TRIGONOMETRI

En litteraturstudie av elevers begreppsförståelse och lärarverktyg

Phoenix Björkdahl

Ämneslärarprogrammet
Matematik

Examensarbete: 15 hp
Kurs: LGMA2G
Nivå: Grundnivå
Termin/år: HT/2020
Handledare: Jan Stevens
Examinator: Johanna Pejlare
Kod: HT20-3001-006-LGMA2G

Keywords: Trigonometry. Misconceptions. Misunderstandings. Students’ Conceptions. Spherical Trigonometry. Obstacles. Concept Image. Teacher Resources.

ABSTRACT

This literature review compiles research related to students' conception, obstacles and problems with trigonometry as well as teacher resources that can be used to develop students' understanding in the field. The research spans year 6 through university courses. The following issues and questions guided the study:

- What concept image and definitions do students possess of trigonometry? Which challenges and obstacles do students face when doing trigonometry?
- Is there a case of a historical application of trigonometry?
- What teacher resources can be used to support students in their trigonometric work?

The historical application depicted in this work is a brief treatise on spherical trigonometry. Some of the primary results are that students with traditional education may develop fragmented views of trigonometry. The elements of trigonometry require a multi-facetted view of mathematical terms as both processes and objects. Furthermore, the study presents a set of suggestions for lesson plans and a categorization of trigonometric representations and student models of objects in trigonometry. The process of measuring an angle, either by using arcs or protractors, may form the basis for understanding the sine and cosine functions as internalized geometric processes rather than external, instrumental, algorithmic actions.

Förord

Jag önskar i detta avsnitt tacka min handläggare Jan Stevens för hans expertis samt råd. Vid slutet av vägens ände känner jag att arbetet blev mycket större än jag någonsin tänkt mig. På sätt och vis var det som om arbetet fick sitt eget liv och växte naturligt efter att jag tagit del av litteraturen.

Jag hoppas arbetet kan ge läsaren en känsla av de besvär elever möter inom trigonometrin samt även komma att förstå dem. En elevs idévärld anser jag vara fundamental för en praktiserande lärare, även om den är svår att förstå och nå.

Innehållsförteckning

Figurförteckning

1. Introduktion

Trigonometri utgör ett av de många områden som elever möter i sin bildning. De möter definitioner och formler, minnesregler och speciella trianglar, diagram och konstruktioner, miniräknare och datorer, funktioner och relationer, definitionsmängd och värdemängder, injektivitet och periodicitet, och ännu mer ändå! En elev i svensk skola förväntas tillgodogöra sig en hel del begrepp och metoder. För en elev som först möter ämnet kan det finnas många tankar kring vad kontentan egentligen är av trigonometrin. De kan fråga sig alltifrån vad ett relevant begrepp innebär, ifrågasätta trigonometrins tillämpbarhet i verkliga livet eller förfalla i dystrare tongångar om där de kritiserar sin egen förmåga.

En lärare befinner sig i en position där denne har till större del hanterat och löst de inre konflikter som eleverna upplever. Trots detta, måste läraren likväl försöka leva sig in i och söka förstå elevernas idévärld, deras tankar och konceptualiseringar av begreppen, oberoende av om dessa är korrekta eller inte. Lärare ska vara experter i att undervisa. Det hoppas jag i alla fall framgår av yrket och en lång utbildning på universitet. En god lärare förväntas i ren allmänhet inneha en stor kunskap om sitt ämne, men även om den metodik som krävs för att presentera den på ett koherent, meningsfullt och förståeligt sätt. Trigonometri är i många länder ett av de områden som orsakar störst utmaning för elever. Det finns många steg där resonemanget kan fallera. Definitionerna av de trigonometriska funktionerna kan eleverna lätt blanda ihop, det kan hända att de inte håller reda på domänen och bilder av funktionerna, eller plötsligt blir de trigonometriska funktionerna linjära transformationer.

Det finns många saker som en elev kan behöva stöd med att visualisera, att begreppsliggöra och internalisera i sitt medvetande. Vi som aspirerar för att undervisa inom matematik måste ha dessa koncept i åtanken, av mångfaldiga skäl: för att förbättra vår metodik, för att stärka professionen, för att individualisera undervisningen och främst av allt: för att visa respekt för eleven. Tänk er en värld där läraren inte utgår från där eleven är och ej ens försöker lära känna dennes världsbild och definitioner. Vad är poängen vid det laget? Vid det skedet skulle det gå att ersätta läraren med ett datorprogram.

Med stöd av förståelse för elevernas uppfattningar, lärarverktyg, samt med en djup kunskap om ämnet kommer en lärare ha en större spelplan att ta till i sin praxis. En lärare kommer kunna integrera och presentera en produkt som sträcker sig genom tusentals år av kulturer, ett av mänsklighetens största verk. Ett verk som har används för att kartlägga stjärnornas positioner, planeternas rörelse, navigera på vår jord och mycket, mycket mer.

1.1. Syfte och frågeställning

Detta arbete är en litteraturöversikt vars syfte är att sammanfatta och redogöra för elevers begreppsbilder samt ett antal didaktiska verktyg och hjälpmedel inom trigonometri. Ändamålet är att en lärare i sin roll ska nyttja denna kunskap för att främst stödja eleverna med sin förståelse men även uppnå intentionen med kursplanen. I grunden utgår jag från tre frågeställningar.

1. Vad har elever för begreppsbilder samt begreppsförståelser av trigonometri? Vilka utmaningar och hinder möter elever i området trigonometri?
2. Finns det ett fall av en historisk tillämpning av trigonometri?
3. Vad för lärarverktyg finns det för att stödja eleverna med trigonometrins innehåll?

Dessa frågor behöver förtydligas, främst utifrån sina avgränsningar samt indelningar som jag valt att göra i studien.

Med ”elever” har jag tagit en mycket bred tolkning. Detta beror främst på att området i sig är bred. I praktiken är det allt från åk 6 upp till och med lärarstudenter. I arbetet använts mestadels källor som studerat högstadieelever samt högskolestudenter. Anledningen att litteraturöversikten begränsade sig till hinder och ej fungerande elevmodeller var för att rikta in arbetet på ett avgränsat område.
Med begreppsbild samt begreppsförståelse åsyftas i första fallet de bilder elever har av ett matematiskt begrepp. Dessa kommer till uttryck via diagram och ritningar som elever redogör för i sitt arbete. I det senare fallet menar jag de språkliga definitioner elever har av ett givet matematiskt begrepp samt hur de relaterar och redogör för dessa i klassrummet. Med andra ord är huvudintresset att studera elevers beteenden i form av hur elever redogör för sina inre bilder för lärare/forskare i en klassrumsmiljö.

I denna översikt behandlas främst grundläggande trigonometri (dvs. definitionerna av sinus och cosinus), trigonometrisk algebra samt rollen av memorering och miniräknare. Jag har därmed valt att utesluta funktionslära, med vilket jag menar periodicitet, icke-injektivitet, domäner och bilder av funktionerna samt inverserna av de trigonometriska funktionerna. Komplexa tal och de Moivres formler, m.m. bearbetas inte i någon grad. Det finns en hel del material inom detta område som jag lämnar till andra att beta i. I vissa fall har jag känt mig tvungen att delvist inkludera material som behandlar dessa begrepp pga. att resultaten annars skulle vara missvisande. Överlag har dessa fall minimerats.

För den intresserade läsaren som kanske skulle vilja ta tag i trigonometri och funktionslära ger jag förslaget att läsa Özcan Demirs (2012) arbete med titeln “Understanding of sine and cosine functions”, vars utgångspunkt var att utveckla ett ramverk för elevers begreppsbilder av trigonometriska funktioner.

Den historiska användningen har jag tolkat som ett enda exempel, främst på grund av att det finns flertalet användningsområden för trigonometri. Detta arbete hade kunnat bestå helt och hållet av punkt 2 om viljan och möda fanns till. I detta fall innebär det att jag gör ett inslag i sfärisk trigonometri och den teori som ligger bakom att mäta avstånd på sfären. Slutligen tolkar jag lärarverktyg som lektionsupplägg, digitala hjälpmedel samt som metoder för att undervisa i vissa begrepp. Med digitala hjälpmedel åsyftas dynamiska ritprogram som GeoGebra, kameror och filmredigeringsprogram, miniräknare samt program som hjälper elever lösa problem.

2. Material och metod

Metoden och upplägget för studien följde ett förslag som ges av Skolforskningsinstitutet (2020) samt Folkhälsomyndigheten (2017). I grunden beskriver Skolforskningsinstitutet arbetsgången för översikten i följande steg:

1. Behovsanalys: Inledningsvis utfördes en analys av det behov som finns av vetenskapligt grundad kunskap inom det givna fältet. Behovet är baserat främst utifrån mina egna tillkortakommanden. Jag har haft svårigheter med att beskriva trigonometri på ett gott sätt för elever. Med andra ord sökte jag tillfredsställa ett behov av pedagogisk kunskap inom trigonometri.

2. Frågeställning: I syfte att vägleda litteratursökningar definieras en fråga som ska leda vidare sökningar inom arbetet. För att göra detta ställdes det upp tydliga kriterier för inklusion/exklusion för de referenser som ingår i arbetet.

   I detta fall krävdes det att majoriteten av artiklarna ska genomgått en peer-review. På grund av att en av frågeställningarna utgår från lärarpraxis förekommer det till viss mån litteratur som kommer från lärare i sig. I praktiken är det vissa artiklar från “the Mathematics Teacher” som utgör detta material samt ett verk från Tovö och Ekström (2010).

Inklusion	Exklusion
Är källan primär eller inte? Kan artikeln hjälpa besvara en eller flera av frågeställningarna? Håller arbetet hög kvalitét, dvs. är det transparent med sina resultat, tydlig med metod, frågeställning och referenser. Systematisk och klar dataredovisning med en diskussion om resultaten (trovärdighet/tillämpbarhet) samt från en tillförlitlig källa?	Arbeten som ej är beskrivna på ett skandinaviskt språk, engelska eller tyska Källan är ej en avhandling, rapport eller artikel i vetenskaplig tidskrift eller artikel från verksam lärare

Tabell 1. Principer för inklusion/exklusion av befintliga arbeten.

3. Litteratursökning: En sökning efter relevanta studier och material i olika databaser baserat på sökord. Inledningsvist användes Google Scholar för att hitta källor i syftet att få en övergripande bild. Detta har sedan specificeras med mer begränsade databaser, såsom Göteborgs Universitetsbibliotek, ERIC (Education Resources Information Center), Libris, GUB (Göteborg Universitetsbibliotek), ResearchGate, NCM/NOMAD och SwePub.

   I detta examensarbete användes först svenska sökord för att finna skandinavisk forskning. Ordsträngar som har nyttjats är kombinationer av “trigonometri”, “undervisning”, “didaktik”, ”studentförståelse”, “elevförståelse”, “trigonometriska funktioner”, “sinus”, “cosinus”, “tangens”, “trianglar”, “vinkel”, “vinklar”, “enhetscirkeln”.

Dessa gick över till engelsk litteratur, där sökord utformades samt utökades via översättning till de motsvarande engelska varianterna: “didactics”, “student understanding”, “conception”, “angles”, “angle measurement”, “unit circle”, “degrees”, “radian”, “pre-service teacher”, “trigonometry”, “trigonometric functions”, “sine”, “cosine”, “learning of …” samt “misconceptions”. Detta har även utökats med ekvivalenta norska ord. På grund av att ordsträngarna inte gav specifika resultat övergick arbetet till att använda kedjesökning för att få fram intressanta publikationer.

4. Relevans- och kvalitetsbedömning: Var och en av studierna som väcker intresse bedöms i relation med översiktens frågeställningar samt kvalitén som arbetet håller. För att vidare förklara detta kriterium är det lämpligt att beskriva tillvägagångssättet. Innehållet bedömdes först utifrån sitt abstrakt och sedan slutsatser. Om dessa verkade förefalla intressanta för arbetet bekräftades sedan författarnas referenser och positioner inom den akademiska världen.

   Kvalitén bedöms utifrån flera kriterier, såsom språkets struktur, hur väl metoden är beskriven samt om implikationerna och slutsatserna verkar rimliga. Vissa områden av forskning inom trigonometri innehar inte en större del litteratur vilket ledde till att litteraturöversikten inte använde antalet sökträffar som ett kriterium.

5. Data- och resultatextraktion: Från befintliga och relevanta artiklar utvinns och analyseras den information som kan vara relevant för översiktens frågeställningar. Inledande sökningar gav över 35 000 resultat, som inte kunde analyseras i sin helhet av en person. Istället gick arbetet över till att använda en kedjesökning som metod, vilket i slutändan gav ett resultat av 87 artiklar varav 29 av dessa var aktuella att inkludera i arbetet.

6. Sammanställning av resultat och slutsatser: Utifrån de tidigare stegen sammanfattas publikationerna utifrån frågeställningarna till en koherent och sammanhängande utsaga.

7. Värdering/Diskussion; Här värderas och diskuteras de didaktiska implikationerna i relation med trovärdighet och tillämpbarhet i en lärarpraxis.

3. Vad är trigonometri?

Detta kapitel kommer bestå av två delar, en vidare inramning av vad frågeställningen egentligen innebär, samt en matematisk fördjupning inom sfärisk trigonometri. Det senare avsnittet avser täcka upp och fördjupa meningen av trigonometri som sedan kan tillämpas hur än läsaren själv väljer. Exempelvis kan dessa idéer användas för att kartlägga planeternas rörelse på den ”himmelska sfären” samt navigation på planeten Jorden.

Vad innebär ordet “trigonometri”? Själva ordet har klara ordrötter och betyder mer eller mindre “triangelmätning” men trots detta innehåller trigonometri flera koncept som går vida utöver denna tillämpning. Det är av intresse att först problematisera vad trigonometri egentligen ens innebär i den mån som är “nödvändig”. Encyclopaedia Britannica (Maor, 2020) ger en längre introduktion av området;

> Trigonometry, the branch of mathematics concerned with specific functions of angles and their application to calculations. There are six functions of an angle commonly used in trigonometry. Their names and abbreviations are sine (sin), cosine (cos), tangent (tan), cotangent (cot), secant (sec), and cosecant (csc). These six trigonometric functions in relation to a right triangle are displayed in the figure. For example, the triangle contains an angle A, and the ratio of the side opposite to A and the side opposite to the right angle (the hypotenuse) is called the sine of A, or sin A; the other trigonometry functions are defined similarly.
>
> These functions are properties of the angle A independent of the size of the triangle, and calculated values were tabulated for many angles before computers made trigonometry tables obsolete. Trigonometric functions are used in obtaining unknown angles and distances from known or measured angles in geometric figures.[1]
>
> (Maor, 2020)

Inom svensk gymnasieskola har man delat upp trigonometrin i flera delar, varav ordningen av dessa beror på vilket spår en elev läser (Skolverket 2011)[2]. Här presenteras innehållet i ämnesplanerna som behandlar trigonometri i någon mening:

A.

- 1A. Geometriska begrepp valda utifrån karaktärsämnenas behov, till exempel skala, vektorer, likformighet, kongruens, sinus, cosinus, tangens och symmetrier.

- 2A. Fördjupning av geometriska begrepp valda utifrån karaktärsämnenas behov, till exempel sinus, cosinus, tangens, vektorer och symmetrier.

Baserat på en egen tolkning av Maors (2020) citat, finner jag det nödvändigt att även tillägga punkter som hanterar egenskaper hos geometriska objekt samt mätning av längder. Därmed tillägger jag följande punkter från ämnesplanen i spår A:

[1] Se https://www.britannica.com/science/trigonometry.

[2] En reviderad version av kursplanen finns tillgänglig under arbetets skrivande stund. Denna gäller dock inte förrän 1 juli 2021 (Skolverket 2020).

- Egenskaper hos och representationer av geometriska objekt, till exempel ritningar, praktiska konstruktioner och koordinatsystem.

- Metoder för mätning och beräkning av storheter som är centrala för karaktärsämnena.

Notera att A-spår är mestadels, i den grad som den är skriven här, inriktad på praktiska tillämpningar av ämnesstoffet, vars exakta mening definieras av karaktärsämnet. Främst är det de geometriska, visuella egenskaperna som betonas av ämnesplanen.

B-spåret behandlar inte ens trigonometri i någon klassisk mening, även om likformighet och kongruens faller in på triangelns egenskaper.

C-spåret lyfter fram följande punkter;

C.

- 1C. Begreppen sinus, cosinus och tangens och metoder för beräkning av vinklar och längder i rätvinkliga trianglar.

- 3C. Bevis och användning av cosinus-, sinus- och areasatsen för en godtycklig triangel.

- 3C. Egenskaper hos cirkelns ekvation och enhetscirkeln för att definiera trigonometriska begrepp.

- 4C. Hantering av trigonometriska uttryck samt bevis och användning av trigonometriska formler inklusive trigonometriska ettan och additionsformler.

- 4C. Algebraiska och grafiska metoder för att lösa trigonometriska ekvationer, såväl med som utan numeriska och symbolhanterande verktyg.

- 4C. Egenskaper hos trigonometriska funktioner, logaritmfunktioner, sammansatta funktioner och absolutbeloppet som funktion.

- 4C. Härledning och användning av deriveringsregler för trigonometriska, logaritm-, exponential- och sammansatta funktioner samt produkt och kvot av funktioner.

Det framgår ur detta material att trigonometri har en viss splittrad roll inom gymnasiematematiken där vissa studenter inte ens undervisas i trigonometrin. De elever som möter ämnet har relativt annorlunda inriktningar på materialet. A-spåret fokuserar på geometriska, visuella och praktiska tillämpningar medan C-spåret inriktar sig istället på att utveckla ett stort antal begrepp och terminologi. Dessa ska sedan kopplas till olika grenar inom matematiken, såsom funktionslära, derivering, geometri, bevis, m.m.

Vilken utgångspunkt har tagits i detta arbete?

Med grund i resultatdelens litteratur kommer det snart framgå att majoriteten av studierna utgår från en formell matematisk diskurs, där målet är att belysa elevers matematiska uppfattningar med ett perspektiv från högre matematik. Det är även relevant att i detta skede nämna att nästan hälften av studierna är något äldre elever än högstadiet och gymnasiet (college). Från forskningssynpunkt ses trigonometrin därmed som reserverad för de studenter som ska läsa vidare på universitet, vilket återspeglas även i de svenska ämnesplanerna. Utgångspunkten är därmed helt och hållet grundad på att de studenter som undervisas är ämnade samt siktar på att ta del av högre studier. Baserat på frågeställningarna utesluts funktionsläran ur arbetet.

Detta innebär inte att jag helt och hållet utesluter användningsområden av trigonometrin ur arbetet. Trigonometri har genom historien tillämpas inom flera områden. Främst har astronomi lagt grunden för en större del av trigonometrins rättfärdigande, dock i en något annorlunda form än den plana variant som undervisas idag. Inom det nästkommande avsnittet kommer det presenteras en variation av trigonometri som kan nyttjas inom främst för avståndsmätning på jorden, *Sfärisk trigonometri*.

Bakgrund till sfärisk trigonometri

Det bör nämnas att trots att denna del av matematiken har fallit ut mer eller mindre från matematikkurserna, både inom gymnasiet likväl universitet, kvarstår fortfarande en central del som utvecklades i tandem med denna trigonometri.

Logaritmer formgavs ursprungligen[3] i syftet att tillämpas främst inom sfärisk trigonometri för att förenkla komplicerade multiplikationer samt divisioner (Van Brummelen, 2009, s. 82–86). Denna koppling kommer jag dock ej behandla i någon större grad, dock anses den av rent tillämpbara anledningar vital för förståelsen. Även Napiers regler, som är förenklingar av trigonometriska samband inom den sfäriska trigonometrin behandlas ej och jag föreslår att en läsare vänder sig till andra källor för detta.

Kapitel 3.1 utgår mestadels från Van Brummelens arbeten (2013) men även material för kursen SJM002 (Nautisk matematik och fysik, 2020) samt ett äldre verk av Todhunter (1886). Kapitlet har även fått ändrats baserat rekommendationer från handläggaren, Jan Stevens. För att kort förklara dispositionen för det stundande kapitlet kan det sammanfattas som en samling av definitioner samt kärnfulla satser inom området. Främst relaterar dessa satser sidorna och vinklarna i sfäriska trianglar. Todhunter beskriver sfärisk trigonometri med följande ord:

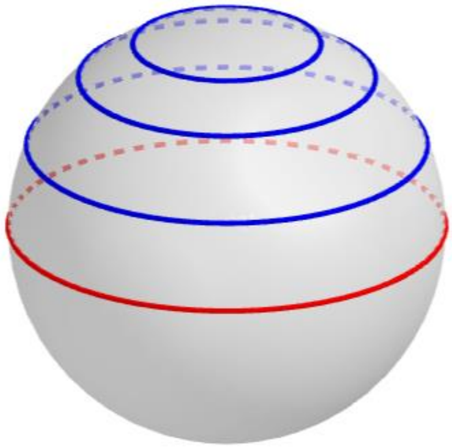
> Spherical Trigonometry investigates the relations which subsist between the angles of the plane faces which form a solid angle and the angles at which the plane faces are inclined to each other.
>
> (Todhunter, 1886, s. 7)

Med andra ord kommer definitionerna som sådana utgå främst från plan och de kurvor som uppkommer när dessa skär en sfär.

[3] Visserligen i en alternativ version än den vi har idag.

3.1 Sfärisk trigonometri

Låt oss inleda med att skapa en terminologi framtida användning. Studera figuren till höger, vilket illustrerar en sfär med ett antal cirklar av olika art. Dessa cirklar kan skapas genom att låta ett plan skära en given sfär. Här väljer jag att dela in den typen av cirklar som uppstår vid en sådan aktion i två fall: storcirklar samt småcirklar. Storcirklar är de fall som utgör den största cirkeln som kan uppkomma på en sfär och uppstår när man låter ett plan gå genom cirkelns centrum. Som en läsare kan utröna från bilden är småcirklar de fall där ett plan som snittar genom sfären ej inkluderar sfärens centrum.

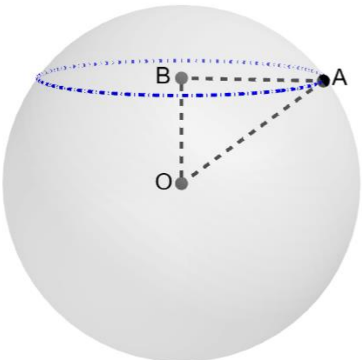


Figur 1. En sfär där olika plan har skärt ut ett tvärsnitt av sfären.

Innan vi fortsätter vidare måste vi ta oss an ett filosofiskt problem; *Är vi säkra på att varje plan som skär genom sfären alltid ger upphov till en perfekt cirkel*?

Vår allra första sats är menad att utgöra en försäkran för allas del att de definitioner som används i arbetet är av sunt förnuft[4].

Sats 1: Varje plan P som skär en sfär S ger en perfekt cirkel som tvärsnitt.



Figur 2. En illustration av ett fall där planet skär sfären. Se att givet ett plan P är OA:s samt OB:s längder konstanta.

Studera figuren till vänster. Låt A vara en punkt på snittet mellan sfären och planet. Koppla punkten A till sfärens centrum, O. Låt B vara den punkt som uppkommer när en vinkelrät linje släpps mot planet från O. Då sfären är symmetrisk från alla perspektiv kan vi rotera den så att vi kan se snittet som illustreras i figuren.

Notera att OB är en vinkelrät linje mot planet och planet P ändrar ej sitt läge gentemot sfären så kommer en ändring av punkten A:s position på snittet ej påverka storleken av OB. Likväl, ty OA är sfärens radie kan vi sluta oss till via Pythagoras sats att även den sista termen, AB måste vara konstant, dvs. kurvan som uppkommer på sfärens yta håller ett konstant avstånd från ett centrum B. Alltså, snittet är en cirkel.[5] ■

Med våra sinnen satta till ro i denna fråga fortsätter vi vidare på vår färd med ytterligare en definition:

Definition: Vi kallar storcirklar för **linjer (på sfären).**

I viss bemärkelse kan storcirklar ses som "linjer" på en sfär. Det är klart att jag inte menar "räta linjer" i den mening att de är "räta". Istället utgår vi från linjer som ett medel för att finna det kortaste avståndet mellan två punkter. Alltså, med ett linjesegment som avståndet mellan två punkter A och B. Hur många gånger har man inte hört uttrycket: "det kortaste avståndet mellan två punkter är en rät linje". Detta gäller

[4] Vi vill inte ha ett cirkelbevis såsom ett plan P ger upphov till en perfekt cirkel pga. en perfekt cirkel uppkommer när man skär med ett plan.

[5] Notera att dessa småcirklar måste ha en strikt mindre radie än storcirklar som uppkommer när planet skär genom sfärens centrum O.

inte på sfären men det är möjligt att visa att mellan två givna punkter på sfären är det kortaste avståndet, ett **linjesegment**, en båge,[6] av en **storcirkel**.

Detta bevis lämnar jag dock till en kurs inom differentialgeometri men intuitionen för beviset är mer eller mindre att givet vissa förutsättningar kan man visa att alla polygontåg[7] från en punkt A till B på sfären minimeras av en storcirkel.

Härmed benämns storcirklar som linjer (på sfären). All vidare notation som behandlar dessa linjer kommer antas vara på sfären. Det blir visserligen en aning axiomatiskt med denna benämning men vi kommer efter ett visst sökande finna att en tillämpad teori för sfärisk trigonometri inte existerar[8].

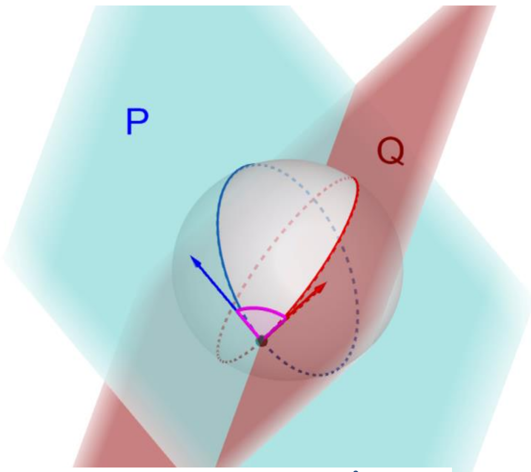
Det förefaller dock föreligga en skillnad mellan linjer i planet och linjer i sfären. I det senare fallet finns det två punkter som definierar ett oändligt antal linjer genom sig. För att exemplifiera detta behöver vi ett antal begrepp; vi säger att två punkter är **antipoder**[9] om de är diametralt motsatta, alltså om en rät linje mellan dem går genom cirkelns centrum. Exempel på två antipoder skulle vara Nord- samt Sydpolen[10]. Med eftertanke finner man att det finns ett oändligt antal storcirklar genom polerna. För att förstå idéen kan läsaren ställa sig själv följande fråga: i vilken tidszon ligger Nordpolen?

För att vidareutveckla terminologin kommer jag behöva tala lite om vad en "vinkel" ens är på denna sfäriska yta. Här väljer jag att presentera ett antal tolkningar som visserligen kan mer eller mindre ses som en och samma. Vi vet att linjer uppkommer när vi låter plan skära genom sfärens centrum och kan därmed lyfta fram följande definition:

Definition: En vinkel[11] mellan två linjer som uppkommer från plan P och Q, definieras som vinkeln mellan planen.

Notera att detta är ekvivalent med *vinkeln mellan P och Q:s normaler* vilket också är en förekommande och naturlig definition att nyttja vid konstruktionen av vinklar i denna sfäriska värld. Det är även riktigt att definiera vinkeln med hjälp av *tangentens riktning som uppkommer vid skärningspunkterna för planen.* Beroende på normalernas respektive tangenternas orientering skulle mer än en vinkel kunna uppkomma vid skärningspunkten. Detta är inte oväntat givet motsvarande variant för räta linjer i planet.

Detta leder in oss på följande definitioner:



Figur 3. En vinkel mellan två plan

[6] Se att man här definierar metrin, dvs. avståndsmätning på sfären, som längden av bågarna som spänns upp av en vinkel. Med andra ord, givet att en båge spänner upp en vinkel V (i radianer) på en sfär med radien R är bågens längd VR.
[7] En serie av räta linjesegment mellan en mängd punkter. Se Wikipedia för en kort sammanfattning. https://en.wikipedia.org/wiki/Polygonal_chain
[8] Möjligen som en delmängd av elliptisk geometri.
[9] Det finns även fall där man säger att "två punkter är antipodala".
[10] Visserligen är Jorden inte helt sfärisk utan snarare en oblatsfäroid. Vi tar det som "approximativt" och enbart som ett verktyg för att visualisera idéen.
[11] Där vinklar är givna i radianer såvida inget annat anges.

Definition: En n-**sfärisk *polygon*** är den polygon på sfärens yta som definieras av skärningen mellan n distinkta plan och sfären.

Se att det går att skapa en geometrisk figur med stöd av enbart två linjer, en tvåhörning (digon) med vinkeln θ.

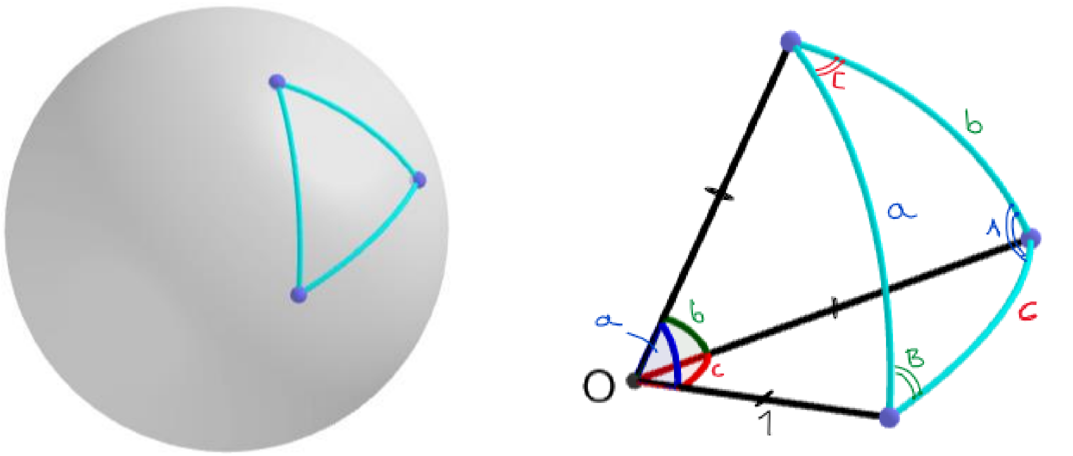
Definition: En **månskära**[1] är det område som begränsas av två halvlinjer (vilka möts vid antipoderna).

Figur 4. En månskära (digon) med vinkeln θ.

Här menar jag enbart den ena sidan av de “apelsinskal” som uppkommer vid denna konstruktion. Notera att givet vinkeln θ är ytan[12] av denna figur $2\theta R^2$. Det uppkommer mer än en månskära vid dessa fall (baksida och framsida). Vidare, se att om vi låter vinkeln växa, eller om man föredrar, låter linjerna gå mot varandra, så kommer en av de uppkomna figurerna vara hela sfären.

Sfäriska trianglar

Detta öppnar upp för att introducera den motsvarande varianten av en trehörning. Helt enkelt är det den trehörning som definieras med hjälp av tre linjesegment. Här är det dock inte längre klart vilket område man avser vara den sfäriska triangeln när mer än ett område uppstår i figuren om vi använder linjer. Låt oss först säga att vi arbetar med enhetssfären. Under detta antagande väljer jag här att begränsa bågarnas längd till ett intervall av $[0, \pi]$. Med andra ord ligger alla sfäriska trianglar inom en enda hemisfär.

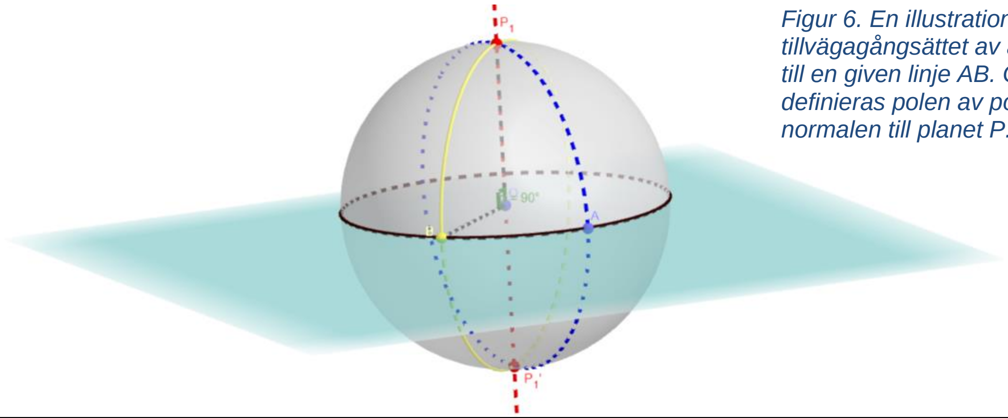


Figur 5. (t.v.) En sfärisk triangel, inskriven i en sfär med en viss radie. (t.h.) En bild där jag kopplat triangelns hörn till sfärens centrum.

I figuren binder jag ihop punkterna med den linje (båge) som ger det kortaste avståndet. I figuren till höger har radien satts till 1 vilket ger oss att linjesegmentet kommer ha samma längd som den vinkel som spänns upp av segmentet. I andra fall får du multiplicera med en faktor R. För att föregå kommande satser önskar jag även definiera vad jag menar med en “pol” till ett linjesegment AB. Vi kan se en pol som den punkt som ligger $\pi/2$ radianer från alla punkter på en given ekvator.

---

[12] Nyttja att figuren är en andel av den totala sfärens area.



Figur 6. En illustration av tillvägagångsättet av att skapa en pol till en given linje AB. Givet ett plan P definieras polen av polären, dvs. normalen till planet P.

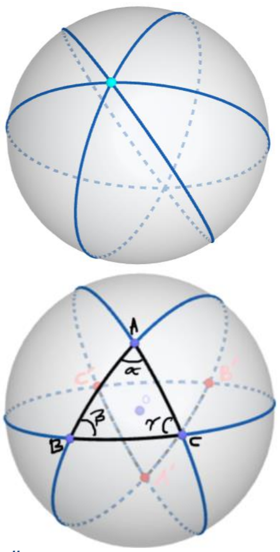
Definition: En **pol** är en skärningspunkt mellan **polären och sfären**, dvs. skärningspunkten mellan normalen till ett plan P och sfären. [13]

Nästa sats är ett av de viktigaste och vackraste resultaten inom sfärisk trigonometri. Den beskriver ett enkelt samband mellan vinklarna i en sfärisk triangel och dess area och kommer utgöra en central sats i arbetet därför att den används för att binda ihop flera andra satser.

Sats 3, Girards sats. Arean Δ av en sfärisk triangel med vinklar α, β, γ på en sfär med radien R ges av:

$$\Delta = \boldsymbol{R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi)} \ = \boldsymbol{R^2 E}$$

Där E är det sfäriska överflödet, dvs. hur mycket vinklarna i den sfäriska triangeln överstiger ett halvt varv.



Figur 7. Överst. En degenererad triangel. Underst. En triangel med motsvarande poler utritade.

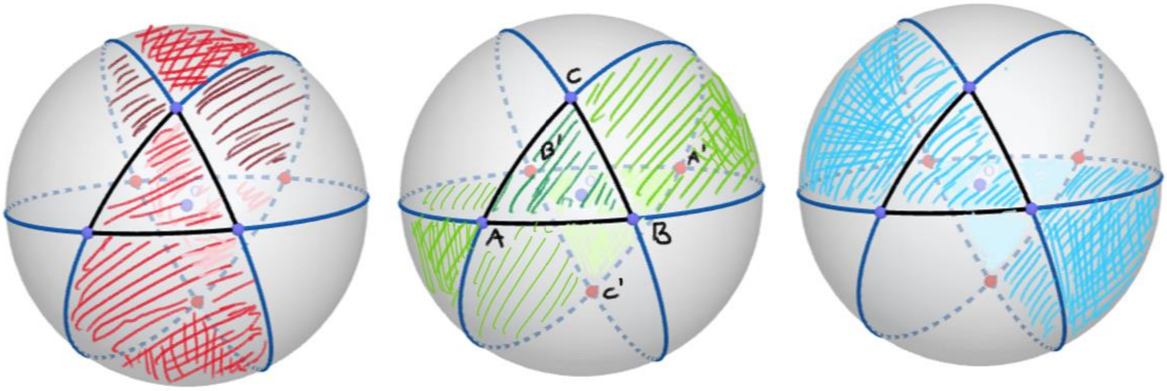
Bevis: För att illustrera den önskade satsen kommer jag använda tre linjer. Först för att få lite intuition för tankesättet. Låt oss rikta vår uppmärksamhet till en degenererad triangel där alla tre punkterna har samma placering på sfären. Utöka detta med tre linjer (se figur till vänster). I detta fall framgår det att det existerar totalt sex månskäror, och att unionen av dessa områden är ekvivalent med hela sfären.

Detta resonemang kan utökas till det fall där punkterna i den sfäriska triangeln är distinkta. Koppla ihop punkterna samt utöka den sfäriska triangelns sidor med hjälp av linjer. Varje linje kommer innehålla sin antipod[14] här benämnda med “ ´ “. Detta ger att det uppkommer en till sfärisk triangel med A´B´C´ som hörn. Dessa är definierade av samma linjer som uppkommer vid utökningen av varje sida i den ursprungliga triangeln.

Det uppstår ännu en gång ett antal månskäror, såsom ABA´C, AC´A´B´, m.m. där unionen av dessa månskäror kommer ge oss hela sfären. Se här att om man helt enkelt adderar areorna för varje månskära kommer vissa snitt räknas mer

[13] Se att det finns två poler. Tänk dig helt enkelt linjen AB som en ekvator. Detta är dock oftast inte rekommenderat inom högre matematik där unika representationer är av stort intresse. En lösning av detta är att nyttja planets positiva normal vilket definierar en unik punkt på ena hemisfären.

[14] Ty varje linje är en storcirkel som uppkommer när vi låter ett plan skära genom sfärens centrum följer det att vi kan rotera sfären på ett sådant sätt att ex. Punkten A är nordpolen och linjen ligger längst nollmeridianen. Detta ger att A´ måste ligga vid sydpolen, vilket är en del av linjen.



Figur 8. Sex månskäror uppstår vid utökningen av linjesegmenten. Se att det finns områden som är unika för varje månskära men att det finns två trianglar som är närvarande i alla fallen.

än en gång (totalt sex gånger). Snittet är de sfäriska trianglarna ABC samt triangeln som uppkommer vid antipoderna, A´B´C´. Trianglarnas areor är ekvivalenta på grund av att varje punkt och dess antipod ligger diametralt motsatta gentemot varandra[15].

Studera figur 8: denna försöker visa paren av alla möjliga månskäror. Låt oss addera deras areor! Detta kommer klart göra att vi räknar snitten mer än nödvändigt vilket i sin tur kommer behöva kompenseras för.[16] Då arean av varje separat månskära ges av $2\theta R^2$, och därmed är arean av paren i varje fall $4\theta R^2$, samt sfärens totala area är $4\pi R^2$ får vi att:

$$\boldsymbol{A_{Sf\text{är}} = A_{r\text{öd}} + A_{gr\text{ön}} + A_{bl\text{å}} - 4\Delta}$$

$$\boldsymbol{4\pi} R^2 = \boldsymbol{4\alpha R^2 + 4\beta R^2 + 4\gamma R^2 - 4\Delta}$$

$$\Delta = \boldsymbol{\alpha R^2 + \beta R^2 + \gamma R^2 - \pi} R^2 = (\alpha + \boldsymbol{\beta + \gamma - \pi}) R^2$$

Ett minst sagt vackert uttryck för arean av en sfärisk triangel! Arean är alltså relaterad till hur mycket det överstiger en halv rotation, vilket vi kan se som hur mycket det avviker från att vara en plantriangel. ■

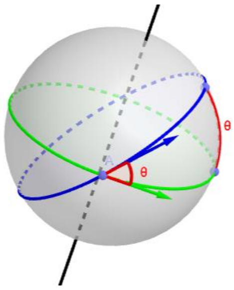
En följdsats följer direkt av observationen att arean är ickenegativ. Detta implicerar direkt att vinkelsumman i dessa sfäriska trianglar är strikt större än vinkelsumman av en plantriangel.

Följdsats 1. Vinkelsumman i en sfärisk triangel är större än π radianer.

---

[15] Koppla exempelvis ihop A med A' samt B med B' med en vanlig rät linje i klassisk mening. På detta vis bildas två räta linjer i det euklidiska rummet som har en skärningspunkt i origo (ty diametralt motsatta). Dessa spänner klart upp samma vinkel och därmed ger de även upphov till samma storlek på respektive båge.

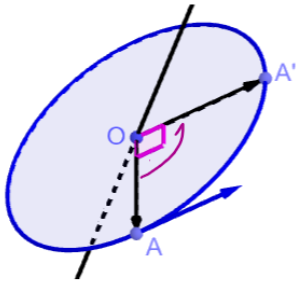
[16] Trianglarna behöver räknas en gång var, och därmed totalt två gånger av samma area. De räknas dock totalt sex gånger, en för varje månskära, vilket innebär att för att ekvivalens ska föreligga får man ta bort fyra av dessa areor. Se att det är enbart de sfäriska trianglarna som utgör snittet och att resten av områdena är disjunkta gentemot andra månskäror.



Figur 9: konvertera vinkel till båge genom att röra dig $\frac{\pi}{2}$ radianer längst respektive linje.

Det finns ett sätt att konvertera mellan vinklar på sfären och bågar, givet att vi låter ***radien R vara enheten***. Låt oss anta att vi har vinkeln θ mellan två linjer. Låt A vara skärningspunkten mellan linjerna. Man kan i detta fall få fram en båge av samma längd som vinkelns storlek genom att röra sig $\frac{\pi}{2}$ radianer längs respektive linje och förena de två ändpunkterna.

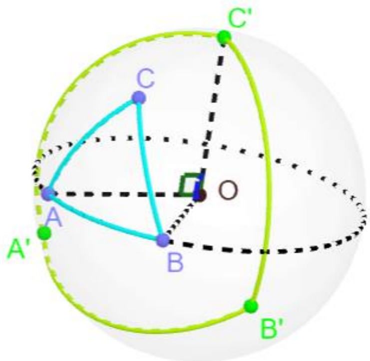
Detta följer ty respektive vektor som går från sfärens centrum till A är rätvinklig mot tangenterna. När man roterar dessa med en rät vinkel i varje plan kommer den resulterande vektorerna vara parallella med respektive tangent. Skala dessa roterade vektorer till cirkelns radie. Detta ger att bågarna spänner upp exakt den önskade vinkeln θ.



I figuren till vänster har jag bara studerat rotationen av en vektor i ena planet. Se att när vi roterar vektorn ett fjärdedels varv erhåller vi en vektor från OA´ som är parallell med tangentvektorn. Detta följer från att planet i fråga är isomorfisk med R^2och tangenten är vinkelrät med OA.

Figur 10: En illustration av resonemanget i ett plan.

Detta leder oss till den sista definitionen jag kommer göra i detta kapitel. Först vill jag ge lite intuition för definitionen. Låt oss tänka oss att vi har en arbiträr sfärisk triangel ABC såsom i figur 11. Konstruera polerna till varje linje AB, AC samt BC. Se varje linje som en ekvator och placera respektive pol. Välj sedan att enbart inkludera den pol för respektive fall som ligger på samma sida om ekvatorn där triangeln ligger. På grund av att vi valt att två av punkterna utgör ekvatorn följer det att den tredje punkten ger oss vilken pol vi ska välja. Detta ger upphov till en ny sfärisk triangel som kommer få ett eget namn.

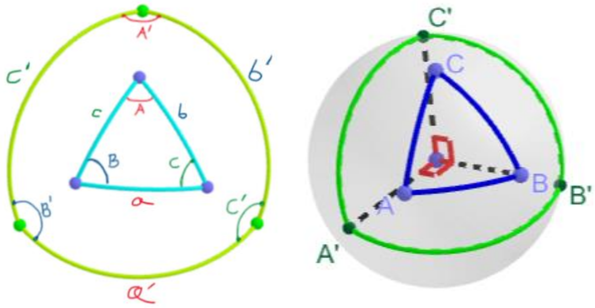


Figur 11. En konstruktion av en polärtriangel till en given triangel ABC.

Definition. Polärtriangel[17]: En polärtriangel är den triangel som spänns upp av polerna till en given triangel ΔABC på ett sådant sätt att varje respektive pol ligger på samma hemisfär som den givna triangeln.

Dessa trianglar har en rättfram relation med den ursprungliga triangeln. Exempelvis är dessa geometriska figurer ett exempel av begreppet **"dualitet".** Om man utför samma konstruktion med den polära triangeln får man tillbaka den ursprungliga triangeln.

[17] Skulle även kunna översättas med **polär triangel**. Efter råd med handläggaren har jag valt att slå ihop orden. Valet är baserat på tysk litteratur som genom historien har formgett den svenska terminologin inom matematiken.



Figur 12. (t.v.) En illustration av en sfärisk triangel samt dess korresponderande polära triangel. (t.h). Här försöker jag visa på ett fall av hur B är polen till bågen A´C´ (se sats 4).

Sats 4. Polärtriangeln till en polärtriangel är den ursprungliga triangeln.

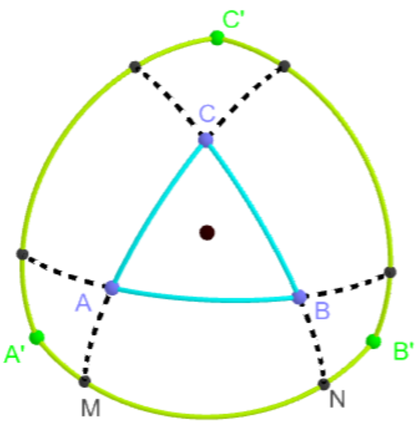
Bevis: Se att bågen A´C´ spänner upp en båge av en rät vinkel gentemot B, ty C' är pol till AB och A' är pol till BC. Alltså är A' och C' förskjutna med en rät vinkel gentemot B. Eftersom B´ ligger inom samma hemisfär som B följer det därmed att detta är den önskade polen för konstruktionen av den polära triangeln till A´B´C´. Med samma resonemang finner vi att A är pol till B´C´ och C är en pol till A´B´. ■

Det visar sig att en triangel ABC samt dess polära triangel A´B´C´ har ett enkelt förhållande med varandra som beskrivs av följande sats.

Sats 5. Dualitetssatsen[18]. Sidorna i en polärtriangel är supplementära med vinklarna i den ursprungliga triangeln och sidorna i den ursprungliga triangeln är supplementära med vinklarna i den polära triangeln. Alltså;

$$A + a' = \pi \ \ och \ A' + a = \pi$$

För respektive fall. (Se vänster bild i figur 12 för notationen).



Figur 13. En bild där man utökat linjesegmenten AC, etc. på ett sådant sätt att de skär A' B' etc.

Bevis: I grunden går idéen ut på att dela upp bågarna som spänns upp av de polära trianglarna i sektioner som lätt kan bestämmas och sedan kombinera dessa till den önskade identiteten.

