Elevers uppfattningar kring bokstavssymboler

En litteraturstudie om algebrans historiska utveckling och elevers förståelse om bokstavssymboler

Agnes Wallgren, Alexzander Hasselholm och Sadam Taranis
Ämneslärarprogrammet, Matematik

Uppsats/Examensarbete: 15 hp
Kurs: LGMA2G
Nivå: Grundnivå
Termin/år: HT/2020
Handledare: Laura Fainsilber
Examinator: Anna Holmlund
Rapport nr: HT20-3001-002-LGMA2G

Nyckelord: Algebra, Bokstavssymboler, Uppfattningar, Elevförståelse, Algebrans historia, Retorisk algebra, Synkoperad algebra, Symbolisk algebra, Abstrakt algebra.

Abstrakt

Den här litteraturstudien innefattar elevers uppfattningar och förståelse kring bokstavssymboler, samt en inblick i hur algebra har utvecklats historiskt. Historiskt sett har algebra utvecklats från en retorisk till en symbolisk algebra, samt från elementär till abstrakt. Utvecklingen till att få den algebra som används i skolorna idag är en process som etablerades på 200 talet och har tagit hundratals år att utveckla. Det började med att den retoriska algebran utvecklades till det som kallas för synkoperad algebra, som sen utvecklat till nästa fas som kallas symbolisk algebra. Alla dessa faser bidrog sedan till utvecklingen av den abstrakta algebran. Elevers uppfattningar och förståelse kring bokstavssymboler kan kategoriseras in i antingen sex olika användningsområden för bokstavssymboler eller i olika nivåer av elevers förståelse. De sex användningsområdena kallas för *Bokstaven ges ett värde, Bokstaven används inte, Bokstaven som ett objekt, Bokstaven som specifik okänd, Bokstaven som generellt tal och Bokstaven som en variabel*. De olika nivåerna är hierarkiskt ordnade och beskriver vilken förståelse elever behöver uppnå för att kunna lösa specifika uppgifter. Forskare har använt dessa kategorier för att förklara sina egna studier. De har sedan kommit fram till att det är på grund av att bokstavssymboler kan användas i så många olika sammanhang som det skapas missuppfattningar och svårigheter för eleverna.

Förord

Vi skulle vilja tacka varandra för ett gött samarbete och trevliga pratstunder.
Vi vill ge ett stort tack Laura Fainsilber för hennes handledning under arbetets gång och rekommendationer om betydelsefull litteratur.
Vi vill även tacka Peter Nyström vid NCM (Nationellt Centrum för Matematikutbildning) för rekommendationer på böcker och författare till vårt examensarbete.
Vi vill tacka Viktor Arohlén och Filip Landström för den respons de gav oss under opponeringen.
Slutligen skulle vi vilja tacka vår examinator Anna Holmlund för mycket bra respons och hjälp med ytterligare litteratur.

Innehållsförteckning

S = Sträcka

Y = Axeln

M = Meter

B = 2

O = Omkrets

L = Längd

E = 5

R = Really?!

1 Inledning

Algebra är en av grundpelarna för matematiken. Redan i årskurs 1 börjar elever lära sig algebra, exempelvis som "matematik likheter och likhetstecknets betydelse" (Skolverket, 2020; årskurs 1–3). Den algebra som eleverna lär sig blir sedan mer komplex ju högre upp i åldrarna de kommer. Vid årskurs 4 införs användandet av symboler för att representera ett okänt tal och Skolverket beskriver vad elever ska ha för uppfattning om algebra mellan årskurs 4–6 som: "Obekanta tal och deras egenskaper samt situationer där det finns behov av att beteckna ett obekant tal med en symbol" (Skolverket, 2020; årskurs 4-6).

Eftersom algebra är en central gren inom matematiken som hanteras av elever i alla åldrar kände vi att algebra är ett intressant område att fördjupas sig inom. Algebra är väldigt brett och har många olika moment att fördjupa sig i, men vi ville fokusera på en fördjupning som kan vara ett hjälpmedel i vår framtida profession. Vi valde att fokusera arbetet på eleverna för att se hur vi kan hjälpa dem att förstå algebra bättre. Det här ledde oss till att studera elevers uppfattningar och svårigheter kring algebra. Vår inspiration för att fördjupa oss i bokstavssymboler grundades från andra personers examensarbete och litteratursökning med sökorden algebra och elevers uppfattningar samt svårigheter. Vi valde även bokstavssymboler för att vi kände ett starkt intresse i detta. Bokstavssymboler är även något som kan skapa stor förvirring bland elever då samma symbol kan stå för en mängd olika saker (Küchemann, 1981; Philipp, 1992; Çelik och Güneş, 2013; Samo, 2009). I bilden ovanför så kan man se några olika sätt som elever kan se på specifika bokstavssymboler. Att elever fastnar i att se O som omkrets och M som meter kan skapa förvirring när de bokstäverna senare börjar användas för att representera okända tal (Persson, 2010).

