\circ$	$\alpha = 45^\circ$	$\alpha'_\perp = 90^\circ$	$\alpha_\perp = 135^\circ$
$\beta' = -22,5^\circ$	125,7	38,35	34,59	135,8
$\beta = 22,5^\circ$	157,8	131,8	34,86	63,81
$\beta'_\perp = 67,5^\circ$	39,30	139,9	153,4	52,60
$\beta_\perp = 112,5^\circ$	23,80	44,70	135,2	122,0
σ_{koinc}	$\alpha' = 0^\circ$	$\alpha = 45^\circ$	$\alpha'_\perp = 90^\circ$	$\alpha_\perp = 135^\circ$
$\beta' = -22,5^\circ$	3,727	1,976	1,664	3,905
$\beta = 22,5^\circ$	3,204	3,813	2,307	2,791
$\beta'_\perp = 67,5^\circ$	1,992	3,356	3,741	2,531
$\beta_\perp = 112,5^\circ$	1,390	1,756	3,990	3,600

Tabell D.5: Mätvärden som erhöles vid andra automatiserade S-mätningen, för varje vinkelpar gjordes totalt 20 st mätningar vardera 20 s långa. Tidsfönstret för koincidens var satt till 1 ns. För dessa beräknades medelvärde μ_{koinc} och standardavvikelse σ_{koinc} som sedan har normaliserats till antal per sekund.

μ_{koinc}	$\alpha' = 0^\circ$	$\alpha = 45^\circ$	$\alpha'_\perp = 90^\circ$	$\alpha_\perp = 135^\circ$
$\beta' = -22,5^\circ$	96,53	28,13	27,06	104,8
$\beta = 22,5^\circ$	118,5	100,8	26,09	49,38
$\beta'_\perp = 67,5^\circ$	30,53	107,5	116,4	40,21
$\beta_\perp = 112,5^\circ$	17,49	34,72	103,6	94,86
σ_{koinc}	$\alpha' = 0^\circ$	$\alpha = 45^\circ$	$\alpha'_\perp = 90^\circ$	$\alpha_\perp = 135^\circ$
$\beta' = -22,5^\circ$	3,441	1,386	1,556	3,689
$\beta = 22,5^\circ$	3,037	2,223	1,366	2,625
$\beta'_\perp = 67,5^\circ$	1,693	3,193	2,816	1,704
$\beta_\perp = 112,5^\circ$	0,982	1,224	3,191	3,032

INSTITUTIONEN FÖR FYSIK
CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
Göteborg, Sverige
www.chalmers.se

INSTITUTIONEN FÖR FYSIK
GÖTEBORGS UNIVERSITET
Göteborg, Sverige
www.gu.se



GÖTEBORGS
UNIVERSITET



CHALMERS