För att ge visuellt stöd för beviset bifogar jag följande figur till vänster. Jag har utökat varje linjesegment av triangeln ABC till linjer. Sedan markerades deras skärningspunkter med respektive båge i den polära triangeln. För att beskriva den önskade satsen studerar vi A´B´, ty resten av fallen följer med liknande resonemang. Då C är pol till A´B´ och MN ligger på ekvatorn A´B´ så följer det att MN är förskjuten med $\pi/2$ radianer gentemot C, dvs. MC och NC har en längd av $\pi/2$. .

Från kommentaren angående att översätta en vinkel till en båge (s.13) följer det att MN =∠C. Se sedan att A´ är en pol till ekvatorn CBN. Alltså är A'N = $\pi/2$. Samma resonemang fast tillämpad till B' och ACM ger MB' = $\pi/2$. Se att om vi adderar längderna A´N samt MB' räknar vi stycket MN dubbelt vilket ger följande relation:

[18] Eng. Polar Duality Theorem.

$$A'B' = A'N + MB' - MN = \pi - \angle C$$

Här är A'B' bågen som spänner upp ∠C' vilket det därmed följer att:

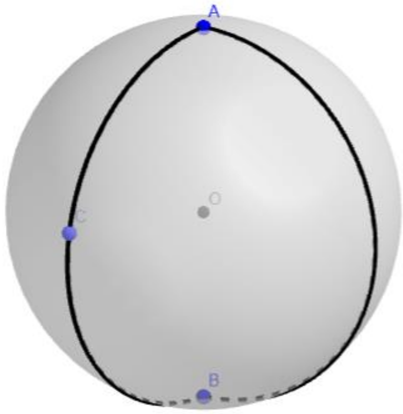
$$c' = \pi - \angle C$$
$$c' + \angle C = \pi$$

Vilket efter ett byte av namn ger den första delen av den önskade satsen. För att få den andra delen av satsen använder jag sats 4: polärtriangeln till polärtriangeln är den ursprungliga triangeln. ■

Vad för värden kan den sfäriska triangelns sidor anta?

Den tidigare satsen kan användas i kombination med följdsats 1 för att begränsa storleken på våra sidor i sfäriska trianglar. Först kan vi försöka få en intuition för vad begränsningen borde vara. Det är givet sedan tidigare att vinklarna som spänner upp bågarna ligger inom intervallet $[0, \pi]$. I sådana fall skulle vi krasst kunna säga att sidornas summa inte kan överstiga 3π.[19]

Det visar sig snart att om man väl försöker maximera sidolängden att vi inte kan komma i närheten av denna övre gräns. Studera figuren till höger. Här har jag placerat A och B på ett sådant sätt att de är antipoder gentemot varandra och sedan kopplat ihop dem med ett linjesegment.[20] Sedan har jag valt en punkt C som en arbiträr position på sfärens yta. Om linjerna är distinkta har vi två bågar som spänner upp ett halvt varv var, därmed ett helt varv, en längd av 2π.



Figur 14. En ansats där man försöker maximera sidolängden.

Intuitionen säger oss således att följande sats borde föreligga:

Följdsats 2. Summan av sidornas längd i en sfär med radien satt till enheten kan ej överstiga 2π.

Enligt sats 5 gäller det att följande förhållande är giltigt mellan den ursprungliga- respektive polärtriangeln för varje fall; $A' + a = \pi$. Genom att addera alla tre fall får vi;

$$A' + a + B' + b + C' + c = 3\pi \Leftrightarrow a + b + c + A' + B' + C' = 3\pi$$

Enligt följdsats 1 är vinkelsumman i en sfärisk triangel större än π radianer. Alltså är $\pi < A' + B' + C'$. Detta ger det önskade resultatet ty;

$$a + b + c + \pi < a + b + c + (A' + B' + C') = 3\pi \Leftrightarrow a + b + c < 2\pi \text{ ■}$$ [21]

Detta för oss äntligen in till det sista avsnittet där vi kommer bevisa de två sista vitala satserna jag tycker är nämnvärda i detta kapitel. Den sfäriska trigonometrins motsvarande varianter av cosinus respektive sinussatsen.

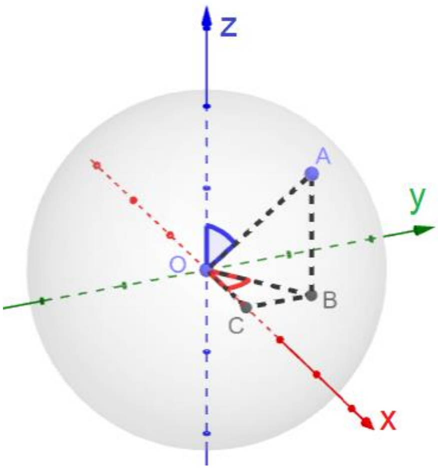
[19] Minns att sidorna i en enhetssfär är en och samma i storlek som vinklarna de spänner upp.
[20] Som det visserligen finns ett oändligt antal val av, det finns ingen unik linje som sammanbinder antipodala punkter.
[21] Där ekvivalens föreligger om en punkt är antipoden till en annan.

Sats 6. Cosinussatsen för sfäriska trianglar. För vinklarna A, B, C i en sfärisk triangel med sidorna a, b, c gäller följande:

$$\cos a \;=\; \cos b \cos c \;+\; \sin b \sin c \cos A$$
$$\cos b \;=\; \cos c \cos a \;+\; \sin c \sin a \cos B$$
$$\cos c \;=\; \cos a \cos b \;+\; \sin a \sin b \cos C$$

(se här att en av dem räcker, resten av dem är bara cykliska permutationer).

Bevis: I denna sats kommer vi avvika lite från den geometri vi hittills använt och introducera rymdpolära koordinater. Med detta inträde bör jag nämna att vi har ett val att göra; introducera vinklar som är större än ett halvt varv eller introducera negativa vinklar. Detta är nödvändigt för att kunna skapa en nästintill bijektiv avbildning mellan en given punkt på sfären och koordinatsystemets representation.



Figur 15. En sfär av radie R.

På grund av att positiva vinklar har använts i resten av kapitlet utökas härmed räckvidden för vinklarnas storlek till 2π radianer i vissa fall.[22] Se figuren till vänster. Här har jag ritat in en arbiträr punkt A på sfären och sedan projicerat den ortogonalt ner i xy-planet. Det framgår att vi kan definiera punkter på sfären med radie R, med stöd av två ytterligare parametrar, θ, φ, som i detta fall definieras som vinkeln mellan vektorn OA och z-axeln samt vinkeln mellan OB och x-axeln.[23] Uttryckt i ett kartesiskt koordinatsystem gäller följande:

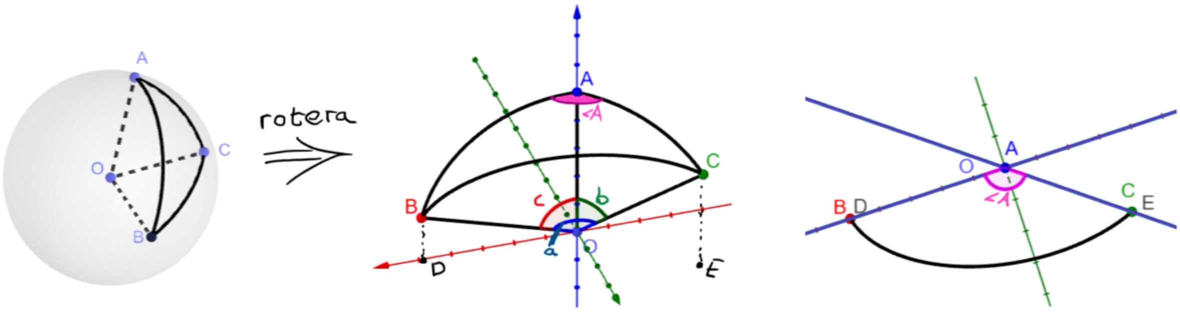
$$x \;=\; R \sin\theta \cos\varphi \,, y \;= R \sin\theta \sin\varphi \,, z \;=\; R \cos\theta .$$ [24]

Låt A, B och C vara tre punkter som definierar en sfärisk triangel på en sfär vars radie satts till 1. Likt tidigare bevis tillämpar vi tankesättet att vi kan rotera sfären på ett vis som gör att en av dessa punkter, säg A, är nordpolen samt att en annan ligger längst nollmeridianen, säg B. Då sfären är symmetrisk och vektorerna roteras och transformeras på samma sätt får vi att förhållandet bevaras mellan vektorerna.

[22] Detta går visserligen emot den standard man använder inom geodesi, mätning av jorden, där man praktiserar med riktade vinklar istället.

[23] Ännu en gång finns det mer än en standard. Inom fysiken är rollen på dessa bytta medan inom geodesi utgår man inte från z-axeln utan från vilken vinkel det mäter upp med ekvatorplanet (xy-planet), dvs. latitud. Med andra ord kan man säga att kontexten spelar roll.

[24] Här är radien satt till 1 vilket ger ett enklare uttryck. Uppmärksamma dock att denna avbildning ej är injektiv, ty det finns mer än ett element som kartlägger till respektive pol (på z-axeln). Här sätter man nordpolen till (1,0,0) för radien 1. Utöver det har origo mer än en representation där R = 0 gör att varje vinkel klart fungerar. Sätt detta till (0,0,0) för injektivitet.



Figur 16. Illustration av tillvägagångssättet.

I den första bilden (t.v.) roterar vi sfären genom att låta A bli nordpolen och B ligga vid nollmeridianen (här x-axeln, röd). I den sista bilden har planen som definierar linjerna ritats ut. Sedan i den sista bilden illustreras fallet ”ovanifrån”. Här kan vi se att vinkeln mellan den positiva x-axeln till projektionen av C på xy-planet, E, är helt enkelt vinkeln vid A.

Se att uttryckt med koordinater på formen (x, y, z) får vi följande för respektive vektor:

OA = (0,0,1), pga. A är nordpolen.

OB = (sin c, 0, cos c), pga. Punkten B spänner upp en båge med A med storleken “c”. Alltså är $\theta = c \text{ och } \varphi = 0$.

Slutligen får vi fram den krångligaste av de tre med OC genom att projicera C på xy-planet. Kalla skärningspunkten med xy-planet E. Vinkeln mot z-axeln är klart “b”, däremot är det något oklart vad vinkeln mot x-axeln är. Genom att istället studera fallet “ovanifrån”, dvs. från ovanför punkten A, får vi en mycket klarare vy. Då AB samt AC spänns upp av två plan är det klart att vinkeln helt enkelt är den sfäriska triangelns vinkel vid A, kalla den ∠A.[25] Därmed är $\theta = b \text{ och } \varphi = \angle A$.

OC= (sin b cos$\angle A$, sin b sin$\angle A$, cos b)

Avslutningsvis gör vi följande observation: se att OB samt OC är enhetsvektorer som har en vinkel “a” uppspänd mellan sig. Från definitionen av skalärprodukter gäller det att:

$OB \cdot OC = \cos a$, men samtidigt gäller det att:
$OB \cdot OC =$sin c sin b cos $\angle A$ + cos c cos b, vilket kan skrivas om till:
cos a = cos b cos c + sin b sin c cos$\angle A$

Döp om vinkeln $\angle A$ till A för att få fram den önskade satsen. ■

Genom att tillämpa dualitetssatsen på identiteterna i sats 6 får vi fram en hel mängd av nya identiteter. På sätt och vis kan man väl se dualitetssatsen som ett verktyg för att dubblera antalet satser vi har. Detta ger oss:

[25] Denna kommer byta namn till A senare, vi vill skilja på vinkeln A och punkten A i detta fall.

Följdsats 3. För vinklarna A, B, C i en sfärisk triangel med sidorna a, b, c gäller följande:

$$cos\ A\ =\ -cos\ B\ cos\ C\ +\ sin\ B\ sin\ C\ cos\ a$$
$$cos\ B\ =\ -cos\ C\ cos\ A\ +\ sin\ C\ sin\ A\ cos\ b$$
$$cos\ C\ =\ -\ cos\ A\ cos\ B\ +\ sin\ A\ sin\ B\ cos\ c$$

(se här att en av dem räcker, resten av dem är bara cykliska permutationer).

Bevis: Tillämpa sats 6 till den polära triangeln av en given triangel ABC och sedan sats 5. Nyttja sedan förhållandet att $sin(\pi - x)\ =\ sin(x)\ och\ cos(\pi - x) = -cos(x)$. ■

Här dyker ytterligare en skillnad upp gentemot de plana trianglarna. Se här att givet att vi sätter radien som enheten för mätning, kommer vi kunna bestämma samtliga av den sfäriska triangelns sidor a, b, c med hjälp av enbart vinklarna! Jämför detta med plana trianglar, där det krävs vetskap om minst en sida för att bestämma alla sidor.

Nu kan vi även lätt beskriva den korresponderande varianten för Pythagoras sats för sfäriska trianglar.

Följdsats 4. Pythagoras sats för sfäriska trianglar. Givet sidorna a, b och c samt att vinkeln C är rät gäller det att:

$$\cos c = \cos a \cos b$$

Bevis: låt helt enkelt vinkeln C vara rät i cosinussatsen, sats 6 (fall 3).

Pythagoras sats ser inte riktigt ut som den brukar. Denna skillnad är dock överkomlig om du studerar vad som händer när a, b och c går mot mycket små bågar och därmed approximerar en flat yta (tänk tangentplanet). Vi lämnar det till läsaren att ersätta cos c, cos a respektive cos b med deras Maclaurinserie (grad 2). Låt a och b gå mot små värden och studera vilken identitet som dyker upp.

Slutligen kommer vi till den motsvarande varianten till sinussatsen, vilket kommer vara den sista satsen jag tar upp i detta kapitel.

Sats 7. Sinussatsen för sfäriska trianglar. I en sfärisk triangel gäller:

$$\frac{sin\ A}{sin\ a} = \frac{sin\ B}{sin\ b} = \frac{sin\ C}{sin\ c}$$

Där A, B, C är de inre vinklarna av en sfärisk triangeln och a, b, c är längden av linjerna som spänner upp triangeln (vilket om det är taget som en sfär med radien 1 ger att a, b, c är samma som vinkeln bågarna spänner upp).

Beviset är tack vare Todhunter (1886, s. 20–21) och utgår från trigonometriska ettan tillämpade på vinklarna i polärtriangeln:

$cos^2(A) + sin^2(A) = 1 \Rightarrow sin^2(A) = 1 - cos^2(A)$, tillämpa cosinussatsen 9 och lös ut cos A.

$$sin^2 A = 1 - \left(\frac{cos\ a\ -\ cos\ b\ cos\ c}{sin\ b\ sin\ c}\right)^2 = \frac{sin^2 b\ sin^2 c - (cos\ a\ -\ cos\ b\ cos\ c)^2}{sin^2 b\ sin^2 c}$$

$$= \frac{(1-cos^2\ b)(1-cos^2\ c)-(cos\ a - cos\ b\ cos\ c)^2}{sin^2 b\ sin^2 c}$$

$=\frac{1-cos^2 a-cos^2 b-cos^2 c+2\ cos\ a\ cos\ b\ cos\ c}{sin^2 b\ sin^2 c}$: ta roten av båda sidor.[26] Detta ger:

$sin\ A\ = \frac{\sqrt{1-cos^2 a-cos^2 b-cos^2 c+2\ cos\ a\ cos\ b\ cos\ c}}{sin\ b\ sin\ c}$: förläng med 1/sin(a) (när detta är definierat).

$$\frac{sin\ A}{sin\ a} = \frac{\sqrt{1 - cos^2 a - cos^2 b - cos^2 c + 2\ cos\ a\ cos\ b\ cos\ c}}{sin\ a\ sin\ b\ sin\ c}$$

Notera att högerledet består av termer sådant att en ***cyklisk permutation*** av a, b, c ger exakt samma värde ty reella tal är kommutativa och associativa under multiplikation samt addition. Med andra ord följer det att de kvarvarande fallen, $\frac{sin\ B}{sin\ b}$ samt $\frac{sin\ C}{sin\ c}$ är ekvivalenta med det första.[27] Alltså:

$$\frac{sin\ A}{sin\ a} = \frac{sin\ B}{sin\ b} = \frac{sin\ C}{sin\ c}$$

[26] Notera att detta är ett icke-negativt tal från trigonometriska ettan som man inledde med.

[27] Jag finner detta resonemang otroligt intressant. Mer eller mindre öppnar det upp ett helt nytt sätt att tänka och resonera på kring funktioners utseenden. Att det även lyckas omvandla ett sådant ”fult” uttryck till ett vackert i ett enda enkelt svep är såvitt jag ser det imponerande.

4. Teoretiska ramverk

En av studiens frågeställningar utgår specifikt från hur elever mentalt konstruerar och förstår begrepp inom trigonometri. Detta gör att det uppstår ett behov; att förklara, förutsäga och förtydliga studenters mentala processer i sig. För att ens tala om att en elev “förstår” är mer eller mindre en fråga om huruvida en elev har internaliserat en viss “kunskap”. Detta avsnitt kommer beskriva fem modeller för att förstå elevers kognitiva värld. Dessa arbeten refereras i en stor del av de artiklar som inkluderas i denna litteraturöversikt. Syftet med detta kapitel är att lägga grunden för en förståelse av den terminologi som artiklarna använder i sina hypoteser, metoder, resultat samt slutsatser. Därmed kommer en läsare efter detta kapitel besitta den nödvändiga kunskap som krävs för att studera artiklar inom området på egen hand.

Konstruktivism

Alla dessa ramverk är i grunden baserade på (radikalt) konstruktivistiska tankemodeller med ursprung i Jean Piagets verk. Mer konkret är det hans genetiska epistemologi som utgör en viktig grund (Piaget, 1971)[28]. Alla modeller har ett gemensamt mål att kontextualisera samt vidareutveckla Piagets arbete på ett sådant sätt att den var mer kopplad till metodiken och didaktiken inom matematiken. Utöver detta lyfter litteraturen även fram ett behov av en modell för att beskriva processer som syns för “högre” matematik. Piagets genetiska epistemologi har ett likartat studium av hur kunskap utvecklas och blir till hos ungdomar och barn men forskare behövde utvidga detta till att även kunna analysera kunskapsbildande hos äldre elever.

Synen på klassrummet är då följande: det är eleven som är skaparen av sin egen kunskap och mening. Med eleven som konstruktör skiftar lärarens roll från att enbart vara en instruktör till att även vara aktör för elevens bildning. Läraren kan ej nödvändigtvis mäta och känna elevens sinnevärld, än mer få eleven att kopiera färdiga modeller. Vad läraren kan göra däremot är stödja eleven i sitt kunskapssökande med väl utvalt material och metodik. Läraren *lär inte* ut, läraren *undervisar*.

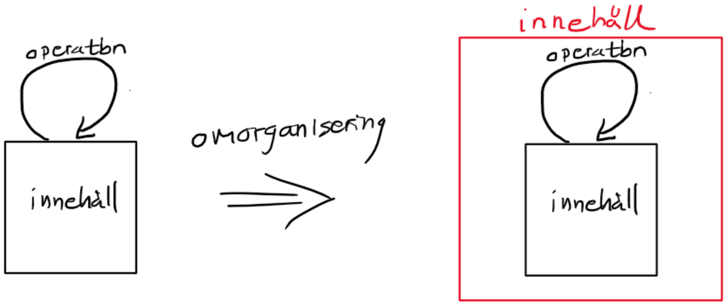
I sin enklaste form finns det tre essentiella begrepp, schema, assimilation och ackommodation. Med det förstnämnda menas en individs samlade mentala samt fysiska kunskap och epistemologi, en idé- och erfarenhetsvärld. Med assimilation åsyftas att nya erfarenheter tolkas utifrån och inkluderas i detta schema medan ackommodation är en störning (eng. Mismatch / disequilibrium) mellan nya erfarenheter och nuvarande schema som leder till en obalans i sinnet. Alltså stämmer inte ens schema överens med de intryck individen får, en form av instabilitet har uppstått som måste behandlas av subjektet. Exempel på detta fenomen skulle vara scheman om vad, hur och när ett föremål flyter på vatten. En individ kan hålla trosföreställningar och modeller kring vad som flyter på vatten och hur detta kommer sig, såsom densitet. I detta schema som enbart använder densitet skulle allt av säg trä flyta medan stålföremål borde sjunka ner till bottnen. Om en annan person påpekar för en sådan individ att krigsfartyg mycket väl flyter trots bristen på trä eller annat schematiskt flytande material skulle detta kunna ge upphov till en obalans. Ett behov uppstår av en mer sofistikerad modell.

Reflekterande Abstraktion

En mycket förekommande referens är till Piagets begrepp “***reflekterande abstraktion***”[29]. Dubinsky m.fl. (Dubinsky, 1991; Dubinsky m.fl., 2014, s.6) beskriver Piagets terminologi som bestående av två delar, reflektion samt abstraktion.

[28] En översättning av Eleanor Duckworth till engelska.
[29] Engelska: “Reflective abstraction”..

Det förstnämnda syftar på att en “individ medvetet resonerar kring innehållet samt operationer på innehållet” medan abstraktionen är att “omorganisera det reflekterande materialet till en högre nivå sådant att både innehållet och operationerna blir innehåll i sig själv som individen kan operationalisera på” (Dubinsky m.fl., s.6). Syftet som Dubinsky beskriver det är att “beskriva mekanismen bakom intellektuella tankars utveckling” (Dubinsky, 1991, s. 98).



Figur 17: En individ utför en operation på ett innehåll (reflekterar) och abstraherar sedan denna process via en omorganisering. På detta vis blir processen i sig ett nytt innehåll.

Alla modeller önskar beskriva processen av att lära sig ett koncept inom matematiken på olika nivåer. Vilken nivå ramverken specifikt åsyftar inom matematikutbildningen varierar mycket mellan dessa teorier och ingen gör specifikt anspråk på att vara en fulländad modell för inlärning av matematik. Tvärtemot skriver ett antal författare att modellerna är intermediära samt under utveckling (Dubinsky & Mcdonald, 2002, s.7–8). Utöver detta fastställer alla de författare jag inkluderat i detta kapitel explicit att intentionen med teorierna är att ge stöd för forskare att analysera samt ställa upp deduktiva hypoteser av och kring data.

Kognitiva konflikter

Ett begrepp nära besläktad med ackommodation och som dyker upp i en större del av de verk som behandlas i studien är “kognitiv konflikt” med vilket litteraturen avser fall där information skär sig mot trosföreställningar och idéer som en individ håller. Utifrån Piagets teorier och idéen om kognitiva konflikter har en del av studierna gjort det till en del av syftet att generera och testa hypoteser kring kognitiva konflikter. Främst med idéen att kognitiva konflikter ger upphov till förbättrad inlärning ifall vissa premisser är uppfyllda. Med andra ord är syftet att ge stöd för hypotesen att kognitiva konflikter hjälper en individs förståelse av ett matematiskt begrepp mer än standardinstruktion under vissa förutsättningar.

Exempelvis har Sander och Heiß (2014) baserat sitt arbete kring en teori om kognitiva konflikter. De lyfter fram en nyans i detta område med att en kognitiv konflikt i sig är inte nödvändigtvis produktiv såvida den inte används som ett medel för motivation, dvs. att eleven har förmågan att själv reglera sina beteenden i den mån att ett misslyckat försök driver hen till andra ansatser. (Sander och Heiß, 2014, s. 47).

4.1 Begreppsbild och begreppsdefinition

Tall och Vinner (1981) introducerar ett teoretiskt ramverk i en artikel där de problematiserar och diskuterar kring hur formell matematik förhåller sig till individens så kallade begreppsbilder och begreppsdefinitioner. I deras studie behandlas studenters modeller av gränsvärden och kontinuitet med huvudmålet att ställa upp och redogöra för hur elevers förståelser jämför sig med abstraherade och vedertagna matematiska formuleringar och satser.

Författarna definierar begreppsbilder samt begreppsdefinition (eng. Concept image and concept definition) på följande vis:

> We shall use the term **concept image** to describe the total cognitive structure that is associated with the concept, which includes all the mental pictures and associated properties and processes. … We shall regard the **concept definition** to be a form of words used to specify that concept. It may be learnt by an individual in a rote fashion or more meaningfully learnt and related to a greater or lesser degree to the concept as a whole. It may also be a personal reconstruction by the student of a definition.
>
> (Tall & Vinner, 1981, s. 152.)

Författarna lyfter fram hur dessa begrepp mer eller mindre utgör en individuell tolkning av matematiska begrepp och relaterar dessa till "kognitiva strukturer". Det bör nämnas att de ej använder Piagets terminologi, såsom scheman, assimilering eller ackommodation men för dock upp sin diskussion kring kognitiva konflikter.

Tall och Vinner uttrycker att en individ mycket väl kan hålla flertalet begreppsbilder och definitioner av ett begrepp i sin tankevärld som ej nödvändigtvis är sammanhängande eller ens koherenta. Det är inte förrän dessa tas upp samtidigt som en kognitiv konflikt uppstår. Utöver detta hävdar Tall och Vinner att dessa individuella tolkningar av begreppen även kan skilja sig markant från formell matematik. Introduktionen av begreppsbild och begreppsdefinition används mestadels som ett verktyg för att ställa upp skiljaktigheter mellan den formella matematiken gentemot det personliga och individuella bilderna. Främst önskar de nyttja resultaten som ett läromoment, med medvetande av typiska begreppsbilder och begreppsdefinitioner hos studenter kan en lärare bättre rationalisera och problematisera läroprocesser.[30]

---

[30] Det anses nödvändigt att i detta skede diskutera hur Tall och Vinners (1981) begrepp relaterar till min egen terminologi: ”begreppsbild” och ”begreppsförståelse”. Främst åsyftar jag med begreppsbild enbart ”bilden” av ett fenomen, dvs. hur elever ritar och visualiserar ett matematiskt begrepp. Tall och Vinner utökar däremot detta begrepp till att även inkludera kognitiva strukturer överlag. Det är oturligt att Tall och Vinner använder samma begrepp fast på ett annorlunda sätt än den tolkning som görs i arbetet. Onekligen kan detta leda till fall där det kan vara oklart vilket begrepp som åsyftas. Standarden kommer vara att såvida inte Tall och Vinner nämns är det min egen tolkning som har företräde, dvs. en begreppsbild är ”den mentala bild som elever har av ett visst begrepp”. Begreppsförståelse och begreppsdefinition har ett gemensamt drag. De hanterar en definition av ett begrepp via ord. Jag tillägger dock en aning större mening i ”förståelse” än vad som finns i en definition. I grunden utgår jag från läroplanen för gymnasiet för att bilda mig en uppfattning av vad vi menar med en ”förståelse”. https://www.skolverket.se/undervisning/gymnasieskolan/laroplan-program-och-amnen-i-gymnasieskolan/laroplan-gy11-for-gymnasieskolan.

Se att läroplanen lyfter fram ordet ”förståelse” avsides med fakta, färdighet och förtrogenhet. En ”förståelse” från mitt perspektiv utgår därmed från en kommunikativ aspekt i en klassrumsmiljö där eleven kan redogöra, beskriva och diskutera ett begrepp. Elever ska även tillämpa dessa kunskaper på ett sådant sätt att de ges möjlighet att se sammanhang och samband. Alltså är en ”begreppsförståelse” för mig hur eleven faktiskt använder och redogör för begreppet i olika tillämpningar. Skillnaden mellan de begrepp Tall och Vinner använder gentemot mina egna är då att Tall och Vinner tar sin utgångspunkt i interna strukturer medan jag istället utgår från hur dessa strukturer kommer till uttryck i klassrummet, dvs. sociokulturella sammanhang. Mitt huvudintresse är därmed hur elever uttrycker sin kunskap, de beteenden de uppvisar i klassrummet kring ett givet begrepp och inte nödvändigtvis hur exakt denna kunskap faktiskt är organiserad i det mänskliga sinnet. Självfallet kan en elev ha en ”förståelse” av ett begrepp utan att uppvisa det för sin omgivning. Det förefaller dock svårt för en lärare eller annan individ att bedöma denna i någon mening. Syftet med arbetet är att ge lärare verktyg och utgångspunkten är därmed utifrån detta.

För att förtydliga de fall där jag åsyftar elevernas inre förståelser kommer jag tillägga ordet ”inre” före ”förståelse” om så är fallet.

4.2 Process och objekt (Operationell och strukturell förståelse)

Anna Sfard (1987, 1991) diskuterar i två publikationer ett teoretiskt ramverk för analys av den matematiska processen. I grunden håller Sfard en tolkning av matematiken som bestående av en grad av *dualitet*. Matematiska begrepp innehar olika meningar och tankesätt beroende på kontexten.

Dualitet inom matematiken

Sfard lyfter fram två fundamentala synsätt på abstrakta begrepp inom matematiken; strukturellt, begrepp som objekt, samt operationellt, som processer. Författaren diskuterar sitt innehåll utifrån antagandet att det existerar en ontologisk skillnad mellan en produkt och process, alltså objekt och aktioner.[31] Sfard beskriver inledningsvis synen av objekt och processer som dikotomier, särade enheter som ej går att förenas med följande slående ord; "hur kan man ens tänka sig någonting som både en process och som ett objekt?" (Sfard, 1991, s. 4). Sfard anser dock att det föreligger en annorlunda tolkning av detta inom matematiken och önskar i sitt arbete belysa detta.

Sfard hävdar att termerna i grunden inte är så åtskilda som man först kan tro, utan att det mycket väl går att finna flera exempel av begrepp inom matematiken som agerar både som ett objekt och en aktion. Sfard väljer att benämna detta samspel som dualitet och nämner ett exempel ur fysiken: våg-partikel dualitet. Denna dualitet mellan matematiska begrepp som processer och som produkter, anser Sfard vara ett nödvändigt fundament för att bemästra matematiken. Med hennes egna ord: "strukturella och operationella koncept är komplementära och utgör grunden för djup förståelse inom matematik" (Sfard, 1987, s.5). Sfard lägger även grunden för en syn på hur dessa två delar förhåller sig mot varandra samt kopplar detta till en symbolik som en representant för dessa scheman.

Sfard kopplar sin analys till flera delar av matematiken och visar hur ett begrepp utvecklas både på ett historiskt likväl individuellt plan från en process in till en produkt, från en operationell förståelse till en strukturell. Exempelvis lyfter Sfard fram hur tal i ren allmänhet först formades via fysiska aktioner såsom att räkna på fingrar för att sedan internaliseras för individen och sedan nyttjas i högre abstraktioner.

Sfards syn på hur ett begrepp internaliseras av individen

Detta kopplas starkt till Piagets verk (1971, s.14–20) fast vidareutvecklas för att begreppsliggöra ett synsätt av hur abstraktionen formas i en hierarki av tre faser:

Internalisering, där en process internaliseras i den bemärkelse att den kan utföras utan att utföras, en mental representation av fenomenet.

Kondensation, en sammanfogning av processerna i termer av input-output relationer, att koppla ihop och relatera olika processer gentemot varandra.

Förtingligande (eng. reification), där processen i sig blir ett objekt, ett element av en mängd / klass i sin egen mening som kan sammanfogas och opereras på ett högre plan.

För att exemplifiera kategoriseringen med ett konkret exempel utgår jag från begreppet derivata. Initialt sett härleder elever detta som en process, en geometrisk process kopplat till det kartesiska koordinatsystemet och analytisk geometri där ett tillvägagångssätt är att finna en lutning i en punkt. Detta

[31] Källan till distinktionen är något oklar, mer eller mindre leder Sfard med exempel. Det är möjligt att problematiken uppstår enbart ty hur naturliga språk i sig är konstruerade, dvs. verb och substantiv är i strikt mening åtskilda.

kan göras med stöd av tidigare begrepp såsom lutning för en rät linje, genom att låta avstånden mellan punkterna gå mot noll. Om man låter detta gälla ett allmänt avstånd som närmar sig noll får man fram derivatans definition. Detta kopplas sedan till funktionslära genom att erhålla derivatan för ett antal elementära funktioner, såsom potenser och exponentialfunktioner, för att sedan utökas till grafer för derivatans funktion samt högre derivator med fysikaliska tolkningar, momentanhastighet och acceleration.

Se att undervisningen inleder med en process, där elever med tidigare begrepp analyserar aktionen. Bit för bit blir derivatan mer och mer till ett objekt för att till slut vara ett formellt objekt i den mening att individen relaterar derivator i differentialekvationer och ser funktioner som lösningar till ekvationen. Förtingligandet av dessa processer som ett objekt tolkar jag därmed som när en individ kan se derivering som ett objekt av studium i sig med differentialekvationer med lösningar på ett vektorrum av funktioner.

Sfard anser att detta sker stegvist om och om igen, via en upprepning av instanser som bit för bit lägger grunden för högre och mer abstrakt matematik. Med andra ord omorganiseras processer till objekt som i sin tur blir föremål för nya processer med objekten som föremål (jmf. reflekterande abstraktion). Exempelvis lyftes det fram i mitt exempel att tidigare begrepp användes för att lägga grunden för nästkommande koncept och sedan utvecklades över tid. Sfard anser att det är själva förtingligandet som utgör det svåraste steget i modellen och kräver störst omtanke. Att röra sig från att se en process till ett objekt som kan användas i andra sammanhang anser Sfard vare en sådan svår process att vissa personer aldrig kommer över den tröskeln. Kopplat till mitt fall skulle det vara att se funktioner i sig som lösningar till ekvationer.

4.3 Process, Concept and Procept

Gray och Tall (1994) studie är ytterligare ett verk som refereras i en stor del av litteraturen och har lagt grunden för ett antal studier, både experimentella likväl undersökande, kvantitativ såsom kvalitativ. Likt Sfard utgår Gray och Tall (1994) från Piagets verk och fokuserar på begreppet "encapsulation", dvs. inkapsling. Detta begrepp är i stor del likt Sfards förtingligande, där huvudidén är att en process blir en form av mentalt objekt när "en fysisk eller mental aktion blir rekonstruerad samt omorganiserad på ett högre tankeplan … ". De väljer dock att söra på termerna process och procedur i den mening att de önskar diskutera "processer av ett fenomen" jämfört med "algoritmiska tillvägagångssätt för att implementera en process". (Gray & Tall, 1994, s.2).

Författarna lyfter fram ett liknande resonemang som Sfard gör angående begreppen produkt och process men använder istället terminologin "koncept och procedur". Gray och Tall framför att det existerar i viss mening en rådande dikotomi mellan procedur och koncept (mellan process och objekt) men hävdar i likhet med Sfard att matematiken har ett annorlunda synsätt som kan sammanfoga begreppen.

Gray och Talls terminologi

Nyckelbegreppet i deras arbete utgörs av "**elementära procept**", med vilket Gray och Tall menar "ett amalgam[32] av tre komponenter: en **procedur** som genererar ett matematiskt **objekt** och en **symbol** som används för att representera processen eller objektet" (Gray & Tall, 1994, s.6). Detta utökar de vidare med begreppet "**procept**" som en samling av elementära procept som behandlar samma objekt. Alltså är ett procept en samling av individuella procedurer, objekt och tillhörande symboler som alla behandlar samma område. För att dra ett eget exempel på detta lyfter jag fram Euklidisk geometri som bestående av flertalet "procept" såsom linjer, punkter, likformighet, kongruens, m.m. Det behöver visserligen inte vara massiva områden som en hel geometri utan kan även vara en aning mindre begrepp som tal i bråkform. En procedur, divisionsalgoritmer, genererar ett matematiskt objekt, tal i bråkform, som benämns med en symbol, divisionstecken. Proceptet skulle därmed vara ekvivalensklassen av ett givet bråktal[33], såsom 4/1. 8/2, 16/4.

Jämförelser med Sfard

Sfard ansåg att det i grunden existerade någon form av ontologisk skillnad mellan processer och koncept. Vad är skillnaden mellan varelser och varandet? I någon mening hävdar Sfard att processer och objekt ej nödvändigtvis existerar på samma plan, dvs. processer är inte varelser i den bemärkelse som objekt är. Det ansåg visserligen Sfard vara en styrka av matematiken att kunna förena dessa två ting oberoende av en sådan skillnad.

Gray och Tall väljer att istället ta språng ur att begreppen inom matematiken innehåller en grad av ambiguitet. Detta är inte utifrån någon negativ konnotation, utan i likhet med Sfards dualitet, ett sätt att lyfta fram att kontexten kan ändra meningen och tillämpningen av matematiska begrepp. Gray och Tall accepterar ambiguiteten och ser det som både en positiv likväl negativ del av matematiska begrepp. Att matematiska begrepp och definitioner skulle innehålla ambiguitet skulle ligga illa i mun för flertalet

[32] Blandning/sammansmältning

[33] För att föregå en viss person med starka åsikter angående valet av terminologi: Jag tycker faktiskt begreppet utvecklas i den grad att det är vedertaget, må det vara en aning särat från historien. Dessvärre får vi alla uppleva att begrepp vi känner som riktiga och korrekta föräldras och faller ut ur den allmänna diskursen någon gång i livet. Intentionen av ett språk är att förmedla ett meddelande mellan subjekt och skapas av ett socialt kontrakt. Om det sociala kontraktet accepterar terminologin är det inte mycket mer som går att säga än att språket har förändrats.

matematiker samt matematiserande individer men både Sfard samt Gray och Tall tar upp flera exempel på hur detta kan vara fallet.

Sfard höll i sitt arbete en diskussion kring symbolers roll inom matematiken. Exempelvis problematiserade hon de vida tolkningar som finns kring “=” som symbol, dvs. som en relation mellan två påståenden eller som en uppmaning till en process, en beräkning. Alltså vänsterled blir högerled och vice versa. Gray och Tall (1994) ger också förslag på detta men inkluderar operationen “+”. De anser att proceptet av 3, samlingen av representationer för objektet 3, kan redovisas på flera sätt: 1+1+1 = 2+ 1 = 1 + 2 = 3. Se här att i de första fallen är det processer för en individ, där + agerar som en operator, medan i det sista fallet har det erhållits ett objekt.

Ytterligare ett av Gray och Talls många förslag som är av stor relevans för denna litteraturöversikt är det trigonometriska funktionen sinus. Det representerar både sinus för en vinkel, ett värde som ett tal men också en relation mellan sidor i en rätvinklig triangel samt en funktion i sig med en tillhörande grafisk representation (Gray & Tall, 1994, s.5).

Vad är skillnaden mellan Sfard och Gray och Tall?

Vad Gray och Tall gör relativt annorlunda än Sfard är att göra symboliken till sitt **huvudsyfte!** Författarna avsätter en majoritet av arbetet till att studera hur symboler och elevernas matematiska deduktioner lägger grunden för elevernas matematiserande. Deras huvudpoäng är att symboler kommer i slutändan representera en manifestation av “procept”, en samling av processer och objekt. En kondenserad och komprimerad kärna av den essentiella idé och tillhörande processer som utgör ett matematiskt begrepp. Jämför med de två tidigare styckena av hur en symbol symboliserar en process och ett objekt med flera representationer.

För att ta ett eget exempel lyfter jag fram och resonerar kring Riemann integraler. Beroende på kontexten kan symboliken bakom vara alltifrån ett tal till en funktion, obestämt eller ej existerande. En mängd av elementära procept som sammanfattas av symboliken, en representation av dubbelbetonade, mångtydiga tillämpningar och fall, ett procept vars mening definieras av kontexten. Det kan representera både en numerisk process men likväl en teoretisk sådan.

Detta omsätter Gray och Tall i en egen studie av aritmetik som ett analytiskt verktyg för att samtala kring och om elevers tänkande och progression från procedur till procept. De lyfter fram ett konkret exempel av hur terminologin kan nyttjas inom en studie och skriver att deras begrepp “kan ge en mer insiktsfull analys av de läroprocesser som finns i matematik” (Gray & Tall, 1994, s. 23).

4.4. APOS Theory

Teorin är utvecklad av Dubinsky, m.fl. sedan ca. 1983 i syftet att tillämpa Piagets teori om reflekterande abstraktion (eng. Reflective abstraction) inom högre matematik, m.a.o. universitetsstudier. Ursprungligen föddes idéen ur en observation att studenter reflekterade kring materialet på ett intensivt sätt som hade djupgående effekter kring hur programmeraren behandlade materialet. Dubinsky observerade även att det verkade finnas en större andel studenter som lyckas inom programmering än inom diskret matematik och de Dubinsky m.fl. önskade utnyttja detta i syftet att hjälpa studenter lära sig diskret matematik. (Dubinsky & Tall, 2001; Dubinsky m.fl., 2014, s. 5–15)

Vad står akronymen för?

Förkortningen APOS beskriver de ledande begrepp som nyttjas inom ramverket: Action, Process, Object samt Schema (på svenska: aktion, process, objekt samt schema). Här skiljer litteraturen på olika progressioner, nästan en hierarki, av abstraktionsnivåer inom studenternas uppfattning av matematiken. För att beskriva dessa begrepp väljer jag här att kontextualisera orden utifrån "bråktal".[34]

Aktion

En aktion beskriver Dubinsky m.fl. (Dubinsky & Mcdonald, 2002; Dubinsky m.fl. 2014) som en extern process där ett begrepp tillämpas via stegvisa instruktioner. En individ applicerar en algoritm, en instruktion, i ändamål att finna ett resultat och algoritmen ses som en aktion för att uppnå detta. Kopplad till bråktal skulle jag kunna lyfta fram olika algoritmer såsom multiplikationstabellen, omvänd multiplikation, kortdivision och liggande stolen. Ett annat exempel skulle kunna vara att se mängdkonstruktion som en aktion baserat på ett specifikationskrav, såsom att M är mängden av jämna heltal.

Process

En process beskrivs som följande av Dubinsky m.fl. (2005);

> As an individual repeats and reflects on an **action**, it may be interiorized into a mental **process**. A **process** is a mental structure that performs the same operation as the **action** being interiorized, but wholly in the mind of the individual, thus enabling her or him to imagine performing the transformation without having to execute each step explicitly. Thus, for example, an individual with a process understanding of function will construct a mental process for a given function and think in terms of inputs, possibly unspecified, and transformations of those inputs to produce outputs.
>
> (Dubinsky m.fl., 2005, s. 339)

En liknande presentation finns i flertalet källor (Asiala m.fl., 1997, s.7–8; Breidenbach, Dubinsky, Hawks & Nichols, 1992; Dubinsky, 1991, s.101 och 106–107; Dubinsky & Harel, 1992, s.85; Dubinsky & Mcdonald 2001, s. 3; Dubinsky m.fl. 2014, s. 20–21) där alla tydligt refererar till begreppet internalisering, i samma mening som beskriven av Sfard. Alltså är en process en internaliserad aktion, där individen inte längre behöver utföra beräkningen för att tillämpa aktionen baserat på externa stimuli. Om vi fortsätter spinna vidare på det tidigare exemplet skulle det vara vid denna tidpunkt som en individ kan visualisera processen att konstruera mängden av jämna heltal utan att vare sig skriva upp det eller benämna det specifikt. Alternativt kan individen utföra en division utan att skriva ner stegen på ett papper eller med stöd av ett annat yttre medel.

---

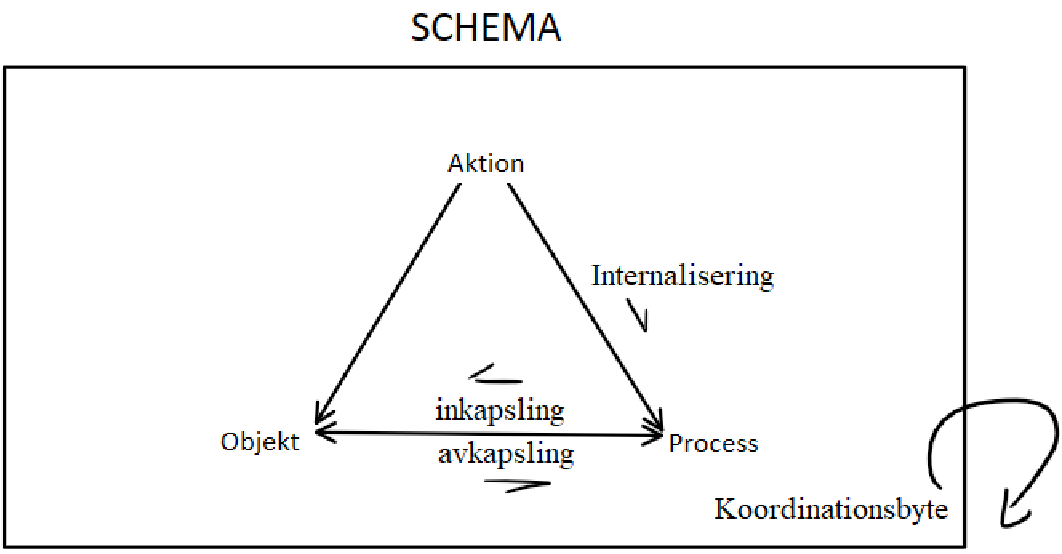
[34] Eller tal i bråkform

Objekt (Object)

Objekt beskrivs som att processen i sig blir ett föremål för aktioner och andra processer. Objektet blir ett argument för någon form av transformation. När individen reflekterar och strukturerar denna formulering talar författarna om "encapsulation", alltså inkapsling i samma mening som Gray och Tall (1994). Asiala (1997) framför även den motsatta rörelsen, "avkapsling"[35], att ett objekt återgår till att ses som en process. Med våra tidigare förslag skulle vi kunna tänka oss att en individ utför operationer på mängden av jämna heltal i sig, via en operation såsom addition, må det vara vänster eller höger. Med andra ord skapas sidoklasser. Med det andra exemplet skulle det vara att eleven tolkar bråktal som faktiska tal istället för som uppmaningar att utföra en beräkning.

Schema

Inom detta ramverk ser flertalet författare ett *schema* som den samlade kunskapen en individ har av ett matematiskt begrepp (Asiala m.fl., 1997, s.9). Uttryckt inom teorins termer är ett schema "en samling av aktioner, processer, objekt samt andra scheman som behandlar ett område". I flera verk förtydligas betydelsen av schema inom APOS-teorin med att det för individen ska ingå en procedur för att särskilja och sortera huruvida ett schema kan tillämpas inom en viss problemsituation. (Dubinsky & Mcdonald, 2001, s.3; Dubinsky m.fl., 2014, s. 8). Ett exempel på ett schema skulle bestå av alla ovanstående förslag i relation med varandra. Dvs. individen konstruerar mängden av alla jämna heltal först via en aktion vilket inkluderar vad det innebär att vara jämn och att inkluderas i en mängd. Detta övergår till en process där individen internaliserar och automatiserar denna aktion för att sedan kunna utföra operationer på mängden såsom det vore ett objekt i en process med sidoklasser. Se nedanstående bild för ett förtydligande.



Figur 18. En egengjord visualisering av begreppet schema baserad på en illustration av Asiala m.fl. (1997, s.6).

"Interiorization" samt "Encapsulation" har samma betydelse som beskriven av Sfard respektive Gray och Tall. De-encapsulation innebär att individen "packar upp ett objekt till en process". Slutligen, med

[35]Jag är medveten om att detta ej är ett ord i någon svensk ordbok. Det bör dock nämnas att "de-encapsulation" är inte heller ett egentligt ord på engelska, trots att det används inom datavetenskap samt didaktisk teori (alá Piaget). Här önskar jag fånga idéen av att röra sig mellan nivåerna, mellan att se ett begrepp som en process respektive föremål. Att kapsla in processen i vissa omständigheter och i andra att "kapsla ut/av".