När det kommer till hur elever förstår algebra så kan man även se detta ur ett historiskt perspektiv. Thompsson (1994) och Sfard och Linchevski (1994) förklarar att individens progression i algebra kan kopplas till den historiska utvecklingen. På grund av detta ansåg vi att det var intressant och relevant att titta på hur algebra har utvecklats historiskt för att ge oss en annan inblick i hur elever utvecklar sitt matematiska tänkande.

1.1 Syfte & frågeställningar

Syftet med vårt examensarbete är att se den historiska utvecklingen av algebra, samt att se vad elever har för uppfattningar och förståelse kring bokstavssymboler. Utifrån detta har följande frågeställningar formulerats:

1. Hur har algebra utvecklats från retorisk till symbolisk, och från elementär till abstrakt algebra?
2. Vad har elever för uppfattningar om bokstavssymboler inom algebra?
3. Hur kan elevers olika förståelse om bokstavssymboler påverka de svaren de ger på uppgifter?

2 Metod

Vårt examensarbete är en litteraturstudie, vilket innebär att vi endast refererar till andra forskares studier och har inte utfört någon egen undersökning. För att hitta de andra forskarnas studier så har vi använt oss av Google Scholar, ERIC, Education research complete, google, Göteborgs universitetsbibliotek, Nationellt Centrum för Matematik (NCM), Supersök samt att titta på andra forskares och andra examensarbetens referenser. Sökorden som vi använt oss av är: *Algebra, bokstavssymbol, elever, svårigheter, uppfattningar, begreppsutveckling, variabler, understanding, misconception, development, letter symbols, interpretation, matematikhistoria, algebrans historia, retorisk algebra, synkoperad algebra, symbolisk algebra och abstrakt algebra.*

För den matematiska fördjupningen har vi mest använt oss av Jan Thompsons *Matematiken i historien*, Anders Tengstrands *Historiska perspektiv på matematiken* och *Victor J.* Katzs *A history of mathematics - An introduction*. Thompsons bok var refererad i mycket annan litteratur, Tengstrands bok blev vi tipsade om av Peter Nyström från NCM och Katz bok var ett tips från vår handledare Laura Fainsilber.

Ett ständigt problem som man måste förhålla sig till när det kommer till historieforskning är källkritik och bristen på originalkällor. Originalkällor är oftast på främmande språk och skriften skiljer sig avsevärt mycket från dagens skriftspråk. Det är jämförelsevis lättare att vara källkritisk till relativt nyare källor än de äldre. I detta arbete beskrivs verk och författare som är upp till ca 2000 år gamla, vi har därmed valt att förlita oss på nutida erkända matematikhistoriker som skriver om dessa verk och matematiker som andrahandskälla.

Avsnittet om elevers uppfattningar har vi grundat i Küchemanns studie som står i *Children's Understanding of Mathematics: 11-16* från 1981. Vi upptäckte Küchemanns studie ifrån att kolla på andra forskares referenser, och då var Küchemann det namnet som dök upp om och om igen. Då Küchemanns arbete var refererat i så många olika personers arbeten så ansåg vi att eftersom han är väldig erkänd inom forskning om elevers uppfattningar av bokstavssymboler så var hans studie en bra grund att starta med.

Från början så ville vi fokusera arbetet inom gymnasiet då vi studera till att bli gymnasielärare, men på grund av bristande information inom gymnasiet bestämde vi oss istället att titta på studier grundade i alla olika åldrar. Dock så var majoriteten av de studier vi hittade gjorda på elever i högstadieålder.

Något annat som är viktigt att nämna är att vi i detta arbete har valt att tala om bokstäver inom algebra som bokstavssymboler, och inte variabler. Detta beror på att vi fann mycket litteratur där bokstäver omnämndes på detta sätt, och att vi fann att bokstavssymboler var ett passande begrepp som omfattade allt vi ville diskutera. Då mycket av vårt arbete kring bokstavssymboler är grundat i Küchemann passade inte variabel att använda som ett samlingsord för bokstäver inom algebra.