”coordination reversal” avser Dubinsky att individen “rör sig mellan två scheman”. Dubinsky m.fl. ser scheman som objekt för individen i denna kontext. (Dubinsky m.fl., 2014, s.9).

En hypotes för fungerande kognitiva strukturer

Som ett analysverktyg för både instruktion, experimentell design samt teoretiskt ramverk använder forskare inom APOS-teorin en typ av hypotes för kognitiva strukturer, en ***genetisk nedbrytning***[36] (eng. Genetic decomposition). Denna hypotes beskriver de mentala konstruktioner som elever *kan* behöva använda vid de olika identifierade stegen; aktion, process objekt, samt schema. Med andra ord, vad som behövs för att tillgodogöra sig ett matematiskt objekt. Denna hypotes kan inkludera preliminära kunskaper (scheman, objekt, m.m.) för att ta sig an ett område. (Dubinsky m.fl., 2014, s.27–33). Det bör dock nämnas att i samma verk framförs att denna nedbrytning inte i någon mening är unik, utan kan utgå från olika utgångspunkter (Dubinsky m.fl., 2014, s.40–47). Likt andra hypoteser genomgår den tester mot det ting som det önskar beskriva: studenters begreppsbilder och förståelse. (Martinez-Planell & Cruz, 2016, s. 114–115).

Teorin utvecklades med stöd av datorer

Notera att Dubinsky (Dubinsky & Mcdonald, 2001, Dubinsky m.fl., 2014) använder exempel som är en aning mer relevant för högre studier, såsom funktioner, vektorrum, binära operationer, mängdlära, m.m. Detta sammanfaller med att teorins huvudsakliga syfte är att generalisera Piagets verk till högre matematik. Teorin är även av en egen särart där den i sitt ursprungliga skede utgick från datorer som stöd för studenter. Med hjälp av datorer och programmering önskade Dubinsky främja förståelse av olika koncept först från aktion till process och sedan process till objekt. Detta skulle uppnås genom att nyttja en idé av funktionsbegreppet. Datorn får göra “aktionen” åt studenten och studenten får arbeta med att begreppsliggöra aktionen på ett sådant sätt att datorn förstår den, vilket Dubinsky anser gör att studenten internaliserar aktionen (Dubinsky m.fl., 2014, s.11–12). Funktionen används sedan som ett objekt i andra program för att utveckla förståelsen av processen som ett objekt i sig, ett argument som kan användas för andra beräkningar. På sätt och vis är modellen därmed en produkt av programmering, där elever får studera hur processer, funktioner i program, kan bli input-data i andra program.

[36] Jag har verkligen försökt hitta en bra svensk översättning för detta men har inte kunnat hitta en sådan. Grundidén är att ex. en forskare eller lärare bryter ner de steg som en individ kan behöva ta till sig för att tillgodogöra sig ett matematiskt begrepp.

4.5 Covariational Reasoning

Det sista ramverket som kommer behandlas inom denna litteraturöversikt är “covariational reasoning” vilket jag här kommer benämna med “resonemang med samvariation”. I kortaste drag definieras ramverket som ett sätt att analysera och beskriva mentala steg i att tillämpa resonemang med samvariation i dynamiska funktioner (Carlson m.fl., 2002).

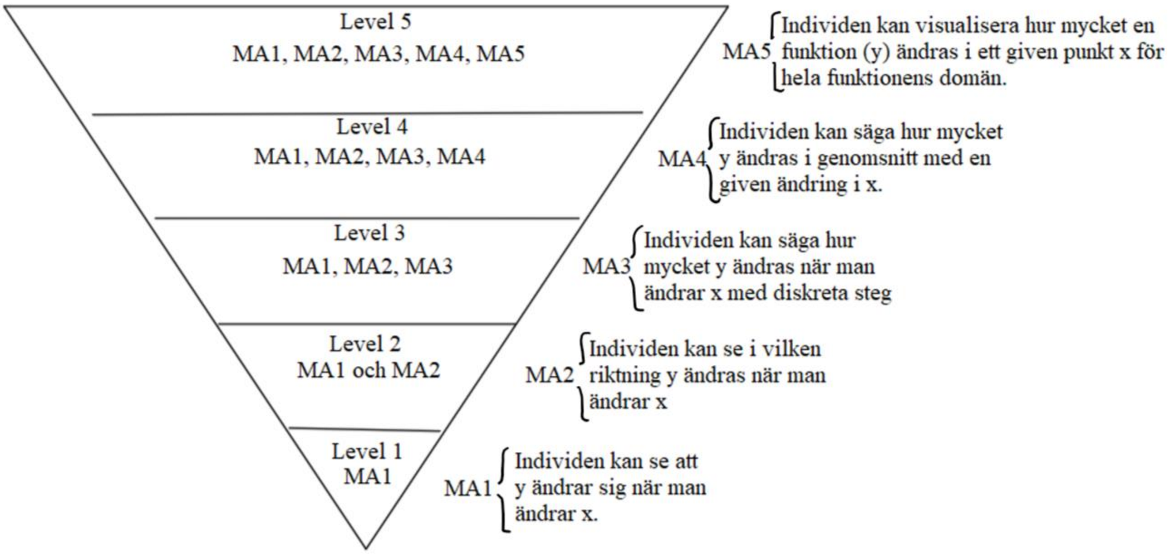
Syftet är att beskriva de mentala uppfattningar studenter har av att relatera hur en beroende variabel ändras när man påverkar en oberoende kvantitet. Syftet är därmed att förstå och beskriva hur variationer av variabler under någon transformation representeras av gymnasieelever samt högskolestudenter. Detta varierar med alltifrån proportioner, funktioner, differentialfunktioner, m.m. I likhet med andra litterära verk inom ramverket kopplar författarna sin terminologi till Piaget och Carlson m.fl. (2002) definierar resonemang med samvariation på följande vis;

> ... we define covariational reasoning to be the cognitive activities involved in coordinating two varying quantities while attending to the ways in which they change in relation to each other.
>
> (Carlson m.fl., 2002, s. 354.)

I grunden föddes teorin ur en observation, att studenter på universitet hade mer eller mindre besvär med att relatera och modulera funktioner. Detta kopplades via flertalet studier till att studenter uppvisar en avsaknad av att relatera och visualisera två storheter som samvarierande.

En modell för elevers tänkande med samvariation

Likt de andra ramverken delar de in förståelse för konceptet i en grad av abstraktionsnivåer och tillhörande beteenden via exemplifiering. Jag bifogar här en egenskapad bild som sammanfattar deras tabeller i en enda enhet (Carlson m.fl., 2002, s.357–358).



Figur 19. En modell som sammanfattar och beskriver Carlsons m.fl. indelning av mental verksamhet. Modellen har jag gjort själv baserad på de tabeller Carlson m.fl. (2002) illustrerar på sidan 357–358.

I den första tabellen framför Carlson m.fl. (2002, s. 357) exempel av önskade beteenden, likväl en konceptualisering av mentala aktioner i sig, vilket de senare delar in i olika nivåer i tabell 2[37]. I grunden är idéen samma som det svenska betygssystemet. För att en individ ska anses ha uppnått exempelvis nivå 3 måste den ha bemästrat alla stegen innan, det som Carlson m.fl. benämner med MA1, MA2 samt MA3. Likt vårt betygssystem är det därmed mycket möjligt att en individ kan uppvisa ovanligt hög kvalité i vissa aspekter men sakna liknande finess i andra delar och kan därmed ej tilldelas ett högre betyg på grund av att inte alla kunskapskraven är uppnådda. Till skillnad mot vårt system definierar de inte intermediära steg såsom D och B.[38]

Författarna i fråga lyfter fram fall där studenter har uppvisat "pseudo-analytiskt beteende" där "den nödvändiga underliggande förståelsen för att utföra det specifika beteendet på ett meningsfullt sätt saknas" (Carlson m.fl., 2002, s. 358–359). De kräver alltså strikt att alla stegen är internaliserade av individen.

Jämförelser med Procept och APOS

Se att likt APOS och "procept" abstraherar författarna begreppet av samvariation först som en aktion eller process för att sedan bit för bit generalisera och inkapsla dessa processer som objekt. Carlson m.fl. utgår dock strikt från att en individ ska kunna verbalisera eller visualisera varje mental aktion med en viss grad av förståelse.

Carlson m.fl. anser att detta ramverk med en indelning av förståelsen för funktioner och relationer ger forskare ett bättre medel för att analysera flertalet situationer, må det vara teoretiska eller praktiska tillämpningar. (Carlson m.fl., 2002, s. 359).

[37] Se att Carlson m.fl. (2002) därmed har en liknande idé av förståelse som jag själv lyft fram, dvs. vi definierar den utifrån de redogörelser och beteenden elever uppvisar i klassrumsmiljön.

[38] Visserligen kan man fråga sig om dessa betyg är *definierade* i någon klassisk mening. Egentligen definieras enbart kunskapskrav för E, C, A. Jag utelämnar dock en djupare diskussion om ämnet.

4.6 Sammanfattning

Det framgår att teorierna utgår från samma fundament och har aspirationer att nå samma mål, *att vidareutveckla, precisera och kategorisera en teori för högre matematik. Majoriteten utgår från Piagets verk för reflekterande abstraktion, med målet att analysera och hypotisera kring elevers begreppsbilder och förståelse.*

De delar alla in matematiska begrepp i en strukturerad, dock ej nödvändigtvis, hierarkisk ordning där studenter kan befinna sig vid olika steg och till och med röra sig mellan dem. Kunskapen ses inte som en fast massa utan en rörlig och svårdefinierad mångfald av relationer och föremål.

Alla börjar med att i någon mån se elevers uppfattningar som inledningsvis bildade av aktioner, av att tillämpa en icke-internaliserad process vid flera händelser och skeenden för att sedan bit för bit internaliseras av eleverna. Detta kan sedan inkapslas på ett sådant sätt att det är relationer för processen i sig som är av intresse. Detta kan slutligen bli en del av en högre abstraktionsnivå där processen används som ett argument för en annan process eller aktion, ett objekt i all sin egen rätt.

De framhåller dock att en individ som förstår kan röra sig mellan dessa abstraktionsnivåer på alla plan och se ett begrepp både som en process och en produkt, givet vissa kontexter. Huruvida dessa teorier är tillräckligt annorlunda för att anses särade från varandra lämnar jag till läsaren att besluta, åtminstone tills diskussionsdelen.

5. Om artiklarna

I detta avsnitt kommer det presenteras en samlad bild av alla artiklar som inkluderats i arbetet. Inledningsvis beskrivs studiernas design för att sedan hantera deras metoder för att samla in data. Slutligen hanteras en samlad bild av ländernas ursprung, deras urvalsmetoder samt antalet deltagare. Artiklarnas kategorisering utifrån dessa kriterier presenteras i appendix A. Teoriböcker samt artiklar har uteslutits från denna mängd. Enbart artiklar som uppfyller kriterierna såsom beskrivna i kapitel 2 inkluderades i analysen. För att beskriva studierna används Brymans (2011) verk "Samhällsvetenskapliga metoder". Brymans definitioner kommer användas för att analysera artiklarna, både i design, metod samt urval.

5.1 Design

Bryman (2011) beskriver forskningsdesign i kapitel 2. Jag kommer beskriva de olika valen i löpande text samt uttala mig i en bedömning av litteraturen i sin helhet.

- ***Experimentell design*** beskrivs som de fall där forskare avser undersöka relationen mellan en beroende samt oberoende variabel. Detta görs främst genom att jämföra två grupper, en experiment- respektive kontrollgrupp. (Bryman, 2011, s. 54–63). Experimentell design är **inte** en vanlig metod inom litteraturen som inkluderats i denna översikt. Det finns ändå ett fåtal fall av experimentell design där forskare exempelvis har jämfört metoder med varandra under experimentella förhållanden.

- Den större delen av artiklarna faller under olika former av ***surveydesign***. Studierna i fråga samlar in data via enkäter eller intervjuer[39] vid en viss tidpunkt i syftet att upptäcka sambandsmönster. Detta görs med kvantifierbara data, såsom hur väl deltagarna klarar av ett designat, standardiserat test. Nästkommande designer definierar Bryman som specialfall av surveystudier.

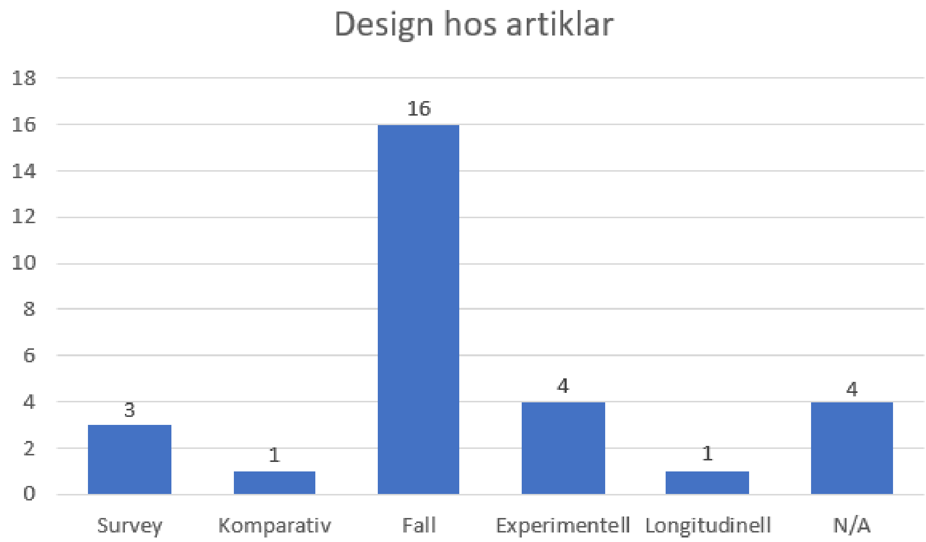
- ***Jämförande (komparativa)*** designer beskriver Bryman (2011) som de surveystudier där forskare jämför olika grupper i förhållande till någon mängd variabler. Dessa är ovanliga men ett fåtal existerar. Oftast är det fallet att en artikel jämfört olika skolor med varandra, vilket i vissa fall ligger i olika länder. Det förekommer även exempel där metoder jämförs, såsom rätvinkliga trianglar och enhetscirkeln.

- Majoriteten av publikationerna är ***fallstudier*** där forskare med avseendet på ett enda fall önskar framhäva viktiga drag hos ett visst fenomen. Med andra ord kan en tolka det som att syftet med studierna är instrumentella. De agerar som medel för att besvara och ge insikt i en bredare frågeställning. Detta är ytterligare ett fall av surveystudier forskare använder enkäter och intervjuer för att belysa det önskade fallet.

- Slutligen tar Bryman (2011) upp ***Longitudinella*** studier där forskare följer och analyserar samma individer under en längre tid. Dessa är väldigt få till antalet. I denna översikt har jag enbart kunna identifiera en artikel som faller under denna benämning av de totalt 87 artiklar som analyserats.

[39] Bryman skriver att det är specifikt strukturerade intervjuer som avses, dvs. de intervjuer som består av överlag slutna frågor samt ett strikt frågeformulär. Jämför detta med semistrukturerade intervjuer där mer öppna frågeställningar tillåts samt följdfrågor till intressanta svar.

Nedan följer en summerande tabell av den kategorisering jag utfört av artiklarna. Se att över hälften av artiklarna har kategoriserats som någon typ av fallstudie. Vissa artiklar saknar design på grund av att de ej är vetenskapliga artiklar utan enbart lektionsupplägg. Dessa benämns i diagrammet med N/A (Not Applicable, eng. ej tillämpbart). Utöver detta är surveydesign de fall där forskare har kontaktat *flertalet* skolor och samlat in data som en enda enhet med stöd av enkäter och intervjuer.



Figur 20. Ett stolpdiagram av publikationernas design.

5.2 Metoder

Tillvägagångssättet för att fånga in elevernas förståelse av olika begrepp har varierat mellan studierna men överlag är de av kvalitativ natur. Genom att analysera litteraturen upptäcks att följande metoder används i detta forskningsområde:

1. **Enkäter.**
   Detta avser tester respektive utforskande enkäter. Syftet med dessa enkäter varierar mellan studierna. Vissa använder metoden för att försäkra sig om att populationer som ingår i var vederbörlig studie har approximativt samma fördelning och medelvärden i kunskapsnivåer.

   Det som dock utgör normen är att forskare använder enkäter antingen för att testa för någon kunskap via ett test, med eller utan intervention. De flesta forskarna försöker fånga in antingen elevernas begreppsbilder eller utmaningar varav frågorna oftast är formulerade med sådana ting i baktanken. Den kvantifierbara data brukar mestadels bestå av jämförelser av medelvärden, alternativt proportioner av hur väl deltagarna besvarade frågor.

2. **Intervjuer.**
   En stor del av intervjuerna är semistrukturerade, där forskaren har ett antal frågeställningar som sätter agendan och som deltagare sedan får behandla. Frågeställningarna används för att sätta diskussionsämnet men är inte slutna i den mening att följdfrågor till intressanta svar ej är tillåtna. Hur forskaren har förhållit sig mot deltagarna under intervjun och vilka verktyg som varit tillgängliga varierar mellan studierna och är i vissa fall otydliga.

Antalet deltagare i intervjuerna varierar likaså, alltså det finns arbeten som intervjuat individer medan andra hanterat mindre grupper. I flera studier har deltagarna valts ut från en större population baserat på ett tidigare test. Detta urval är oftast inte slumpmässigt utan grundas snarare på hur varje respondent har presterat på ett eller flera test. Syftet med detta urval är att fånga in en bild av progression samt nödvändiga delsteg i elevers uppfattningar och scheman samt att i vissa studier jämföra dessa med varandra.

Denna data brukar oftast föras ner i någon form av "verbalt protokoll" där deltagare talar ut öppet om sina tankegångar för att sedan spelas in och transkriberas för senare analys.

3. **Experiment.**
   Vissa studier har anordnat i någon mening en form av experimentell design, oftast i syftet att jämföra metoder eller inferera kring huruvida en viss hypotes eller metodik kan beläggas med empiriska data. Förslagningsvis har vissa forskare utgått från hypotesen att kognitiva konflikter är ett nödvändigt steg i att förskaffa sig en viss ihärdig kunskap, och formulerat sitt experiment för att pröva påståendet. Experimenten genomförs både på skolor i sig men även i laboratoriemiljö. Det existerar dock oklarheter i vissa studier angående metodiken i sig.

   Experiment som metod faller klart under experimentell design men ses här som en egen metod för kategoriseringens skull. I andra fall hade det inte varit möjligt att tilldela en metod till de få fall som utgick från en experimentell design.

4. **Observation.**
   Med stöd av ens sinnen kan en forskare samla information om världen. Beroende på designen har denna del av samhällsvetenskapen annorlunda innebörder. Bryman delar in det i två punkter, icke-deltagande och deltagande observation[40]. Det handlar om två fall; forskaren kan passivt observerar utan att interagera, eller interagera i de studerande verksamheterna i någon grad.

Det finns ett mycket litet antal studier som skulle kunna klassificeras som kvantitativa. Dessa studier har oftast nyttjat statistiska inferenser för att jämföra modeller med varandra. Det är inte nödvändigtvis lätt att tilldela en studie antingen den ena eller andra kategorin, särskilt inte större studier eller avhandlingar. Exempelvis har nästintill alla avhandlingar som inkluderats i arbetet statistiska inferenser men det största intresset ligger i kvalitativa aspekter, såsom att beskriva elevers idévärldar. Vissa studier har funnit statistiskt signifikanta skillnader men har jag **inte** funnit en enda analys av huruvida premisserna för statiska test ens är uppfyllda i samtliga arbeten. Det bör dock nämnas att de tester som faktiskt använder statistiska inferenser oftast har ett urval av mer än 100 deltagare.

Slutligen är antalet studier som jämför modeller med statistiska metoder fåtaliga. Även de kvalitativa studierna brukar oftast avsäga sig syftet att jämföra modellerna med varandra, utan önskar enbart att presentera dem. De som dock väljer att utföra en sådan bedömning gör det oftast mot en redan uppställd hypotes (jämför genetisk nedbrytning). Med detta menar litteraturen måste förskaffa sig vissa väsentliga tankeprocesser för att bemästra ett område. I sådana fall blir huvudfrågan snarare att falsifiera hypotesen samt modifiera den om nödvändig.

[40] Bryman (2011, s. 266) nämner vidare differentieringar av dessa punkter men jag hanterar enbart den första nivån då dessa anses av mig vara de enda som är relevanta för litteraturöversikten.

5.3 Urval

I detta avsnitt kommer det framföras hur urvalet av deltagare har sett ut överlag hos de inkluderade studierna. För att redogöra för detta infogas en tabell där de identifierade urvalsmetoderna redovisas, både i antal och andel. Kategoriseringen av artiklarna framgår i Appendix A.

Urvalsmetod	Antal | Andel av artiklarna i %
Bekvämlighetsurval	22 | 88
Kvoturval	1 | 4
Klusterurval	1 | 4
Stratifierat slumpmässigt urval	1 | 4

Tabell 2. Beskriver hur urvalsmetoderna är fördelade i artiklarna. N = 25.

Här används N=25, på grund av att vissa artiklar inte hade något urval alls (lektionsupplägg, 4 totalt). I fall ingen urvalsmetod har rapporterats av en studie har jag kodat detta som ett bekvämlighetsurval, vilket fem (20%) av studierna faller under.

Som det framgår av tabellen är bekvämlighetsurval det vanligaste urvalet. Dessa urval består av de fall där forskare antingen har tagit det första bästa man kan finna eller vänt sig till kollegor och kontakter för att få fram deltagare. Med andra ord samlas data från de mest lättillgängliga resurserna för forskaren. Det finns dock ett fåtal till studier som faller under andra kategorier.

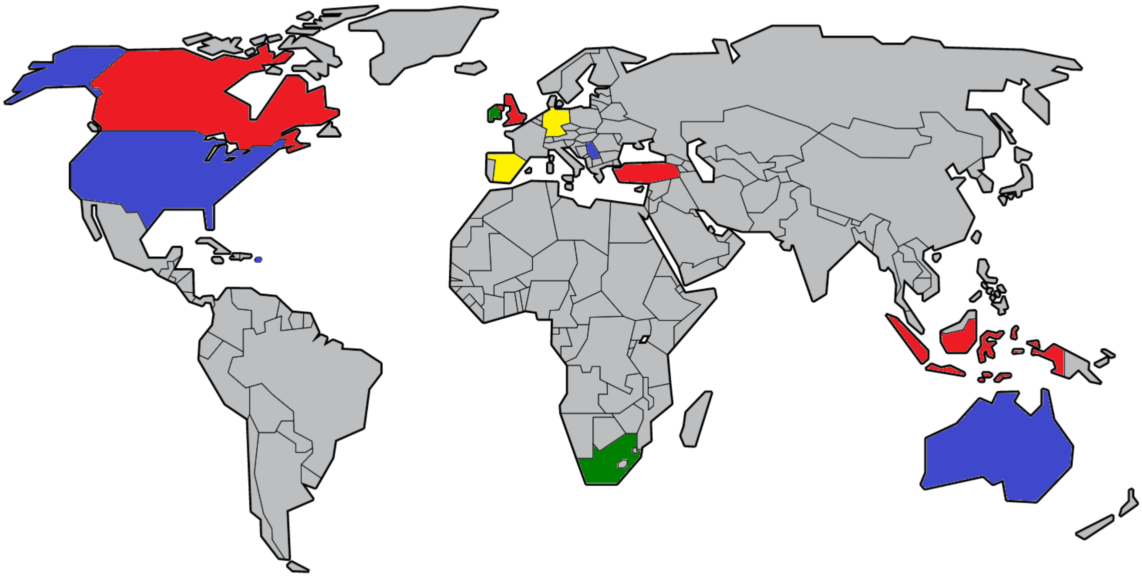
Bryman (2011, s.197–199) beskriver ett kvoturval som en indelning av populationer i grupper, eller kvoter, där forskare väljer deltagare tills resultaten uppnått en viss representation för varje kvot. Exempelvis skulle detta kunna vara undersökningar i partisympatier där forskare ringer runt och samlar information från populationen tills de uppnått en viss förbestämd kvot (säg 12% av 100 deltagare). Detta klassificeras av Bryman som ett icke-slumpmässigt urval på grund av att ingen variation får förekomma av kvoternas andel.

Ett klusterurval innebär i detta fall att forskare delat in skolorna utefter stadsstorleken (enbart större städer) och efter detta gjort ett slumpmässigt urval av ett antal skolor i varje kluster. Sedan har forskarna gjort ytterligare ett slumpmässigt urval av deltagare på varje vald skola.

Slutligen är ett stratifierat slumpmässigt urval det fall där forskare har delat in populationen i "strata" (mängder med gemensamma drag) utefter olika faktorer. Här är det typ av skola samt storleken på skola som forskarna använt. Sedan dras det ett slumpmässigt urval av deltagare ur varje strata

5.4 Ursprung

Här presenterar jag kortfattat data som sammanfattar varifrån i världen studierna är genomförda samt antalet studier från varje land. Studiernas land har företräde oberoende av om de har publicerats i en internationell tidskrift eller inte[41]. Det finns ett enda fall där en jämförelse gjort mellan länder, en avhandling som jämför klassrum och läroplaner i Turkiet med Storbritannien (Delice, 2003). Avhandlingen avlades på ett brittiskt universitet (Leeds) och har kodats som Storbritannien.[42]



USA	TUR	IDN	ZA	UK	AUS	ESP	SRB	GE	IRL	CAN
13	4	2	2	2	1	1	1	1	1	1

Tabell 3. En redogörelse för ländernas ursprungsland samt antal från publikationer från respektive land.[43]

Denna tabell och bild visar vilka länder som publikationerna kommer ifrån, samt antalet studier för varje land. Här har jag använt ländernas akronym för att göra tabellen mer kortfattad. Se fotnoten för en beskrivning för varje given förkortning. Majoriteten av studierna har sitt ursprung i USA. Det finns en övervikt av artiklar från Turkiet jämfört med andra länder. Alla artiklar från USA hanterade högskolestudenter bortsett från Brown (2005). På grund av att USA utgör den vanligaste typen av publikationsland har översikten en större andel högskolestudenter än önskat.

[41] Det finns ett fåtal fall där en artikel har publicerats enbart i internationella tidskrifter. Var studien utfördes framgår dock i samtliga fall vilket jag ger företräde. Jag anser det viktigare med klassrummets ursprungsland än på vilken plattform artikeln publicerades.

[42] Hade det existerat internationella tidskrifter i översikten som jämfört flera länder hade jag varit tvingad till att göra en annorlunda tolkning. I sådana fall finns det två möjligheter. Den första möjligheten är att se alla dessa fall som värda mer än en studie. Säg att en artikel publiceras i en internationell tidskrift och utfördes i Turkiet och Storbritannien. I sådana fall hade jag gett båda länderna 1 mer i värde. Dock hade detta behövts redovisas på ett klart sätt. Den andra möjligheten hade varit att varje land får en halv poäng, dock skulle detta också behöva redogöras i en sådan tabell.

Läsaren kan möjligen i sitt eget sinne öka Turkiets antal till 5 om det känns propert.

[43] Landens akronym är följande: USA = USA, TUR = Turkiet || IDN = Indonesien || ZA = Sydafrika || UK = Storbritannien || AUS = Australien || CHN = Kina || ESP = Spanien || SRB = Serbien || GE = Tyskland || IRL = Irland || CAN = Kanada.

5.4 Antal deltagare

När det kommer till antalet deltagare i studierna varierar det en hel del. Nedanstående tabell sammanfattar datan. Jag valde 50 deltagare som en delningspunkt pga. flera statistiska tester (z-test, t-test) brukar utgå från detta antal som ett ledande värde.

Antal deltagare i studien	$N\leq 10$	$10<N\leq 50$	$50<N$
Antal	8	15	6
Procent (%)	27,6	51,7	20,7

Tabell 4. Beskriver hur stort antal samt andel i procent av studierna som faller inom vissa intervall. N=29.

Med andra ord hade mer än hälften (79,3%) av artiklarna ett urval som var mindre än eller lika med 50 deltagare. Detta är oftast på grund av att forskarna studerat en klass i någon given skola eller valt att utföra kvalitativa djupintervjuer.

6. Disposition och kommentarer för resultatdelen

Varje delkapitel i resultatdelen utgör ”teman” av elevernas hinder. Dessa delkapitel indelas på följande vis:

- Introduktion. Där beskrivs det innehåll som kommer behandlas i varje tema.
- Innehåll. Som består av två delar: Forskning inom elevernas/studenternas begreppsuppfattning och besvär inom temat samt didaktiska förslag från litteraturen.
- Sammanfattning. Där varje tema i sin helhet sammanfattas till en enhet i korta drag med relevanta och intressanta resultat.

Med begreppsuppfattning avses deras begreppsförståelse och begreppsbilder. Didaktiska förslag är lektionsupplägg samt metodik för att instruera inom ett givet begrepp.

Jag har kunnat identifiera sex olika teman som konsekvent dyker upp genom litteraturen relaterade till mina frågeställningar. Dessa områden är inte nödvändigtvis helt särade utan vissa delar kan tillämpas inom andra. Dessa teman har sedan samlats till tre huvudteman som jag benämnt med ”fundamenten”, ”memorering och digitala hjälpmedel” samt ”algebra och trigonometri”. Dessa teman bör presenteras samt deras plats rättfärdigas i arbetet.

Inom fundamenten ingår de delar som anses lägga grunden för förståelse inom trigonometri. Dessa har valts vara följande tre teman:

- Elevers definition av sinus och cosinus: en av frågeställningarna utgick från att beskriva de uppfattningar elever har av trigonometri. Detta tema återkommer i litteraturen där vissa forskare har analyserat hur elever begreppsbilder samt definitioner ser ut av sinus och cosinus. Syftet är att redogöra för dessa bilder och presentera litteraturens analyser av dessa uppfattningar.

- Vinkelbegreppet och lärarstudenter: Vissa källor identifierar och hävdar att det är vinklar samt vinkelmätning i sig som utgör grunden till de besvär elever möter inom trigonometrin. Detta område har ett brett span inom åldrarna, med allt från åk 6 till och med studenter på universitet.

  Varför har jag valt att kombinera ihop dessa två ting till ett enda tema? Faktum är att det är överlag på detta sätt det ser ut i litteraturen. När det kommer till vinkelbegreppet finns det två ålderskategorier som studeras. Den ena kategorin är unga barn i årskurs 3–6 där forskare studerar hur vinkelbegreppet blir till medan den andra är högskolestudenter (amerikansk eng. college).

  Mer konkret är dessa studier om ”pre-service teachers”. Begreppet är dessvärre en aning svårt att beskriva. Mer eller mindre finns det flera annorlunda individer som inkluderas i begreppet. För att förklara termen är det bäst att beskriva hur man ens blir en lärare i USA, där denna terminologi används för samtliga studier jag inkluderat.[44] USA har flera modeller för lärarutbildningen[45] men ett arketypiskt exempel är där en student med tillhörande examen tar ett mentorskap under en verksam lärare i kombination med didaktiska kurser på universitet. Dessa studenter benämns som ”pre-service teachers”. Med andra ord är ”pre-service teacher education” en ekvivalent till lärarkandidatsprogrammet, dock med det tillagda kravet att studenten i fråga redan har avlagt en examen inom ett ämne[46].

  Det existerar därmed program i USA där ämnesstudier ej integreras i lärarexamen för lärarkandidaterna. För att ens vara en kandidat **måste** en student avlagt examen inom ett ämne. Det finns dock utbildningar som liknar ämnesintegrerade studier i Sverige[47]. Dessa studenter benämns antingen med “pre-service teachers”, ”teacher candidates” eller “student teachers”. Med andra ord finns det flertalet termer för en och samma sak. Jag anser att den litteratur som studerats i detta arbete framhäver studenterna som lärarkandidater för grundskolan, högstadiet samt gymnasiet. Vad lärarstudenternas bakgrunder är varierar dock mellan studierna, beroende på om de studerar ämnesintegrerat eller inte.[48]

  Vad flera forskare framhäver är att lärarstudenter inte har de kunskaper som skulle vara önskvärda. Främst lyfter de fram radianer samt vinkelbegreppet och problematiserar varje fall utifrån dessa två utgångspunkter. Valet att kombinera dessa två delar grundas därmed på att litteraturen i ren allmänhet gör detta för studenter närmare gymnasieåldern samt högskolestudenter. Detta innebär att i vissa fall kommer detta tema även diskutera fenomen utöver vinkelbegreppet men överlag är det vinkelbegreppet med fokus på radianer som är kärnan i materialet med inslag av andra besvär lärarstudenterna uppvisat.

Inom ”memorering och digitala hjälpmedel” har jag inkluderat de aspekter och ting som behandlar elevernas arbetsminne samt hjälper avlasta det, via olika digitala hjälpmedel. Här har jag inkluderat följande teman:

---

[44] Visserligen är vissa av dessa studier från Turkiet men där är det explicit att de åsyftar lärarstudenter.
[45] Beroende på delstaten i fråga.
[46] Här följer en länk till ett program på Stanford samt ett på Princeton. https://ed.stanford.edu/step, https://teacherprep.princeton.edu/become-teacher/application-requirements
[47] Michigan State University. Se både grundskola och högstadium samt gymnasiet. https://reg.msu.edu/AcademicPrograms/ProgramDetail.aspx?Program=2237 https://education.msu.edu/resources/wp-content/uploads/sites/48/2020/05/secondary-education-advising-guide.pdf
[48] Vi kan då jämföra det första fallet med KPU i Sverige, dvs. kompletterande pedagogisk utbildning. Dock förefaller det vara ålagt en aning annorlunda i USA, där utbildningen använder en KPU-variant som standard i vissa lärarprogram.

- Memorering: En del av litteraturen identifierar att individer förlitar sig mer eller mindre på minnesregler samt algebraiska manipulationer snarare än en djupare förståelse för ämnet. Litteraturen är dock mycket sparsam med forskning inom hur memorering påverkar inlärningen.

- Miniräknarens roll: Miniräknaren har kommit att ersätta de massiva tabeller man en gång använde inom trigonometri. Detta har avlastat arbetsminnet och tidsmödan men vissa forskare hävdar att en övertro på miniräknarens roll inom trigonometrin motverkar inlärningen av en djupare förståelse.

- Digitala hjälpmedel: Det finns ett antal studier som behandlat hur ”dynamiska program” påverkar inlärningen genom att låta eleverna visualisera processen bakom en trigonometrisk funktion. Jag valde att inkludera dessa delar för att belysa hur exempelvis GeoGebra kan komma användas i undervisningen men även problematisera appar och program som utför hela lösningsprocedurer för elevernas del (se PhotoMath).

Samt slutligen:

- Algebra inom trigonometrin: Vilket är ett av de områden som det är fattigast med material inom. Det finns dock ett fåtal studier som behandlat detta tema och försökt producera klassiska hinder och besvär som elever möter. Utöver detta har en författare försökt lägga grunden för en bild av elevernas begreppsbilder och förståelser vilket direkt relaterar till min egen frågeställning.

Jag önskar göra en kommentar angående ett visst begrepp som dyker upp stundtals genom resultatdelen. Begreppet i fråga är ”*traditionell undervisning*”. Detta ord inkluderas då inte som en egen tolkning utan är citat direkt från studierna[49] (Blackett & Tall, 1991; Weber, 2005; Weber, Knott, & Evitts, 2008; Martinez-Planell & Cruz, 2016; Kamber & Takaci, 2018; Martín, Ruiz-Hidalgo & Rico, 2019). Dessvärre är samtliga studier otydliga med vad en ”traditionell undervisning” innebär. Dessa forskare har utfört studier i flertalet olika länder med olika läroplaner och mål för matematiken som inte alls överensstämmer i alla avseenden (jmf. exempelvis Delice, 2003[50]). Att då skriva ”traditionell undervisning” kan ses som problematiskt, givet att klassrummen är annorlunda. Vad är ”traditionell undervisning” i Spanien? Vad är det i USA? Det framgår att ordets innebörd kan skilja sig mellan författarna. I ett fåtal fall ges en kort beskrivning av innebörden av ordet (ex. Blackett & Tall 1991, s.1–2; Weber, 2005, s.94; Martinez-Planell & Cruz, 2016, s.118–119). Sammanfattningsvis verkar forskarna mena följande med ”traditionell undervisning”:

1. Klassrumsmiljön är föreläsningsbaserad där lösningar och metoder presenteras med tavla. Målet är att de lärande individerna ska memorera och kunna recitera materialet.
2. Materialet består av en lärobok där både läxor, uppgifter samt prov har likartade uppgifter och formuleringar. Materialet använder ej dynamiska digitala hjälpmedel såsom GeoGebra.

[49] På engelska benämns ”traditionell undervisning” hos forskarna som ”traditional instruction”, ”traditional education” samt ”standard instruction” och ”standard education”.

[50] Delice (2003) kommer behandlas i kapitel 7.3 om algebra och trigonometri. Det är en komparativ studie mellan Turkiet och Storbritannien där bland annat läroplaner, klassrumsmiljöer och elevkunskaper har jämförts. De områden som behandlas är inte densamma mellan de två länderna: exempelvis behandlar turkiska elever kotangens och sekanter medan Storbritannien ej gör detta. Miniräknare är bannlyst från turkiska klassrum medan i Storbritannien inkluderas de i nästintill alla delar.

Med andra ord verkar litteraturen lyfta fram ett begrepp som liknar ”katederundervisning”. Däremot kvarstår problematiken med vad materialet i sig är. Läroböckerna skiljer sig åt mellan länderna och tar upp olika material. En sådan diskussion återfinns inte i någon studie och dessvärre verkar det inte lätt för en yttre läsare att förstå vad det är för matematik som faktiskt studerats i respektive studie. I slutändan verkar det vara främst *hur* klassrumsmiljön är uppbyggd som binder samman deras tolkningar, dvs. föreläsningsbaserad utifrån en lärobok med färdiggjorda exempel.

Slutligen bör jag nämna att det stundtals skiftas mellan användningen av orden studenter och elever i arbetet. Det är fallet att i engelsk litteratur överlag är dessa ord en och densamma[51] Jag använder i arbetet ordet studenter för de studier som behandlat universitetsstudenter medan elever används för gymnasiet och lägre.

[51] Visserligen finns begreppet ”pupil” men det används inte i litteraturen.

7. Resultat

Detta kapitel kommer delas upp utefter vanliga utmaningar och hinder som jag upplever mig kunna utläsa ur litteraturen. Detta kopplas i varje block till didaktiska överväganingar. I dessa delar kommer det även presenteras ett antal förslag på lektionsupplägg och verktyg från litteraturen.

7.1 Fundamenten

Det första besvär en elev kan uppvisa med trigonometri är klart när den introduceras för trigonometri för första gången. Varje elev kommer med en tidigare definition av vinklar, det mest fundamentala för trigonometrin. Detta behöver sedan byggas på till en begreppsbild av sinus och cosinus, må det så vara via enhetscirkeln, rätvinkliga trianglar eller funktioner. Slutligen krävs en kunnig lärare som internaliserat dessa begrepp och som även besitter en pedagogisk kunskap om hur trigonometri bör undervisas.

7.1.1 Elevens definitioner av sinus och cosinus

Vad för begreppsbild och förståelse en individ har av sinusfunktionen kan komma att forma resten av deras förståelse inom området. Från denna förståelse kommer eleven sedan utgå från för att relatera och beskriva andra relationer och begrepp inom matematiken. Elevers begreppsbilder av sinus och cosinus utgör ett av de större områdena jag läst men jag har valt att begränsa mig till fyra artiklar.

Jag inleder med en av de starkare och mer gedigna arbetena i översikten; en avhandling från Brown (2005). Avhandlingen citeras av flertalet forskare efter publicering och anses vara en av de verk som sedan 2005 bidragit till konceptualiseringen av elevers modeller samt tänkande.

Brown formulerar följande frågeställningar:

1. Skapa och pröva en innehållsram för hur stoffet av trigonometri för rätvinkliga trianglar översätts och utökas till koordinatplanet och sedan sinuskurvor.
2. Utveckla en modell för att beskriva elevers tänkande kring sinus och cosinus.

(Brown, 2005, s. 59)

För att uppnå detta förtydligar Brown frågeställningen utifrån elevernas förkunskaper, uppfattningar, trigonometrins innehåll inom den verksamma skolan samt vanliga misstolkningar och hinder. Brown riktar främst in sig på att sammanfoga och beskriva de sammankopplingar elever gör mellan representationer såsom rätvinkliga trianglar, avstånd, definitioner av sinus och cosinus, symboler, m.m.

Detta inkluderar ej pedagogiska överväganingar och utgångspunkten är från grundläggande trigonometri, dvs. definitioner av de trigonometriska funktionerna via rätvinkliga trianglar samt enhetscirkeln.

Browns arbete delas in av henne i två delar, ett för att skapa ramverket samt en för själva fallstudien av eleverna (N=120). Urvalet består av enbart en skola[52] med elever som träffar på trigonometri för första gången. Dessa elever deltar i en “mycket bra skola” med erfaren lärare samt avancerad klass[53]. Detta problematiserar Brown i sin avhandling när det kommer till generaliserbarheten. Hon resonerar att de

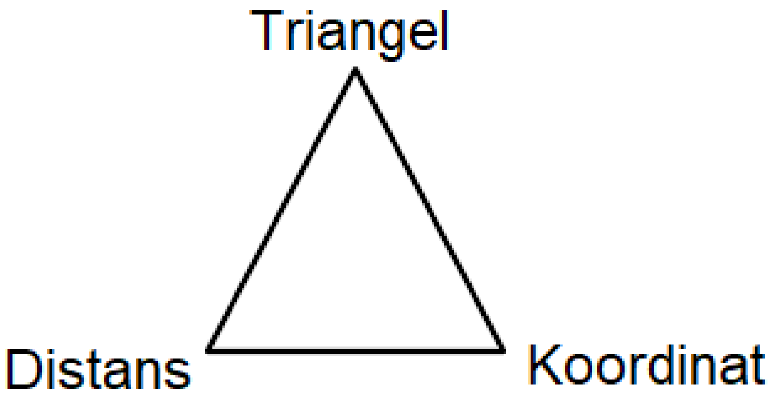
[52] High School
[53] Honors Algebra 2 / Trigonometry

besvär som är närvarande i denna klass bör även existera i åtminstone samma eller mer markanta versioner i klasser med ”sämre förutsättningar” (Brown, 2005, s.64).

För att samla in och jämföra data utförde Brown ett test om algebra för att sedan observera klassen. Efter detta genomfördes ett test inom trigonometri där frågorna är mestadels öppna frågeställningar och poängen är att fånga de procedurer och begreppsbilder samt definitioner en elev använder. Baserat på resultaten valde Brown ut sju elever för en semistrukturerad intervju där syftet var att få en representativ bild av elevernas begreppsuppfattningar.

Browns resultat I: En modell för elevernas modeller

Brown beskriver sina resultat med en triangelmodell på sidorna 192–193.Vad modellen försöker fånga in är tre arketypiska representationer som dominerar mer eller mindre hos varje student.

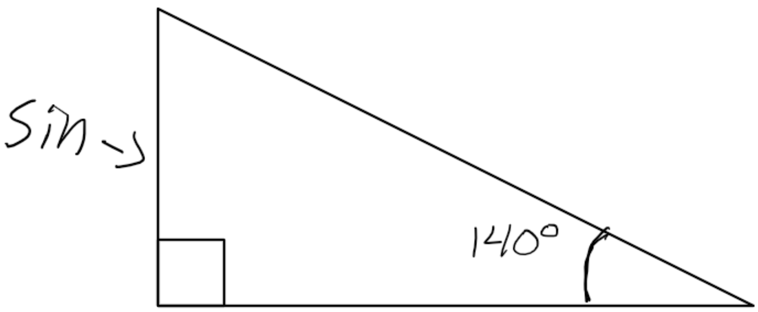


Figur 21. Browns modell för elevernas begreppsbilder av sinus. Anpassad från en bild (Brown, 2005, s. 192).

Denna triangel använder Brown för att illustrera tre vanliga tolkningssätt för sinus / cosinus. Brown använder dessa för att jämföra deltagare med varandra kvalitativt med hjälp av punkter inom den inre delen av triangeln. Detta beskrivs i verket på följande vis: en punkt i mitten innebär att en elev använder alla modellerna i lika stor grad. En punkt nära toppen skulle därmed innebära att en elev använder den rätvinkliga definitionen för sinus över andra. (Brown, 2005, s.193).

Browns modell presenterar de vanligaste definitionerna som hennes urval använder vid trigonometri. Baserat på hennes arbete presenteras de tre begreppen på följande sätt:

1. Triangel: Den rätvinkliga definitionen, sinus som den motstående sidan mot vinkeln genom hypotenusan.
2. Distans: Cosinus och sinus är riktade avstånd från origo i koordinatplanet, alltså hur mycket man rört sig vänster/höger respektive upp och ner.
3. Koordinat: Cosinus och sinus är x och y-koordinaten, *ibland* i enhetscirkeln och vissa fall inte.



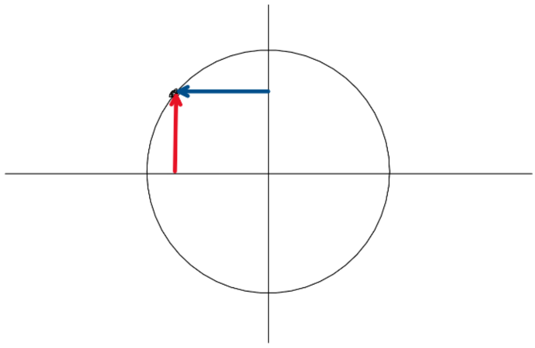
Figur 22. Exempel av problematik med rätvinklig triangel. Egenskapad.

Om Triangel

Triangel definitionen för elever lämnar en viss problematik med att hantera och placera referenstrianglar i enhetscirkeln för elever. Brown framför att detta oftast är kopplat till att elever saknar en begreppsbild av rotationsvinkeln. Exempelvis kan elever placera den rätvinkliga triangeln utan enhetscirkeln i sig. Ett annat förekommande besvär är att de placerar rotationsvinkeln som en inre vinkel av triangeln, oberoende av vad det är för vinkel de hanterar. Slutligen är orienteringen skiftad i vissa fall, där elever placerar en referenstriangel åt alla möjliga håll. Såsom mot x-axeln, y-axeln, och ibland även med en felaktig eller otydlig hypotenusa.

Om Distans

För de invigda inom matematiken kan det verka som om punkt 2 och punkt 3 är snarlika. Kanske till och med identiska i någon mening. Att frikoppla koordinaten från distansen, dvs. projektionen av punkten på x- respektive y-axeln är något som Brown understryker att det förekommer hos elever. Brown framhäver alltså att vissa elever ännu inte gjort denna koppling mellan de två representationerna. Vissa elevers begreppsförståelse utgår från avståndet i sig med riktning och inte rotationen eller ens koordinaten på enhetscirkeln. De utelämnar även rätvinkliga trianglar från sin begreppsbild och lägger istället sitt fokus på den visuella representationen, den riktade sträckan, och ej den abstraherade punkten eller definitionerna (s. 172–176).