3 Resultat

Resultatet är indelat i två huvudpunkter. Ett historiskt perspektiv och ett elevperspektiv. Den kommer att börja med det historiska perspektivet på algebra och hur algebran har utvecklats från retorisk till symbolisk, samt elementär till abstrakt. Elevperspektivet kommer att gå in på elevers uppfattningar om bokstavssymboler samt hur elevers förståelse kring bokstavssymboler påverkar deras svar.

3.1 Algebrans historiska utveckling

I detta kapitel redovisas algebrans historia från dess grundare till dagens symboliska algebra samt hur algebra har utvecklat från elementär till abstrakt. Med tanke på arbetets omfång och tidsaspekten har vi valt att selektera ut de viktigaste inslagen i historien för att göra en framställning av algebrans historia. Framställningen följer en kronologisk ordning och är uppdelad efter fyra övergripande teman. Dessa är retorisk, synkoperad, symbolisk och abstrakt algebra. Viktiga personer och deras insatser för algebran presenteras. En fördjupning om Omar Khayyams lösning av ett specialfall av tredjegradsekvationen redovisas.

Algebrans historia kan ses utifrån två perspektiv. Den ena är den språkliga och den andra är den innehållsmässiga. Den språkliga utvecklingen kan ses som en utveckling från retorisk via synkoperad till symbolisk algebra. Dessa tre övergripande teman är benämningar som matematikhistoriker har kategoriserat in historien i efterhand. Den innehållsmässiga indelningen delas in i elementär och abstrakt algebra.

Retorisk algebra är en framställning av algebraiska problem i retorisk form. Matematiska objekt och tal skrivs i textformat utan symboler. (Skolverket, 2015)

Synkoperad algebra är en vidareutveckling av retorisk algebra. Framställningen innebär att ord och meningar förkortas. Den synkoperade algebran är en brobrygga mellan retorisk och symbolisk algebra. (Kristiansson & Rosengren, 2006)

Symbolisk algebra innebär att man använder symboler och beteckningar för att göra algebraiska framställningar och beräkningar (Tengstrand, 2020).

Elementär algebra är en gren av matematiken som behandlar talens allmänna egenskaper och förhållandena mellan dem. Kännetecknande för elementär algebra är: Studien av reella och komplexa tal, konstanter och variabler – gemensamt kända som algebraiska mängder; Regler för sådana kvantiteter; Geometriska representationer av sådana kvantiteter; Bildande av uttryck som involverar algebraiska mängder; Regler för att manipulera sådana uttryck; Bildande av meningar, även kallade ekvationer, som involverar algebraiska uttryck; Lösningar av ekvationer och ekvationssystem. (”Elementary algebra”, 2020)

Abstrakt algebra är den moderna algebran som studerar allmänna algebraiska strukturer såsom kroppar, ringar och grupper. Den skiljer sig från elementär algebra på det viset att den inte handlar om lagar och regler för att manipulera algebraiska uttryck (”Modern algebra”, 2020). Viktigt att påpeka är att abstrakt algebra även är symboliska då den använder symboler som beteckningssystem.

Algebran som vi känner den idag har sitt ursprung i aritmetiken. Aritmetik kommer från det grekiska ordet *arithmētikē* och betyder räknekonsten om tal (*arithmo's*). Algebra däremot brukar definieras som generaliserad aritmetik. (“Aritmetik”, 2020)

3.1.1 Algebrans grundare

Muhammad Ibn Musa al-Khwarizmi var en persisk matematiker och astronom som levde mellan åren 780 – 850, och han anses vara den som är grundaren av algebra. al- Khwarizmis viktigaste arbete är *al-Kitab al-mukhtasar fi hisab al-jabr wal muqabala*, förkortat *al-jabr*. Det är termen *al-jabr* som senare har gett upphov till ordet algebra. *Al- jabr* utgör tre delar. Den första delen handlar om ekvationslösning, den andra om mätningar (geometri) och den tredje delen handlar om uträkningar kopplade till arvsrätten. Koranens föreskrifter kring arvsrätten är komplicerat och ger instruktioner för hur arvet ska fördelas beroende på vem personen det i fråga gäller, individens status i samhället är desslikes reglerat i arvsrätten (Bernström, 1998). I den första delen av *al-jabr* kan man finna sex typer av första- och andragradsekvationer. al-Khwarizmis sätt att betrakta ekvationerna var ur ett geometriskt perspektiv och han bevisade lösningarna genom att se ekvationerna som geometriska figurer. Han introducerar en algoritm för hur ekvationerna kan lösas. Viktigt att påpeka är att begreppet negativt tal inte existerade under al-Khwarizmis tid, avsaknaden av begreppet negativt tal hanterades av matematikerna genom att skriva sina ekvationer enbart med positiva termer. Ett typiskt drag för denna tid i algebrans historia är att den även framfördes retoriskt (Thompsson, 1996).

Al-Khwarizmi framställning	**Dagens framställning**
I) Kvadrater lika med rötter	$(x^2 = 2x)$
II) Kvadrater lika med tal	$(x^2 = 4)$
III) Rötter lika med tal	$(2x = 3)$
IV) Kvadrater och rötter lika med tal	$(x^2 + 10x = 39)$
V) Kvadrater och tal lika med rötter	$(x^2 + 21 = 10x)$
VI) Kvadrater lika med rötter och tal	$(x^2 = 4x + 5)$

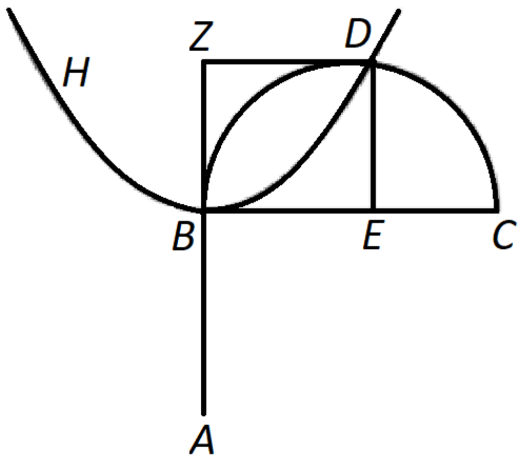
Tabell 1 (Thompsson, 1996). Till vänster visas hur al-Khwarizmi framställde andragradsekvationer retoriskt, till höger är det samma ekvation som betecknas med dagens symboler.

Davis Tinka (2010) lyfter fram att sökningen efter algebrans ursprung går att finna ännu längre tillbaka i historien. Redan på 200-talet levde en man vid namnet Diofantos som är känd för sitt verk *Arithmetica*. Det är ett samlingsverk med 189 algebraiska problem och lösningar. Tengstrand (2020) skriver att Diofantos införde beteckningen ζ (Zeta) för den obekanta. Han insåg problematiken med den retoriska algebran och började därmed införa symboler för att lättare framställa problemen och lösningarna. Diofantos sätt att använda sig av symboler och beteckningar brukar man kalla för synkoperad algebra. Synkoperad algebra är ett sätt att förkorta framställningen av problemen och lösningarna.

3.1.2 Omar Khayyam (1048 – 1131)

Omar Khayyam levde ca 150 år efter al-Khwarizmi, han var en poet och matematiker som hade god kännedom i antikens klassiska verk. Khayyams bidrag till algebran var lösningen av ett specialfall av tredjegradsekvationen. I likhet med al-Khwarizmi klassificerar Khayyam tredjegradekvationen i olika fall. Den som presenteras i detta avsnitt är *en kub och sidorna är lika med ett tal*. Likt al-Khwarizmi gjorde för andragradsekvationer så klassificerar Khayyam tredjegradsekvationer i olika fall, dock är Khayyams fall betydligt fler än de sex som al-Khwarizmi tog fram. Med moderna symboler kan man beteckna Khayyams klassificering som $x^3+px=q$, där p och q är naturliga tal (Tengstrand, 2020). Tengstrand (2020) skriver att lösningen har presenterats av Khayyam i en retorisk form, sedan följer en geometrisk förklaring och sist beskrivs resonemanget med hjälp av moderna symboler. Den retoriska framställningen är svårgenomtränglig för dagens läsare, men detta visar på hur algebrans utveckling har drivits från en retorisk till symbolisk framställning. Fördelen är att det förekommer mindre text men symbolerna som används är oftast abstrakta och detta kräver att man är insatt i matematikens symbolik.