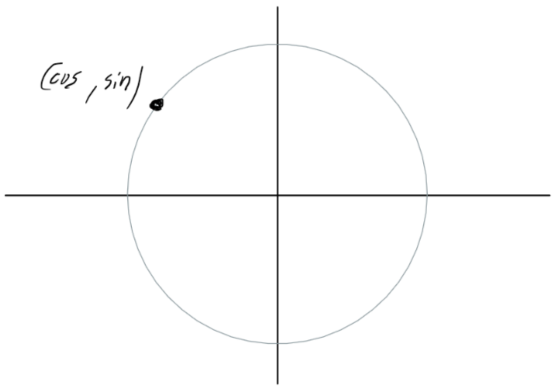
Figur 23. Exempel av riktade distanser. Notera bristen av vinkel. Enligt Brown (2005) saknas vinkelargumentet i vissa fall för denna definition.

Brown identifierar dessutom att dessa elever hade svårigheter med argumentet av de trigonometriska funktionerna. Med andra ord uppvisas ett hinder med att koppla ihop konceptet av en rotationsvinkel samt koordinater.

Om Koordinat

Koordinat definitionen skulle istället utgå mer eller mindre från axiomet att x-koordinater och y-koordinater representerar cosinus respektive sinus.

Brown hävdar att detta inte nödvändigtvis implicerar enhetscirkeln utan hos vissa elever uppvisades istället en frikoppling från själva enhetscirkeln (s. 179–182). Vad Brown framför är att elever ej riktigt har förstått vad enheten i enhetscirkeln egentligen innebär. Exempelvis kan elever göra antagandet att om sinusvärdet för två punkter är densamma gäller det att punkterna måste ha samma koordinater. (s.155–156).



Figur 24. En egengjord variant av elevresonemang. Dessa kan både inkludera och inte inkludera en rotationsvinkel.

Browns resultat II: byten av representationer

Ett av Browns viktigare resultat är dock hennes kategorisering av representations omvandlingar mellan begrepp.

Till / Från	Vinkel	(Sinus)Värde	Enhetscirkel	Sinuskurva	Rätvinklig triangel
Vinkel		Tabellvärden eller miniräknare.	Rotera, hitta slutpunkter efter bågrörelse. Sätt ut vinkel och läs av y-värde	Läs av x-axeln, rita på kurvan	Rita referenstriangel med given hypotenusa. Mät vinkel med gradskiva.
(Sinus)Värde	Tabellvärde eller använd miniräknaren. Tänk på periodicitet.		Välj koordinataxel, läs värdet och rita punkter	Hitta höjden på y-axeln, rita och justera	Rita de riktade höjderna och koppla ihop med origo. OBS, flera fall!
Enhetscirkel	Läs av sinus/cosinus värdet, ta inverser och justera	Välj en koordinataxel och läs av värdet		Välj värde, använd höjden som en punkt på sinuskurvan.	Givet en koordinat, projicera punkten på x-axeln och dra linjesegment till origo från koordinaten.
Sinuskurva	Läs av värdet x-axeln	Läs av värdet på y-axeln	Läs av vinkeln och rotera på cirkeln		Y-värdet är höjden i en rätvinklig triangel med hypotenusan 1. X-värdet är den motstående vinkeln.
Rätvinklig triangel	Mät vinkel med gradskiva eller approximera. Använd geometriska förhållanden	Läs av den riktade höjden i den rätvinkliga triangeln	Använd hypotenusan som cirkelns radie. Sätt radien som enheten.	Sinus = höjden / hypotenusan Den riktade höjden och motstående vinkel ger oss y- respektive x-värdet för sinuskurvan	

Figur 22. Detta är en modifierad version av Browns modell för representationsbyten. (se Brown, 2005, s.133 för original). Additionen består av rätvinkliga trianglar.

Jag har modifierat Browns modell baserat på hennes beskrivningar av hur elever använder triangel- samt distansmodellen. Dessa har sedan integrerats till en vy av rätvinkliga trianglar, där hypotenusan utgör radien för cirkeln. De två kateterna placeras på ett sådant sätt att de ligger längs x- respektive y-axel.

Målet med detta är att nyttja dessa rätvinkliga trianglar i kombination med enhetscirkeln för att utöka definitionen av sinus och cosinus till vinklar bortom den första kvadranten. Alltså, sinus ges fortfarande av den motstående vinkeln genom hypotenusan men det utökas till resten av planet genom supplementärvinklar samt riktade vinklar (negativa vinklar). För att koppla detta till sinuskurvan har Browns material använts i en större grad för att relatera sinuskurvan och riktade avstånd (Brown, 2005, s.91–114).

Rotation är fundamentet

Avslutningsvis betonar Brown (s. 213) att rotation är fundamentet för att förstå sinus respektive cosinus. Likt innan lyfter hon fram sin triangelmodell där eleverna ser sinus och cosinus som förhållanden i en rätvinklig triangel, riktade avstånd samt koordinater. Brown hävdar att **ingen** av eleverna bemästrade alla tre huvudsakliga representationer. Utöver detta hade de svårt att röra sig mellan representationerna. Exempelvis rörde sig ingen deltagare i studien från en distanstolkning till sinuskurvan.[54]

[54] Om detta är ett naturligt representationsbyte eller inte lämnar jag till läsaren att besluta.

Hur utvecklas modellerna över tid?

Det är inte enbart Brown (2005) som har behandlat elevers begreppsbilder samt definitioner. Kamber och Takaci (2018) utförde en studie på 17–19 åringar där de önskade beskriva hur elever i början av utbildningen (juniorer) och slutet av en utbildning (seniorer) tar sig an trigonometri. Mer konkret ville Kamber och Takaci se om de resonerade med stöd av triangel eller cirkeltrigonometri, hur de löser ekvationer och olikheter, vad för tidigare begrepp som stödjer och motverkar elevförståelse inom trigonometri samt vad för praktiska tillämpningar som eleverna ser av trigonometrin. Författarna lyfter fram en aspiration av att utveckla en modell för hur elevernas modeller ändras över tid (s.163).

Metoden bestod av en enkät där båda grupper tilldelas samma 10 frågor att besvara. Urvalet bestod av 16 juniorer respektive 49 seniorelever. De beskriver även det relevanta material inom trigonometri som eleverna tar del av i sin utbildning. Jag anser att konstruktionen överlag liknar den svenska skolan där eleverna i de yngre åren arbetar med cirkeltrigonometri medan de senare åren arbetar med komplexa tal samt lättare differentialekvationer. Enkätens frågor liknar Browns (2005) formuleringar i den bemärkelse att de hanterar elevernas egna definitioner av ex. sin(x), att finna specifika värden av sinusfunktionen, ordna sinustermer i storleksordning, bevis av trigonometriska ettan, samt ett antal frågor om funktionslära. Kamber och Takaci (2018) ställde även en fråga om vad för verkliga tillämpningar eleverna kan nämna av trigonometri. (s. 163–164).

Båda modellerna förekommer men används ej i problemen

I denna studie fann Kamber och Takaci (2018) att elever lyfter fram både triangel och cirkeldefinitionen av sinus. Det fanns vissa seniorelever som definierade sinus som en funktion. Enligt Kamber och Takaci gjordes detta på “mycket generella sätt, såsom en trigonometrisk funktion med värden mellan -1 och 1” (s.166). Kontentan av deras resultat är att eleverna oftast inte använder definitionerna för att lösa problemen utan väljer att falla tillbaka på minnesregler, memorerade formler (additionsformeln, m.m.) samt algebraiska manipulationer. Eleverna kunde nämna områden som använder trigonometri (såsom navigation, ellära) men kunde inte ge något specifikt exempel.

Elever uppvisar liknande modeller i andra länder än USA

En av de senast publicerade artiklarna finner jag hos Martín, Ruiz-Hidalgo samt Rico (2019). En av huvudpunkterna som författarna önskar fånga in med sin studie är att “identifiera och karaktärisera de meningar av sinus och cosinus som högstadieelever visar” (s.2).

Martín, Ruiz-Hidalgo och Rico utgår från ett teoretiskt ramverk som säkerligen har spelat en stor roll i deras arbete men som jag väljer att avstå från att redogöra för. Jag anser att den inte tillägger något mer än vad som redan blivit sagt. Urvalet bestod i vilket fall av 74 elever från en spansk högstadieskola (16–17 åringar). Enligt forskarna ska dessa elever ha genomgått en traditionell undervisning inom trigonometri baserat från en textbok. (2019, s.5).

Martín, Ruiz-Hidalgo och Rico lät deltagarna svara på två enkäter, en för sinus av vinklar och den andra för cosinus (s. 5). Jag bifogar här deras frågeställningar. Notera att A står för första enkäten och B för den andra. Deras frågeformuleringar utgår från två författare som utgör en del av denna litteraturöversikt, Brown (2005) samt Fi (2003). Den andra författaren kommer behandlas i ett senare skede.

Task 1-A. "Draw a picture in which it is showed sin (30º)"
Task 1-B. "Draw a picture in which it is showed cos (30º)"
Task 6-A and 6-B: "Draw a picture showing a difference between cos (30º) and sin (30º)".
Task 2-A. "Explain in your own words sin (30º)"
Task 2-B. "Explain in your own words cos (30º)"
Task 8-A. "Write a problem in which you use the sine of 60º"
Task 8-B. "Write a problem in which you use the cosine of 60º"

Figur 23. Martín, Ruiz-Hidalgo och Rico (2019, s. 6) har konstruerat två enkäter med frågor angående sinus (A) respektive cosinus (B). Artikeln är licenserad under Creative Commons (CC-BY).

Läsaren märker efter ett kort studium av den ovanstående figuren att inte alla frågor är inkluderade. Martín, Ruiz-Hidalgo och Rico väljer att studera enbart en delmängd av de svar de fick för att de själva betraktade dessa frågor vara av större intresse för allmänheten.

För att sammanfatta deras resultat fann Martín, Ruiz-Hidalgo och Rico att de flesta elever (strax över ⅓) väljer att definiera sinus och cosinus i termer av rätvinkliga trianglar. Efter detta blir datan dock väldigt uppdelad, men i grunden har de fått fram en aning annorlunda resultat än Brown (2005). Forskarna återfinner fortfarande enhetscirkeln, och de riktade distanserna samt koordinatdefinitionen men finner även en hel del andra varianter såsom riktade bågar av en cirkel (enhet eller ej) samt sidor av en given vinkel eller att sinus är vinkeln.

De fann i likhet med Brown att de flesta elever saknade en integrerad vy av flera representationer samtidigt. De fann dock en aning annorlunda modell hos sitt urval där en integrerad modell bestod av den rätvinkliga definitionen (triangel hos Brown), riktade längder och mätningar av magnituder (vinkelmätning). Martín-Fernández, Ruiz-Hidalgo och Rico framför visserligen att majoriteten av eleverna använder inte mer än två representationer samtidigt (s.12) vilket även Brown (2005) redovisade i sina resultat.

Elever utvecklar ej ett processtänk[55]

Martinez-Planell och Cruz (2016) är ytterligare ett par forskare som studerat studenters uppfattningar av enhetscirkeln och trigonometriska funktioner. Jag kommer ta upp mer om deras arbete senare men kortfattat har de ställt upp en genetisk nedbrytning av de scheman en individ bör inneha för att kunna hantera de trigonometriska funktionerna i förhållande till enhetscirkeln. Forskarna har sedan testat hypotesen på ett urval av totalt 81 studenter från en universitetskurs i Puerto Rico. Av dessa studenter valde författarna ut deltagarna till studien beroende på deras matematiska förmåga. I slutändan fick de fram totalt 11 studenter för en intervju. Dessa studenter hade gått igenom en “traditionell kurs”[56] inom trigonometri som undervisades av en av forskarna. Martinez-Planell och Cruz fann då, för deras del, ett oroande resultat vars innehåll bäst sammanfattas av dem själva:

> Most of the interviewed students had significant challenges with the mathematical tasks involved in the interview. Indeed, as will be discussed in detail, none of the interviewed students can be classified as having a process conception of these functions, only 2 of the 11 interviewed students are classified as being in transition to a process conception, another 3 students seemed to have been limited to an action conception, and the remaining 6 students showed evidence of only a pre-action conception.
>
> (Martinez-Planell & Cruz, 2016, s.121).

[55] Likt de begrepp som Gray och Talls (1994) och Sfards (1987,1991) tar upp. Dvs. elever internaliserar inte en process i någon mån alls och kommer därmed inte ens förbi första steget.

[56] Forskarna har ej utfört någon intervention med grund i deras genetiska nedbrytning. De nämner att hypotesen skapades *efter* studenterna gått igenom kursen.

Avslutningsvis finner Martinez-Planell och Cruz (2016) i enlighet med tidigare forskare i detta delkapitel att studenterna i studien har en svag förståelse av trigonometriska funktioner som geometriska processer eller för den delen som abstrakta objekt.

7.1.2. Om vinklar och lärarstudenter

Flertalet studier lyfter fram en viss oro kring att problematiken inom trigonometrin är djupare rotat än algebra och trigonometriska definitioner. Vad den centrala poängen är följande: *problemet med trigonometrin är att individer ej är säkra på hur man utför vinkelmätning överhuvudtaget.*

Detta är en krass sammanfattning av materialet men den bärande andan hos resonemanget är att alla de hinder studenter möter inom trigonometrin kan mer eller mindre ha sitt ursprung i att individer ej är säkra på hur en vinkel mäts upp. Vissa författare hävdar att traditionell undervisning i ren allmänhet ej kopplar samman begreppen med tidigare kunskaper. Främst är det radianbegreppet som lyfts fram som en utmaning för både elever och lärarstudenter. Kamber och Takaci (2018) fann i sin studie av junior- och seniorelever att de visualiserade radianer i termer av grader. Studenterna kunde inte riktigt förklara varför radianer skulle vara användbara utan påstår helt enkelt att det är det (Kamber & Takaci, 2018, s. 167).

Vinkelbegreppet är ”mystiskt”

Vinkelbegreppet är en aning abstrakt och massivt för att redogöra i denna översikt. Faktum är att det lätt skulle gå att skriva en hel litteraturöversikt inom det området själv. Jag önskar dock lyfta fram en artikel av Tanguay och Venant (2016). Dessa forskare har analyserat vinkelbegreppet utifrån en mängd av möjliga definitioner. Deras publikation består av två delar, först ett teoretiskt ramverk där de beskriver och problematiserar vinkelbegreppet samt ger en läromodell för hur vinkelbegreppet blir till hos yngre elever (åk 6). I den andra delen beskriver Tanguay och Venant de definitioner eleverna uppvisar och analyserar sina resultat.

Urvalet består av 16 elever som forskarna fick tag på via en kollega. De för en gedigen och längre diskussion kring sina resultat men här inkluderas enbart en liten delmängd av deras analys. Elever i denna ålder finner oftast vinkelbegreppet som ”något mystisk” (s.891); en process de inte riktigt kan sätta ord till eller beskriva. Varje elev utvecklar sin egen modell och ord för att framställa vinkelbegreppet. Tanguay och Venant skriver att det finns två vanliga tolkningar i denna ålder: vinkeln är något man mäter i grader och det är något som kategoriseras utifrån termerna: spetsig, rät samt trubbig.

Står lärarstudenter i USA på en skakig grund?

Av störst oro för framtida elevers utveckling är att flertalet forskare har funnit att lärarstudenter uppvisar bristande kunskaper inom vinkelmätning. (Fi, 2003; Akkoc, 2008; Yigit, 2014). Författarna lyfter enhetligt fram att vinkelbegreppet är nödvändigt för förståelse inom trigonometrin. Fi är en av de personer som skrivit en större del inom området, främst på grund

För att inleda detta område är det lämpligt att inleda med Fi (2003). Fi anses vara central för att redogöra problematiken där vissa av Fi:s frågeställningar och formuleringar även kommer igen i de andra studierna (Akkoc, 2008; Yigit, 2014). Fi har studerat vad för kunskaper lärarstudenter har av trigonometri, både pedagogiskt samt ämnesmässigt sett. Intresset för studien utgår från en ängslan av att lärare i främst USA (men även andra länder) ej besitter de ämneskunskaper de behöver för att undervisa i ämnet. Fi beskriver det som att det förväntas av allmänheten att lärare är individuella experter inom sitt fält som inte behöver alltför mycket mer stöd rent ämnesmässigt sett. Fi utgår från flertalet andra studier för att belägga sin oro och jämför med stöd av vissa andra studier hur lärare i USA står sig mot andra länder. (Fi, 2003, s. 28–30).

Deltagare, urval, metod samt en beskrivning av testet

Fis urval bestod av 14 lärarstudenter som deltog på ett universitet varav 5 av dessa valdes ut för intervju utöver testerna. Fi går vidare in på deras bakgrunder och beskriver dem som enhetlig med en viss variation. Överlag har de alla studerat en längre tid[57] på universitet (Fi, 2003, s. 43). Vidare beskriver Fi deras utbildningsbakgrund med stöd av en matris som jag lämnar till den intresserade läsaren att själv ta del av (s.46). Dessa studenter hade deltagit i sessioner där de observerat samt deltagit i skolundervisning (jämför med VFU).

Fis metod består av fyra delar.

- Rita begreppskartor
- Sortera kort
- Test
- Intervju

Begreppskartorna ritades med stöd av 89 termer som delades ut på pappersform (s. 47). Studenterna fick även sortera en mängd påståenden i kategorierna: sanna, sanna ibland, och slutligen falska. Fi beskriver testet som att det skulle pröva samtliga delar av trigonometri. Slutligen, utförde Fi semistrukturerade intervjuer med 5 av deltagarna, utvalda utifrån en idé av representation för samtliga kunskapsnivåer.

Här kommer jag enbart presentera resultat utifrån de krav jag ställt upp innan och kommer därmed inte på något djupare plan ta upp de delar som kopplas till funktionslära. Jag begränsar mig även till enbart de tre första metoderna intervjun inte adderar mycket nytt enligt mig. Det är dock av intresse att nämna att lärarstudenter i studien uppvisar svårigheter överlag med periodicitet, icke-injektiva funktioner, domän och kodomän, hur parametrar påverkar ex. sinusfunktionens utseende samt vad en funktion ens är. Fi skriver att det finns fall där studenter säger att ett värde i domänen har två värden i funktionens bild (s. 93–99).

Kortfattat tycker jag att Fi fokuserat på att få studenterna förklara sina begreppskartor samt arbeta med deras problemlösningsförmågor och definitioner. (s. 48–50). Alla dessa delar utfördes utan stöd av miniräknare ty Fi önskade nå; “deltagarnas kognition av fundamentala idéer inom trigonometri” (Fi, 2003, s. 45).

Fis resultat

Fi inleder sina resultat med begreppskartorna. Fi fann här att studenter underanvänder vissa begrepp, såsom exempelvis argument, riktning och referensvinklar. Utöver detta fann Fi att radianbegreppet i sig ses av studenterna som en omvandling av grader till ett annat vinkelbegrepp. Fi menar att listan dock innehöll begrepp som kunde använts för att definiera radianer utan stöd av grader.

Det fanns dock dessvärre ett antal vanliga misstolkningar med trigonometriska identiteter (s. 90). I aktiviteten där studenter fick sortera kort vidareutvecklar Fi denna problematik. 9 studenter respektive en student kategoriserade följande påstående som alltid sann respektive alltid falsk; Givet trianglar med

[57] Åtminstone fyra år.

sidorna a, b, c ges de trigonometriska funktionerna av förhållandet mellan två av triangelns sidor. (Fi 2003, s.93)

Fi hävdar att detta implicerar att lärarstudenter saknar förståelse för de nödvändiga premisserna som behöver föreligga för definitionen av de trigonometriska funktionerna. Även radianbegreppet kommer upp igen som en utmaning där ”bara sex studenter kunde korrekt identifiera att påståendet, en radian är ekvivalent med 180 grader, aldrig är sann” (Fi, 2003, s.94).

Lärarstudenter uppvisar svårigheter med viktiga delar av trigonometrin

På testet presterade lärarstudenterna sämre än önskat med ett medelvärde av 47% korrekta svar (Fi, 2003, s. 101). Här önskar jag presentera vissa av frågorna för att illustrera varför Fi har en grundad oro.

Fråga	Antal helt korrekta svar / Delvisa svar[58] / Felaktiga (N=14)
3. Ange sinussatsen (s.106)	3/1/10
4. Ange cosinussatsen (s. 107)	0/3/11
5. Vad representerar en negativ vinkel? Antag att vinkeln definieras som i enhetscirkeln. [59] (s.111)	10/3/1
6. Bevisa trigonometriska ettan (s.113)	7/5/2
7. a) Definiera radianmåttet för en vinkel. b) Ange sambandet mellan grader och radianer. (s.115)	3/9/2
8. a) Vad är en enhetscirkel? (s.117) b) Hur kan du använda enhetscirkeln?	3/7/4
9. (s. 120) Sant eller falskt: $a)\ sin(a+b) = sin(a) + sin(b)$ $b)\ sec^2(x) + 1 = tan(x)^2$ $c)\ cos(-x) = cos(x)$ $d)\ sin^{-1}(2)\ existerar$	3/10/1
10. Låt triangeln ABC ha sidan AB = 8 l.e. Låt vinkeln BAC vara 30° och vinkeln ACB vara 45°.[60] Hitta alla sidor och vinklar som saknas: visa ditt arbete. (s. 121)	3/11/0
11. Låt triangeln ABC ha sidan AB = 10 l.e.	1/9/4

[58] Poängen som kunde tilldelas låg mellan 0 – 3 poäng i de flesta fallen. Jag kommer nämna undantag i löpande text.
[59] Ursprunglig text: What does a negative angle measure represent? Assume that the angle is in standard position
[60] Det finns bilder i Fis arbete istället för en beskrivning av triangeln.

samt BC = 4 l.e. Låt vinkeln BAC vara 30°. Hitta alla sidor och vinklar som saknas: visa ditt arbete. (s. 123).	

Tabell 5. Ett urval av Fis testfrågor. Jag har själv sammanställt allt i en tabell.

På de första två frågorna utgörs de felaktiga svaren mestadels av antingen felaktiga definitioner av sinus respektive cosinus eller en icke-korrekt angivelse av satsen. Dock var det fem deltagare i varje fall som inte ens svarade på frågan.

Riktade vinklar har anammats av studenterna som "klockvis rotation". När det kommer till fallet av trigonometriska ettan presenterar Fi ännu en gång resultatet att definitionen av cosinus samt sinus inte är internaliserade av vissa deltagare. Radianer ser Fi som ett nödvändigt begrepp att ta till sig. Enligt Fi är radianen en dimensionslös enhet där syftet är att jämföra bågens längd med radien. Fi ser alltså radien som en enhet för mätning. I detta fall var det 9/14 som fick 1 av 3 poäng på frågan. Fi finner att studenter kan konvertera mellan radianer och grader men Fi problematiserar att studenterna använder omvandlingen som en definition. Enligt Fi var det ingen av studenterna som kunde helt och hållet definiera radianer (s.115).

Med enhetscirkeln (fråga 8) uppstår ett problem där de flesta kan definiera enhetscirkeln (10 / 14) men kan inte nämna någon roll den spelar vare sig praktiskt eller teoretisk (s.117–118). Fi lyfter fram att deltagarna har en svag förståelse för de funktioner och roller som enhetscirkeln innehar i trigonometri. Med Fis egna ord:

> However, they have weak[61] understanding of the functionality of the unit circle in the study of trigonometry. They did not express the encapsulating power of the unit circle: relative to trigonometric functions of angles greater than 90°, quadrantal angles, clockwise rotations, periodicity, coterminal angles, proof of identities and formulas, and the notions of even and odd functions, to name just a few.
>
> (Fi, 2003, s. 117–118).

I fråga 9 skulle Fi testa för de algebraiska kunskaper studenterna innehar. 10 deltagare påstod att a) var sann (jämför med fråga 3). Hälften angav att b) var korrekt samt i c) var det 9 studenter som ansåg att påståendet var sant. Frågan d) utesluts i enlighet med tidigare begränsningar. Slutligen i de två sista frågorna som jag väljer att inkludera (av 17 totalt) har Fi testat för deras färdigheter med att använda trigonometriska funktioner och identiteter för att lösa för sidorna i en triangel. De flesta av individerna fick låga poäng på varje uppgift. Fi anser att detta beror på svaga kunskaper i trigonometriska identiteter, definitioner, antaganden av rätvinklighet samt falska påståenden (s. 122–123).

Fis slutsatser

I sina slutsatser framför Fi att studenterna i hans urval överlag har svårt med att definiera de trigonometriska funktionerna, varav 10 av dessa inte är medvetna om kravet av rätvinklighet. 8 av studenterna kan inte ens definiera en funktion. Fi slutför sin sammanfattning med att lärarstudenterna innehar en grundläggande förståelse för området som kan byggas vidare på med ett antal områden som har stora brister, där Fi själv lyfter fram radianbegreppet.

[61] Tekniskt sett ska det nog vara ett (sic) här. Det bör nog vara ett "a" framför "weak".

Från intervjuerna kunde Fi vidare klargöra deras begreppsbilder, särskilt i förhållande till de svar de angett på testerna och begreppskartor. Fi anser att lärarstudenternas vy av trigonometri är “fragmenterad” och ej sammanbunden i en koherent enhet (s.198). Denna syn lyfts även fram av Brown (2005) där studenter inte hade en ”integrerad vy” av representationerna.

Andra författare inom området

Dessa orosmoment lyfts även fram av andra författare, åtminstone i kontexten av USA:s utbildningssystem. Akkoc (2008) utförde en studie där lärarstudenter (N=42) fått fylla i ett frågeformulär med syftet att nå fram till hur väl studenter förstod radianer. Akkoc refererar Fi (2003) i sin inledning och önskar studera radianer utifrån de resultat Fi presenterade.

I likhet med Fi finner Akkoc att begreppsbilden av radianer dominerades av deras begrepp av grader. Detta gav studenter en viss svårighet med att identifiera vad radianbegreppets förhållande med enhetscirkeln är. Studenter hade även svårt att acceptera synen av trigonometriska funktioner som funktioner från R → R där deltagarna krävde att domänen består av vinklar. Utöver detta menar Akkoc att lärarstudenter uppvisar två distinkta bilder av pi; pi som en vinkel i radianer samt pi som ett tal (Akkoc, 2008).

Akkoc fann även liknande resultat i en tidigare studie från 2006 tillsammans med Topçu m.fl. I detta fall dock inkluderades även praktiserande lärare. Urvalet bestod av 37 lärarstudenter samt 14 lärare i Turkiet. Topçu m.fl. samlade in deras begreppsbilder av radianer med stöd av en enkät samt intervjuade en delmängd av dessa deltagare (3 lärarstudenter, 1 lärare). Jag låter dem själva beskriva sitt resultat:

> The data from the questionnaire revealed that most of the participants’ concept images of radian was (sic) not rich enough and were dominated by their concept images of degree. Participants did not consider radian as a real number although the trigonometric functions that were given to them were explicitly defined on the set of real numbers.
>
> (Topçu m.fl., 2006, s.287).

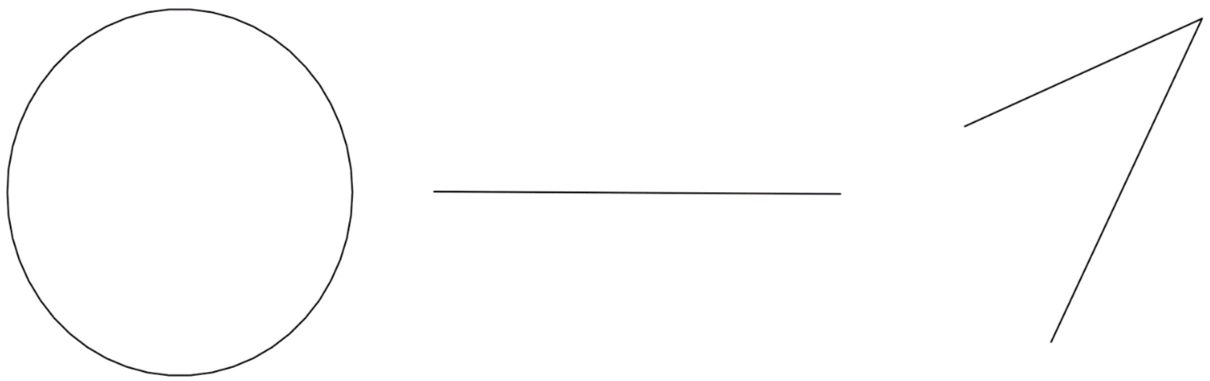
Lärarstudenter uppvisar svårigheter med vinkelbegreppet i allmänhet

Slutligen önskar jag lyfta fram Yigit (2014) som i sin avhandling utfört en kvalitativ studie där fyra lärarstudenter intervjuades med APOS-teorin som utgångspunkt. Syftet är att testa en hypotes, en genetisk nedbrytning, gentemot lärarstudenters kunskaper av trigonometriska förhållanden.
Yigit anser att det är vinkelmätningen som utgör roten till de problem studenter uppvisar inom trigonometri vilket författaren i fråga baserar på flertalet studier (Browning m.fl., 2008; Clements & Battista, 1989, 1990, 1992; Keiser, 2000, 2004; Mitchelmore & White, 1998, 2000). Yigit sammanfattar kärnan i deras material som att problematiken utgår från fyra punkter;

- Mångfacetterade definitioner av en vinkel.
- Beskriva vinklar.
- Mäta vinklar.
- Att se olika typer av vinklar såsom 0-linje vinklar (en vinkel som har 0 eller 360 grader), 1-linje vinkel (180 grader) samt 2-linje vinklar (en vinkel där båda strålarna för vinkeln är synliga) (Akkoc, 2008, s.17).

Jämför den första punkten med Tanguay och Venant (2016) som menade på att elever i yngre år ser vinklar som något mystiskt och främmande. Med den andra punkten menar Yigit både rotation och namngivning av vinklar vilket kan relateras till Brown (2005) som också framförde att yngre studenter på högstadiet har svårigheter med att markera vinklar. När det kommer till att mäta vinklar har flertalet författare även i denna översikt lyft fram samma påstående (Kendal & Stacey, 1997; Weber, 2005; Weber, Knott, & Evitts, 2008; Moore, 2013; Moore & LaForest, 2014[62]).

Den sista punkten är av en egen särart och jag har faktiskt inte hittat någon likartad presentation i litteraturen. Yigit (2014) redogör för ett par exempel från sin intervju av 2, 1 respektive 0-linje vinklar med stöd av GeoGebra (Yigit, 2014, s.82–89). Fundamentalt sett var intervjuns frågeställning en uppgift att identifiera vinklar, deras storlek samt lokalisering. Jag ger ett antal egenritade exempel av Yigits fall. Visserligen använde Yigit ännu konstigare figurer, såsom ett S eller en enkel punkt ". " (s. 88–89).



Figur 24. (t.v.) en 0-linje vinkel, (mitten) en 1-linje vinkel samt (t.h.) en 2-linje vinkel. Kan du se vinkeln?

I studien ber Yigit lärarstudenterna definiera en vinkel med deras egna ord. Överlag definierar studenterna det som ett avstånd mellan två skärande linjer. Yigit kodade detta som att studenterna såg det som områden mellan linjerna.

Yigit (2014) gör det till en av sina huvudpunkter att framföra hur lärarstudenterna har svårigheter med att visualisera vinkeln i 0-linjer samt 1-linjer.[63] Yigit skriver dock att studenternas färdigheter med 2-linje vinklar bör vara tillräckligt utvecklade för de material de ska undervisa i. I likhet med Brown (2005) finner Yigit att visualisering av rotationer är svårt. Yigit framför att detta troligen begränsar lärarstudenternas uppfattningar i enhetscirkeln, något som Fi (2003) fann i en tidigare studie.

Hur är det i Sverige?

Det finns en enda implikation från en svensk källa att liknande besvär existerar i en svensk kontext. Tovö och Ekström (2010) presenterade på matematikbiennalen en undersökning (okänt antal studenter) de analyserat utifrån en utökning av Browns modell. De önskade få deltagarna resonera kring huruvida deras "elever kan trigonometri". Frågeställningarna var utformade på ett sådant vis att de ombads ge så många tillvägagångssätt som möjligt. Deras resultat liknar Fis (2003) och Browns (2005) resultat där lärarstudenter i Tovö och Ekström (2010) oftast inte använder ett större antal representationer för att lösa problem. Deltagarna uppvisar även svårigheter med periodicitet och icke-injektiva funktioner. Detta är dock inte en "publikation" i någon mening. Denna källa agerar enbart som en referens för att implicera att ett liknande fall kan existera i Sverige.

[62] Dessa publikationer kommer beskrivas inom sinom tid.
[63] Jag kommer föra en diskussion om detta senare i kapitel 6.

7.1.3 Didaktiska förslag

Slutligen för detta delkapitel önskar jag som annonserat framföra ett antal didaktiska förslag som ska stödja elever med sinus, cosinus samt vinkelbegreppet. I grunden utgår förslagen från Gray och Talls (1994) idéer om "procept" samt resonemang med samvariation (Carlson m.fl., 2002). Det främsta målet är att koppla och relatera begrepp inom matematiken, vilket främst är ett av de största problemen som kan utläsas från litteraturen (Fi, 2003; Brown, 2005; Akkoc, 2008; Kamber & Takaci, 2018).

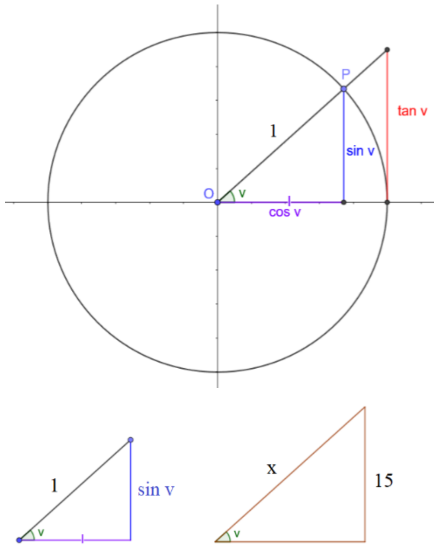
Vilken definition som är bäst lämpad att börja med

En frågeställning som har varit aktuell under längre tid är den angående huruvida det är bäst att inleda med att definiera sinus/cosinus med rätvinkliga trianglar eller enhetscirkeln. I detta avsnitt kommer jag presentera de centrala punkter jag har kunnat hitta som angår denna specifika frågeställning. Som nämnt i tidigare delar av översikten existerar det inte många komparativa (jämförande) studier. Det finns till och med författare som avsäger sig syftet att jämföra modeller (Brown, 2005). Emellertid är det ändå fallet att det faktum med existerar två artiklar som utför sådana jämförelser i just denna frågeställning. Jag inleder med rätvinkliga trianglar.

Utgå från rätvinkliga trianglar

I en experimentell studie från Australien har Kendal och Stacey (1997) valt ut åtta klasser från en skola och slumpmässigt allokerat dem egenskapade lektionsmaterial (20 st. på 45 min var) av varje metod[64]. Forskarna har kontrollerat för att klasserna har ungefär samma fördelning av förkunskaper med två test, ett med algebra samt ett med trigonometri.[65] Utöver detta har två lärare tilldelats en klass av vardera metoden av rena slumpen.

De har begränsat sig till att syftet med trigonometri vid denna nivå är att lösa för sidorna i en triangel. De två metoderna beskrivs av Kendal och Stacey på följande vis: med "ratio method" använder eleven de rätvinkliga definitionerna av de trigonometriska funktionerna för att relatera sidorna givet en viss vinkel. Sedan kan en elev via algebra finna och isolera önskade sidor. I praktiken är detta snarlikt den metod vi använder och lär ut i Sverige. Den andra metoden, "unit circle method" utgår istället från likformighet och enhetscirkeln. Sinus och cosinus definieras som den vertikala respektive horisontella delen av den referenstriangel som uppstår när en given triangel skalas ner/upp till enhetscirkeln. Detta uppnås genom att ställa upp referenstriangeln bredvid den givna triangeln (se figur 25). Genom att använda likformighet kan en elev slutligen ställa upp en ekvation mellan den okända sidan och referenstriangelns sidor (Kendal & Stacey, 1997, s.323–325).



Figur 25. Överst, hur de trigonometriska funktionerna definieras med enhetscirkeln. Nederst. En illustration av lösningsmetodens uppställning.

Kendal och Staceys resultat

Slutsatserna och resultaten Kendal och Stacey presenterar kan anses vara av stort intresse vid valet av metod. De två författarna kommer fram till via en envägs ANOVA att klasser som använder den rätvinkliga definitionen presterar bättre än den andra metoden med statistiskt signifikanta resultat ($F=17{,}79$; $p <0{,}001$). Forskarna har även analyserat resultaten på slutprovet i kursen och fann att den rätvinkliga metoden bibehålls bättre av eleverna (s.325–326). De lyfter även fram att medelvärdet för de lägst presterande som nyttjade den

[64] Där respektive metod benämns som "ratio method" och "unit circle method".
[65] Där i det senare fallet enbart fyra elever av 178 fick ett nollskilt resultat.

rätvinkliga definitionen (F-gruppen) var högre än medelvärdet för A-gruppen i enhetscirkeln metoden. Det går även utläsa att lärare 1 och 2 (som hade hand om båda metoderna) uppvisar samma mönster. Kendal och Stacey använder denna observation för att förkasta hypotesen att det är lärareffekter som påverkar resultaten.

Kendal och Stacey menar att den rätvinkliga definitionen erhålls av eleverna mer eller mindre som en minnesregel (SOHCAHTOA) av eleverna. Utöver detta skriver författarna att när det kommer till enhetscirkeln har eleverna överlag svårare att minnas definitionen. De anser att detta beror på svårigheter för elever att rita ut rätt referenstriangel givet en viss vinkel samt koppla detta till cirkeldiagrammet. Likande problem rapporterades av Brown (2005) med elever som orienterar trianglar felaktigt i både skala, riktning[66] och val av vinkel.

Den allra första meningen i slutsatsen gör ett minst sagt starkt påstående;

> This study has provided substantial evidence to suggest that the ratio method of teaching introductory trigonometry is a better choice for schools than the unit circle method. Students were better able to master the skills required and, with the greater success, came a greater improvement in attitude to the subject.
>
> (Kendal & Stacey, 1997, s.327)

Trots detta avslutar Kendal och Stacey med rekommendationen att introducera med enhetscirkeln men att snabbt koppla detta till de rätvinkliga trianglarna samt att nyttja deras definitioner och metoder för lösning av trianglar. Det bör nämnas att författarna utgår från en kontext där enhetscirkeln är standardmodellen, åtminstone under nittiotalet. Därmed kan rekommendationerna ha tagit detta i åtanke.

Utgå från enhetscirkeln

Den andra studien tar istället sin utgångspunkt från enhetscirkeln. Weber (2005) presenterar en studie av en experimentell design där han jämför två klasser på universitet (college), en med intervention (N=31) och en utan (N=41). Såsom författaren beskriver kontrollgruppen undervisas den av en erfaren lärare som utgår från en "traditionell utlärningsstil" med materialet rotat helt och hållet i en textbok. Klasserna kontrollerades för förkunskaper varav Weber fann att de var relativt lika. Studenterna fick efter 6 veckor i kursen ett icke-annonserat test varav Weber efter en analys av svaren valde ut fyra studenter ur varje grupp för djupintervju. Urvalet baserades på hur väl studenterna lyckades med testet.

Resultaten kan summeras som att den experimentella klassen hade signifikant bättre resultat än kontrollgruppen. Resultaten på testet var ca. 27% för kontrollgruppen rätt jämfört med 83% för experimentgruppen[67] (Weber, 2005, s.99–106). Med stöd av intervjuer av respektive grupp menar Weber att kontrollgruppen saknar en god förståelse av trigonometri (Weber, 2005, s.108). Weber vidareutvecklar detta resonemang med påståendet att hans resultat implicerar att traditionell undervisning ej är effektiv för att undervisa i trigonometri.

Jag behöver dock förtydliga Webers metod. Den experimentella designen som sådan är inte av så enkel art att den ena klassen utgår från en traditionell ordning medan den andra utgår från enhetscirkeln. Bakom allt detta finns även en teoretisk bakgrund baserat på Gray och Talls (1994) verk. Weber utgick från begreppet "procept" och utformade hela kursen utifrån idéen av att matematiska begrepp blir till via en

[66] Notera dock likt innan att i vissa fall är triangeln kongruent med den önskade referenstriangeln.
[67] Med 7 frågor totalt.

process, som i sin tur inkapslas (eng. encapsulation) till ett objekt via reflektion och repetition. Eleven kan sedan via ett symbolspråk visualisera ett begrepp som både en process och ett objekt. För att uppnå detta ändamål utgick Weber från en känsla av processtänk vid inledande diskussioner och beskriver i flera verk den grundläggande idéen (Weber, 2005; Weber, Knott, & Evitts 2008).

Vidare lyfte Weber fram ett specifikt tillvägagångssätt för att befästa sinus och cosinus: *via vinkelmätning*.

Webers resonemang

Weber anser att textböcker inom området normalt sett skippar ett viktigt steg i att koppla rätvinkliga trianglar och enhetscirkeln; att nyttja principer av vinkelmätning. Weber vidareutvecklar argumentet genom att ställa upp brister i traditionell undervisning. Studenter utan denna koppling och som ej utvecklat ett processtänk för de trigonometriska funktionerna kan ha svårighet att visualisera fall som ej är memorerade. Med andra ord ser studenterna sinus och cosinus som algoritmer som enbart kan tillämpas för vissa speciella fall av trianglar och enbart med viss kunskap tillgänglig (såsom ett diagram). (Weber, 2005; Weber, Knott, & Evitts 2008 s. 145–146). Weber[68] lyfter fram följande slutsats.

> The exercises they are asked to complete rarely requires a process understanding[69] of trigonometric operations; most simply require using a ratio conception of the trigonometric operations or applying algebraic techniques.
>
> (Weber, Knott, & Evitts, 2008, s.145)

,

Ett liknande argument lyfts även fram av Moore och LaForest (2014) i en artikel angående hur lärare och elever kan ta sig an trigonometri på ett alternativt sätt. Där drar författarna en slutsats från forskning (Thompson 2008, Bressoud 2010) att traditionella tillvägagångssätt och vinkelmätning är en av källorna till studenternas problem och besvär med trigonometri. Likande resonemang har förts fram av andra författare såsom Brown (2005). Kamber och Takaci (2018) lyfter också upp problematiken med att eleverna enbart memorerar reglerna och inte besitter en högre förståelse.

Själva principen bakom vinkelmätningar, alltså av hur "öppen" två strålar är och varför en gradskiva är ett passande verktyg för detta har frångått flertalet studenter enligt Moore och LaForest (2014) samt Weber (Weber, 2005; Weber, Knott, & Evitts, 2008). Målet är därmed att sinus och resterande trigonometriska funktioner ska kopplas ihop och analyseras som ett objekt och en process. Weber (Weber, Knott, & Evitts 2008, s. 146) samt Weber (2005) ger förslaget att koppla sinus till en geometrisk process;

---

[68] Varför skriver jag enbart Weber? Därför att det även är så själva arbetet ser ut. Om man faktiskt tar sig en titt i artikeln i fråga är det enbart Weber som lyfts fram som författare. Trots detta är Knott och Evitts med i referensen. De är då redaktörer för tidskriften i fråga (The Mathematics Teacher). Jag anser att det dock framgår att det är Webers åsikter som beskrivs i artikeln. Enbart Webers namn står som författare och lyfts fram i slutet av arbetet. Detta är standard för artiklar i Mathematics Teacher att alla författare beskrivs efter referenslistan. Arbetet i fråga är även en omskrivning av Webers tidigare arbete (2005) med mer didaktiska inslag. Slutligen används "jag" pronomen men inte "vi" i artikeln (Weber, Knott & Evitts, 2008).

Jag kommer ge den fulla referenser när jag refererar till arbetet men i löpande text kommer jag enbart nämna Weber då det är hans resonemang och slutsatser som lyfts fram. Det verkar även vara så artikeln (2008) är formulerad. Knott och Evitts nämns inte alls i artikeln utöver en sidokommentar.

[69] Jämför Gray och Tall (1994) och "procept". Där internaliseras en aktion först via en process och Weber menar därmed att eleverna inte har internaliserat det matematiska begreppet i fråga i någon mening. Snarare använder eleven andra begrepp för att lösa problemen. Weber kritiserar alltså utformningen av problemen i sig där eleverna ej ges möjlighet att internalisera sinus som en process.

Weber (2005) samt Moore och LaForest (2014) framhäver vikten av att ha ett kinestetiskt tillvägagångssätt i undervisningen. Deltagarna får en gradskiva samt en bild av enhetscirkeln och konstruerar vinkeln själv med materielen genom att dra en stråle som definierar en skärningspunkt med cirkeln. Med stöd av ett snällt graderat paper (säg varje steg är 1/10 av radien) eller linjaler finner deltagarna värdet för sinus respektive cosinus. Intentionen med att koppla en fysisk process till sinus och cosinus beskrivs av Weber, där han argumenterar på följande sätt;

> Recent research in mathematics education indicates that students have difficulty imagining the application of a process without the experience of actually applying it. Instead, students may best develop a deeper understanding of processes by first applying them and then reflecting on their actions.
>
> (Weber, Knott, & Evitts, 2008, s.146)

Detta resonemang kan kopplas till Piagets tankesätt (Piaget, 1971, s.14–40) och de teoretiska ramverken hos APOS-teorin (Dubinsky m.fl., 2014). I båda dessa ramverk beskriver man den reflekterande abstraktionen som grunden för att ett matematiskt begrepp ska formuleras och internaliseras hos individer.[70] Det finns dock flera delar som kan kännas igen från hur lektionerna i sig är strukturerade. Studenterna får processen beskriven för sig, får sedan arbeta med den med ett antal övningar för att sedan få frågor ställda till sig som ber dem att approximera svaret utan att faktiskt utföra processen.

Finns det något mer att säga om ämnet?

När det kommer till andra länder utöver Australien och USA har Delice (2003) i en komparativ studie mellan elever och klassrumsmiljöer i Storbritannien respektive Turkiet studerat lärarnas attityder och tankar kring trigonometri. I en del av arbetet kommer Delice in på fallet av vad för metod lärare i studien introducerar trigonometrin med. Följande citat sammanfattar materialet väl;

> Även om ingen av de intervjuade brittiska lärarna nämnde enhetscirkeln för (att introducera) trigonometri, så tyckte en tredjedel av TR-lärarna att den borde användas för att införa trigonometri.
>
> (Delice, 2003, s. 140–141)

Delice har även analyserat elevernas prestationer med stöd av 4 olika test, varav tre av dessa är specifikt om trigonometri och en av dem behandlar algebra i allmänhet. Genom att jämföra de tre testerna i trigonometrin finner Delice att elevernas metoder utgår mestadels från rätvinkliga trianglar genom att rita diagram. (s. 141).

Historiskt sett (Bressoud, 2010, Van Brummelen, 2009) kan det visserligen vara av intresse att nämna att den plana varianten av triangelgeometri utvecklades ur cirkeldefinitionen och inte tvärtom. Detta utgår från den himmelska sfären och dess projektion på planet av Grekerna samt andra antika civilisationer. Visserligen var de ursprungliga funktionerna inte av samma slag som de vi använder idag men en djupare diskussion av detta utelämnas.

---

[70] Visserligen skulle påståendet att forskningen är utförd ”nyligen” vara en aning problematisk i sådana fall, men möjligen ligger psykologisk forskning före den didaktiska.

Förslag till metodik

Vad för konkreta metoder skulle en lärare kunna använda i sin praxis? Dispositionen i denna del utgår från fyra arbeten som ger tillämpbara förslag till att förstärka förståelsen av sinus, cosinus, m.m. i relation till enhetscirkeln. Brown (2005) fann att elever i hennes studie inte hade kopplat ihop sinusfunktionens argument med dess graf. Utöver detta var det ingen deltagare som hade kopplat ihop alla tre av hennes representationsformer. Hon rekommenderar att rotationsvinkeln måste få ett större fokus, främst bör läraren beskriva på ett klart sätt var vinkeln utgår ifrån (positiva x-axeln) och hur rotationen blir till. Utöver detta anser Brown att lärare måste stödja elever med att koppla ihop alla representationsformer samt *undvika* minnesregler. Slutligen lyfter Brown fram att lärare visa mer omsorg med enheten i enhetscirkeln. (s. 244–245). Jag kommer presentera litteratur här som mer eller mindre svarar på dessa behov. Alla förslag kommer utgå från en idé av "rotationsvinkel" samt vinkelmätning i sig.

Utgå från vinkelmätning med gradskiva

Weber (Weber, 2005; Weber, Knott, & Evitts 2008) lektionsupplägg beskrevs i sin korthet i det tidigare kapitlet men kan fortfarande behöva förtydligas. Weber tar som tidigare nämnt sin utgångspunkt ur två av de teoretiska arbetena, "procept" från Gray och Tall (1994) samt kovarationellt resonemang (Carlson m.fl., 2002). Idéen är att använda en gradskiva för att mäta upp vinklar samt bågar. Låt eleverna mäta upp en vinkel med en gradskiva på ett ark med en cirkel (inte nödvändigtvis enhetscirkeln men det bör dock utgöra inledningen), sedan dra ett linjesegment som kopplar origo till ändpunkten (eng. Terminal point). Här introducerar man först enhetscirkelns definition och projicerar ändpunkten på x- och y-axeln för att erhålla cosinus och sinus för den uppmätta vinkeln.

Målet är att eleverna ska koppla en geometrisk process till sinus och cosinus som sedan kan kapslas in till ett objekt de kan symbolisera med en symbol (sin v, cos v). Detta utökas strax därefter till andra koncentriska trianglar och man visar på en familj av likformiga trianglar.

Moore och LaForest (2014) lyfter fram liknande kinestetiska aktioner med stöd av en gradskiva och en given illustrerad enhetscirkel. Författarna baserar sin diskurs utifrån en problematik man har observerat hos studenter med radianer som begrepp. Studenter ser oftast radianer enbart instrumentellt som ett alternativt sätt att skriva grader på. Detta kopplar Moore och LaForest till att studenter saknar en god idé av vinkelmätning i sig och problematiserar därmed de uppfattningar studenter har av vinkelmätning sedan tidigare.

Här använder man enhetscirkeln i kombination med fysiska verktyg för att koppla ihop processerna av att mäta vinklar och att mäta upp bågar. Moore och LaForest (2014) vill koppla ihop dessa begrepp med enhetscirkeln i syftet att förena begreppet av rotationsvinkel, alltså argumentet för de trigonometriska funktionerna i enhetscirkeln samt vinkelmätning. Med stöd av bågen för vinkelmätning anser författarna att studenter kommer ha lättare att lägga grunden för en relationell förståelse mellan vinkeln och respektive projektion på x- och y-axeln, dvs. sinus och cosinus. Utöver att använda gradskiva i kombination med enhetscirklar ger Moore och LaForest förslaget att använda radianer av en aning mer allmänna reella tal, m.a.o. inte bara $\pi/2, \pi/4, \ldots$ radianer. Jämför detta med Webers (2005) tillvägagångssätt som är snarlikt.

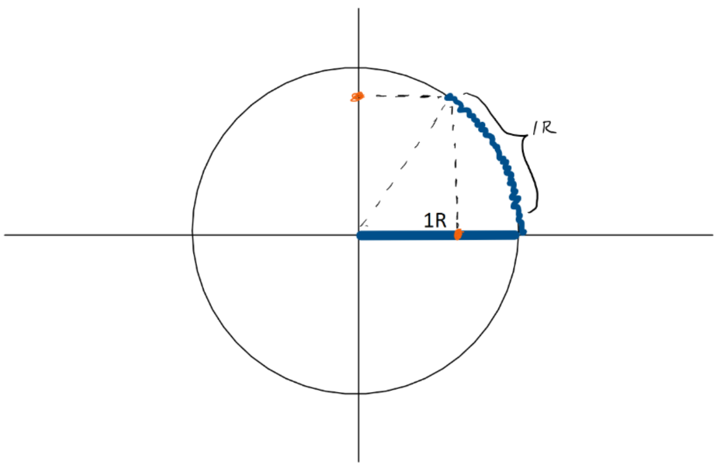
Utgå från mätning av bågen

Brown (2005) samt Akkoc (2008) har som tidigare nämnt att det föreligger en konceptuell utmaning för studenter med att förstå innebörden av enheten i enhetscirkeln. Akkoc (2008) skriver även om utmaningen med radianer och vinkelmätning. Utöver detta fann Akkoc en förekommande uppfattning hos lärarstudenter: de ville ej se trigonometriska funktioner som funktioner på $R \rightarrow R$. Akkoc ger ett förslag för att stödja studenter med begreppsliggörandet av sinus, cosinus likväl radianer. “In that sense, wrapping the number line onto the unit circle might be a useful metaphor to introduce trigonometric functions.” (Akkoc, 2008, s.876).

Tre källor diskuterar lösningar som fundamentalt sett är samma idé som Akkoc (2008) föreslår, dock med lite modifikation. Förslagen är baserade på båglängder och de vinklar de mäter upp. Studera följande definition av radian:

Definition. En radian är den vinkel som mäts upp i cirkelns centrum av en båge som är ekvivalent i längd med cirkelns radie.

Vissa författare tar sin utgångspunkt från denna definition och använder ***snören, “piprensare”***[71] och ***cirklar av olika radier***. Dessa studier ämnar ge förslag för metoder som hjälper elever se radien som en enhet för vinkelmätning.



Figur 26. Mät upp en radie i längd och böj den längs bågen.

Martinez-Planell och Cruz (2016) tar språng ur APOS-teorin och presenterar idéen på sidan 116. Här redogör författarna för ett tillvägagångssätt för att uppmuntra förståelsen av radien som en enhet. Deras utgångpunkt är från en genetisk nedbrytning de ställt upp och prövar på 11 studenter i Puerto Rico.

För att mäta upp vinklar använder man en “*piprensare*” eller snöre. Martinez-Planell och Cruz (2016) föreslår att ge eleverna ett koordinatsystem markerat med 1/10 av radien i varje steg. Låt eleverna mäta upp en önskad längd, såsom en radie i figuren. Låt sedan studenterna böja denna piprensare längs bågen och projicera koordinaten på x- respektive y-axeln. Här definierar författarna cosinus och sinus som projektionen av ändpunkten (eng. terminal point) på respektive koordinataxel. Notera här att de dock mäter i enheten radier! Martinez-Planell och Cruz hävdar att lärare bör ge studenterna ett reellt tal att mäta upp som ej är en “snäll” vinkel (såsom $\pi/4$ eller $\pi/6$). Detta ser Martinez-Planell och Cruz som en nödvändig konstruktion i deras genetiska nedbrytning. Utöver detta bör eleverna använda olika radier på sina cirklar och sedan jämföra dem med varandra.

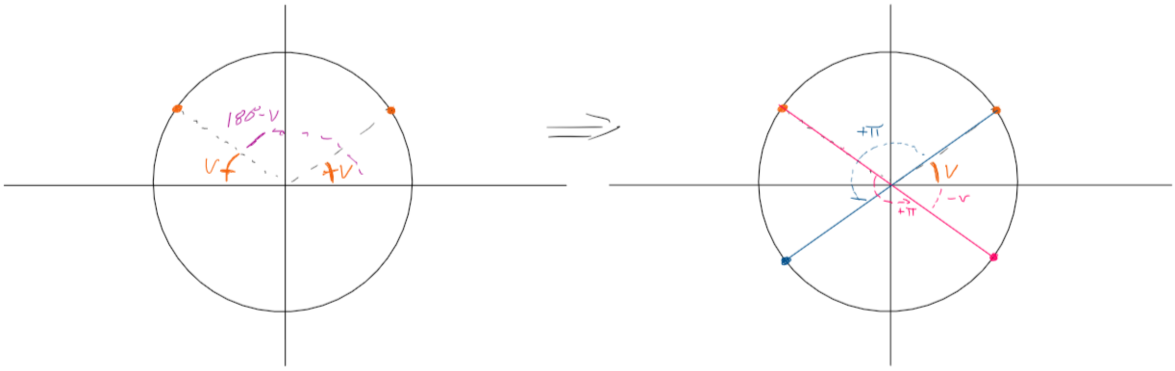
Slutmålet är att eleverna ska erhålla ett processtänk av sinus respektive cosinusfunktionen, där konstruktionen består av två processer: att svepa ett linjesegment kring en cirkel samt projicera ändpunktens koordinater på respektive axel.

[71] Om läsaren har studerat kemi är dessa de rengörings instrument man använder för att göra rent i tunna provrör och ställen som är svåra att komma åt.

Symmetrier syns i enhetscirkeln

Då författarna utgår från APOS-teori som sitt teoretiska ramverk förhåller sig resultaten mot en genetisk nedbrytning av vad det är för begrepp studenterna behöver ta till sig. Ett av dessa begrepp är en utökning av sambandet sin(180°-v) = sin(v) som de benämner med "circ process". (s.117).

De är dock inte ensamma om att presentera denna symmetri hos de trigonometriska funktionerna. Vi kan jämföra detta resultat och förslag med Brown (2005). Brown illustrerar samma symmetri som nödvändig för elever att internalisera men benämner det istället som "bowtie"-förhållandet (Brown, 2005, s.100). Brown utgår visserligen istället från vinklar som representationer för rotationer av punkter kring origo (s.94 - 96). I bilden nedan har jag ritat en motsvarande variant för dessa begrepp. Idéen är att utgå från symmetrin som uppvisas mellan en given vinkel och dess supplementärvinkel. Vad Brown (2005) och Martinez-Planell och Cruz (2016) presenterar är en utökning av resonemanget till samtliga kvadranter.



Figur 27. Exempel av en utökning av symmetrierna i enhetscirkeln.

Moore, LaForest och Kim (2012) redogör i en artikel redogör för liknande förslag som Martinez-Planell och Cruz (2016). I denna experimentella design har forskarna designat ett läroexperiment ämnat att stödja elevernas förståelse av radianbegreppet. Även här används radien som en enhet för att mäta bågen. De utökar dock upplägget genom att först ge ett antal introducerande övningar som leder in eleverna på att tänka på att konvertera enheter av längder. I detta fall använder de konkret tum och fot samt påhittade enheter. Eleven får använda dessa för att först finna antal enheter i linjesegment (staket) och sedan generalisera detta till cirkelbågar. Moore, LaForest och Kim använder denna process för att leda in eleverna i ett tankesätt som tillåter dem se radien som bara ytterligare en enhet. Efter detta är deras tillvägagångssätt relativt likt Martinez-Planell och Cruz (2016), dock över flera lektioner samt med gradskivor och algebraiska förhållanden.

Ett lektionsupplägg där elever bygger upp en definition av radian

Ytterligare ett exempel av lektionsupplägg finns hos Wolbert och Moss (2018) som har designat en lektion som ämnar hjälpa studenter med radianer. Bakgrunden är att en stor andel av framtida lärarstudenter har i tidigare studier och erfarenheter funnits sakna goda definitioner av en radian. Exempelvis lyfter Wolbert och Moss fram att av 24 lärarstudenter var det enbart två som gav den korrekta, formella definitionen. Likt andra källor skriver Wolbert och Moss att studenterna oftast resonera i termer av grader (s.274). Författarna har känt behovet av att konstruera ett lektionsupplägg för att studenter ska kunna ta till sig materialet på ett gott sätt.

Författarna inleder lektionen med en introduktion som ska föra elevernas tankar till olika enheter för mått. Wolbert och Moss föreslår längd, vikt, tid och volym för att sedan röra sig närmare begreppet grader och till slut en radian.

Upplägget är mer eller mindre att läraren låter eleverna hitta ett cirkulärt föremål i sin omgivning. Om inga sådana föremål existerar i närheten får läraren ha förberett material att dela ut. En viktig intention med uppgiften är att studenterna ej ska ha samma radie utan olika. Poängen som Wolbert och Moss lyfter fram är att befästa radianen som ett vinkelbegrepp och inte som en mängd av vanliga missuppfattnigar; en sektor, en sträcka på en cirkelbåge eller för den delen att 1 radian är 180 grader.

Det är av stor vikt enligt Wolbert och Moss att det finns en multipel av sex grupper. Wolbert och Moss ämnar då lyfta fram för eleverna att 6 radianer är nästan ett helt varv (2π radianer) samt att själva rotationen är oberoende av vad radien för föremålen var. Slutmålet är att finna en definition för en radian.

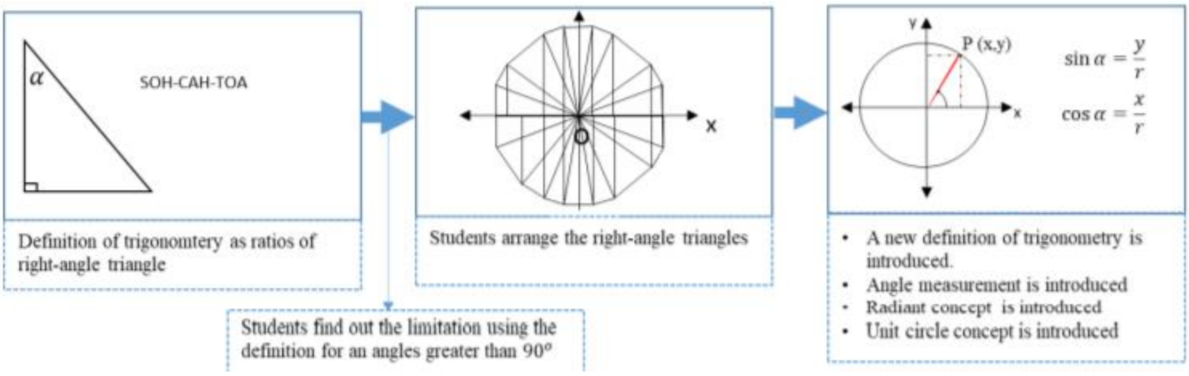
Låt eleverna finna cirkelns centrum och använd sedan ett snöre för att få ut en radie. Klipp av ett snöre med längden av 1 radie. Detta tillvägagångssätt är mycket likt Martinez-Planell och Cruz förslag (2016). Fokus ligger dock inte på att projicera ändpunkterna på koordinataxlarna utan att specifikt peka ut vad 1 radian motsvarar. Låt eleverna mäta upp en båge med sitt snöre och sedan koppla ihop ändpunkten, x-axeln och origo för att bilda en cirkelsektor.

Här föreslår Wolbert och Moss att låta eleverna klippa ut sektorerna och sedan jämföra dessa på egen hand, exempelvis att stapla dem eller lägga dem i en cirkel. De ger flera förslag på följdfrågor för läraren. Sammanfattningsvist är frågorna att eleverna ska jämföra sina sektorer, likheter och olikheter, samt resonera kring hur de kan mäta upp udda vinklar (2,5 radianer) och relatera radianer till grader.

Att koppla rätvinkliga trianglar och enhetscirkeln

Slutligen önskar jag inkludera ett lektionsupplägg från Maknun, Rosjanuardi och Jupri (2019). Forskarna utgår från ett urval av 33 indonesiska elever (ålder 15–16) där intentionen var att brygga gapet mellan trianglar och enhetscirkeln. Med andra ord ser jag deras material som en introduktion för enhetscirkeln. (Maknun, Rosjanuardi & Jupri, 2019 s.2). Maknun, Rosjanuardi och Jupri skriver om de förkunskaper som krävs för att tillgodogöra sig lektionen och essentiellt sett är de detsamma som för svensk skola. Eleverna ska sedan tidigare ha gått igenom definitionen av sinus och cosinus i den rätvinkliga triangeln.

Själva lektionsupplägget beskrivs av Maknun, Rosjanuardi och Jupri som ett grupparbete av lämplig storlek, där de använde 4–5 medlemmar. För att lättare kunna beskriva deras design bifogar jag en bild från Maknun, Rosjanuardi och Jupri arbete (s.3).



Figur 28. En bild som representerar lektionens upplägg. Artikeln är licenserad under Creative Commons (CC BY 3.0). (Maknun, Rosjanuardi & Jupri, 2019, s.3).

Maknun, Rosjanuardi och Jupri skriver att lärare ska inledningsvis försöka leda in eleverna på problemet med deras tidigare definition. Se att den enbart är giltig för trianglar där vinkeln α ligger mellan 0° och 90°. Författarna ger förslaget att ställa frågor som vad cos (90°) respektive sin (200°) är ekvivalent med (s. 2). Med detta menar Maknun, Rosjanuardi och Jupri att det uppstår ett behov av att generalisera sinus och cosinus på ett sådant sätt att den fungerar för alla vinklar.

Eleverna fick sedan själva klippa ut en mängd av egenritade rätvinkliga trianglar som alla har samma hypotenusa. Här föreslår Maknun, Rosjanuardi och Jupri att grupperna använder olika radier, såsom 4 respektive 5 cm. Intentionen med detta är att eleverna ska få insikten att cosinus respektive sinusvärdet för en given vinkel är oberoende av radien. De instruerades sedan att lägga trianglar med samma hypotenusa såsom mittenbilden i figur X illustrerar. Höjden blir y-värdet och basen blir ett x-värde.

> Then they were asked to cut the triangles then (sic) arranged them into cartesian (sic) plane such that the vertices of the α angles will touch each other and the sides adjacent to the right angle will look as vertical or horizontal segments only.
>
> (Maknun, Rosjanuardi & Jupri, 2019, s.4)

Om eleverna får besvär med denna process anser forskarna att läraren ska illustrera med ett exempel (s.4). Maknun, Rosjanuardi och Jupri hävdar att eleverna inte hade besvär att se att den resulterande figuren som uppstår vid ändpunkterna liknar en cirkel.

Här är författarna enligt mig en aning otydliga med nästa steg. Det framgår klart att eleverna ska kunna bestämma sinus respektive cosinus för vilken vinkel som helst genom att utgå från den positiva x-axeln och den klassiska definitionen för referenstriangeln. Jag tycker dock inte att det är lika tydligt om det är läraren själv som ger detta tips eller inte. I vilket fall ger läraren ett antal uppgifter där eleverna ska bestämma sinus respektive cosinus för vinklar lika med eller större än 90°. De föreslår sedan att en lärare ska låta eleverna jämföra varandras resultat med grupper som har en annan radie. I slutet av lektionen samlas gruppen in och det förs en diskussion kring resultaten, främst ska läraren försöka leda in diskussionen på att ett propert val av radie skulle vara 1.

Maknun, Rosjanuardi och Jupri skriver dock om att de själva upplevde besvär med gruppindelningen där de kunniga eleverna lotsade de andra i den grad att vissa elever ej blev delaktiga. Utifrån en del referenser ger författarna förslaget att en lärare kan dela upp arbetet åt eleverna på något vis. (s.5). Utöver detta verkade eleverna ha svårt att koppla denna introduktion till koordinatgeometri. Enligt Maknun, Rosjanuardi och Jupri kunde eleverna inte bestämma koordinater på rätt sätt där de blandade ihop x- respektive y koordinat eller inkluderade radien i sina koordinater.[72] Som en avslutande kommentar ber jag läsaren jämföra detta med de besvär som Brown (2005) rapporterade i sin avhandling hos “triangel elever”. Alltså, att elever ritade referenstrianglar fel i orientering, skala och vinkel.

[72] Visserligen skulle en lärare från denna utgångspunkt lätt kunna introducera polära koordinater.

7.1.4 Sammanfattning

I detta kapitel har jag framfört hur forskningen skriver om tre huvudsakliga teman.

- Elevernas definitioner av sinus och cosinus: där forskningen finner att eleverna ej har kopplat ihop alla de representationer som finns för trigonometriska begrepp. Brown (2005) identifierar att 3 huvudsakliga former av sinus existerar i inledande trigonometri, en riktad distanstolkning, en triangeltolkning samt en koordinattolkning. Dessa modeller inkluderar ibland rotationsvinkeln på rätt sätt med stöd av enhetscirkeln medan andra elever har svårt att placera vinkelargumentet för sinus rent visuellt sett. Utöver detta uppvisar vissa elever svårigheter med att placera trianglarna i enhetscirkeln, både i skala, riktning och vinkelargument.

  Vissa av dessa besvär återkommer även i högre årskurser samt i andra kulturer där studenter och elever som ej tillgodogjort sig materialet förlitar sig mer på algebra och minnesregler än trigonometri och geometri.
- Vinkelbegreppet och lärarstudenter (två teman i ett): Forskningen indikerar att själva roten till de besvär som förekommer i trigonometri egentligen utgår från ett antagande av vad en vinkel ens är. Hur elever mäter upp och tolkar vinklar är ett centralt tema för vissa forskare som visar att lärarstudenter uppvisar problem med att definiera en vinkel samt beskriva roller och värden hos trigonometriska begrepp (såsom enhetscirkeln).
- Fi (2003) fann att 14 lärarstudenter i USA med olika matematiska bakgrunder uppvisade besvär med samtliga delar av trigonometrin, men främst radianer, vinkelbegreppet samt funktionslära. Liknande resultat härleds av andra författare.
- Alla teman implicerar även att ”enheten” i enhetscirkeln gått förlorad hos de flesta studiedeltagarna. Forskarna hävdar att radian som en enhet utgör en nödvändig hörnsten för att trigonometrin ska internaliseras med förståelse för området. Enhetscirkeln behövs kopplas starkare till ett behov av att utöka den rätvinkliga definitionen.

Rekommendationer från forskningen för att lösa den fragmenterade synen som beskrivs är att utgå från grunderna med vinkelmätning och visualisering. Målet är att deltagarna ska erhålla och internalisera sinus och cosinus som en geometrisk process genom vinkelmätning med olika medel. Metodiken är att eleverna ska erhålla två processer för att konstruera sinus. Först en uppmätning av vinkeln och sedan en projektion av ändpunkten (eng. terminal point) på y-axeln. Detta görs med en gradskiva och en vinkel samt linjal eller med ett snällt koordinatsystem (ex. varje steg är 1/10 radie) och bågmätning. Den senare är klart kopplat till radianer. Det är rekommenderat att ej använda alltför snälla vinklar samt variera problemen.

Forskare framför även ett antal förslag för att koppla enhetscirkeln till rätvinkliga trianglar. Ett sådant exempel skulle vara att låta eleverna klippa ut trianglar med konstanta hypotenusor och lägga runt origo. Ytterligare ett förslag är att låta eleverna rita upp koncentriska cirklar och en stråle. Målet är att visa att de trianglar som uppkommer med projektion av strålens skärningspunkter med cirklarna ger likformiga trianglar, som därmed alla har samma förhållande och därmed samma sinusvärden. På detta sätt menar forskningen att en lärare kan fånga in enheten i enhetscirkeln.

Avslutningsvis finns det litteratur som hävdar att rätvinkliga trianglar är bättre att introducera med medan andra hävdar enhetscirkeln. Gemensamt har de dock att undervisningen ska utgå från ett processtänk för att lägga grunden för förståelsen.

7.2 Memorering och digitala hjälpmedel

Memorering har, på gott och ont, en roll att spela i trigonometri (och likväl matematiken överlag). Inom detta kapitel kommer jag ej framlägga argument för eller emot memorering inom matematiken utan snarare lyfta fram de problem som kan uppstå i den processen. Utöver detta kommer jag även behandla rollen av digitala hjälpmedel i detta kapitel och hur dessa kan användas för att vidare bygga på individers uppfattningar av trigonometri.

7.2.1 Memorering

Memorering har en viss omtvistad roll i litteraturen där vissa förespråkar för den, andra ser den som ett nödvändigt "ont" och vissa vill minimera den i den grad som går. När det kommer till memorering och dess roll har dock ett antal författare problematisera begreppet i den litteratur jag inkluderat. Brown (2005) har som tidigare nämnt gett rekommendationer av att undvika minnesregler och istället koncentrera sig på procedurer. Hon baserar detta på att trots minnesreglerna utför över hälften av deltagarna fel med tecken. Brown anser att enhetscirkeln inkapslar tecknet bättre än minnesreglerna gör.

Kamber och Takaci (2018) har också lite att tillägga angående memorering. Deras text kritiserar memorering som ett fenomen dock utifrån premissen att inlärningen stannar där. På sidorna 166–167 samt 173–174 beskriver Kamber och Takaci att vissa formler och identiteter enbart memoreras av eleverna. I vissa fall är detta till den grad att eleverna till och med ser identiteterna som definitioner. Exempelvis svarade fyra av elva elever att trigonometriska ettan är sann "på grund av definitionen säger att den är det" (s. 166).

Weber (2005) fann i intervjuer med studenter som deltar i en "traditionell undervisningsram" på högskolan att problem i läroboken inte kräver ett processtänk utan kan avklaras med enbart algebraiska manipulationer. Weber hade intervjuat sin kontrollgrupp och funnit att dessa studenter hade svårt med att visualisera sinusvärden de ej memorerat. Här följer två citat från Webers protokoll som beskriver en students resonemang kring sinusfunktionen.

> I: Describe sin x for me in your own words.
>
> Steve: To find sine, it would depend on the problem that was given to me. If I was given a triangle, I would divide y and r. If I were given one of the special angles, like 30˚, 45˚, or 60˚, I would have this number memorised. There are other problems which can be solved by reference angles, or using formulas, like sin θ + cos θ = 1[73] [sic]. How you find the answer depends on how the problem is worded.
>
> Steve: I know that sine is y over r. I would need to see a triangle and know what y and r are to answer this question.
>
> I: Even if you didn't have this triangle, could you try to make a guess at what sin 170˚ would be?
>
> Steve: I don't… I would need the triangle. Maybe if you told me what some other value of sin would be, or like what cos 170˚ would

[73] Det var eleven som menade att detta var sambandet, inte en felskrivning hos Weber.

> be, I could find what sine is. Otherwise, I would need to use
> a calculator.
>
> (Weber, 2005, s.102)

Weber hävdar att eleverna i hans kontrollgrupp ej hade goda kunskaper inom trigonometri, vilket han kopplar till memorering samt en brist av processtänk inom undervisningen.

7.2.2 Miniräknarens roll

Miniräknaren har på samma sätt som memorering en viss omtvistad roll. Dessvärre finner jag att det inte är många studier som specifikt inriktad sig på att finna samband eller förklarningsmönster för hur miniräknaren påverkar elevernas uppfattningar av trigonometri. Weber (Weber, 2005; Weber, Knott, & Evitts, 2008) kritiserar miniräknare utifrån idéen att en individ som förlitar sig för mycket på miniräknaren kan vara inkapabel till att visualisera de trigonometriska funktionerna som en process. Med Webers egna exempel av en fallstudie (N=31) där han intervjuade högskolestudenter som genomgått en traditionell undervisning. Dessa studenter kunde ej förklara eller visualisera hur de skulle gå tillväga för att finna sinus 170° utan krävde antingen att få tillgång till hur referenstriangeln i fråga ser ut eller en miniräknare (s.146). Såsom det lyftes fram i förra avsnittets citat anser Weber att eleverna ser de trigonometriska funktionerna som algoritmer. Dessa algoritmer kan enbart beräknas med stöd av andra medel och är ej en internaliserad bild av en process.

Miniräknaren ger dock bättre resultat på proven

Miniräknaren är dock ej nödvändigtvis helt negativt för undervisningen. I alla fall om läraren är intresserad av högre resultat på proven. Det finns litteratur som belägger att miniräknaren ger bättre resultat på examinationer med statistiskt signifikanta resultat. En rapport gjord av Close, Oldham, Surgenor, Shiel, Dooley och O'Leary (2008) undersökte hur tillgången på miniräknare påverkade resultaten av examinationer i den irländska skolan. Detta utgör en del av en rapport som utförts under flera år. Urvalet av skolor var i praktiken dragen från hela landet men forskarna önskade efterlikna tidigare studier och delade därmed in skolorna i strata som efter slumpmässig dragning i varje strata försäkrade den önskade representationen. I slutändan kunde forskarna få tag i totalt 73 skolor som var intresserade av att delta. Av dessa skolor gjorde författarna sedan ett slumpmässigt urval av elever vilket gav dem ett urval av totalt 1459 elever. (s.31–37).

Med stöd av flertalet tester, varav vissa grupper fick ha miniräknare och andra fick vara utan kunde forskarna ge statistiskt signifikant stöd för att tillgång till miniräknare ger ett bättre resultat. (s. 111–112). Detta arbete innehåller klart mycket mer än detta men jag väljer att utesluta dessa resultat från denna litteraturöversikt på grund av att jag anser att dessa resultat är en aning för specifika för Irland i sig.

Attityder kring miniräknaren varierar mellan länder

Beroende på vilket land man utgår från har vi dock olika klassrums kulturer. Delice (2003) presenterar i en mindre del av sin avhandling ett antal intervjuer med lärare från Storbritannien respektive Turkiet. På sidorna 139–140 beskriver lärarna deras tankar kring miniräknare. I Storbritannien används miniräknare likt Sverige som ett hjälpmedel för att finna värdet av trigonometriska funktioner. Däremot har turkiska lärare en helt annan filosofi där miniräknaren är totalt förbjuden men istället använder lärarna enbart speciella vinklar såsom $30°, 45°, 60°$. (Delice, 2003, s.223). Jämfört detta med Weber (Weber, Knott, & Evitts, 2008) samt Martinez-Planell och Cruz (2016) där den förstnämnda var kritisk till miniräknarens roll utan ett internaliserat processtänk och de senare hävdar att eleverna måste arbeta med vinklar som inte är alltför snälla.

7.2.3 Didaktiska förslag: digitala hjälpmedel

Det är av intresse att behandla mer allmänna verktyg än miniräknare. Meningen med detta är att presentera ett alternativ didaktiskt val till miniräknaren som kan komma att ge en mer dynamisk och integrerad vy inom trigonometrin. Med dessa dynamiska program kan lärare vidare befästa de koncept som de har behandlat innan och utöka dessa, såsom de är beskrivna av Martinez-Planell och Cruz (2016), Weber (2005) samt Wolbert och Moss (2018), Viss teknologi kan hjälpa eleverna i samtliga steg i sitt matematiserande!

Vad är ”digitala hjälpmedel”?

Ett förtydligande är på sin plats angående vad det är jag menar med digitala hjälpmedel. I denna översikt har jag begränsat mig till två medel, miniräknare samt datorer och program/appar. Detta täcker inte nödvändigtvis alla medel som skulle kunna inkluderas i benämningen “digitala hjälpmedel”. Valet av att begränsa sig till datorer och program är baserat främst på vilka studier som finns tillgängliga. Det är dock även av stort intresse att specifikt presentera detta material då de kan nyttjas för att stödja elever i att utveckla en mångfacetterad tankeverksamhet kring matematiska begrepp.

Flera forskare har studerat hur lärare kan använda digitala hjälpmedel samt vilka effekter dessa har inom flertalet områden inom matematikutbildning. Faktum är att specifikt inom området trigonometri skulle det finnas tillräckligt många studier för en egen litteraturöversikt. Här kommer jag presentera ett urval av fem artiklar som alla använder interaktiva. Syftet med programmen är att ge stöd med visualisering eller problemlösning.

Ett program som ger feedback vid varje steg

Ett av de flertalet projekt som är under utveckling är program som kan till viss del stödja elever i deras ansatser att lösa problem. Sander och Heiß (2014) presenterar i sin studie ett flertal program varav två av dessa kan ge elever stöd, steg för steg, i sina försök att ta sig an området. Studien är en experimentell design på 101 elever där syftet är att nyansera ett tidigare forskningsresultat; “Ett interaktivt program är bättre än ett icke-interaktivt”. I detta fall vill författarna bryta ner frågan i huruvida det är kognitiva konflikter som utgör grunden för hur effektivt ett program är.

Studien utgår från en teori av kognitiv konflikt där de likt det teoretiska ramverket i kapitel 2 önskar testa huruvida kognitiva konflikter ger positiva läroeffekter under vissa premisser. Dessa förutsättningar problematiserar Sander och Heiß utifrån elevers motivation och klassrumsklimat. Alltså, för att kognitiva konflikter ska vara av något värde behöver det användas som en positiv kraft att motivera eleven att söka efter att förstå. I Piagets terminologi skulle detta kunna uttryckas som att en individ har en intention att återställa jämvikt (eng. equilibrium).

Sander och Heiß har tre program redo att användas av 101 realskola elever i åldrarna 16 till 17. De delades in i tre grupper och kontrollerades för att ha samma fördelning av kunskap vilket forskarna bekräftade med ett test. Sander och Heiß testade för resultat med ett test direkt efter experimentet samt 6 veckor efter tillfället med ett till test.

De tre program som lyfts fram har egna benämningar i artikeln och jag kommer välja att använda samma notation som forskarna i fråga gör.

CG: Program-kontrollerad, icke-interaktiv version

Detta program har en knapp som låter elever ta sig en titt på en presentation som förklarar hur de kan gå tillväga för att lösa uppgifter som presenteras för dem.

EG1: Elevkontrollerad, interaktiv version 1
Denna version kontrolleras av elever själva och den demonstrerar aldrig tillvägagångssätt för uppgifter. Eleverna får själva konstruera diagram som programmet ger feedback på huruvida dessa är korrekta eller inte. När eleverna arbetar med en uppgift kan de få "hjälp" med vissa steg om de önskar, dock ej aldrig hela lösningen i ett slag. Sander och Heiß skriver att programmet inleder med uppgifter om rätvinkliga trianglar för att sedan röra sig in i mer slumpmässiga trianglar att lösa.

EG2: Elevkontrollerad, interaktiv version 2
Densamma som version 1 med ett undantag: elever får tips *inför* varje uppgift. Dessa tips innehåller kärnan i hela lösningen.

Sander och Heiß resultat visar att direkt efter interventionen fanns det positiva läroeffekter av alla modeller som var statistiskt signifikanta (två-faktor ANOVA, F (2,91) = 3,33, p <0,05, $\eta^2 = 0.03$). Dock var inte grupperna jämfört med varandra statistiskt signifikanta för detta första test. Enligt Sander och Heiß är det högpresterande elever som drar mest nytta av EG1. Sex veckor senare dock fick dock EG1 gruppen signifikant bättre resultat än de andra grupperna (F (2, 84) = 4,75, p <0,05, η^2 = .10) med ingen interaktionseffekt. (s. 57). Det rapporterades ingen signifikant skillnad mellan de två andra programmen. Sander och Heiß drar slutsatsen att program baserade på kognitiva konflikter är bättre än de andra programmen för långtidseffekter.

En intressant slutsats som Sander och Heiß framför är att ett program som aktivt ger lösningen till elever presterar inte lika bra som ett som enbart ger kritiska tips eller stöd med huruvida konstruktionerna är giltiga eller inte under *en längre tid*. Detta är en aktuell fråga i nuläget givet att ett antal appar finns på marknaden (Albert, PhotoMath, m.m.) som mer eller mindre kan organisera men även lösa vissa uppgifter i sin helhet. [74]

Vad kan vi få utav detta?
En presentation av hela lösningen är ej nödvändigtvis den bästa för långtidseffekter. Om elever ska använda dessa medel uppnår de inte lika bra resultat som program där eleverna måste kämpa på egen hand. Visserligen lyfter författarna fram att de program som försöker ge upphov till kognitiva konflikter inte garanterar ett bättre resultat. Sander och Heiß har däremot kunnat visa på att eleverna med motivation samt en viss grad av förförståelse uppvisar mer långtgående positiva effekter av att ta sig an matematiken på egen hand med mindre stöd (EG1). EG1 redovisar då bättre resultat under en sexveckorsperiod än de resterande programmen (Sander och Heiß, 2014, s.57). Sander och Heiß ger oss därmed stöd i att säga att det är åtminstone bättre att eleverna först försöker på egen hand skapa en lösning än att de letar upp en app som löser hela problemet för dem. Åtminstone om eleverna har tillgång till vissa förkunskaper.

Digitala hjälpmedel och sagoberättande
Doug och Schmidt (2010) presenterar i en artikel från the Mathematics Teacher ett tillvägagångssätt de använt under sina lektioner för att aktivera eleverna som matematiserande individer. Eleverna delades in i

[74] Att lärare måste möta dessa utmaningar med appar och program som konstant blir mer avancerade, komplexa och sofistikerade är en diskussion i sig som det skulle gå att skriva en hel bok om men här väljer jag att sätta stopp. Jag nämner dem enbart och inget mer än det.

grupper av 2–3 elever och fick i uppgift att skapa ett verklighetsanknutet, trigonometriskt problem. Det som förväntades av eleverna var att de skulle välja en situation som kan lösas med trigonometri för att sedan göra en film av detta med iMovie. Eleverna kunde själva välja om de ville filma eller klippa in med bilder. Kravet var att de skulle presentera problemet och sedan lösa det i filmen med någon berättarröst i bakgrunden.[75]

Med denna metod kunde eleverna enligt Doug och Schmidt själva sätta matematiken in i en kontext och därmed finna ett praktiskt värde av innehållet. Utöver detta har författarna även presenterat en statistisk inferens av sina resultat som visar att det existerar en statistiskt signifikant skillnad av resultaten på ett test före respektive efter projektet ($t = 2{,}528$, $p = .012$). Detta test innehöll tre ordproblem likt de trigonometriska historier som eleverna presenterade.

Doug och Schmidt lyfter även fram elevernas synpunkter i sin text. Eleverna uppskattade att arbeta i grupper med ett projekt som innehöll digital teknik, något som de upplevde de var bra på. Det som eleverna upplevde var svårt var att komma på ett fall och problemformulering som “kunde representeras med en bild” (s. 300).

Det fanns svårigheter med utförandet av lektionen där Doug och Schmidt lyfter fram besvär med utrymme, samt att försäkra att varje elev hade tillgång till nödvändig teknologi. (s. 298–299). Eleverna i detta fall hade redan genomgått dataklasser som gett dem de färdigheter de behöver för att använda iMovie. Detta kan dock inte vara en garanti i vilken given klass som helst utan bör alltid relateras till klassrummets förutsättningar.

Som stöd för att utveckla en dynamisk syn

Här önskar jag presentera fyra artiklar som ger oss en implikation av att dynamiska program kan ge lärare en effektiv metod för att förbättra elevernas uppfattningar av trigonometri. Jag vill även påpeka att jag upplever detta område som en av de större delarna av nutida forskning inom trigonometri. Faktum är skulle vem som helst kunna göra ett helt arbete bara på hur dessa dynamiska program kan tillämpas inom trigonometri.

Här presenterar jag främst Blackett och Tall[76] (1991) som har studerat effekten av att använda dynamiska program för att koppla numeriska och grafiska representationer av de trigonometriska funktionerna. Artikeln som sådan är egentligen en vidare specifikation av två tidigare arbeten av Tall där syftet med denna artikel (Blackett & Tall, 1991) är att vidare bekräfta följande hypotes: att med stöd av ett interaktivt datorprogram för undervisning kommer den största förbättringen ske hos flickor. I tidigare studier har Tall erhållit resultat som redan implicerar att ett interaktivt datorprogram är överlag bättre än traditionell undervisning. Som en konsekvens av studierna upptäckte Tall ett mönster där flickor uppvisade en större förbättring av sina resultat än pojkar.
Studien beskriver Blackett och Tall (1991) som en experimentell design där forskarna har samlat ihop 4 grupper totalt som i sin tur består av en interventionsgrupp samt en kontrollgrupp. Storlekarna på dessa antog flera olika värden men överlag låg inom spannet (12 - 29). Urvalet bestod av totalt 173 elever från 14–15 åringar från två brittiska skolor. För att garantera att grupperna var relativt homogena i sin kunskapsfördelning utfördes ett förtest som fann att det inte existerade en statistiskt signifikant skillnad mellan grupperna (s.3).

[75] Tänk likt Mathologer eller Numperphile på Youtube.
[76] Samma Tall som i kapitel 3: teoretiska ramverk.

Alla grupper hade 4 lektioner på 70 minuter respektive 4 lektioner med 35 minuter i anspråk där experimentet pågick under en tvåveckorsperiod. Direkt efter utförde forskarna ett test och sedan ytterligare ett test 8 veckor efter.

Programmet liknar GeoGebra[77] i den mening att elever själva kan kontrollera och ändra längder, positioner av punkter, vinklar samt rotera figurer. Blackett och Tall hävdar att programmet och upplägget är skapat på ett sådant sätt att det "ger eleverna möjlighet att utforska sambanden mellan numeriska och geometriska data på ett interaktivt sätt" (s.4). Författarna lyfter själva fram hur elever tabellerade värden av cosinus och sinus för en given vinkel när de konstant ökar vinkeln i en rätvinklig triangel med en given vinkel. Detta kunde även illustreras och kopplas till de grafer eleverna kunde rita med hjälp av tabellerna. Författarna menar att detta ger en koppling mellan de tabellerade värdena till sin grafiska representation.

Lärarens roll anser Blackett och Tall vara att belysa viktiga och essentiella idéer:

> The teacher needs to act as an organizing agent, focussing the pupil on the important ideas, then encouraging pupil interaction with the software to enable them to make personal constructs of the interrelationship of the mathematical ideas.
> (Blackett & Tall, 1991, s. 3).

Programmet agerar enligt författarna som ett verktyg som hanterar svåra och utdragna beräkningar, vilket ur Blackett och Talls mening tillåter "läraren demonstrera och eleverna att utforska" (s. 3).

Blackett och Tall (1991) fann först att den experimentella gruppen statistiskt signifikant ($p < 0,05$) bättre än kontrollgrupperna på båda eftertesterna (s.6). Resultaten delades även in utefter pojkar och flickor vilket efter analys bekräftade hypotesen: flickor förbättras överlag mer än pojkar i studien med stöd av visuella, interaktiva program. Här bör jag även nämna att ingen sådan statistiskt signifikant skillnad fanns mellan pojkar och flickor i kontrollgrupperna.

Vidare belägg för dynamiska programs användbarhet

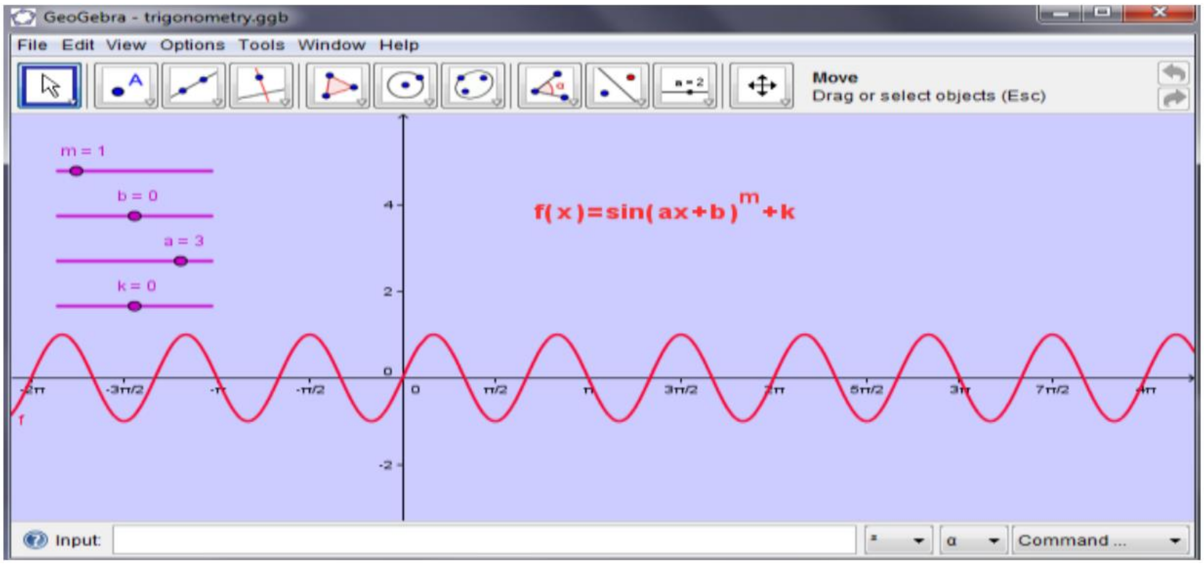
Jag har även funnit vidare stöd för hypotesen att dynamiska program ger en bättre inlärning jämfört med traditionell undervisning.

Zengin, Furkan och Kutluca (2011) utförde en undersökning med experimentell design likt den som Blackett och Tall (1991) utförde, dock bestod deras metodik av ett förtest och enbart ett eftertest samt en annan period (5 veckor). Urvalet bestod av 15-åriga elever (N=51) från ett högstadie i Diyarbakır (den tredje största staden i Turkiet, ca. 3h med bil från närmaste stad i Syrien). 25 av deltagarna valdes ut som experimentell grupp och 26 elever som kontrollgrupp. Författarna kontrollerade att gruppernas kunskaper för ungefär densamma vilket bekräftades.

Processen som sådan beskrivs kortfattat av Zengin, Furkan och Kutluca som att den experimentella gruppen tog del av 12 GeoGebra aktiviteter under en femveckorsperiod. Designen av dessa är inte helt klara men den grundläggande idéen såsom författarna uttrycker det är att eleverna ska få en mer "dynamisk, konkret och visuell" bild av trigonometri (s. 185). Jag bifogar här ett exempel som Zengin m.fl. presenterar:

---

[77] Notera att GeoGebra inte hade skapats än. GeoGebra skapades först 2001 av Markus Hohenwarter, 10 år efter denna studie.



Figur 29. En bild av ett exempel från Zengin, Furkan och Kutluca (2011, s. 185). Licenserad under Creative Commons (CC BY-NC-ND 3.0).

Denna bild illustrerar visserligen en sinusfunktion men idéen är densamma oberoende av vad innehållet är. Läraren skapar en miljö där eleverna ska testa hur ändringar i parametrarna påverkar utseendet för funktionen. Notera här att den konstruktion som lyfts fram redan är färdigställd av läraren och det är inte elevernas arbete att själva skapa konstruktionen. Detta kan en lärare välja att ändra hur den vill men överlag vill Zengin m.fl. utgå från att GeoGebra ska agera som en organisatör av kunskapen och läraren ska påpeka viktiga aspekter (jämför Blackett & Tall, 1991).

Resultatmässigt sett uppvisade båda grupperna en statistiskt signifikant skillnad mellan sina förtester och eftertester, vilket innebär att traditionell undervisning och den experimentella designen hade en observerbar effekt i denna studie. Författarna kunde även visa att den experimentella gruppen hade en statistiskt signifikant större förbättring än kontrollgruppen vilket de fann med ett t-test ($t = 5{,}43$, $p < 0{,}01$). Zengin, Furkan och Kutluca sluter sig därmed till att GeoGebra som supplement till undervisning ger elever en bättre möjlighet till att tillgodogöra sig materialet än kontrollgruppen i denna studie.

Programmen kan förbättra elevers attityder

Sander och Heiß (2014) jämförde även vilka känslor elever upplevde under tester genom att använda en enkät. Överlag visade det sig att CG1, den icke-interaktiva programkontrollerade versionen gav störst ”glädje” (eng. joy). Däremot var EG1 den modell som gav mest negativa känslor, såsom ”frustration” och ”missnöje” (s. 62). Trots detta har EG1 modellen varit den som gav bäst långtidseffekter.

Den sista studien studerar en liknande frågeställning som innan men begränsar sig till ett enda tillfälle där elever har två tester att utföra, ett utan stöd och sedan ett med ett dynamiskt online program (såsom Geometer Sketchpad eller GeoGebra). Utöver detta studerar de elevers åsikter kring program som GeoGebra vilket jag önskar ta upp som ett sista moment.

Naidoo och Govender (2014) utförde en fallstudie där de jämförde hur väl elever (N=25) kunde hantera ett antal trigonometriska frågeställningar beroende på tillgång till ett dynamiskt online program. De utförde sedan en semistrukturerad intervju med fem slumpmässiga deltagare där Naidoo och Govender undersökte elevernas åsikter och attityder av de dynamiska online programmet.

Resultatet av studien finner att elever presterar bättre med stöd av GeoGebra (91%) jämfört med enbart papper och penna (70,3%). Naidoo och Govender menar att programmet avlastade eleverna från komplicerade beräkningar och skiftade därmed fokus till mer konceptuella egenskaper hos innehållet. För övrigt hävdar Naidoo och Govender att "GeoGebra ger direkt feedback till eleverna" (s.8). Slutligen lyfte Naidoo och Govender fram att eleverna själva upplevde en ökad motivation och upplever att de lär sig bättre när de kan få en visuell bild av fallet som de kan interagera med. Eleverna var överlag positiva till visualiseringsstödet, där eleverna upplevde att de har lättare att se mönster och samband. (s.7–8).

7.2.4 Sammanfattning

Detta delkapitel har behandlar i huvudsak tre teman, memorering, miniräknarens roll i trigonometri samt digitala hjälpmedel. Dessa är de punkter jag önskar lyfta fram som kärnan i denna del:

- Forskare hävdar på att memorering är en alltför vanlig strategi hos eleverna, dvs. eleverna förskaffar sig inte en förståelse för sinus som begrepp. Exempel på detta är studier som visar att eleverna faller tillbaka på algebraiska regler samt minnesregler för att lösa trigonometriska problem.

- Miniräknaren har en omtvistad roll i klassrummet beroende på vilken kultur en studie är situerad i. Weber (Weber, Knott, & Evitts, 2008) hävdar att miniräknare ej utvecklar en processförståelse[78] (Gray & Tall 1994) hos eleverna utan snarare lägger grunden för sinus som en algoritm som enbart miniräknaren kan hantera. Miniräknare har dock en positiv effekt på resultaten.

- Digitala hjälpmedel kan användas för att hjälpa eleven lägga grunden för ett processtänk samt visualisera dessa processer. Beroende på lektionsupplägget kan syftet vara att erhålla en förståelse för radianer, för sinus/cosinus som begrepp eller funktion (elevkontrollerade parametrar) eller enheten i enhetscirkeln.

- Det existerar studier som visar att program som presenterar hela lösningar ej är lika effektiva som de som enbart ger delvisa lösningar eller stöd under processen. Detta görs dock under antagandet att eleven motiveras av kognitiva konflikter. Utöver detta har Blackett och Tall (1991) visat att det existerar en positiv effekt av att undervisa i trigonometri med dynamiska program jämfört med traditionell undervisning. Främst flickor fick störst positiv effekt av ett sådant tillvägagångssätt.

- Ytterligare en variation på undervisningen är att en lärare kan låta eleverna själva skapa en problemsituation och presentera för klassen med en inspelad film.

- Slutligen finns det studier som visat att elever överlag har en positiv attityd till användningen av dynamiska hjälpmedel.

[78] Med vilket Weber menar att eleverna inte kan visualisera sinus som en geometrisk process. Detta utgår från Gray och Talls arbete med "procept". Vad Weber anser är att eleverna saknar en internaliserad process för att visualisera sinus av en viss vinkel.

7.3 Algebra och trigonometri

Ytterligare en problematik jag har utvunnit från litteraturen är den om elevernas begreppsbilder och förståelse av trigonometriska identiteter och samband. Här hade jag önskat att det var möjligt att presentera en mer varierad och nyanserad bild av de utmaningar elever möter. Dessvärre är det ett faktum att denna del av trigonometrin inte hade många studier att ta del av. Totalt sett har jag funnit 4 artiklar som skulle kunna kategoriseras att i någon mån behandlar snittet av algebra och trigonometri. Tre av dessa har det huvudsakligen lösning av ekvationer eller algebraiska manipulationer som sitt studium, dock faller den sista studien in på området som en sidoeffekt av enkätsvar.

7.3.1 Studier inom Algebra och trigonometri

Här väljer jag att inleda med en avhandling som avlades 2003 av Delice, en komparativ studie inom elevers förståelse i trigonometri mellan Storbritannien och Turkiet för 16–18 åringar samt lärarpraxis och klassrums kulturer i respektive land. Delice jämför flera aspekter som inte är relevanta för denna litteraturöversikt, såsom ämnesplanerna för respektive land. Här väljer jag att inkludera enbart de delar som behandlar förenkling av trigonometriska uttryck (ordproblem, visuella problem samt algebraproblem) och har därmed exkluderat vissa aspekter av jämförelser av kulturer samt ämnesplaner.

Delice (2003) har två frågeställningar, som visserligen förtydligas med ett större antal följdfrågor. Den första frågeställningen behandlar elevers prestationer inom trigonometri och algebra, såsom förenkling, formler och identiteter. Vidare beskriver Delice att ett speciellt intresseområde är att analysera de svårigheter och hinder samt fel eleverna gör under processen. Utöver detta hanterar det även elevernas ”mentala modeller” och uppfattningar[79]. Hennes andra frågeställning behandlar hur lärarens praktik, ämnesplanen samt examinationer påverkar elevers prestationer i de olika länderna. Syftet är att jämföra dessa länder (Delice, 2003, s.1 och s. 29).[80]

Mer konkret beskriver Delice på sidan 49 att studien behandlar efterföljande trigonometriska samt algebraiska färdigheter:

- Addition, dubbla vinkeln, trigonometriska ettan, alla trigonometriska funktioner (sin, cos, tan, och deras inverterade funktioner).
- Förenkling (av uttryck med trigonometrisk art), konjugatregeln och faktorisering, potenser, kvadratkomplettering, substitutioner samt ekvationssystem.

För att besvara sin frågeställning tar Delice till en mångfald av metoder: två tester, en i trigonometri samt en inom algebra, två semistrukturerade intervjuer[81] (jämför med Brown 2005) där författaren för ett verbalt protokoll, en lärarenkät, observationer i klassrummet där Delice ej deltog samt en dokumentanalys[82]. Det följer naturligt att på grund av att Delice valde att använda relativt vida frågeställningar fanns det även ett behov av att ta till ett större antal metoder i sin avhandling. Detta medför en mer utdragen redogörelse för dessa metoder samt urval.

---

[79] Jämför detta med denna litteraturöversikts första frågeställning

[80] En aning annorlunda än mig egen, jag var mer intresserad av att presentera modeller som kan förbättra och stödja undervisning överlag.

[81] En intervju för lärare samt en för studenter efter eleverna utfört provet.

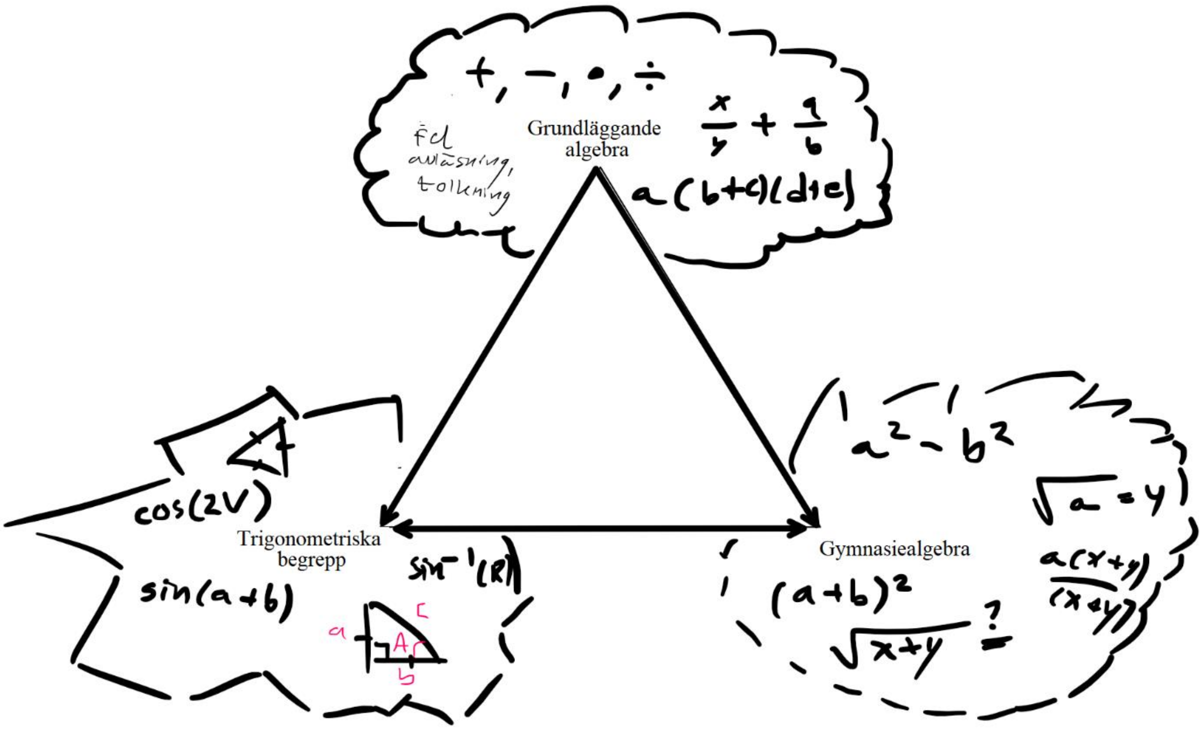
[82] Minns att kursplanen var en del av Delice studium

Urvalet som sådant beskriver Delice som ett bekvämlighetsurval där Delice helt enkelt “inkluderat de fall som är tillgängliga”. (s. 47). Vad det innebär i det här fallet är två väl presterande högstadieskolor i respektive land med 55 elever från Storbritannien samt 65 elever från Turkiet (s.58).[83]

En viktig notis här att vid utövandet av testerna hade eleverna inte tillgång till samma hjälpmedel, i Storbritannien delades det ut formelsamlingar samt miniräknare medan de turkiska eleverna fick nöja sig med trigonometriska tabeller. Delice argumenterar i sin studie utifrån sin sociokulturella frågeställning och önskar därmed ej ändra på de förutsättningar elever har normalt sett (s.58). Delice rättade och kategoriserade de icke-korrekta svaren (s. 66). Delice hade därmed ett specifikt intresse att forska kring en i särart liknande mängd frågeställningar som jag har använt i denna litteraturöversikt: elevernas begreppsliggörande samt lärarens praktik.[84]

Delices resultat

Delice inleder sina resultat med den kategorisering som gjorts av elevernas partiellt korrekta (PA, partial answer), eller felaktiga svar (IA, incorrect answer) från båda länderna. Denna presenteras med stöd av en tabell som är relevant att inkludera i översikten. Jag har dock valt att omformulera den till en bild för att göra det lättare för allmänheten att förstå Delice resultat. Triangelmodellen försöker beskriva att grundläggande algebra påverkar både trigonometriska begrepp samt gymnasiealgebran. Dessa i sin tur har en relation med varandra där den ena kan orsaka besvär för den andra om en del i ledet är felaktig. I grundläggande algebra inkluderar jag även ”goda attityder vid ekvationslösning”, såsom att kontrollera att svaret är rätt.



Figur 30. En idealiserad och sammanfattad bild som jag skapat av elevernas besvär med trigonometri och algebra. Presenteras i tabellform av Delice på sidan 75.

---

[83] Med ett bortfall av 10 samt 20 studenter i var fall.

[84] Dock med en hel del mer följdfrågor.

Delice skapar en mer nyanserad bild av *vilka* frågor samt i vilken grad dessa utgjorde en utmaning för varje land (s. 115[85]). De vanligaste felen är enligt Delice algebraiska fel (felaktiga manipulationer, både grund- och gymnasiealgebra) samt trigonometriska fel där eleverna inte känner igen identiteterna eller minns dem fel (Delice, 2003, s.217). De algebraiska felen delar Delice in i två delar, beroende på nivån av kunskap. Indelningen är helt enkelt algebra som eleverna ska ha internaliserat innan gymnasiet respektive under gymnasiet.

Det är inte av intresse för min del att inkludera Delices djupare analys i denna översikt. Däremot sammanfattar jag resultaten från examinationerna.

Land / Test	Algebra	Trigonometri	Rätvinkliga trianglar	Trigonometriska ordproblem
Storbritannien	44%	33%	66%	63%
Turkiet	71%	18%	68%	46%

Tabell 6. En tabell som sammanfattar resultaten för alla testerna. Enligt Delice (2003) är eleverna mest bekväma med att använda rätvinkliga trianglar.

Anledningen varför en djupdykning i frågorna är onödig är pga. Delice (2003) själv sammanfattat dessa resultat till en modell för hur elever förenklar trigonometriska uttryck. Detta finner jag vara ett av de viktigaste resultaten att inkludera i denna översikt.

En modell för att lösa trigonometriska ekvationer och uttryck

Delice skriver att en elev inleder med att först läsa och avkoda en problemformulering genom att koppla den till någon hen känner igen. Beroende på personliga val väljer studenten sedan att jämföra detta med antingen trigonometriska identiteter eller algebraiska. Genom att sedan skriva om detta kan eleven sedan försöka fortsätta röra sig fram och tillbaka tills denna känner sig nöjd med resultatet. (s.189–192).

Delice anser att modellen kan användas för att illustrera tillvägagångssätt för eleverna, vars tankegångar inte alltid är så strukturerade som de presenteras här. Delice hävdar att detta kan göra "omedvetna elever medvetna om tillvägagångssättet" (s. 192). En svaghet med modellen enligt Delice är att den inte ger vare sig lärare eller elever ett specifikt tillvägagångssätt (substitution) av uttryck som alltid fungerar.

Avslutningsvis påpekar Denice att modellen inte nödvändigtvis är heltäckande. Det kan mycket väl vara fallet att en individ utför vissa manipulationer i enbart sina tankar och därmed ej redovisar detta på pappret. Utöver detta anser Delice att modellen inte problematiserar hur mycket av studentens minne som behövs för respektive steg. Notera att denna beskrivning liknar Browns modell för elevernas byten av representationer (Brown 2005, s. 213). Likt Browns byten av representationer väljer elever att byta mellan de olika identiteterna i sitt kognitiva schema.

Grundläggande algebrafel och mekaniska fel är vanliga

Jag kommer presentera ytterligare två artiklar från Turkiet varav jag börjar med ett arbete av Gür (2009). Gür har studerat vilken typ av fel samt underliggande missförstånd elever uppvisar vid lösning av

[85] Dessvärre kommer läsaren finna likt mig att det inte går att läsa av de grafer som Delice illustrerar, pga. Färgerna är densamma (troligen en konsekvens av att ha skannats in i svart och vitt). Delice beskriver dock innehållet i samma stycke.

trigonometriska uttryck och ekvationer. Hennes urval är en form av klusterurval där Gür slumpmässigt valt ut olika skolor samt samplat totalt 140 turkiska elever i ålder 15–16 år.

$1. \text{Varför stämmer det att } \sin^2 x + \cos^2 x = 1?$
$2. \text{Vilken av dessa påståenden stämmer? } \tan x = \frac{1}{\cot x} \text{ eller } \tan x \cdot \cot x = 1. \text{ Förklara.}$
$3. \text{Tan 90 är odefinierad.}$[86] Förklara varför.
$4. \text{Förenkla } (\sin x)^2 - (coc\ x)^2.$
$5. \text{Om } \tan A = 3/4 \text{ vad är } \tan 2A?$
$6. \text{Förklara varför } \cos(-x) = \cos(x).$
$7. \text{Varför är tangens och cotangens positiva i tredje kvadranten?}$

Tabell 7. En tabell som där Gürs frågeställningar presenteras.

Gür har likt andra forskare testat elevernas förmågor utifrån ett antal frågeställningar. Dessa inkluderas i översikten med tabellen till vänster (Gür, 2009, s. 79). Se att de flesta av dessa behandlar trigonometriska identiteter och förenklingar men att vissa av frågorna även går in på funktionslära. En notis som jag önskar lyfta fram från Delice (2003) arbete är att elever i Turkiet hanterar sekanter, kosekanter samt tillhörande algebraiska identiteter i en mycket större grad än elever i Storbritannien. Med tanken på att det svenska gymnasiet inte ens definierar dessa i centrala innehållet (Skolverket, 2011) är det därmed rimligt att den turkiska skolan förväntar sig en aning mer från eleverna i detta område. Åtminstone i relation till algebra och trigonometriska identiteter.

Gür sammanfattar sina resultat på sidorna 76–78 och kategoriserar elevernas fel. Jag väljer att sammanfatta dem utifrån Delice ramar vilket i sådana fall ger att Gür fann att eleverna misstolkade frågorna (fel i läsningen), använde felaktiga algebraiska substitutioner eller felaktiga trigonometriska identiteter. Slutligen var vanliga fel utöver detta i Gürs arbete aritmetiska fel samt missar i algebramanipulationer (hos Gür, technical mechanical errors).

Elevers begreppsapparat är begränsad

Maknun, Rosjanuardi och Ikhwanudin (2018) har funnit liknande resultat i Indonesien på ett urval av 36 högstadieelever, dock utifrån ett perspektiv av att tolka deras matematiska argumentation. Deras test skiljer sig en aning åt från andra i den bemärkelse att flera delar av testet presenterar förslag på lösningar till ett givet problem. Här är det elevernas uppgift att utvärdera dessa lösningar och argumentera för deras riktighet eller falskhet.

Deras resultat kan benämnas som dystra eller med deras ordval "mycket låga", där det högsta resultatet var 40%. Maknun, Rosjanuardi och Ikhwanudin använder detta för att argumentera för att elever har memorerat formler men har en svag förståelse i hur man faktiskt "gör trigonometri" (s.695). Författarna menar att eleverna i studien saknar en logisk progression i sina svar, såsom varför ett visst steg implicerar ett annat.

[86] (sic) Troligen menade Gür att sätta in ett gradtecken här.

I grunden kritiserar Maknun, Rosjanuardi och Ikhwanudin elevernas ordval och deduktioner. Exempelvis är de inte helt nöjda med ur elever resonerade i vissa problem. Exempelvis uttryckte elever att $sin(x)^2$- ¼ = 0 är ekvivalent med $sin(x)^2$= ¼ ”därför att -¼ som flyttas till andra sidan blir ¼” (s.692). Författarna lyfter fram ett önskemål av att elever ska använda ett mer formellt språk än detta, såsom inverser. Med andra ord lägger de en större vikt på ett korrekt språkbruk hos eleverna. Maknun, Rosjanuardi och Ikhwanudin går även in på en hel del mer besvär de identifierade som dock är av en mer trigonometrisk art, där exempelvis elever använder felaktiga definitioner eller gör antaganden av vad vinklar är i vissa figurer.

Vad tycker lärare?

Chigonga (2016) identifierar utöver Delice mer generella problem som uppstår vid ekvationslösning genom att utföra djupintervjuer med 10 lärare i Sydafrika. Dessa lärare valdes ut från fem förutvalda skolor där sedan 2 matematiklärare valdes ut slumpmässigt från varje skola. Chigonga identifierar att vissa misstag översätts till alla ansatser att lösa ekvationer med algebramanipulationer. Mer konkret lyfter Chigonga fram följande besvär;

1. Elever väljer fel kvadranter.
2. Elever delar med variabeluttryck (division med noll i vissa lägen).
3. Elever kontrollerar inte sina lösningar (I vissa fall introduceras falska rötter).

Chigonga poängterar att lärare bör ha detta i åtanke när de undervisar i området, särskilt då dessa är problem som erfarna lärare själva identifierat hos elever.

7.3.2 Didaktiska förslag

Det finns inte mycket att presentera inom didaktiska förslag för detta område. Här kommer majoriteten av materialet utgå från Delices arbete igen med några tillägg från Chigonga (2016) samt Gür (2009). Det finns även en artikel från “the Mathematics Teacher” som ger förslag på hur elever kan visuellt representera vissa trigonometriska identiteter.

I det sista stycket av sitt arbete ger Delice (2003) förslag till lärare på vad de ska ha i åtanken vid förenkling av trigonometriska uttryck samt lösning av problem inom området. Delices mest centrala punkter sammanfattas på följande vis:

- Lärare behöver ge mer varierade problem.

  Delice skriver att för att eleverna ska utveckla en vid repertoar av substitutioner och omskrivningar behöver de arbeta med en större variation av problemformuleringar.

- Lärare behöver lägga mer fokus på att belysa trigonometriska identiteter jämfört med algebra.

  Enligt Delice använde de flesta eleverna algebraiska manipulationer för att lösa trigonometriska problem men deras kunskaper i att använda trigonometriska identiteter lyste inte lika klart igenom.

- Lärare behöver belysa algebrans svagheter

  I vissa fall finner Delice att elever utför operationer som inte alltid är giltiga. Lärare måste visa och exemplifiera när vissa algebraiska manipulationer är giltiga eller inte (ex. Division med noll, rötter, m.m.).

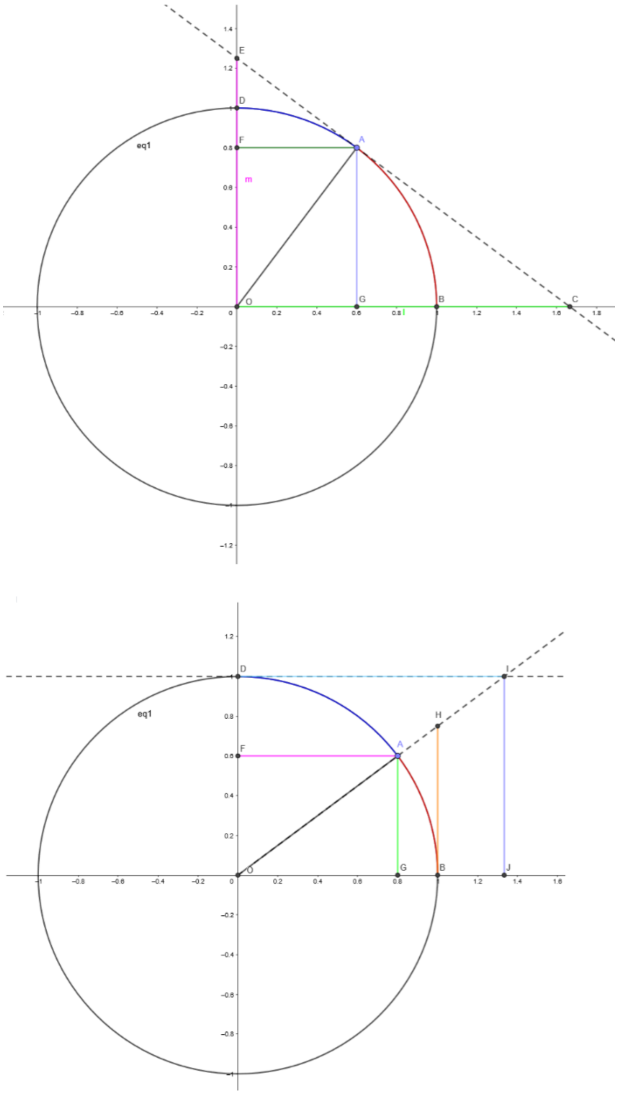
- Lärare måste vidare problematisera vad det innebär att “förenkla” ett uttryck
  Elever är inte helt säkra på i Delice studie vad en förenkling egentligen är. Visserligen lyfter Delice fram att inte lärarna heller är det men idéen är mer eller mindre att det inte existerar någon sådan definition. Visserligen lyfter Delice fram en tolkning: en förenkling är det uttryck där antalet termer och operationer är minimerade i antal och komplexitet. Enligt Delice behöver elever mer stöd med att själva kunna bestämma när ett uttryck är förenklat.

- Lärare måste vara medvetna om vikten av att konstruera diagram i trigonometriska ordproblem

  Delice (2003) problematiserar ordproblemen utifrån att de ibland kräver mer kunskap än den matematiska. Elever måste i någon mening ibland inneha erfarenhet av hur situationer ser ut i verkliga livet vilket Delice anser kräver spatiala förmågor som eleverna kan sakna. Lärare måste hjälpa elever att visualisera och representera dessa fall. (Delice, 2003, s.231–235).

Chigonga (2016) rekommenderar utöver det Delice (2003) framfört att en lärare arbetar med att fostra attityder som motverkar felaktigheter, såsom att alltid testa sina lösningar. I likhet med Delice föreslår Chigonga att lärare måste belysa algebran i större grad. (Chigonga, 2016, s. 173–174).

Gür (2009) tillägger att elever måste ges möjlighet att visuellt se och begreppsliggöra vissa trigonometriska identiteter. Det skulle därmed vara i sin ordning för en lärare att bevisa exempelvis sinus additionsformel med geometriska medel. Gür rekommenderar även att elever får arbeta tillsammans med att lösa algebraiska uttryck av trigonometrisk art.



Figur 31. Ett exempel av en design där flera identiteter kan utläsas. Baserat på bilder från Wikipedia, van Brummelen (2009, s.276) samt Cullen & Martin (2018).

För att illustrera detta inkluderar jag en artikel av Cullen och Martin (2018). I sitt arbete utgår Cullen och Martin från liknande idéer som Moore och LaForest (2014) där de förstnämnda presenterar ett lektionsupplägg för att finna trigonometriska identiteter med hjälp av bågen. För att påminna läsaren utgick Moore & LaForest från en idé av att använda bågen och linjesegment som ett medel för att komma åt sinus och cosinus. Kärnan var att mäta upp bågar i enheten radier och därmed uttrycka vinkeln i enheten radianer.

Idéen är att genom likformiga trianglar som Pythagoras sats bestämma och relatera flera trigonometriska identiteter. Inledningsvis låter forskarna eleverna grafiskt illustrera sambandet mellan båglängden mot projektionen av A på x-axeln (sinus). Sedan låter de eleverna försöka finna så många samband de kan, främst genom att relatera bågar och deras “supplementära bågar” (se röd respektive blå båge).

Det framgår inte riktigt ur artikeln huruvida det är studenterna själva som gör dessa konstruktioner. Inte heller framgår hur eleverna ska skapa konstruktionerna om de gör det på egen hand. Med tanken på att de önskar att eleverna gör en graf av båglängden mot sina funktioner framstår det dock som om de har tillgång till ett grafritande program såsom GeoGebra. Försök på egen hand hitta de trigonometriska funktionerna via likformighet. Relatera sedan dessa med Pythagoras sats och likformighet.[87] [88]

[87] Ta annars hjälp av Wikipedia samt det egna intellektet. En av Cullen / Martins (2018) huvudmål är att koppla ihop relationen mellan den röda bågen och den blåa bågen för olika trigonometriska funktioner. Se att båda adderar till $\frac{\pi}{2}\ radianer$. https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_trigonometric_identities

[88] Det finns även fler geometriska bevis av trigonometriska identiteter (visserligen begränsade i domänen). Exempelvis additionsformeln för sinus: https://mathworld.wolfram.com/TrigonometricAdditionFormulas.html
https://math.stackexchange.com/questions/443411/visual-proof-of-the-addition-formula-for-sin2ab

7.3.3 Sammanfattning

Detta slutliga delkapitel av resultatdelen har hanterat algebrans koppling till trigonometri. Området i sin helhet hade inte mycket forskning dedikerat till sig men de få verk som hittats kunde ändå användas för att ge ett antal insikter.

- Elevernas besvär och hinder inom algebra och trigonometri kan kategoriseras i tre delar: grundläggande algebra, gymnasiealgebra samt trigonometriska identiteter. Eleverna kan bära med sig felaktiga eller icke fullständiga tolkningar av tidigare regler och samband inom algebra (såsom hur man adderar tal i bråkform, eller distributiva lagen). Utöver detta inkluderar jag även bra attityder vid lösning av ekvationer i grundläggande algebra, såsom att testa sina lösningar.

  Detta i sin tur påverkar hur eleverna hanterar de resterande två kategorierna där felen kan komma att byggas på och förstärkas om elever ej besitter en bild av algebraiska mönster för gymnasiealgebran samt trigonometriska identiteter. Exempel inom den andra kategorin är processer såsom kvadrering av kvadratrötter (introduktion av falska lösningar), faktorisering, division med funktioner som kan vara ekvivalenta med noll, eller konjugatregeln. Slutligen brukar den sista kategorin av trigonometriska identiteter uppvisa besvär med att komma ihåg dessa samband samt relatera dem till en visuell bild eller process. Ett förslag på besvär skulle vara att se sinusfunktionen som linjär, dvs. sin(ax) = a $\cdot\ sin(x)$ och sin(a+b) = sin(a) + sin(b).

- Utöver detta kan forskarna utläsa från elevernas lösningar att de särskiljer trigonometriska identiteter och algebraiska regler. Eleverna rör sig fram och tillbaka mellan substitutionerna för att ta sig an ekvationer och förenklingar av uttryck.

- Forskningen anser att lärare måste ge elever mer stöd med algebra, främst problematisera särskilda steg i en lösningsprocess samt variera problemen som presenteras till eleverna.

- Vidare anser en del forskare att lärare behöver ge mer stöd med visualiseringen av trigonometriska problem, må de vara teoretiska eller verklighetsbaserade. Diagrammet framförs vara av stor vikt och Delice (2003) hävdar att det existerar många dolda antaganden om kunskap utöver den matematiska för att rita ett bra diagram.

- Detta stöd kan uppnås via GeoGebra eller kommunikation med stöd av verklighetsanknutna problem.

- Avslutningsvis anser Delice att lärare måste problematisera vad en förenkling ens är för eleverna. Detta begrepp hävdar Delice saknar en definition (Delice, 2003, s. 233) och för elevernas del är det inte alltid klart vad en förenkling av ett trigonometriskt uttryck bör vara.

8. Diskussion

I kommande avsnitt kommer jag diskutera resultaten från studierna men även problematisera metoden och de teoretiska ramverken.

8.1 Om metoden

Som beskrivet i metoden utgick jag ursprungligen från ett antal sökord. Detta försökte jag först göra med svenska termer men under tidens gång visade det sig trots sökningar i flertalet databaser (LIBRIS, SwePub, NCM/NOMAD, GUB) att det ej existerade någon relevant litteratur på svenska. Även sökningar med engelska termer gav begränsade resultat. Detta utökades med Google Scholar där jag i syfte att finna relevanta studier började använda en kedjesökningsmetod. Metoden som sådan visade sig effektiv: jag har kunnat hitta ett större antal utmärkta och relevanta artiklar.

Det framgick dock snart att litteraturen som sådan inte nödvändigtvis är representativ för området. Som presenterat i kapitel 4 kunde jag identifiera ett mindre antal teoretiska ramverk som refererades av majoriteten av de inkluderade artiklarna.[89] Den större delen av litteraturen är från engelskspråkiga länder, såsom USA, Storbritannien samt Australien. Det fanns inga studier från något skandinaviskt land.

Detta skulle visserligen kunna vara mer indikativt av vilka länder som har resurser att utföra forskning inom området, må det vara i form av personal, forskare, deltagare eller finansiering. Dessvärre skulle detta även kunna innebära att sökningen har fångats i ett nätverk av gemensamma forskare och kollegor. Dubinsky m.fl. har till och med känt behovet av att presentera sig själva som särade från de andra perspektiven (Dubinsky m.fl., 2014, s.13). Följande problematik uppstår från detta:

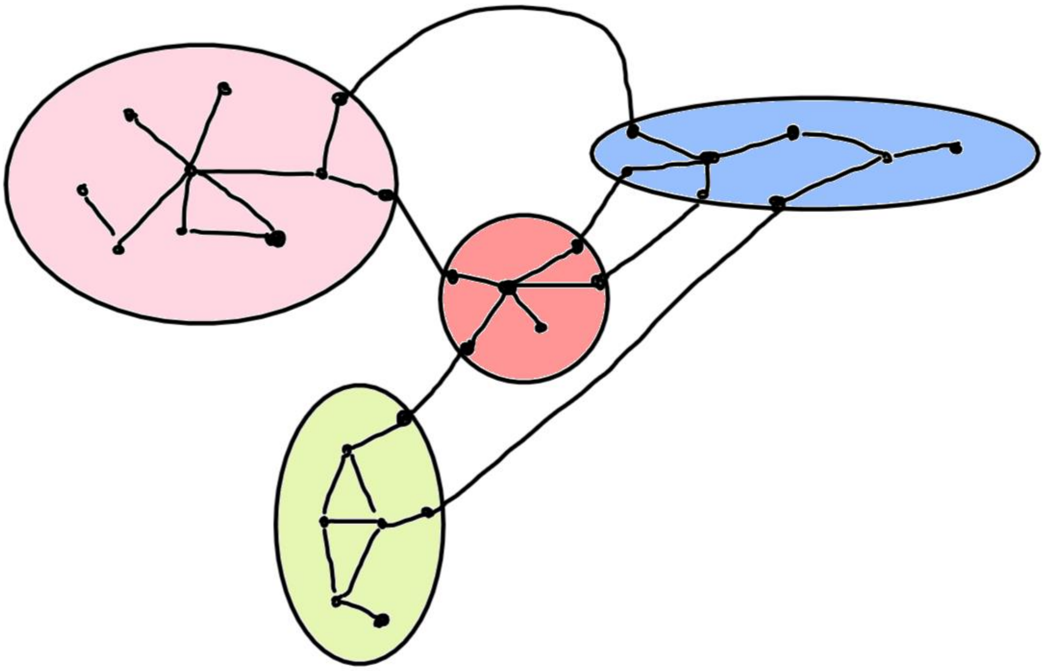
"Är litteraturöversikten representativ för området?"

Metoden med kedjesökning som huvudmetod må ha varit effektiv för att finna intressanta artiklar men den kan samtidigt ha avgränsat litteraturens omfång på ett sådant sätt att jag ej presenterats med arbeten som har andra perspektiv eller motsätter sig de resultat och metoder som används av artiklarna. För den delen är det även problematiskt med interkulturella kontexter, där de flesta studierna är begränsade till enbart enstaka länder och skolor.

Det har troligen inte undgått läsaren att det finns en ovanligt stor mängd av litteratur från Turkiet. Detta är inte nödvändigtvis något problem i sig då det mycket väl kan vara fallet att turkiska forskare har spenderat mer tid inom detta område relativt forskare i andra länder. Jag önskar dock problematisera detta utifrån min kedjesökningsmetod och i sådana fall kan det finnas en klar anledning till att Turkiet är överrepresenterat.

Den ursprungliga artikeln som startade kedjesökningen var Hülya Gür (2009). Detta arbete inriktade sig på att identifiera hinder, besvär och problem med att lösa och förenkla trigonometriska ekvationer och uttryck. Denna artikel är turkisk i sitt ursprung. Att jag fann en viss överrepresentation av turkiska artiklar är möjligen inte mer än en effekt av att den första artikeln jag starta med var turkisk. Naturligtvis är det inte helt oväntat att turkiska författare oftare citerar turkiska källor.

[89] Ifall studien är en komparativ studie mellan länder har jag valt att räkna studien till alla länderna i fråga.



Figur 32. Detta är en illustration av problematiken.

Figuren ovan illustrerar resonemanget visuellt. Studien kan ha fastnat i en enda del av mängderna och därmed missat viktiga publikationer och kopplingar från andra författare. Kedjesökningen uppvisar en inneboende risk av att ej representera området i sin helhet. Främst är det litteratur på andra språk utöver svenska, norska samt engelska som missats, om sådant existerar.

8.2 Om de teoretiska ramverken

I kapitel 4 introducerade jag de teoretiska ramverk som majoriteten av de inkluderade artiklarna utgår ifrån. Dessa artiklar må formulerar sig annorlunda men i grunden anser jag att de presenterar liknande idéer. Mer konkret är de alla ambitioner för att ge oss en terminologi, ett verktyg för att samtala kring elevers uppfattningar och världsbilder av högre matematik. Detta är visserligen inte nödvändigtvis ett problem, man kan tala om en och samma sak och ändå ha helt olika tycken kring det. Det som möjligen kan framföras som problematiskt är att deras teorier är snarlika.

Jag kan säga att det finns flera gemensamma drag mellan Sfards och Gray och Talls tankar angående matematiska begrepp och konstellationer. Dessa två verk kontrasterades redan i sina egna kapitel. Vad som skiljer dem åt i någon mening är att författarna inte nödvändigtvis har samma saker eller utgångspunkt i fokus.

Om jag bryter ner deras modeller i en något enklare form, vilken troligen gör modellerna svagare, finner jag att de delar in konceptualiseringen av begrepp i en likartad indelning, om än i mer eller mindre delsteg. Ramverken inleder med en initial händelse som lägger grunden för en internalisering av händelsen. Detta inledande steg byggs upp i termer av processer eller algoritmer och konstrueras av individen i relation till stegvisa procedurer. Författarna menar sedan att efter en viss tid kommer detta assimileras i tankevärlden via ett förbestämd kontext - hur detta exakt går till är troligen inte av intresse för teorierna, då elevens tankevärld ligger bortom mänsklig vetenskap samt ej adderar något förklarande värde till teorin. Denna assimilation kan sedan, med reflektion och tid, utvecklas till att agera som ett objekt i andra relationer och processer.

Jag anser att Sfard, Gray och Tall samt Dubinsky m.fl. teorier är en aning för närbesläktade för att kunna anses annorlunda. På något vis skulle jag se dem som uttryck för samma fundamentala idé: *matematiska begrepp innehar en funktionalitet som både processer och objekt och kan komma att utvecklas via tillämpningar av processer och objekt.*

Jag arrangerade dessa teorier i den ordningen jag gjorde mestadels för att jag identifierade en röd tråd mellan texterna, via deras korsreferenser till varandra. Deras tankar växte sig mer sofistikerade och abstraherade inom de ramar de beskrev för att beskriva det fenomen vi kallar lärande i matematik. Därmed existerar de inte i ett tomt vakuum i forskningsvärlden, utan snarare i relation till varandra. De har förstärkt och utvecklat varandras tankar. Men unika är de inte helt och hållet.

Sfard dualitet har enligt mig alldeles för många likheter med Gray och Talls ambiguitet. Gray och Tall koncentrerade sig på symbolens roll i matematiken men faktum är att Sfard också skrev om detta i sitt arbete. Båda verken beskriver att en process “förtingligas” till ett objekt. Båda anser att matematiska begrepp kan användas som en process eller som ett objekt beroende på kontexten, att den kan kapslas in och packas upp likt det Dubinsky m.fl. beskriver. Dessa tankegångar rimmar med varandra.

Jag önskar dock föra fram den andra sidans synpunkter. Dubinsky m.fl. (2014) har faktiskt själva tagit sig an att beskriva denna relation. Dubinsky m.fl. lyfter fram tre huvudpunkter som de anser gör att APOS-teori skiljer sig från Tall och Vinners terminologi.

1. Schemans huvudintresse är studentens mentala konstruktioner i sin jakt att förstå matematik, ej nödvändigtvis matematikinnehållet i sig.
2. Schema som objekt i sig (med vilket en individ kan utföra aktioner med).

3. Koherenskrav: hur individen väljer och relaterar scheman till sig själva och olika problemsituationer. (Dubinsky m.fl., 2014, s.13).

Ett förtydligande av den sista punkten är nödvändig. Inom detta teoretiska ramverk skiljer Dubinsky m.fl. strikt mellan elevernas definitioner samt den formella definitionen, vilket de benämner med **konception** respektive **koncept.** Jag påminner här om att Tall och Vinner begreppsbild och definitioner används för att relatera elevernas egna definitioner och den formella matematiken. Sfard och Gray och Tall använder sina begrepp på likartade sätt och beskriver sina begrepp i relation till matematikinnehållet och inte från de modeller som eleverna faktiskt redogör för.

Om Dubinsky m.fl. första punkt

Jag anser att detta måste nyanserar. Tall och Vinner (1981, s. 152) definierar begreppsbilder som "alla kognitiva strukturer i en individs tankevärld som är associerade med ett visst begrepp". Jämför detta med en beskrivning av ett schema från Asiala (1997):

> An individual's schema is the totality of knowledge which for her or him is connected (consciously or subconsciously) to a particular mathematical topic.
>
> (Asiala m.fl., 1997, s.9)

Detta skulle dock bara uppbåda mer problem. I praktiken är denna beskrivning snarlik den som ges av Tall och Vinner (1981) av begreppsbilder. Dubinsky m.fl. (2014) lyfte fram problematiken ur perspektivet att ramverken inte utgick från samma sak: individens kognitiva strukturer. Jag tolkar det därmed som att Dubinsky m.fl. (2014) menar att tillämpningen av teorin är annorlunda. Detta tycker jag inte riktigt framgår från Dubinsky m.fl. och finner det därmed svårt att ta ställning till huruvida jag håller med Dubinsky m.fl. eller inte. Såvitt som definitionerna är formulerade anser jag att det inte går att skilja dem åt.

Om Dubinsky m.fl. andra punkt

När det kommer till punkt två beskriver Dubinsky m.fl. att Tall och Vinner (1981) inte har en ekvivalent beskrivning av ett schema som ett objekt i sig. Jag håller med Dubinsky m.fl. (2014) men detta kan dock ge upphov till en viss problematik rent logiskt sett. Givet att de ser ett schema som ett objekt i sig som därmed kan ingå i andra scheman framgår det att författarna har öppnat upp för en hel del möjliga paradoxer (såsom Russells paradox). Schemat beskrivs som en samling av mängder (aktioner, processer samt objekt) där schemat i sig kan vara ett objekt. I sådana fall skulle vi kunna visualisera schemat S som ett objekt i sitt eget schema. Dubinsky m.fl. Har inte explicit förbjudet en sådan syn, men jag upplever ändå att förbudet är implicit från hur de illustrerar scheman. De illustrerar att scheman är objekt enbart i andra scheman.

Om Dubinsky m.fl. tredje punkt

Dubinsky m.fl. lyfter fram ett så kallat koherenskrav, "med vilket en individ bestämmer huruvida ett partikulärt schema kan tillämpas eller inte i en given problemsituation" (Dubinsky m.fl., 2014, s.8). Jag håller med författarna om denna punkt, det finns inte något explicit skrivet av resterande teoretiska ramverk som kräver koherens i denna mening. Tall och Vinner nämner begreppet i en mer klassisk betydelse vilket dock innebär att den är annorlunda från Dubinsky m.fl. definition.

Koherenskravet kan visserligen vara implicit i de andra fallen pga. Författarna bygger in individens organisering av kunskap i terminologin i sig. Detta är i sådana fall inte helt annorlunda från ett schema.

Exempelvis beskriver Gray och Tall (1994) elementära procept som bygger upp procept. I denna diskussion redogör de för ett antal exempel av procept, där de mer eller mindre länkar ihop en samling av ekvivalenta representationer för ett visst begrepp. I den bemärkelsen måste författarna mena att en individ besitter en egenskap av att kunna utföra dessa kopplingar från första början. Hade detta inte varit fallet följer det att bytet av representationer inte vara möjligt).

En egen observation av skillnader mellan ramverken

Jag önskar framföra en skillnad som jag själv förvärvat från litteraturen. APOS-teorin ställer oftare upp en hypotes, den genetiska nedbrytningen, för att beskriva de nödvändiga steg en individ behöver ta för att förstå ett område. De erkänner att denna inte är unik eller ens komplett i någon mening utan likt en hypotes, dvs. en testbar modell. Jag finner det dock svårt att förstå hur en forskare kan tilldela ett visst steg i en elevs matematiserande en specifik abstraktionsnivå om de samtidigt erkänner att hypotesen ej är unik. I sådana fall förefaller det som möjligt att ett givet beteende skulle kunna tolkas på mer än ett sätt. Visserligen är detta fullt möjligt enligt litteraturen: vissa elever tolkar begrepp som objekt medan andra tolkar samma begrepp som processer.

Den genetiska nedbrytningen ger dock upphov till ett problem med punkt 1. Jag citerar Dubinsky m.fl. själva för att läsaren ska förstå problematiken.

> ... concept image is mainly concerned with the mathematics involved in a concept whereas Schema describes the mental structures involved in the mind of an individual who understands, or is developing an understanding of, that mathematics.
>
> (Dubinsky m.fl., 2014, s. 13)

Jämför detta med det tidigare citatet från Tall och Vinner (1981, s. 152); "begreppsbilden består av alla kognitiva strukturer i en individs tankevärld som är associerade med ett visst begrepp".

Den enda skillnaden jag kan utläsa är att Dubinsky m.fl. (2014) utgår från förståelse medan Tall och Vinner (1981) accepterar alla mentala strukturer oberoende av om dessa fungerar eller inte. Med stöd av Piaget finner vi att detta troligen är den markanta skillnaden mellan ramverken.

> A schema is only constructed when it is functioning, and it only functions through experience: then, that which is essential is, not the schema as structure in itself but the structuring activity that gives rise to schemas. (Piaget, 1975/1985)
>
> (Dubinsky m.fl., 2014, s. 110).

Visserligen lyfter inte Dubinsky m.fl. själva fram denna skillnad gentemot Tall och Vinner. Tall och Vinner beskriver rättframt att deras idé av begreppsbild och begreppsförståelse inte kräver koherens. Individens begreppsbild och förståelse behöver inte överensstämma med varandra eller ens med de begrepp de beskriver (s.152–153). Utgående från denna skrivelse tycker jag att det finns en skillnad mellan ett schema och begreppsbild.

Den genetiska nedbrytningen

Detta tycker jag dock rimmar dåligt med den genetiska nedbrytningen. Om en genetisk nedbrytning är en hypotes av ett fungerande schema inom ett matematiskt begrepp måste denna formas gentemot någon deduktiv modell. För annars kan de knappast kalla den en hypotes. Hur kan en forskare besluta om dessa mentala strukturer hos en individ utan att relatera dem till den formella matematiken?

Jag upplever att Dubinsky m.fl. själva ger ett gensvar mot denna problematik. Dubinsky m.fl. (2014) beskriver i kapitel 4.2 (s.33–35) hur en genetisk nedbrytning blir till. Jag kommer presentera de tre punkter jag identifierat som tillvägagångssätten och sedan diskutera dessa kortfattat. En genetisk nedbrytning blir till via följande medel:

- Från forskarens egna erfarenheter och kunskaper kring ett matematiskt begrepp

- Från datainsamlingar, dvs. observation av studenter som undervisas i ett visst begrepp

- Från olika typer av skrivna källor; matematikdidaktisk forskning om begreppet (besvär hos elever samt deras uppfattningar), historiska källor, läroböcker.

Dubinsky m.fl. (2014) lyfter fram en intressant punkt på dessa sidor som ger oss lite klarhet i det hela:

> Some preliminary genetic decompositions are designed by taking into account mathematical descriptions of a concept, together with the researchers' experiences as learners or teachers.
> (Dubinsky m.fl., 2014, s.33)

Alltså, Dubinsky m.fl. anser att åtminstone initialt kan vissa genetiska nedbrytningar utgå från den matematiska beskrivningen av ett visst matematiskt begrepp. Med andra ord relaterar de sina hypoteser av ett schema till materialet i sig. Målet med deras hypotes är i vilket fall att skapa en "skiss" av en fungerande modell inom ett visst matematiskt område. Detta kräver en relation till området men det huvudsakliga intresset är de kategoriseringar och kopplingar individen gör mellan de delar som utgör schemat.

Resonemang med samvariation

Slutligen har vi Carlson m.fl. (2002) där forskarna lyfter fram "pseudo-analytiskt beteende" där "den nödvändiga underliggande förståelsen för att utföra det specifika beteendet på ett meningsfullt sätt saknas" (Carlson m.fl., 2002, s. 358–359). Författarna ställer klart upp en hel del beteenden och nivåer som enligt dem ska i någon mening representera olika grader av förståelse, men erkänner i ett senare stycke att dessa ej garanterar någonting.

Detta om något belyser det egentliga problemet som alla teorier av lärande möter:

Kan vi veta vad människan egentligen tänker?

8.3 Om trigonometri och historia

I det inledande skedet av detta arbete, långt innan det första ordet ens blev skrivet, ställdes jag inför en viss problematik. Ett av mina ursprungliga intressen låg i att undersöka och sammanfatta ett antal historiska problem inom trigonometrin. Frågeställningen var då mer i stil med: ”Vad finns det för historiska problem inom trigonometri som kan användas inom undervisning?”. Detta utgick från ett basbehov som växt inom mig med rot i det förmågor som lyfts fram av Skolverket. Mer konkret är det följande formulering som jag önskade bemöta:

> 7. relatera matematiken till dess betydelse och användning inom andra ämnen, i ett yrkesmässigt, samhälleligt och **historiskt** sammanhang.
>
> (Skolverket 2011)

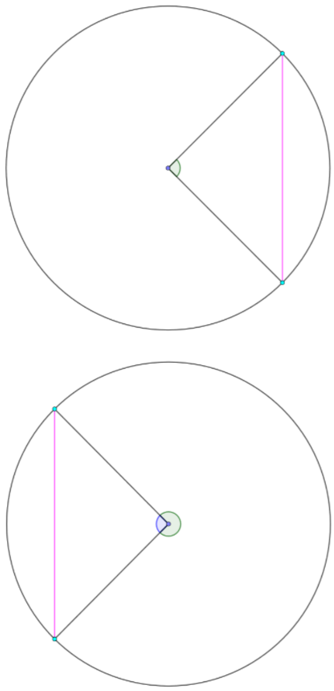
Det förekommer även en punkt inom det centrala innehållet i samtliga ämnesplaner som sannerligen utvecklar behövligheten av att söka sådana problem.

> Undervisningen i kursen ska behandla följande centrala innehåll: matematiska problem med anknytning till matematikens kulturhistoria.
>
> (Skolverket 2011)

Jag upplever att min utbildning, som visserligen haft historiska inslag[90], ej hanterat detta utifrån perspektivet av hur läraren ska undervisa materialet eller ens inkludera det i undervisningen överhuvudtaget.[91] Efter ett visst studium av trigonometrins tidiga historia (Van Brummelen, 2009; Maor, 2020) fann jag ett område som var vida utöver det jag väntat mig. Främst i de skillnader som fanns mellan det material jag lärt mig under min (ut)bildning gentemot det historiska materialet. Det är då två punkter som relativt snabbt uppenbarade sig för mig:

1. Problemen är svåra att formulera, modulera och rättfärdiga i gymnasiet.

Inom denna punkt uppstod det två problem som orsakade besvär med att lätt relatera historian till gymnasiematematiken: funktioner och problemens karaktär. Exempelvis binder en hel del av den tidiga trigonometrins historia an till astronomin, där olika projektioner (såsom stereoskopisk projektion) kartlagde himmelen på olika ytor. Från detta utvecklades sofistikerade metoder med att relatera storheter, främst då via det som gick att mäta: vinklar. Med stöd av ett antal funktioner kunde dessa vinklar relateras med längder vilket kan ses som födelsen av trigonometri som ett eget område. Dessvärre skiljer sig dåtidens funktioner från de moderna varianterna[92]. Främst av dessa var kordafunktionen, chord(v) (Van Brummelen, 2009, s. 34–46; Bressoud, 2010). Denna funktion



Figur 33. Kordafunktionen. Se att det föreligger en symmetri så att det räcker att veta värdena för chord(v) mellan vinklarna 0 till och med 180°.

[90] Särskilt i de inledande kurserna såsom LGMA10 på Göteborgs Universitet. Exempelvis hanterades historiska talsystem och de komplexa talens historia.
[91] Det existerar skrivelser angående historiska talsystem i åk 4–6 samt
[92] Som visserligen kan beskrivas uttryck i sinus och cosinus.

relaterar en given vinkel[93] till en korda i en cirkel med en viss radie.[94] Utöver detta fanns det flertalet andra funktioner som ej används idag, såsom vers (v) $= 1 - cos(v)$. Ursprungligen verkade det till och med vara fallet att sinus och cosinus definierades utifrån arbiträra radier hos olika författare, dvs. $Sin(v) \ = \ R\ sin(v)$ (Van Brummelen, 2009, s. 96).

I kombination med alla dessa annorlunda tolkningar och tillämpningar av funktioner uppstod även en utmaning i att välja ut problemen i sig. Problemen föreföll för min del vara av en sådan komplicerad karaktär att det skulle vara svårt att introducera dem för eleverna. För övrigt utgår en del av dessa från falska premisser som skulle vara svåra att sanningsenligt undervisa om idag, såsom att Jorden är centrum för solsystemet[95] eller att banorna kring ett gemensamt centrum är cirkulära eller ens inom samma plan. Vissa av dessa problem skulle, givet en öppen problemlösning, vara svåra att rättfärdiga för eleverna i allmänhet, på grund av deras svårighet samt relevans för utbildningen. Ett ytterligare besvär som uppkommer snarligen är att flertalet av dessa problem utgår från en helt annorlunda matematisk bakgrund än den vi har idag. Det krävs en hel del geometri för att ens förstå lösningar eller göra ansatser att lösa problemen. Detta skulle dock kunna ses som ett lärotillfälle där motiverade elever skulle kunna pressa sig själva till att ta del av geometriska samband till en grad som ligger vida utöver kraven. Med andra ord, skulle eleverna bli aktörer som agerar för sin egen bildning. Det förefaller för min del svårt att besluta dock i vilka fall en lärare skulle kunna inkludera sådana moment. Särskilt utifrån denna andra punkt:

2. Hur ska problemen lösas? Vad kan vi förvänta oss från eleverna?

Givet att en lärare presenteras material och problem för eleverna kan vi förvänta oss vissa lösningsmetoder. Förvisso kan vi ej vara helt säkra på vad som kommer produceras av en grupp elever men en lärare som är förtrogen med både klass och material bör kunna delvist kunna förutsäga sådana metoder. Utöver detta bör läraren även kunna förutse de hinder eleverna kan möta under vägen. Det är i dessa fall som vi står vid ett vägskäl: om undervisningen i dagens samhälle skiljer sig strikt från det material som presenteras historiskt följer det naturligt att de ansatser eleverna kommer göra är annorlunda från historian. Följande problem uppstår därmed relativt direkt:

”Är detta i sådana fall ett matematiskt problem med anknytning till matematikens kulturhistoria?”

Problematiken kan kortfattat beskrivas som att elever använder sig av metoder som är anakronistiska, dvs. ej av den tidsperioden. Exempel på detta skulle vara analytisk geometri och vissa algebraiska metoder och samband.[96] Dessa metoder är kraftfulla och effektiva: vi förväntar oss och hoppas att eleverna ska erhålla

---

93 Eller med stöd av bågen som mäts upp av en given vinkel. Resonemanget varierar mellan olika källor (Van Brummelen 2009).

94 Som varierade mellan kulturer, exempelvis delades cirkeln in i 3438 delar i Indien. Se att $360° \cdot 60 = 21\,600'$ och givet att omkretsen i en cirkel ges av $2\pi R$ $utvinns\ att\ R \ = \ 21\,600' \,/\, 2\pi \ \approx \ 3438.$ I samma kultur fanns det dock även andra radier, såsom R = 120. (Van Brummelen 2009, s.42 och 96–97).

95 Vilket på sätt och vis det går att säga att det är, givet att vi relaterar alla rörelser till Jorden. En individ är alltid i centrum för sina egna observationer. Detta ledde dock till ganska svåra och komplicerade geometriska ansatser där syftet var att lösa problem som uppstår med observerade rörelser hos planeterna, både i riktning och hastighet. Vid studium av Mars rörelser gentemot stjärnhimmelen med Jorden som centrum uppstår en oväntad kurva: epicykler. Detta område hade jag gärna gått in mer på men jag lämnar det till den intresserade läsaren att själv fördjupa sig inom denna modell.
(Van Brummelen, 2009, s.36–41).
https://en.wikipedia.org/wiki/Deferent_and_epicycle
https://apod.nasa.gov/apod/ap120809.html

96 En viss geometrisk algebra existerade redan i antika Grekland. Exempelvis namngavs sidolängder med bokstäver. Metoder som dock förefaller mer algebraiska, såsom att reducera termer och använda additiva samt multiplikativa inverser

dessa i sin bildning. Men om de använder dessa metoder för att lösa problemet, är problemet anknutet till matematikens kulturhistoria? Har vi sannerligen presenterat historian sanningsenligt i någon mening eller modifierat den utifrån ett språk som inte ens existerade under den tidsperioden?

Såvitt som jag ser det faller allt på vad som menas med ”anknytning”. Det följer att om elevernas ansatser skiljer sig från de historiska, såsom med stöd av analytisk geometri och algebra, att de ej kan anses vara ”historiska”. Tiden det skulle ta att introducera de historiska metoderna och tankesätten skulle dock kunna ta flera lektioner i anspråk, beroende på problemet i sig. Från Skolverket finner vi en reviderad kommentar till kursplanen för grundskolan där följande kan utläsas angående historiska sammanhang och relevans:

> Kursplanen anger att undervisningen i matematik ska ge eleverna förutsättningar att *utveckla kunskaper om historiska sammanhang där viktiga begrepp och metoder i matematiken har utvecklats*. … Genom att urskilja hur matematiska begrepp och metoder har vuxit fram i den här typen av sammanhang blir det möjligt för eleverna att utveckla en djupare förståelse av begreppen och metoderna.
>
> (Skolverket, 2017, s.10)

Till detta önskar jag även tillägga följande citat från samma text:

> Ett syfte med undervisningen är därför att eleverna ska ges förutsättningar se *matematikens sammanhang och relevans*. För att det ska bli möjligt anger kursplanen att eleverna ska ges förutsättningar att *reflektera över matematikens betydelse, användning och begränsning i vardagslivet, i andra skolämnen och under historiska skeenden.*
>
> (Skolverket, 2017, s.10)

En något annorlunda tanke framförs av Skolverket angående ämnesplanen för matematik i gymnasieskolan. Följande citat från deras kommentarmaterial bör belysa idéen väl:

> Tanken med det kulturhistoriska innehållet är att göra matematikundervisningen mera levande och motivationsskapande, och att eleverna via matematiska problem får ta del av människorna, den tidsepok och den kultur som upptäckte de matematiska samband och begrepp som behandlas i kursen.
>
> (Skolverket, 2019, s.14)

Sammanfattningsvis tolkar jag det som att dessa kulturhistoriska problem ska kopplas an till det material som redan definieras av styrdokumenten i syftet att belysa sociokulturella aspekterna hos vissa kulturer. Alltså, elever ska ges möjlighet att, med deras ord, reflektera kring de samhälleliga och historiska sammanhang där dessa koncept utvecklats. För att exemplifiera detta lyfter Skolverket (2019) fram π som sambandet mellan cirkelns omkrets och diameter (Skolverket, 2019, s.15). Dessvärre blir vi inte något visare angående själva metodiken. Med detta förslag kan vi fråga oss huruvida en lärare enbart ska konstatera sambandet som ett faktum eller presentera en (eller flera) metoder för att finna detta samband, såsom Arkimedes eller Liu Huis algoritm. Att enbart ”konstatera” en given händelse som ett faktum skulle, ur min mening, knappast kunna anses ge något rum för reflektion hos eleverna.

via symboler är ett senare påfund. Troligen tidigast Brahmagupta (600-talet) samt Al-Khwarzimi (800-talet). (Ifrah 2002). Algebran genomgick flera olika ”faser” där den inledningsvis var av en så kallad **retorisk** gestalt, alltså enbart löstes via ord och ramsor. Över flera tusentals år utvecklades symbolalgebran till det vi har idag.

Därmed verkar vi inte vara mycket klokare inom områdets metodik efter Skolverkets kommentarer. Detta tolkar jag som att det lämnas till respektive lärare att besluta i den frågan. I sådana fall är problemet som jag beskrivit ej löst utan kvarstår helt intakt. Låt mig ange denna svårighet i en mer kondenserad form för läsarens del.

”Ska en lärare presentera de metoder som historiskt använts eller inte?”

Denna fråga fann jag omöjlig att besvara om vi tar denna i åtanke tillsammans med de ansatser vi kan förvänta oss uppstå naturligt hos motiverade elever. Om vi inte presenterar dessa metoder förefaller det för mig att eleverna inte tar del av historian i någon mening alls. Deras ansatser kommer basera sig på helt annorlunda angreppsmetoder och tankesätt än de som historien önskar lyfta fram. De åsikter och reflektioner de kommer utveckla kommer inte vara densamma som den historiska redogörelsen.[97]

En uppenbar lösning på denna problematik är att jämföra metoderna med varandra. Säg att eleverna får först lösa problemen på egen hand och sedan relatera dessa till de historiska lösningarna. På detta vis skulle de ges möjlighet att reflektera kring sin egen kunskap i ett historiskt sammanhang. Förslaget skulle även ge eleverna möjlighet att utveckla sin förmåga att analysera och värdera strategier samt kommunicera och bedöma matematiska resonemang. Dessvärre kvarstår punkt 1. Jag fann att de flesta problemen var för svåra att formulera och rättfärdiga inom den gymnasiala skolan. Detta är både utifrån elevernas motivation[98] men även med bas i själva komplexiteten inbyggt i problemet: eleverna behöver tolka problemet i en kontext de ej är bekväma med eller troligen har erfarenhet av (astronomi).

Detta liknar de problem Delice (2003) redogjorde för angående att rita diagram. Delice hävdar i sitt arbete att elever behöver mer stöd med denna process, främst på grund av att problemen oftast innehar en inneboende antagande om elevernas förkunskaper. De förväntas känna till och ha kunskaper kring hur det fall som presenteras ser ut. Att rita ett diagram är enligt Delice, och även mig, inte helt trivialt. Om något är det detta steg som är en av de mest vitala stegen i hela proceduren[99].

Hur kan vi uppfylla de punkter som stadgas av Skolverket om eleverna inte kan anknyta till problemen? Hur ska de kunna bli ”motiverade” av problemet om de inte ser poängen med dess inklusion? För min del tycker jag att det är glasklart att jag inte kan presentera ett sådant historiskt problem utan att i något skede av processen redogöra för historien och dess kontext. Enligt mig finns det dock inte mycket stöd från Skolverket angående en sådan metodik. Anledningen till att det kan vara svårt att finna historiska problem i läroböcker m.m. är därmed möjligen inte mer än en enkel konsekvens av samma svårighet jag upplevt under arbetets gång; att finna problem som uppfyller alla kraven och ambitioner Skolverket har på de historiska problemen. Problemen ska användas för att vidare fördjupa elevens kunskap inom ett område,

[97] Naturligtvis är det i många fall svårt att säga vad dessa ens skulle vara från första början. Det skrivna ordet kan bara bära en så långt i vissa resonemang. Vad var *egentligen* de antika grekernas syn på tal? Vad var deras syn av irrationella tal? I flera fall saknas även originalversioner av vissa matematiska verk, såsom Elementen. Hur säkra är vi på att de ursprungliga tankegångarna bevarats? Hur äkta och trovärdiga är de versioner vi har tillgång till idag? Dessa frågor är svåra att besvara, särskilt i brist av en kontext. Jag lämnar sådana diskussioner till experter på respektive område.

[98] Problemen är inte direkt relaterade till elevernas vardag, såvida inte en individ är intresserade av astronomin från första början.

[99] Självfallet är lösningen på detta att presentera astronomin och ge en kontext för eleverna. Detta leder dock ännu in på samma besvär som punkt 1 och punkt 2. Vad är det som ska ingå och till vilken grad? Varför ska det ingå? Helt enkelt måste läraren själv besluta och tillämpa de didaktiska frågeställningarna inom en redan snäv tidsram. En sådan reflektion är enligt mig inte något som ska göras i sin hast eller utan utbyte med opponenter.

låta dem reflektera kring olika matematiska begrepp relationer inom samhället samt agera motiverande för individen från en vardaglig[100] kontext.

Jag fann därmed mig själv en aning tvingad till att välja en matematisk fördjupning inom ett område av trigonometrin som inte föll inom den antika historien men som ändå hade rötter i den tiden. Ett område som kan vidareutveckla kunskaper och tillämpningar av trigonometrin och visa på dess användbarhet i en konkret situation. Ett område som inte är alltför svårt att begreppsliggöra och förklara, som förefaller naturligt för eleverna. Jag önskade även fördjupa mina egna kunskaper inom ett område som jag själv inte kände till alltför väl. Det var vid denna stund som följande frågeställning dök upp i mina tankar: ”Kan jag ge exempel på tillämpningar av trigonometri?”

Likt Kamber och Takaci (2018) undersökte elevernas kunskaper kring trigonometrins tillämpbarhet fann jag mig själv i en liknande situation, dock via en introspektion. Jag kan namnge en del områden, dock skulle de flesta av dessa vara antingen teoretiska eller abstrakta. Ändamålet flyttades till att finna en tillämpning som var inte alltför långt borta från vardagen. Frågan omformulerades även till att istället handla om den egna kunskapen, snarare än en tillämpning av den via problemformuleringar för eleverna. Jag ämnade införliva en ny kunskap som skulle kunna användas för att exemplifiera matematikens användbarhet rent samhälleligt sett. Det tog en god tid men i slutändan föll mina tankar in på den *sfäriska trigonometrin*.

Likt tidigare var det inte lätt att veta vad det var som väntade. Den sfäriska trigonometrin verkar vara, åtminstone såvitt jag har kunnat utläsa, en ovanlig gren av matematiken att ta del av. Van Brummelens bok (2013) talar för sig själv med titeln: The Forgotten Art of Spherical Trigonometry. Jag önskar kortfattat redogöra för läsaren hur min syn på trigonometrin ändrades av att studera sfärisk trigonometri. Onekligen har det gett oss en utökad förståelse av hur trigonometriska begrepp kan generaliseras till andra ytor än det kartesiska koordinatplanet. Att detta sedan kan tillämpas för att relatera positioner på klotet till varandra (visserligen approximativt) är väl bara en av de användningar som det finns av området. Jag personligen dock är inte så värst intresserad av tillämpbarheten i sig. Det framgår troligen för läsaren att mitt huvudintresse av matematik inte ligger enbart i tillämpbarheten utan även i den teoretiska och abstrakta aspekten. På sätt och vis upplever jag matematiken, åtminstone från mitt perspektiv, vara mer likt konst än en empirisk vetenskap.

Jag har alltid älskat att bygga sandslott. Dessa ackompanjeras med hela städer av sand, möjligen med växter och grönt. I vissa fall bildades städer likt Venedig med kanaler som löpte genom kärnan och delar av verket. Genom sin skapelse skriver man en historia, en saga om relationer mellan delar av sin stad. Matematiken ger mig en liknande känsla. Varje definition, varje sats och axiom, skapar och bygger upp en hel ”värld”. Matematiken ger oss oändliga möjligheter att skapa och relatera fenomen i sinnets värld, en fantasi som ligger bortom alla gränser. Den sfäriska trigonometrin har gett mig möjligheten att ta del av en helt ny ”värld” att utforska och förstå. Jag hoppas att läsaren också har funnit liknande känslor, om visserligen med andra intentioner än mina egna. Vad läsaren väljer att använda den sfäriska trigonometrin till lämnar jag helt i dennes händer och sinnen. Är ändå inte detta vad som gör matematiken till en helt underbar konst? På hur många vida sätt den kan tillämpas och tolkas inom olika områden? Hur många världar det finns?

---

[100] Det kvarstår en svår diskussion om innebörden av vardaglig. Detta ord tycks för min del vara svår att definiera, särskilt om varje individ har en annorlunda definition av ”vardag”. Troligen skulle ordet i sig förtjäna en långtgående analys i relation med det matematiska innehållet. Här har jag valt att tolka ”vardaglig” som att ett koncept är både tillgängligt och närvarande i en individs vardag, även om den ej är problematiserad utifrån matematikens perspektiv. I relation till styrdokumentet bör det även tilläggas att ett begrepp är ”vardagligt” i en större grad, dvs. för flera individer i gruppen. Astronomi är tillgängligt men inte nödvändigtvis närvarande i någon större grad för en given grupp.

8.4 Om vilken definition som är bäst lämpad att börja med

En frågeställning som har varit aktuell under längre tid är den angående huruvida det är bäst att inleda med att definiera sinus/cosinus med rätvinkliga trianglar eller enhetscirkeln. Diskussionen kan mer eller mindre sammanfattas med följande centrala punkter:

- Det finns belägg för att rätvinkliga trianglar är en bättre utgångspunkt i de fall där syftet är att bestämma sidor och relationer i en triangel.
- Enhetscirkeln kräver i de fall en lärare väljer att använda den en stark koppling mellan rätvinkliga trianglar och cirkeln.
- Detta rekommenderar flertalet författare att eleverna uppnår via vinkelmätning (med stöd av en båge). Må det så vara via radianer eller grader (med snöre/piprensare respektive gradskiva).
- Det finns stöd för att rätvinkliga trianglar → enhetscirkeln är den vanligaste ordningen i Storbritannien och Turkiet (baserat både på kursplaner och intervjuer). (Delice, 2003). I Sverige är det de rätvinkliga trianglarna som utgör introduktionen enligt kursplanen. (Skolverket, 2011).
- Historiskt sett utvecklades den rätvinkliga definitionen från cirkelgeometrin. (van Brummelen, 2009; Bressoud, 2010).

För en mer utförlig presentation av resultaten kan läsaren ta sig en titt på resultatdelen igen.

Går det att säga vilken metod som är bättre?

Jag finner att det fortfarande är oklart huruvida vi kan säga att en modell är bättre än den andra att introducera med. I nuläget skulle det behövas mer gedigna undersökningar innan det går att säga att den ena metoden är bättre än den andra. I grunden baseras detta på att Kendal och Staceys slutsatser skär sig mot varandra. I ena stunden säger de att rätvinkliga trianglar ger bättre resultat som eleverna håller kvar längre i minnet för att sedan gå över till att inte rekommendera den över cirkelgeometrin.

Weber (Weber, 2005; Weber, Knott, & Evitts, 2008) samt Moore och LaForest (2014) varnar även för att se deras resultat som ett belägg för att enhetscirkeln är bättre överlag. Det är utifrån premissen att lektionerna byggs upp utifrån ”procept” och resonemang med samvariation som deras resultat är giltiga.

Vad är din intention?

Vilken metod som är “bäst” är inte nödvändigtvis något som går att svara på direkt utan en funktion av vilken kontext som åsyftas. Dessa representationer har sina styrkor och som Kendal och Stacey (1997) samt Brown (2005) visar, sina svagheter. Den metod som är bäst lämpad är en fråga som bäst lämnas till var lärare med vissa uppmaningar;

- Varför väljer du den metoden?

  Valet av metod måste vara lämpad för det du önskar få ut. Ifall du önskar mäta och bestämma trianglar är det troligen bättre att introducera med rätvinkliga trianglar. Detta står visserligen i stark kontrast med Kendal och Staceys slutsatser men om jag ska vara helt ärlig är deras slutsatser ett hopkok av motsägelser. Att i ena stund säga att rätvinkliga trianglar är överlägsna för de ändamål de satt upp och sedan inte göra mycket av detta kan åtminstone för min del, upplevas en aning udda.[101]

[101] Minns att enhetscirkeln i Australien under denna tid hade en mer central roll än den har i Sverige, den nyttjas även för att lösa trianglar genom att skala en ekvivalensklass av koncentriska cirklar. Därmed är jämförelsen inte helt proper utifrån att

Om din intention istället är att belysa en koppling mellan koncentriska cirklar, mellan vinkelbegreppet och rätvinkliga trianglar via en geometrisk process kan det vara av intresse att använda enhetscirkeln.

- Hur undervisar du metoden?

  Som Kendal och Stacey (1997) illustrerade finns det en viss bättre behållning av kunskapen när läraren använder rätvinkliga trianglar. Författarna lyfter fram att detta har sin grund i att enhetscirkeln innehåller mer delsteg och begrepp som måste internaliseras av eleverna för att nyttjas till sin fulla kraft. Brown (2005) ger oss tillgång till flera exempel av detta, med elever som placerar referenstrianglar åt fel hål, i fel skala, med fall av felaktigt markerade vinklar eller brist av vad argumentet ens är för de trigonometriska funktionerna. Kort och gott finns det fler möjligheter att anamma felaktiga och inkonsekventa modeller med enhetscirkeln.

  Weber (Weber, 2005; Weber, Knott, & Evitts 2008) samt Moore och LaForest (2014) lyfter fram enhetscirkeln som utgångspunkt för sin metodik. De varnar dock i samtliga arbeten för att tolka detta som att det alltid är överlägset att inleda med enhetscirkeln. Här följer ett längre blockcitat om detta ämne;

  Despite our focus on circles, we caution readers not to conclude that circle trigonometry is more important than right-triangle trigonometry. Our research suggests that, as teachers consider a coherent introduction to trigonometry, using the unit circle is more suitable for an approach that builds on angle measure and fundamentally **involves ideas of measurement**, **covariation**, and **equivalence**. However, both contexts offer many important applications and uses of trigonometric functions.

  (Moore & LaForest, 2014, s. 622).[102]

Författarna fortsätter direkt efter detta med att förtydliga vad för delar av rätvinkliga trianglar som är av vikt:

> Thus, the ideas presented here can and should be extended to using trigonometric functions in right-triangle contexts, particularly in exploring similarity and giving meaning to the trigonometric ratios typically introduced within a right-triangle context.
>
> (Moore & LaForest, 2014, s.622).

Med andra ord är detta en **om-**sats. Författarna hävdar att för att uppnå önskade resultat måste kursen utgå från idéer av "procept" samt resonemang med samvariation. Slutsatsen överlag är alltså att en lärare måste koppla ihop representationerna via geometriska processer för att nå det önskade resultatet.

enhetscirkeln nyttjas för mer än den gör i svensk kontext. Utöver detta skulle jag anse att arbetet till slut avvek från sin frågeställning och istället blev en fråga om det är bäst att bestämma rätvinkliga trianglars sidor genom att skala ner en mängd av koncentriska cirklar eller genom att använda rätvinkliga definitionen av sinus respektive cosinus. Jag skulle då vara förvånad om det visade sig att den förstnämnda metoden inte var sämre än den senare ty den kräver bara multiplikationer, divisioner samt definitionerna. Enhetscirkeln kräver placering av vinklar, skalering, Pythagoras sats och sedan i någon mening, samma begrepp som den rätvinkliga definitionen använder när en student väl skalat ner triangeln.

[102] Jag la till fetstilen.

Studiernas problem

Jag önskar dock själv lyfta fram en varning till läsaren: dessa artiklar har alla utgått från data som saknar kontrollgrupper eller som i någon mån kan anses vara jäviga.

Kendal och Stacey (1997) har inte haft med en kontrollgrupp i sin studie vilket alltid lämnar en öppen frågeställningen huruvida det är deras eget lektionsmaterial som orsakade effekten eller inte. Om en kontrollgrupp visar sig ha högre medelvärde än resten av grupperna skulle slutsatserna vara problematiska.

Utöver detta är det oklart hur lektionerna i fråga är utformade eller ens vad för material som ingår. Kendal och Stacey (1997) definierar de grundläggande metoderna för att lösa trianglar och skriver sedan att de konstruerat 20 lektioner på 45 minuter var men presenterar inte utformningen av dessa. Frågan är om detta kan anses tillförlitligt? Kan vi dra några slutsatser angående hur den beroende variabeln (elevernas studieresultat) har påverkats av val av metod eller utformningen av materialet i sig? För att hantera denna fråga bör jag först precisera om huruvida frågeställningen de ställer egentligen besvaras; “vilken metod ska man använda för att introducera trigonometri givet att intentionen är att lösa rätvinkliga trianglar”?

Detta beror helt och hållet på hur deras lektioner var konstruerade samt huruvida förutsättningarna för en ANOVA-analys ens var uppfyllda. De förutsättningar som är av intresse skulle vara oberoende, normalitet samt att varianserna mellan klasserna är ungefär densamma. Detta hanterar inte Kendal och Stacey i sitt arbete till fullo vilket lämnar denna fråga svår att besvara. Under antagandet att testet ej är missvisande tycker jag att det går att tolka resultatet som att det är bättre att lösa trianglar med den rätvinkliga definitionen för sinus/cosinus.

Slutligen, lämnas vi med problemet av generaliserbarhet, den externa validiteten för studien. Experimentet utfördes på en enda skola där en av författarna var lärare. Med andra ord var urvalet ett bekvämlighetsurval och kan inte anses representativt. För övrigt är metoden en aning oklar vilket orsakar besvär med att generalisera det till gemene klassrum.

I Weber (2005) var det forskaren själv som undervisade kursen som utsattes för en intervention. Med andra ord har Weber gjort ett bekvämlighetsurval där det är den egna kursen som får utgöra studium för undersökningen. Detta lämnar dock en öppen frågeställning kring huruvida en person kan vara neutral och objektiv i att analysera sin egen kurs. Weber påpekar att på grund av sin begränsade urvalsstorlek (41 studenter, varav 4 av dem intervjuades) bör läsare vara försiktiga med att dra generella slutsatser (Weber, 2005, s.

8.5 Om vinkelbegreppet

Genom denna litteraturöversikt har flertalet författare lyft fram behovet av att utgå från vinkelmätning. De har problematiserat att elever, båda unga och äldre, från åk 6 till och med lärarstudenter, uppvisar besvär med vinkelmätning. (Fi, 2003; Weber, 2005; Akkoc, 2008; Weber, Knott, & Evitts, 2008; Tovö & Ekström, 2010; Moore, LaForest & Kim, 2012; Moore, 2013; Moore & LaForest, 2014; Yigit, 2014; Martinez-Planell & Cruz, 2016; Kamber & Takaci, 2018; Wolbert & Moss, 2018).

Radianer i litteraturen

Särskilt har vissa menat på att radianer är ett begrepp som undgår flera studenter i utbildningen. Vissa menar till och med på att radianer är en nödvändig del att ta till sig i syftet att ens förstå trigonometri överhuvudtaget på en högre akademisk nivå. (Fi, 2003; Wolbert & Moss, 2018).

Deras förslag för att befästa radianer anser jag goda, på grund av att de inte enbart utgår från tidigare kunskaper hos eleverna utan även kopplar de trigonometriska funktionerna till en geometrisk process. Det jag däremot finner problematiskt är att genom litteraturen finner jag att det existerar en viss tendens att kategorisera elever och studenters tänkande som “felaktigt”, främst utifrån en formell definition av radianer.

Det som väckte min första tanke inom detta var att Wolbert och Moss (2018, s.274) på allra första sidan lyfter fram följande problem:

> We informally sampled twenty-four college students—all preservice middle and high school mathematics teachers—and asked them to write the definition of a radian. Two of these students responded that a radian is the measure of a central angle of a circle with an arc length equal to the circle’s radius. Nine students wrote that they simply did not know. The remainder of the students did not recognize a radian as an angle measure or a measure of rotation, defining it instead as an arc length, a circumference, the “middle point of a shape,” or specific points on a unit circle. Several students mentioned in their responses: “the measure of a circle in”; “divided by 180”; “it has to do with a circle, like $\pi/6$, $\pi/2$, etc.”
>
> (Wolbert & Moss, 2018, s.274)

Liknande tankar lyfts fram av flertalet författare som beskriver att elever ser radianer i termer av grader (Fi, 2003; Weber, 2005; Topçu m.fl., 2006; Akkoc, 2008; Weber, Knott, & Evitts, 2008; Kamber & Takaci, 2018). De anser att eleverna besitter enbart en instrumentell förståelse av begreppet och lyfter fram detta som en stor brist hos deras deltagare. Men vad är det som menas med en radian? En definition som jag funnit och som verkar vara det Wolbert och Moss (2018) vill uppnå med sitt lektionsupplägg är följande:

Definition. En radian är den vinkel som mäts upp i cirkelns centrum av en båge som är ekvivalent i längd med cirkelns radie.

Här relateras alltså vinkeln till en viss båge på ett sådant sätt att radien utgör enheten. Jag bör dock nämna att detta inte är den enda definitionen som finns av begreppet radian.

Definition. En vinkels mått i radianer är definierad som den sträcka utmed enhetscirkelns rand som spänns upp av vinkeln.

Flera forskare väljer att definiera vinkeln med hjälp av bågar, på samma sätt som elever undervisas med en gradskiva. Forskarna relaterar en given vinkel till hur stor proportion bågen utgör av en hel cirkel. Jag tolkar detta som att på något vis, ser vi en cirkel som en representativ figur för rotation, för ett helt varv. I sådana fall kan vi knappast anse att vinkeln kan säras från vinkelmätningen, utan konstrueras av processen. Men i sådana fall är sträckan i någon mening en representant för vinkeln. I alla fall om fokus ligger på hur stor ”proportion” sträckan är av ett helt varv.

Baserat på Wolbert och Moss bakgrund tycker jag mig kunna sluta mig till att de anser denna senare definition felaktig. Baserat på deras artikel skulle de se detta som en felkategorisering där radianen definieras som sträckan och ej tvärtom. Detta blir ännu klarare med följande citat:

> They may **incorrectly** believe that a radian is a **length** rather than a **measure of rotation**; that larger circles have larger radians; that a **radian is the arc formed by a central angle of a circle**; or that a radian is the **sector formed by a central angle.**
>
> (Wolbert & Moss, 2018, s.274–275)

Vinkelbegreppet i allmänhet

För att förklara detta vidare tror jag det är nödvändigt att vi rör in oss på vinkelbegreppet i allmänhet. I Yigit (2014) finner jag en analys av lärarstudenters syn på vinklar. Yigit anser att deltagarna ej kan kategorisera vissa vinklar, såsom exempelvis 180 graders vinklar. Författaren menar i slutändan på att lärarstudenterna saknar en full kategorisering av möjliga vinklar som existerar. Visserligen menade Yigit även på att detta inte markant påverkar deras resultat i att producera fungerande scheman i trigonometrin (s.271–273). Utöver detta inser Yigit klart att det är strålarna (2-linjer) som ligger till grund för deltagarnas begreppsbild av en vinkel: deltagarna i studien beskrev en vinkel som en ”sträcka” eller ”öppning” mellan två distinkta linjer. Yigit (2014) själv kategoriserade detta som området i allmänhet. Jag håller inte riktigt med Yigit i den kategoriseringen men i vilket fall lyfte Yigit upp följande definition.

Definition. the space (usually measured in degrees) between two intersecting lines or surfaces at or close to the point where they meet.

Alltså kan det mycket väl vara korrekt att se en vinkel som ett område! Denna definition begränsar dock vilka vinklar vi kan erhålla. Det existerar inte vinklar större än 180° med denna definition. Det ger oss även ett svårt val att göra när det kommer till Wolbert och Moss citat. Är sektorn inte en representant för vinkeln? Detta brukar på svenska dock benämnas med vinkelfält. Det finns författare som anser att denna definition är den bästa (Tanguay & Venant, 2016).

Jag anser att det studenterna egentligen önskade uttrycka i Yigits studie (2014)[103] är en alternativ definition, baserad på själva processen av att mäta upp en vinkel:

[103] För att påminna läsaren uttryckte deltagarna i Yigits (2014) studie att en vinkel är en typ av ”avstånd mellan två linjer/vektorer med en gemensam punkt”. Dock inte ett rakt avstånd, vilket kopplar mina tankar till cirkelbågar.

Definition. En vinkel är den storhet som utgörs av förhållandet mellan längden på en cirkelbåge och cirkelns radie.

Här hänvisas den sträcka som mäts upp av en cirkelbåge mellan två strålar som utgår från en gemensam punkt. Denna tanke av en vinkel finns även hos forskarna, där Fi är mest explicit med att beskriva radianer på exakt detta vis (Fi, 2003, s. 94). Visserligen existerar ett liknande tankesätt hos alla forskare som utgår från en idé av vinkelmätning via bågar som en fundamental utgångspunkt för trigonometrin (Weber, 2005; Weber, Knott, & Evitts, 2008; Moore, LaForest & Kim, 2012; Moore, 2013; Moore & LaForest, 2014; Martinez-Planell & Cruz, 2016).

Andra författare utgår mer från rotation (Brown, 2005; Yigit, 2014) som idéen för vinklar. Wolbert och Moss (2018) är en aning tvetydiga i sin definition, där deras lektionsmaterial är baserat på båglängder men deras egen syn från citatet är mer likt rotationer. Wolfram Alpha ger oss följande definition från Weisstein:

Definition. Given two intersecting lines or line segments, the **amount of rotation** about the point of intersection (the vertex) required to bring one into correspondence with the other is called **the angle** θ between them.

Se även att med enhetscirkeln introducerar utbildningen helt plötsligt *riktade vinklar*. Alltså, plötsligt finns det en riktning till vinklarna, positiva och negativa. I alla tidigare kontexter har en sådan distinktion ej varit nödvändig. Men är detta en och samma sak som den definition som Weisstein ger? För att inte tala om de vinkelbegrepp som ligger utanför gymnasiets ramar, såsom Eulervinklar eller Tait-Brytan vinklar.

Poängen är följaktligen: *alla dessa definitioner är korrekta.*

Det finns inte ett vinkelbegrepp. Det finns flera, varav det som väljs beror på kontexten som arbetas med. Observera på egen hand att i flera definitioner definieras en vinkel i termer av någon form av mätning (“amount of rotation”) medan i andra ser vi det som ett objekt i sig utan en tillhörande process (“space between two intersecting lines … “). I likhet med de teoretiska ramverken kan vinkelbegrepp ses som både en process och ett objekt. Mer konkret finner jag att beroende på författare existerar det en ontologisk skillnad mellan vinklar och vinkelmätning, m.a.o. mellan produkten och processen som ger produkten. Följande frågeställning dyker upp i tanken:

“Vad är skillnaden mellan en vinkel och vinkelmätningen?”

Hos vissa författare existerar inte denna skillnad. Vinkelmätningen är det som konstruerar och definierar vinkeln. (Fi, 2003; Weber, 2005; Weber, Knott, & Evitts, 2008; Moore, LaForest & Kim, 2012; Moore & LaForest, 2014; Martinez-Planell & Cruz 2016). Andra författare ser vinkeln som strikt särad från vinkelmätningen och att den i någon aspekt existerar oberoende av en process som konstruerar den. (Tanguay & Venant, 2016).

Utifrån Gray och Talls (1994) begrepp av ambiguitet samt Sfards (1987, 1991) dualitet är det inte helt oväntat att vinklar också innehar liknande tvetydiga egenskaper. Alltså, begreppet kan ses både som en process och ett objekt. Detta tycker jag mig se återspeglas genom litteraturen. Det som för min del kan anses problematiskt är när en eller annan författare väljer att kalla en viss syn “felaktig”. Jag anser att de problem de lyfter fram inte är problem alls. De är snarare illustrationer av att författaren och deltagarna har anammat annorlunda bilder och definitioner av begreppet “vinkel”.

Utöver detta anser jag det vara av stort intresse för en lärare att först försöka förstå vad det är för idé av en vinkel en elev faktiskt har, innan läraren går vidare i processen. Som jag har redogjort för här, kan detta leda till konflikter som inte nödvändigtvis är problem alls. Hade lärare och elev klargjort huruvida de talade om samma sak från första början hade detta inte varit något besvär i någon mening. Det behöver inte vara fallet att eleverna gör “fel”. De innehar helt enkelt en annan korrekt definition av vinkelbegreppet som inte är helt kongruent med ett annat.

Oron med lärarstudenterna ser jag som befogad. Inte på grund av vinkelbegreppet i sig utan snarare utifrån lärarens roll. Jag anser att läraren i någon mening är en företrädare för den formella matematiken. En lärare behöver insikt av att vinkelbegreppet innehar flera betydelser och även känna dessa väl.

För att avsluta detta delkapitel lämnar jag läsaren med följande fråga:

“Hur definierar du en vinkel?”

8.6 Om elevens begreppsförståelse och hinder samt lärarverktyg

I denna del av diskussionen kommer jag föra en diskussion kring de didaktiska implikationer som artiklarna mer eller mindre framför. Kortfattat är en av de viktigaste slutsatserna från översikten att trigonometri består av och kräver en mängd av representationer. Det är en nödvändighet för att kunna säga att en individ "bemästrat" området, i någon bemärkelse. Baserat på Sfards (1987, 1991) ord är det nödvändigt att individer kan röra sig mellan operationella och strukturella tankesätt för att ens kunna bemästra matematiken. Såsom det beskrivs i sammanfattningen av kapitel 4 är de teoretiska ramverken mer eller mindre enig i att de matematiska begreppen kräver ett schema, en flexibel tankeverksamhet som kan röra sig mellan att använda symboler och notationer som objekt i sig eller som representationer för processer (må de vara geometriska, numeriska, algoritmiska, aritmetiska eller annat). (Gray & Tall, 1981; Dubinsky m.fl., 2014).

Eleverna behöver en mångfacetterad bild och undervisningen behöver förändras

En del av litteraturen hävdar att eleverna respektive studenterna enbart kan lyckas med trigonometrin om de innehar flera representationer av begreppen. Det gäller inte att eleverna ska anamma den ena eller den andra definitionen, eller för den delen bli starka med en representation utan snarare behöver eleverna utveckla en nyanserad och *mångfacetterad bild av trigonometrin*. (Fi, 2003; Brown, 2005; Weber, 2005; Weber, Knott, & Evitts, 2008; Moore & LaForest, 2014; Kamber & Takaci, 2018).

Ovanstående författare lyfter även fram tankar av att rådande traditionell undervisning i någon allmän mening inte lyckas med att koppla begreppen eller bygga på tidigare kunskap. Med andra ord, blir kunskapen särad och distinkt, som om de tillhörde olika scheman.

Jag anser efter att ha studerat artiklarna att i grunden hävdar författarna att lärare behöver lägga mer vikt på att själva identifiera begrepp som processer och objekt. Som lärare behöver du vara medveten om denna översättning för att med intention lägga upp materialet på ett sådant sätt att elever kan koppla ihop begreppen som önskat. Weber (Weber, Knott, & Evitts, 2008) framför även att eleverna behöver få tid från första början att göra dessa kopplingar och bygga på en "proceptuell" förståelse av de matematiska begreppen. Det ingår alltså en kritik av läroböcker och material. Läroböckerna anses i vissa fall inte har problematiserat hur matematiken blir till hos individen utan presenterar färdiga modeller ex nihilo[104] och utan koppling till tidigare kunskaper. Om jag ska besvara frågan, "hur lägger man grunden för en mångfacetterad bild av trigonometrin" svarar jag följaktligen:

Genom att koppla ihop begreppen och se dem som process och objekt. Ge eleverna möjlighet och tid att arbeta med begreppen på detta vis.

[104] Ur tomma intet

Vad är det för kopplingar vi vill se hos eleverna?

Detta leder in oss på en av de viktigare delarna av diskussionen. Om syftet är att bilda en mångfacetterad bild av trigonometri behöver en lärare ha det klart för sig vad detta innebär. Jag anser att detta i grunden är samma fråga som denna: Vad är det för byten av representationer som vi lärare vill att eleverna ska kunna utföra? Jag har presenterat författare som anser att eleverna har en fragmenterad syn av trigonometrin men vad exakt är det för bitar som behöver kopplas ihop?

Jag anser att Brown (2005) ger oss den bästa sammanfattningen av ett svar till frågan. Jag presenterar här nedan en modifikation av hennes modell som är en aning mer heltäckande för det vi hanterar i svenska skolan. Minns att Brown skrev att hon enbart tittade på inledande trigonometri och därmed ej inkluderade vissa representationer.

Till / Från	Vinkel	(Sinus)Värde	Enhetscirkel	Sinuskurva	Rätvinklig triangel
Vinkel	Radian till grader	Tabellvärden eller miniräknare.	Rotera, hitta slutpunkter efter bågrörelse. Sätt ut vinkel och läs av y-värde	Läs av x-axeln, rita på kurvan	Rita referenstriangel med given hypotenusa. Mät vinkel med gradskiva.
(Sinus)Värde	Tabellvärde eller använd miniräknaren. Tänk på periodicitet.	Uttryck i andra enheter	Välj koordinataxel, läs värdet och rita punkter	Hitta höjden på y-axeln, rita och justera	Rita de riktade höjderna och koppla ihop med origo. OBS, flera fall!
Enhetscirkel	Läs av sinus/cosinus värdet, ta inverser och justera	Välj en koordinataxel och läs av värdet	Likformiga, koncentriska cirklar	Välj värde, använd höjden som en punkt på sinuskurvan.	Givet en koordinat, projicera punkten på x-axeln och dra linjesegment till origo från koordinaten.
Sinuskurva	Läs av värdet x-axeln	Läs av värdet på y-axeln	Läs av vinkeln och rotera på cirkeln	Konvertera mellan sinus/cosinus kurvor	Y-värdet är höjden i en rätvinklig triangel med hypotenusan 1. X-värdet är den motstående vinkeln.
Rätvinklig triangel	Mät vinkel med gradskiva eller approximera. Använd geometriska förhållanden	Läs av den riktade höjden i den rätvinkliga triangeln	Använd hypotenusan som cirkelns radie. Sätt radien som enheten.	Sinus = höjden / hypotenusan Den riktade höjden och motstående vinkel ger oss y- respektive x-värdet för sinuskurvan	Likformighet Rotation

Figur 34. En modell för representationsbyten. Baserad på Browns modell (2005, s.133).

Denna modell är en översatt version av Browns tabell som jag även adderat lite punkter till. Denna addition såg jag nödvändig baserad på den litteratur jag presenterat i denna översikt. Additionen av rätvinkliga trianglar förklarades i kapitel 7.1.1. baserat på Browns triangelmodell. Alltså använder jag en kombination av den rätvinkliga definitionen samt riktade avstånd i relation till en rotationsvinkel och en referenstriangel för att beskriva och relatera begreppen.

Denna presenterade modell är dock en aning annorlunda från kapitel 7.1.1. där självrefererande fall förekommer, såsom vinkel till vinkel. Det är önskvärt att förklara vissa av tilläggen.[105]

Från vinkel till vinkel

Från en vinkel till en vinkel står det ”radian till grader”. En vinkel kan uttryckas med flera olika mått, varav detta är enbart en omvandling. Se exempelvis att under franska revolutionen och första franska kejsardömet sattes den räta vinkeln till 100 grader, vilket i sin tur ger oss ytterligare ett mått för vinklar, ”gon”[106].

Från värde till värde

Genom litteraturen finner jag att det finns en intention av att uttrycka värden på olika sätt. Exempelvis lyfter Moore och LaForest (2014) fram förslaget att konvertera en längd på ett sådant sätt att den är uttryckt med radier. Detta kan visserligen ses som en omvandling mellan värde till radianer, men en sådan tolkning återfinns inte hos Brown (2005). Helt enkelt fick denna tanke få plats i denna cell för att illustrera ett byte av ett värde från ett annat värde via någon form av transformation eller enhetsbyte. Det som Brown (2005) dock menar med denna kolumn är sinus/cosinus värdet (Brown, 2005, s.132). Jag väljer att istället se detta som ett reellt tal i denna cell, vilket är enhetligt med litteraturen där författarna ser sinusfunktionen som en funktion mellan reella tal. (Weber, 2005; Akkoc, 2008; Kamber & Takaci, 2018). Cellen rödmarkerades för att belysa skillnaden i tolkning för detta specifika fall. Syftet är alltså att elever ska kunna utföra enhetsbyten mellan värden, såsom grader till radianer, eller mer konkret: räkna med radien som enhet i en given cirkel.

Från enhetscirkel till enhetscirkel

Litteraturen för även fram att elever har besvär med att se “enheten i enhetscirkeln” (Brown, 2005; Weber, 2005; Weber, 2008; Akkoc, 2008; Moore, LaForest & Kim, 2012; Moore, 2013; Moore & LaForest, 2014). Ett mål för en lärare måste därmed vara att lägga mer fokus på att enheten i enhetscirkeln kan ses som radien i sig. Oberoende av vilken cirkel vi väljer kan vi fortfarande finna en mängd av likformiga trianglar som alla ger samma sinus respektive cosinusvärdet för en vald vinkel mellan en stråle och positiva x-axeln.

Från sinuskurva till sinuskurva

I detta fall har jag tagit mig en aning mer frihet än jag borde gjort. Det står egentligen “sinuskurva till sinuskurva”. På sätt och vis skulle det vara udda att se en given sinuskurva bli till en annan. Vad jag försöker lyfta fram i denna del är snarlika de som framförs av Zengin, Furkan och Kutluca (2012). I figur 29 illustrerades hur en sinusfunktions utseende ändrades med manipulation av flera parametrar. Alltså önskar jag i denna cell innehålla de fall där elever behöver internalisera hur en ändring av parametrarna påverkar utseendet på sinuskurvan. Exempelvis hur amplituden beror på en koefficient eller perioden påverkas av vinkelhastigheten.

[105] Idéen att utöka med rätvinkliga trianglar återfinns i arbetet från Tovö och Ekström (2010). Jag har dock inte har tolkat modellen på samma sätt. Brown beskriver på sidan 132 i sin avhandling att exempelvis ”värde” kolumnen angår sinus/cosinus värdet. Citatet är följande: “Figure 6 (Browns ursprungliga tabell) shows the types of processes involved in moving between an angle, **a sine or cosine value**, a unit circle graph and a sinusoidal graph.” (Brown, 2005, s.132). Jag har baserat min tolkning på Browns triangelmodell och utgick från idén av riktade distanser. Jag bifogar en länk till Tovös och Ekströms text för att läsaren själv ska kunna skapa sig en förståelse. http://ncm.gu.se/media/biennal/dokumentation/2010/resources/file/412a.pdf

[106] Även känd som nygrader.

Från rätvinklig triangel till rätvinklig triangel

Avslutningsvis önskar jag beskriva den sista cellen. Moore, LaForest och Kim (2012), Moore (2013) samt Maknun, Rosjanuardi och Jupri (2019) beskrev i sina verk en konstruktion av koncentriska cirklar med givna radier. De två första artiklarna inriktade sig på att relatera dem via koordinater medan det sista direkt anknyter till rätvinkliga trianglar. Vad de har gemensamt är att det finns en intention att likt fallet för enhetscirkel till enhetscirkel illustrera sambandet mellan likformiga trianglar med samma riktade avstånd. Med denna cell önskar jag på sätt och vis illustrera att sinus och cosinus är egentligen enbart namn på förhållanden som går att sättas upp mellan och inom rätvinkliga trianglar. Detta lägger grunden för en ekvivalensklass av rätvinkliga trianglar, som alla ger samma sinusvärde respektive cosinusvärde, oberoende av radien.

Rotationsaspekten innebär att eleverna ska själva kunna relatera riktningen på triangeln gentemot x- och y-axeln, dvs. de ska ha en förståelse för referenstriangelns placering i enhetscirkeln.

Algebra och trigonometri behöver förtydligas för eleverna

Delice (2003) ger oss även en modell för algebra och trigonometrisk manipulation. Jag anser att Delice lyfte fram ett par kärnfulla kommentarer som kommer vara till stor användning för en lärare.

Här önskar jag lyfta fram följande fyra punkter från Delices arbete:

- Grundläggande algebra (samt algebra överlag) påverkar hur eleverna löser trigonometriska problem. Elever behöver stöd med att internalisera algebrans begränsningar.

- Elevernas kategoriserar trigonometri och algebra i två olika scheman, särade från varandra där de substituerar det ena uttrycket med det andra baserat på arbetsminnets gränser.

- Att problematisera vad en förenkling ens innebär för eleverna. Ordet saknar en definition och enligt Delice skapas den med praktiska tillämpningar (Delice, 2003, s. 233). Delice hävdar att en lärare bör fråga sig själv vad som ens ”är en förenkling” och föra en sådan diskussion med eleverna i sin praxis.

- Eleverna behöver stöd med att rita diagram. Delice hävdar att det är den visuella representationen som lägger grunden för trigonometriska ordproblem och att denna i vissa fall innehar ett krav på kunskaper som ej är matematiska.

Jag håller med Delice i sina förslag till lärare. Detta baserar jag främst på egen erfarenhet av elever men även från Delice resultat. Dessa resultat var klart illustrerade i Delice arbete med en tydlig metod. Jag anser att dessa punkter kan komma att lägga grunden för en bättre lärarpraxis om de ges tid att utvecklas till beprövad erfarenhet sinsemellan kollegor.

Det föreligger dock ett besvär med Delice förslag. Att elever behöver stöd med diagram säger ingenting om hur en lärare kan ge dem stöd. Delice må ha identifierat besvären men inte gett några förslag på hur en lärare ska gå tillväga. Det faller alltså ännu en gång på läraren att med beprövad erfarenhet reflektera kring sin undervisning på ett sådant sätt att eleverna gynnas.

Verktygens roll

I grunden anser jag att det är svårt att säga exakt ”hur”. I denna litteraturöversikt har jag presenterat en del lektionsupplägg samt metodik som forskningen och litteraturen lyfter fram men det innebär ej att de utgör ett slutgiltigt svar.

Dessa metoder måste prövas av inte enbart forskare utan även lärare för att sedan finslipas via erfarenhet. Lektionsuppläggen är inte ens situerade i närheten av en skandinavisk miljö vilket lämnar frågeställningar om huruvida det föreligger skillnader mellan klassrumsmiljön. Därmed anser jag att dessa lektionsupplägg bör enbart agera som guidande förslag, idéer att vända sig till för att utöka sin repertoar. De ska integreras och behandlas samt göras till ens egen modell. Flexibel och anpassad till det klassrum en lärare arbetar i.

8.7 Om studiernas generaliserbarhet

Som jag redan diskuterat är Turkiet en aning överrepresenterad. Visserligen kan jag inte garantera att detta är fallet om jag inte önskar göra en analys av absolut hela den samlade mängden av artiklar som det finns inom området trigonometri och utbildning (vilket är över 35 000).

Innan vi talar om *hur* dessa resultat kan generaliseras så önskar jag först bemöta och problematisera en viktig premiss. Att fråga sig *hur* ett resultat kan generaliserar förutsätter nämligen att resultatet ***kan*** generaliseras.

Jag har inte kunnat hitta en enda artikel från något skandinaviskt land. Jag har sökt i Libris, SwePub, GUB samt NCM/NOMAD. Trots en användning av både svenska, norska och engelska ord förblir sökresultaten tomma på studier och artiklar inom närområdet. Det är därmed klart att flera av resultaten måste ifrågasättas, främst de som angick lärarstudenter. Det verkar därmed inte existera en ordentlig undersökning och analys av lärarstudenters begreppsförståelse inom trigonometri i en svensk kontext. Tovö och Ekström (2010) utförde visserligen en "undersökning" av sina lärarstudenter men jag kan inte anse att detta är en "studie" i samma bemärkelse som allt annat material jag inkluderat. Arbetet är uppbyggt på fel sätt, visar inte metoden eller urvalet och saknar klara indelningar. Jag tycker dock att det var relevant att inkludera arbetet på grund av att den ger oss åtminstone lite stöd i att uttrycka samma oro som Fi (2003) och många andra har.

En stor del av studierna är kvalitativa, vilket är helt väntat givet att forskarna försöker komma åt elevernas begreppsbilder[107], begreppsförståelse, begreppsdefinitioner och idévärldar. Det som är problematiskt däremot är att en större del av publikationerna utgår från ett bekvämlighetsurval. Forskarna har vänt sig till gamla kollegor eller använt kurser där de själva är lärare. Studierna har också ett problem med att nästintill alla är fallstudier där forskarna ibland enbart har tittat på en eller som mest ett antal skolor. Det är inte helt ovanligt att forskarna är eller har varit lärare på de skolor som ingår i studierna. Jag anser att vi troligen inte kan anse resultaten vara representativa i någon bemärkelse.

Detta tar dock inte bort värdet i någon större bemärkelse.

Syftet med denna litteraturöversikt var inte att bestämma i vilken grad elever uppvisar vissa besvär, även om jag nämnt antal och andelar i vissa fall. Frågeställningen utgår egentligen bara från existens av en företeelse, inte från hur utspridd den är. Jag anser därmed att resultaten fortfarande kan vara användbara för allmänheten. Jag anser särskilt att lektionsuppläggen är av stort intresse, enbart ur en idémässig grund. Dessa förslag kan en lärare själv modifiera eller anamma i sina klasser som bäst den vill. Utöver detta finns det ett mervärde i att organisera trigonometrin på ett klart sätt som Brown (2005) gjort. Det ger oss mer eller mindre ett sätt att prata om vad vi egentligen vill att eleverna ska kunna.

---

[107] Både i min samt Tall och Vinners mening (1981).

9. Slutsatser och sammanfattning

Översikten önskade ge en samlad bild av vad forskningen sammantaget har att säga om elevers uppfattningar och besvär i trigonometri. Utöver detta önskade jag även redogöra för vad för lärarresurser och lektionsupplägg som finns tillgängliga att bruka. Min ambition har varit att ge tillgång till en repertoar av pedagogiska verktyg. Detta menar jag i flera bemärkelser: som fysiska verktyg som piprensare, som digitala verktyg med GeoGebra och mentala verktyg med vetskap om elevernas uppfattningar. I denna del kommer jag presentera en sammanfattning av litteraturöversikten i sin helhet samt de slutsatser jag har dragit från verket i sin helhet.

- Elever uppvisar mångfaldiga besvär med samtliga delar av trigonometrin. Litteraturen hävdar det vanligaste problemet för elever är att koppla ihop alla de delar som utgör trigonometrin. Alltså, enhetscirkeln, rätvinkliga trianglar samt de trigonometriska funktionerna existerar i elevernas tankevärld som de vore separerade.

- Exempel på hur elever har svårt att koppla samman begreppen är att de oftast saknar flera representationer av sinus. Vissa individer definierar sinus utifrån enhetscirkeln, andra som förhållandet i en rätvinklig triangel, andra som riktade avstånd i en cirkel medan vissa ser det som koordinater (y-värdet, med eller utan enhetscirkeln i åtanke).

- En stor del av artiklarna utgår från ett teoretiskt ramverk där elevens kognitiva strukturer inom matematik innehåller tvetydiga betydelser. Vissa begrepp kan identifieras som objekt eller processer beroende på kontext och individ. I grunden ser författarna det som att ett begrepp blir till genom att en individ får arbeta med yttre stimuli i form av en aktion som via tid och möda internaliseras av individen till en process. När individen reflekterar och abstraherar denna process kan den komma att förtingligas till ett objekt som i sin tur används i andra aktioner och processer.

- Det finns en oro för att lärarstudenter, och även implicit lärare överlag, inte har de kunskaper som krävs för att undervisa i trigonometri. Jag kunde dock enbart hitta en enda studie (Topçu m.fl., 2006) som även inkluderade praktiserande lärare. Denna fann liknande resultat till det som uppvisades av lärarstudenter: svårigheter med radianbegreppet (ses i form av grader), periodicitet, icke-injektivitet, algebraiska manipulationer, trigonometriska funktioner som f: $R \to R$ samt innebörden av enhetscirkeln. Litteraturen anser att det är radianbegreppet som utgör den största bristen och kopplat detta till vinkelmätning. Forskningen implicerar även att bristen av en utvecklad syn av radianbegreppet ger studenter överlag besvär med att se “enheten” i enhetscirkeln (radien). På grund av att ingen skandinavisk forskning kunde hittas överhuvudtaget är det oklart hur situationen ser ut i Sverige.

- En rådande kritik av den traditionella undervisningen med lärobok är att eleverna inte ges tillräckligt med tid eller möjlighet att göra kopplingar mellan begreppen.

- Förslagen för att koppla ihop representationerna utgår främst från att använda vinkelmätning samt att grunda sin undervisning på matematiska begrepp som “procept”: både objekt och processer. Andra lektionsupplägg baserar sig på att eleverna själva ska konstruera kopplingen genom utforskande övningar.

- Det finns flertalet byten av representationer litteraturen lyfter fram mellan olika begrepp. Dessa sammanfattas av en modifierad modell som härrör från Brown (2005). Se sidorna 45 och 99 för en redogörelse av modellen. Sammanfattningsvis är intentionen att elever behöver tillgodogöra sig flera olika sätt att byta representationsformer mellan begrepp inom trigonometrin.

- Det är oklart huruvida det är bättre att inleda med rätvinkliga trianglar eller enhetscirkeln. Det verkar vara syftet samt upplägget som spelar störst roll för valet. Om en lärare väljer att använda enhetscirkeln först är det viktigt att koppla denna till vinkelmätning. Litteraturen redogör för att elever har svårigheter med att internalisera och visualisera trigonometrin vilket de anser kan lösas genom att arbeta med geometriska processer såsom vinkelmätning. Utöver detta bör en lärare snarast koppla enhetscirkeln till den rätvinkliga definitionen, antingen via projektioner på x- respektive y-axel eller via en konstruktion av rätvinkliga trianglar av samma hypotenusa kring origo.

- Memorering brukar ses som ett hinder av litteraturen om det saknar en geometrisk process bakom algoritmen. Det fanns dock inte mycket inom detta område att hitta.

- Miniräknare kan visas ha en positiv effekt på resultaten men vissa författare kritiserar verktyget utifrån att de trigonometriska funktionerna enbart blir ett knapptryck för eleven, en algoritm som tillämpas utanför deras förstånd.

- Digitala hjälpmedel kan ge en lärare flertalet sätt att stödja elever med visualiseringen av trigonometrin samt själva presentera och formge problem inom området. Litteraturen har haft en positiv synvinkel av program såsom GeoGebra och har kunnat visa att elevernas resultat påverkas positivt med en statistiskt signifikant skillnad. Elever är positiva till användningen av dessa dynamiska program. Det framgår dock inte om alla premisserna för de statistiska inferenserna är uppfyllda, men givet hyggligt stora datamängder bör dessa tester vara stabila även om premisserna är brutna.

- Algebra och trigonometri är ett område som det är svårt att hitta artiklar inom. Litteraturen anser dock att elever använder algebraiska knep mer än trigonometriska och skildrar dessa som olika kategorier av kunskap i sina arbeten.

- Elever kan behöva stöd med att rent allmänt anamma goda beteenden vid att lösa och förenkla algebraiska likväl trigonometriska uttryck. Detta inkluderar att läraren bör poängtera och diskutera med elever vad en förenkling innebär, om svaret är korrekt, vad för begränsningar algebra har samt belysa hur en viss problemsituation ska tolkas för att rita ett propert diagram. Litteraturen ger även förslaget att försöka visualisera trigonometriska identiteter med geometri och bilder.

10. Förslag till vidare forskning

För att avsluta denna litteraturöversikt kommer det presenteras ett antal förslag till forskning. Dessa förslag baseras på egna behov jag känt under arbetets gång. Med andra ord är det dessa saknar som jag haft svårt att hitta forskning inom under sökningarna.

Hur ser det ut för lärarstudenter egentligen?

Baserat på den tidigare kritiken av metoden är det av intresse för svenska samhället att bekräfta huruvida lärarstudenter också uppvisar samma problematik med vinkeldefinitioner och trigonometri överlag såsom det presenteras i vissa studier (Fi, 2003; Akkoc, 2008; Yigit, 2014). Att lärarstudenter bär på vissa begreppsbilder av trigonometri likväl vinkelmätning som ej nödvändigtvis är fullgoda för ändamålet kan komma att reproducera liknande resultat i deras framtida yrkesutövning. Det existerar visserligen en indikation på att detta är fallet, dock ej från en studie utan snarare än uppmaning från Tovö och Ekström. Under matematikbienallen (2010) presenterade Tovö och Ekström utifrån Browns arbete en undersökning av lärarstudenter. De fann liknande problematik som Fi, Akkoc och Yigit lyfter fram, dvs. besvär med icke-injektivitet, periodicitet och brist av kopplingar mellan representationer. För det svenska utbildningsväsendet skulle det anses av stort intresse att bekräfta eller dementera dessa uppgifter med ett större urval.

En forskare skulle även kunna gå en aning mer rak på sak och studera kunskaper hos lärare såsom hos Topçu m.fl. (2006). Med liknande formuleringar som Fi (2003) skulle forskaren kunna försöka finna om samma resultat även håller för svenska lärare.

Vilken metod ska man använda för att introducera trigonometri?

Kendal och Stacey (1997) fann i sin studie att rätvinkliga trianglar överlag är bättre att börja med, under antagandet att syftet är att mäta och bestämma längder i dessa trianglar. De lyfter fram en viss nyansering av problematiken med enhetscirkeln för detta ändamål, i och med att elever hade svårt att placera vinkeln samt trianglarna. Detta lyfts även av andra författare såsom Brown (2005). Det skulle dock vara av intresse att nyansera och differentiera denna bild ytterligare; om den rätvinkliga definitionen är bättre för detta ändamål, hur kommer detta sig? Vad är det för uppfattningar och modeller som gör den ena modeller bättre än den andra? Vad är hindren samt styrkorna i respektive modell? Detta skulle vara en studie som är mer lämpad för en kvalitativ ingångspunkt än en kvantitativ. Det skulle även vara av intresse att utgå från Browns elevmodeller för en sådan analys och försöka jämföra om det är bättre att inleda med rätvinkliga trianglar, enhetscirkeln, eller båda två samtidigt.

Frågan är även högaktuell bland verksamma lärare. I Matematikundervisningsgruppen på Facebook för svenska lärare fördes en diskussion angående detta ämne under skrivandet av arbetet. Överlag är argumenten delade mellan olika parter, även om alla i slutändan önskar att elever tar till sig båda representationerna. För att inte kränka någons integritet eller för den delen röja någons anonymitet kommer jag ej lyfta fram något specifikt ur denna diskussion, men nämna den i syftet att belysa att detta samtalsämne är aktuellt i dagens skola.

Är ”procept” ett bättre ingångssätt än traditionell undervisning

Weber (2005, s.108) skriver i sina slutsatser att det krävs mer forskning kring huruvida fokus på Gray och Talls begrepp ”procept” skulle kunna tillämpas mer allmänt inom klassrumsundervisning. Liknande intressen lyfts fram av Moore (2013), dock med bas i resonemang med samvariation. Idéen av att grunda matematisk undervisning och lärande på aktioner som internaliseras via varierade problem har redan framförts av Piaget (1971, s.14–30). Därmed kan det vara av intresse att utföra vidare experimentella studier där forskare försöker finna om det existerar en positiv effekt av sådan undervisning.

Algebra och trigonometri

Som tidigare nämnt är det ett av områdena som är förhållandevist tomt jämfört med de andra delarna: algebra. Det bör påpekas att jag menar snittet av trigonometri och algebra. Delice (2003) för också fram samma tankar i sin introduktion vilket därmed implicerar att även andra författare har haft svårt att hitta litteratur på detta område.

Hur en sådan undersökning skulle kunna utformas beror på intentionen och i vilken grad forskaren önskar generalisera resultaten. Exempelvis skulle det vara möjligt att specifikt studera elevernas uppfattningar utifrån hinder och utmaningar likt Delice gjorde, i kombination med en analys av klassrumsmiljön och lärarnas attityder. Detta föreligger dock för mig som en aning för omfattande för en artikel. En av delfrågorna borde räcka. Alternativt skulle det gå att studera relationen mellan trigonometri och algebra ur en mer longitudinell vy där syftet är att kategorisera vad för aktioner, processer, objekt och scheman elever utvecklar över längre tid. Naturligtvis är detta inte vanligt i någon av artiklarna, troligen för hur omfattande arbetet skulle bli med flera risker (såsom bortfall av deltagare).

Digitala hjälpmedel

En intressant frågeställning jag har funnit är att utföra någon form av komparativ experimentell design där en forskare kan likt Blackett och Tall (1991) jämföra elever som får ta del av “dynamisk mjukvara” (såsom GeoGebra) utifrån en teoretisk bakgrund av “procept” alternativt APOS-teori. Digitala hjälpmedel kan bli en viktig del av lärarens repertoar som kan komma att lägga grunden för en levande bild av funktioner som ej har varit möjligt i tidigare dagar.

Vad för uppfattningar får elever som använder miniräknare genom trigonometrin?

När det kommer till miniräknarens roll existerar kunde jag inte hitta någon relevant litteratur som behandlar trigonometri specifikt. En större kvalitativ studie skulle kunna undersöka om elever som fått använda miniräknare under en trigonometrikurs utvecklar annorlunda uppfattningar än de som följer en utan.

Vad för uppfattningar har elever som ej ämnar läsa vidare på universitet?

Märk väl att som tidigare nämnt är artiklarna i fråga baserade på antagandet att eleverna ska delta i högre akademiska studier. Detta öppnar upp frågeställningen huruvida begreppsförståelsen för mer praktiskt lagda kurser av trigonometri skiljer sig åt från de teoretiska. Jag har själv inte kunnat hitta någonting som behandlar trigonometri för praktiska ändamål eller för elever inom icke-högskoleförberedande program. Detta utgör ett hål i litteraturen som visserligen kan vara en effekt av att trigonometri i sig enbart undervisas i en större grad inom högskoleförberedande program.

Referenser

Akkoc, H. (2008). Pre-service mathematics teachers' concept images of radian, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 39:7, 857-878 DOI: 10.1080/00207390802054458

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D., and Thomas K. (1997). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. I *Research in Collegiate Mathematics Education*. II. https://www.researchgate.net/publication/2784058_A_Framework_for_Research_and_Curriculum_Development_in_Undergraduate_Mathematics_Education

Beth, E.W., & Piaget, J. (1966). *Mathematical Epistemology and Psychology*. (Mays, W. Övers.). D. Reidel Publishing Company. (Originalutgåvan publicerad 1961).

Blackett, N. & Tall, D. (1991). Gender and the versatile learning of trigonometry using computer software. *The Proceedings at the International Group for the Psychology of Mathematics Education XV*, Assisi, Italy, vol 1, ss. 144–151. https://www.researchgate.net/publication/246291731_Gender_and_the_versatile_learning_of_trigonometry_using_computer_software

Breidenbach, D., Dubinsky, E., Hawks, J., & Nichols, D. (1992). Development of the Process Conception of Function. *Educational Studies in Mathematics*, 23(3), 247-285. http://www.jstor.org/stable/3482775

Bressoud, D. (2010). Historical Reflections on Teaching Trigonometry. *The Mathematics Teacher*, 104(2), 106-112. http://www.jstor.org/stable/20876798

Brown, S. A. (2005). (PhD). *The trigonometric connection: Students' understanding of sine and cosine*. United States: Ann Arbor. Publicerad av: Illinois State University. https://search.proquest.com/openview/2f8f9e2a6508f98b8e8b382a0109daca/1?pq-origsite=gscholar&cbl=18750&diss=y

Bryman, A. (2011). *Samhällsvetenskapliga metoder*. (Nilsson, B. Övers.; 2: a upplagan). Liber.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Applying Covariational Reasoning While Modeling Dynamic Events: A Framework and a Study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(5), 352-378. https://www.jstor.org/stable/4149958

Chigonga, Benard. (2016). *Learners' errors when solving trigonometric equations and suggested interventions from Grade 12 Mathematics teachers*. University of Limpopo. https://www.researchgate.net/publication/314285050_Learners'_errors_when_solving_trigonometric_equations_and_suggested_interventions_from_Grade_12_Mathematics_teachers

Close, S., Oldham E., Surgenor, P., Shiel, G., Dooley T., O´leary, M. (2008). *The Effects of Calculator Use on Mathematics in Schools and in the Certificate Examinations. Final report on phase II.* Education Department, St. Patricks College. http://www.erc.ie/documents/calculator_final_report_phase2.pdf

Cullen, C. J., Martin, T. S. (2018). Discovering Trigonometric Identities in Geometric Representations. *The Mathematics Teacher*, 112(3), 240-240. https://www.jstor.org/stable/10.5951/mathteacher.112.3.0240

Deferent and epicycle. (2020, 30 september). *I Wikipedia.* https://en.wikipedia.org/wiki/Deferent_and_epicycle

Delice, A. (2003). (PhD). *A comparative study of students' understanding of trigonometry in the United Kingdom and the Turkish Republic*. University of Leeds. https://core.ac.uk/download/pdf/288395313.pdf

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking, in D. Tall(ed.), *Advanced Mathematical Thinking.* http://www.math.wisc.edu/~wilson/Courses/Math903/ReflectiveAbstraction.pdf

Dubinsky, E., Arnon, I., Cottrill, J., Oktaç, A., Fuentes, R. S., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). *APOS Theory: A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education.* Springer. https://www.researchgate.net/publication/267464448_APOS_theory_A_framework_for_research_and_curriculum_development_in_mathematics_education

Dubinsky, E., & Harel, G. (1992). *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy*. MAA Notes, Volume 25. Mathematical Association of America.

Dubinsky E., & Mcdonald M.A. (2001). APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education Research. In: Holton D., Artigue M., Kirchgräber U., Hillel J., Niss M., Schoenfeld A. (eds) *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level*. New ICMI Study Series, vol 7. Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/0-306-47231-7_25

Dubinsky E., & Tall D. (2002) Advanced Mathematical Thinking and the Computer. In: Tall D. (eds) *Advanced Mathematical Thinking.* Mathematics Education Library, vol 11. Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/0-306-47203-1_14

Dubinsky, E., Weller, K., Mcdonald, M. A., & Brown, A. (2005). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An APOS analysis: Part 1. *Educational Studies in Mathematics*, 58, 335–359. https://doi.org/10.1007/s10649-005-2531-z

Falk, L., & Götmark, E. (2020). *Nautisk Matematik (kapitel 4)*. Göteborg Universitet: Matematiska vetenskaper. https://chalmers.instructure.com/courses/10382

Fi, C. D. (2003). (PhD). *Preservice secondary school mathematics teachers' knowledge of trigonometry: Subject matter content knowledge, pedagogical content knowledge and envisioned pedagogy*. DAI-A 64/07, Dissertation Abstracts International. https://ir.uiowa.edu/etd/4936/

Folkhälsomyndigheten. (2017). *Handledning för litteraturöversikter: Förutsättningar och metodsteg för kunskapsframtagande baserat på forskningslitteratur vid Folkhälsomyndigheten*. (Artikelnummer: 01841-2016-3.3-1). https://www.folkhalsomyndigheten.se/contentassets/94c7c7cd41ca43b4be207c9b8c78df07/handledning-litteraturoversikter.pdf

Gould, D., & Schmidt, D. (2010). Trigonometry comes alive through Digital Storytelling. *The Mathematics Teacher*, 104(4), 296-301. http://www.jstor.org/stable/20876864

Gray, E., & Tall, D. (1994). Duality, Ambiguity, and Flexibility: A "Proceptual" View of Simple Arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(2), 116-140. www.jstor.org/stable/749505

Gür, H. (2009). Trigonometry Learning. I *New Horizons in Education*. Vol. 57. 67-80. https://www.researchgate.net/publication/267851364_Trigonometry_Learning

Ifrah, G. (2002*). Räknekonstens kulturhistoria: från forntiden till dataåldern, del 2*. (Ellenberger, B. övers.). Wahlström & Widstrand (W&W). (Originalutgåvan publicerad 1981).

Kamber, D., & Takaci, D. (2018). On problematic aspects in learning trigonometry, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 49:2, 161-175. https://doi.org/10.1080/0020739X.2017.1357846

Kendal, M., & Stacey, K. (1997). *Trigonometry: Comparing Ratio and Unit Circle Methods.* https://www.researchgate.net/publication/242182654_TRIGONOMETRY_COMPARING_RATIO_AND_UNIT_CIRCLE_METHODS

List of trigonometric identities. (2020, 27 oktober). *I Wikipedia.* https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_trigonometric_identities

Maknun, C., Rosjanuardi, R. & Ikhwanudin, Trisno. (2018). *Student's Mathematical Argumentation in Trigonometry.* At Proceedings of INTCESS 2018- 5th International Conference on Education and Social Sciences. 5-7 February 2018- Istanbul, Turkey. https://www.researchgate.net/publication/324329468_STUDENTS'_MATHEMATICAL_ARGUMENTATION_IN_TRIGONOMETRY

Maknun, C., Rosjanuardi, R., & Jupri, A. (2019). From ratios of right triangle to unit circle: an introduction to trigonometric functions. *Journal of Physics: Conference Series.* https://www.researchgate.net/publication/331681814_From_ratios_of_right_triangle_to_unit_circle_an_introduction_to_trigonometric_functions

Maor, E., Barnard, W. R. (2020). Trigonemetry. *Encyclopædia Britannica.* https://www.britannica.com/science/trigonometry

Martín, E. & Ruiz-Hidalgo, J. & Rico, L. (2019). Meaning and Understanding of School Mathematical Concepts by Secondary Students: The Study of Sine and Cosine. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*. https://eric.ed.gov/?id=EJ1265409

Martínez-Planell, R., & Cruz Delgado, A. (2016). The Unit Circle Approach to the Construction of the Sine and Cosine Functions and Their Inverses: An Application of APOS Theory. I *The Journal of Mathematical Behavior* 43: 111-33. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2016.06.002

MathStackExchange. (2013). Visual proof of the addition formula for $sin^2(a+b)$?. *I MathStackExchange.* https://math.stackexchange.com/questions/443411/visual-proof-of-the-addition-formula-for-sin2ab

Michigan State University. (2020). *Undergraduate Degree – Education.* https://reg.msu.edu/AcademicPrograms/ProgramDetail.aspx?Program=2237

Michigan State University. (2020*). 2018-2019 Academic Advising Guide: Secondary Education.*[108] https://education.msu.edu/resources/wp-content/uploads/sites/48/2020/05/secondary-education-advising-guide.pdf

Moore, K.C. (2013). Making sense by measuring arcs: a teaching experiment in angle measure. *Stud Math* 83, 225–245. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9450-6

Moore, K. C. & Laforest, K. R. (2014). The Circle Approach to Trigonometry. *The Mathematics Teacher.* S. 616-623. https://www.researchgate.net/publication/260990486_The_Circle_Approach_to_Trigonometry/citation/download

Moore, K. C., LaForest, K., & Kim, H. J. (2012). The unit circle and unit conversions. In (Eds.) S. Brown, S. Larsen, K. Marrongelle, and M. Oehrtman, Proceedings of the Fifteenth Annual Conference on Research in *Undergraduate Mathematics Education* (pp. 16-31). Portland State University https://www.researchgate.net/publication/259865560_The_unit_circle_and_unit_conversions

Naidoo, J., Govender, R. (2014). *Exploring the use of a dynamic online software programme in the teaching and learning of trigonometric graphs.* https://pythagoras.org.za/index.php/pythagoras/article/view/260

Nemiroff, R., & Bonnell, J. (2012). *Astronomy Picture of the Day*. Från ASD på NASA / GSCF & Michigan Tech. U. https://apod.nasa.gov/apod/ap120809.html

Polygonal Chain. (2020, 27 augusti). *I Wikipedia*. https://en.wikipedia.org/wiki/Polygonal_chain

Princeton University. (2020). *Application Requirements: Program in Teacher Preparation.* https://teacherprep.princeton.edu/become-teacher/application-requirements

Sander, E., & Heiß, A. (2014). Interactive Computer-Supported Learning in Mathematics: A Comparison of Three Learning Programs on Trigonometry. *Journal of Educational Computing Research*. 50. 45-65. https://journals.sagepub.com/doi/10.2190/EC.50.1.c [109]

[108] Jag är medveten om att det står 2018–2019 i artikeln och ej 2020-2021. Jag bifogar en länk direkt till hemsidan jag hämtade materialet från. https://education.msu.edu/teacher-preparation/secondary/program-information/requirements/#internship-progression-criteria

Om läsaren klickar på 2020–2021 Advising Guide så kommer samma guide för 2018–2019 upp istället (åtminstone under datumet 2 november, 2020). Antingen är dessa versioner densamma och inga större modifikationer har skett mellan åren eller så har Michigan State University gjort en miss på sin webbsida.

[109] Finns även tillgänglig via ResearchGate. https://www.researchgate.net/publication/275622011_Interactive_Computer-Supported_Learning_in_Mathematics_A_Comparison_of_Three_Learning_Programs_on_Trigonometry

Sfard, A. (1987). Two conceptions of mathematical notions: Operational and structural. I J. C. Bergeron, N. Herscovics, & C. Kieran (Eds.*), Proceedings of the 11th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematical Education* (Vol. 3, pp. 162–169).

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *I Educational Studies in Mathematics*, Vol. 22, No. 1 (Feb.,1991), 1-36. Springer. https://www.researchgate.net/publication/226068580_On_the_dual_nature_of_mathematical_conceptions_Reflections_on_processes_and_objects_as_different_sides_of_the_same_coin

Skolforskningsinstitutet. (2020). Arbetsgången för Skolforskningsinstitutets systematiska översikter. Inhämtad 2020-08-31. https://www.skolfi.se/forskningssammanstallningar/arbetsgangen-for-skolforskningsinstitutets-systematiska-oversikter/

Skolverket. (2011). *Kursplaner i matematik*. Stockholm: Skolverket. https://www.skolverket.se/undervisning/gymnasieskolan/laroplan-program-och-amnen-i-gymnasieskolan/gymnasieprogrammen/amne?url=1530314731%2Fsyllabuscw%2Fjsp%2Fsubject.htm%3FsubjectCode%3DMAT%26tos%3Dgy&sv.url=12.5dfee44715d35a5cdfa92a3

Skolverket. (2011). *Läroplan för gymnasieskolan.* Stockholm: Skolverket. https://www.skolverket.se/undervisning/gymnasieskolan/laroplan-program-och-amnen-i-gymnasieskolan/laroplan-gy11-for-gymnasieskolan

Skolverket. (2017). *Kommentarmaterial till kursplanen i matematik (reviderar 2017).* Stockholm: Skolverket. https://www.skolverket.se/publikationer?id=3794

Skolverket. (2019). *Kommentarmaterial till ämnesplanen i ämnet matematik i gymnasieskolan.* Stockholm: Skolverket. https://www.skolverket.se/undervisning/kommentarer/kommentarmaterial[110]

Stanford University. (2020). *Stanford Teacher Education Program (STEP).* https://ed.stanford.edu/step

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. Educ Stud Math 12, 151–169. https://doi.org/10.1007/BF00305619

Tanguay, D., & Venant, F. (2016). The semiotic and conceptual genesis of angle. *ZDM Mathematics Education* 48, s. 875–894. https://www.researchgate.net/publication/304064792_The_semiotic_and_conceptual_genesis_of_angle

Todhunter, I. (1886). *Spherical Trigonometry: for the use of colleges and schools.* With numerous examples. (5th ed.) London: Macmillan. Kompilerad av Greiner, Zamanian & Hutchinsom (2020). Tillgänglig som e-bok via The Project Gutenberg: http://www.gutenberg.org/ebooks/19770

Topçu, T., Kertil, M., Akkoç, H., Kamil Y., & Osman, Ö. (2006). Pre-Serivice and In-Serivce Mathematics Teachers’ Concept Images of Radian. I *Conference: 30th Conference of the*

[110] Använd Ctrl + F (eller Cmd + F ifall du har en Mac) och sök på: matematik i gymnasieskolan.

International Group for the Psychology of Mathematics Education. At: Prague. Volume: 5. https://www.researchgate.net/publication/278480838_PRE-SERVICE_AND_IN-SERVICE_MATHEMATICS_TEACHERS'_CONCEPT_IMAGES_OF_RADIAN

Tovö, G., & Ekström, G. (2010). Förstår dina elever trigonometri? *Matematikbiennalen 2010.* http://ncm.gu.se/media/biennal/dokumentation/2010/resources/file/412a.pdf

Van Brummelen, G. (2009). *The Mathematics of the Heavens and the Earth: The Early History of Trigonometry.* PRINCETON; OXFORD: Princeton University Press.

Van Brummelen, G. (2013). *Heavenly Mathematics: The Forgotten Art of Spherical Trigonometry.* PRINCETON; OXFORD: Princeton University Press. https://www.jstor.org/stable/j.ctt1r2fvb

Weber, K. (2005). Students' understanding of trigonometric functions. *Math Ed* Res J 17, 91–112. https://www.researchgate.net/publication/226189524_Students'_understanding_of_trigonometric_functions

Weber, K., Knott, L., & Evitts, T. (2008). Teaching Trigonometric Functions: Lessons Learned from Research. *The Mathematics Teacher*, 102(2), 144-150. http://www.jstor.org/stable/20876300

Weisstein, Eric W. "Angle." From *MathWorld-A Wolfram Web Resource.* https://mathworld.wolfram.com/Angle.html

Weisstein, Eric W. "Trigonometric Addition Formulas" From *MathWorld-A Wolfram Web Resource.* https://mathworld.wolfram.com/TrigonometricAdditionFormulas.html

Wolbert, Roger S., & Moss, Erin R. (2018). Developing the Concept of a Radian. *The Mathematics Teacher*, 111(4), s.272-278. http://www.jstor.org/stable/10.5951/mathteacher.111.4.0272

Yigit, M. K. (2014). (PhD). An Examination of Pre-service Secondary Mathematics Teachers' Conceptions of Angles. *The Mathematics Enthusiast.* 11. 707-736. https://www.proquest.com/docview/1648174007

Zengin, Yılmaz & Furkan, Hasan & Kutluca, Tamer. (2012). The effect of dynamic mathematics software geogebra on student achievement in teaching of trigonometry. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*. 183–187. https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877042811029673?via%3Dihub

Appendix A: Kategorisering av artiklarna

Här är det beskrivet hur varje artikel är kategoriserad utifrån land, design, metod, urval och antal. Detta användes i kapitel 5.1 för att analysera publikationerna som användes i resultatdelen. N/A (not applicable) avser de artiklar som enbart innehåller lektionsupplägg eller historia. SI = Statistisk inferens, med vilket avses t-tester, ANOVA samt andra icke-parametriska metoder.

Observation har delats in i två delar, O1 = ickedeltagande observation samt O2 = deltagande observation. (X) symboliserar att jag ej kunde finna en beskrivning av urvalsmetoden. Dessa kodas då till bekvämlighetsurval.

Författare, år, titel	**Land**	**Design**	**Metod**	**Urval, antal deltagare**
Akkoc (2008) Pre-service mathematics teachers' concept images of radian	Turkiet	Fall	Enkäter, Intervju	Bekvämlighet, N =42
Blackett, N. & Tall, D. (1991). Gender and the versatile learning of trigonometry using computer software.	Storbritannien	Experimentell	Experiment	Bekvämlighet, N =42
Bressoud, D. (2010) HISTORICAL REFLECTIONS ON TEACHING TRIGONOMETRY.	USA	N/A	N/A	N/A
Brown, S. A. (2005) The trigonometric connection: Students' understanding of sine and cosine.	USA	Fall	Enkäter, Intervju, Observation (O1), SI	Bekvämlighet, N=120 (X)

Chigonga, B. (2016) Learners' errors when solving trigonometric equations and suggested interventions from Grade 12 Mathematics teachers.	Sydafrika	Survey	Intervju	Kvot[111], N=10
Close, S., Oldham E., Surgenor, P., Shiel, G., Dooley T., O´leary, M. (2008) THE EFFECTS OF CALCULATOR USE ON MATHEMATICS IN SCHOOLS AND IN THE CERTIFICATE EXAMINATIONS. Final report on phase II.	Irland	Survey	Enkät, SI	Stratifierat slumpmässigt urval, N = 1459
Cullen, Craig J., Martin, Tami S. (2018) Discovering Trigonometric Identities in Geometric Representations.	USA	N/A	N/A	N/A
Delice, A. (2003) A comparative study of students' understanding of trigonometry in the United Kingdom and the Turkish Republic	Storbritannien[112]	Komparativ	Enkäter, Intervju, Observation (O1), SI	Bekvämlighet, N(UK) = 55, N(TUR)=65

[111] Chigonga valde två stycken deltagare från fem förutvalda skolor. Jag kodade detta som ett kvoturval genom att helt enkelt byta namn på skolor till ”partier”. Tänk dig att skolorna är fem olika partier där man önskade undersöka deras sympatier i olika frågor angående skolan. I sådana fall hade detta urval förefallit klarare vara ett kvoturval, särskilt om partierna representerar ca. 1/5 av väljarbasen.
[112] Studien är klart utförd i både Storbritannien och Turkiet. Avhandlingen är avlagd på ett universitet i Storbritannien: University of Leeds. Studien har kodats som ”brittisk” i redogörelsen för ursprungsländerna.

Fi, Dabiri C. (2003) Preservice secondary school mathematics teachers' knowledge of trigonometry: Subject matter content knowledge, pedagogical content knowledge and envisioned pedagogy.	USA	Fall	Enkäter, Intervju	Bekvämlighet, N=14
Gould, D., & Schmidt, D. (2010) Trigonometry comes alive through DIGITAL STORYTELLING.	USA	N/A	N/A	N/A
Gür, Hülya. (2009). Trigonometry Learning.	Turkiet	Survey	Enkät, Observation (O1)	Kluster[113], N=140
Kamber, D., & Takaci, D. (2018) On problematic aspects in learning trigonometry	Serbien	Fall	Enkät, intervju	Bekvämlighet, N(juniorer) = 14, N(seniorer)=49
Kendal, M., & Stacey, K. (1997) TRIGONOMETRY: COMPARING RATIO AND UNIT CIRCLE METHODS	Australien	Experimentell, longitudnell	Enkät, SI	Bekvämlighet, N = 178
Maknun, C., Rosjanuardi, R. & Ikhwanudin, Trisno. (2018) STUDENTS' MATHEMATICAL ARGUMENTATION IN TRIGONOMETRY.	Indonesien	Fall	Enkäter	Bekvämlighet, N = 36 (X)

[113] Gür beskriver i sin studie att det fanns ett stort antal olika skolor som deltog, varav Gür valde deltagare slumpmässigt för testet från relevanta kurser. Detta visade sig sedan ej vara representativt men i vilket fall har Gür delat in populationen i grupper (strata) och sedan dragit deltagare slumpmässigt ur dessa.

Maknun, C., Rosjanuardi, R., & Jupri, A. (2019) From ratios of right triangle to unit circle: an introduction to trigonometric functions.	Indonesien	Fall	Observation (O2)	Bekvämlighet, N = 33 (X)
Martín, E. & Ruiz-Hidalgo, J. & Rico, L. (2019) Meaning and Understanding of School Mathematical Concepts by Secondary Students: The Study of Sine and Cosine.	Spanien	Fall	Enkät	Bekvämlighet, N=74
Martínez-Planell, R., & Cruz Delgado, A. (2016) The Unit Circle Approach to the Construction of the Sine and Cosine Functions and Their Inverses: An Application of APOS Theory.	USA	Fall	Intervju	Bekvämlighet, N = 11
Moore, K. C. & Laforest, K. R. (2014) The Circle Approach to Trigonometry.	USA	Fall	Intervju	Bekvämlighet, N = 3
Moore, K. C., LaForest, K., & Kim, H. J. (2012) The unit circle and unit conversions.	USA	Fall	Intervju	Bekvämlighet, N = 2
Moore, K.C. (2013). Making sense by measuring arcs: a teaching experiment in angle measure.	USA	Fall	Intervju	Bekvämlighet, N = 3

Naidoo, J., Govender, R. (2014) Exploring the use of a dynamic online software programme in the teaching and learning of trigonometric graphs.	Sydafrika	Fall	Enkät, Intervju	Bekvämlighet, N = 25 (X)
Sander, E., & Heiß, A. (2014). Interactive Computer-Supported Learning in Mathematics: A Comparison of Three Learning Programs on Trigonometry.	Tyskland	Experimentell	Experiment, Enkät	Bekvämlighet, N = 101 (X)
Tanguay, D., & Venant, F. (2016) The semiotic and conceptual genesis of angle.	Kanada	Fall	Enkät	Bekvämlighet, N = 16
Topçu, T., Kertil, M., Akkoç, H., Kamil Y., & Osman, Ö. (2006). PRE-SERVICE AND IN-SERVICE MATHEMATICS TEACHERS' CONCEPT IMAGES OF RADIAN.	Turkiet	Fall	Enkät, Intervju	Bekvämlighet, N(lärarstudenter) = 37, N(lärare)=14
Weber, K. (2005) Students' understanding of trigonometric functions.	USA	Experimentell	Enkät, Intervju	Bekvämlighet, N(Experiment) = 41, N(kontroll)=31
Weber, K., Knott, L., & Evitts, T. (2008). Teaching Trigonometric Functions: Lessons Learned from Research.	USA	Fall	Intervju	Bekvämlighet, N = 31

Wolbert, Roger S., & Moss, Erin R. (2018) Developing the Concept of a Radian.	USA	N/A	N/A	N/A
Yigit, M. K. (2014). (PhD). An Examination of Pre-service Secondary Mathematics Teachers' Conceptions of Angles.	USA	Fall	Intervju	Bekvämlighet, N = 4
Zengin, Y. & Furkan, H. & Kutluca, T. (2012). The effect of dynamic mathematics software geogebra on student achievement in teaching of trigonometry.	Turkiet	Experimentell	Enkät	Bekvämlighet, N(experiment)=25, N(kontroll) = 26