> Låt sträckan AB [...] vara sidan i en kvadrat som är lika med det givna antalet rötter (sidor). Konstruera ett rätblock med kvadraten som basyta och vars volym är lika med det givna talet. Sträckan BC är vinkelrät mot AB och är lika med rätblockets höjd. Förläng AB åt B till en punkt Z. Konstruera en parabel med vertex i B, med axeln BZ och parametern AB. Kägelsnittet HBD är nu entydigt bestämt och BC är en tangent. Konstruera en halvcirkel med BC som diameter. Den skär kägelsnittet i punkten D och vi antar att DZ är vinkelrätt mot AZ. Låt E vara en punkt på BC sådan att DE är vinkelrät mot BC.



Figur 1 (Tengstrand, 2020).

> Sträckan DZ är ordinata till kägelsnittet. Dess kvadrat är då lika med produkten av parametern AB och abskissan BZ. Det betyder att AB förhåller sig till DZ som DZ till BZ. Eftersom DZ = BE och BZ = DE så förhåller sig AB till BE som BE till DE. Men kordasatsen ger att BE förhåller sig till ED som ED till EC. De fyra sträckorna AB, BE, ED och EC är i geometrisk progression vilket innebär att

> kvadraten på den första sträckan, parametern AB, förhåller sig till kvadraten på den andra sträckan BE, som den tredje sträckan förhåller sig till den fjärde sträckan EC. Alltså är rätblocket med kvadraten med sidan AB som bas och sträckan EC som höjd lika med kuben med sidan BE. Addera nu rätblocket, vars bas är kvadraten med sidan AB och höjd är EB till båda. Kuben med sidan BE plus detta rätblock är då lika med rätblocket med kvadraten AB som bas och höjden BE plus EC d.v.s. BC. Det sista rätblocket är det givna talet. Men kvadraten AB är det givna antalet rötter. Alltså är kuben med sidan BE plus antalet rötter multiplicerat med BE lika med det kända talet. Lösningen är alltså sträckan BE. (Tengstrand 2020, s.281)

Tengstrand (2020) tydliggör Khayyams resonemang med de symboler som matematikerna arbetar med idag. Khayyams ekvation kan skrivas som $x^3+px=q$ där p och q är positiva konstanter. Sträckan AB är sidan i en kvadrat med arean p och därmed $AB=\sqrt{p}$. Sträckan BC är lika med höjden i det rätblock som har basytan p och volymen q. Därmed $BC=q/p$. Man inför ett koordinatsystem med origo i punkten B med de räta linjerna BC och AZ som x-axel respektive y-axel. Då har halvcirkeln med diametern BC ekvationen:

$$\left(x-\frac{q}{2p}\right)^2+y^2=\frac{q^2}{4p^2},\quad y\geq 0$$

eller

$$x^2-\frac{q}{p}x+y^2=0,\quad y\geq 0.$$

Parabeln har parametern $AB=p$ och det innebär att ekvationen är $y\sqrt{p}=x^2$. Kombineras dessa ekvationer får man:

$$x^2-\frac{q}{p}x+\frac{1}{p}x^4=0.$$

Man söker efter skärningspunkten E där $x>0$. Divideras varje term med x så får man efter omskrivningen:

$$x^3+px=q.$$

Punkten E:s abskissa $x=EB$ är lösningen till ekvationen.

3.1.3 Högmedeltiden (1000 – 1300)

Den algebra som muslimska matematiker hade utvecklat nådde så småningom Europa, först områdena kring medelhavet. Robert från Chester översatte den första delen av al-Khwarizmis *al-Jabr*. Detta skedde år 1145 och brukar ses som den europeiska algebrans födelseår. Leonardo Fibonacci (1170–1250) förmedlade den orientaliska matematiken till Europa. Fibonacci reste till områden kring medelhavet och ingick affärsavtal med andra affärsmän från Nordafrika, Syrien och Konstantinopel (Istanbul). Fibonaccis verk *Liber abbaci* (*Boken av uträkningar*, utgiven 1202) introducerade de hinduiska siffrorna och räkning med dem (Thompsson, 1994).

Studien av tredje- och fjärdegradsekvationer bidrog till att den synkoperade algebra övergick till den symboliska algebran. En matematiker som bidrog till detta var Cardanos. Han skrev ett verk som heter *Artis magnæ sive de regulis algebraicis* ("Den stora konsten eller algebrans regler"), han införde ett beteckningssystem för hans lösningar. Han inför beteckningar och symboler som är korta och genomtänkta och detta medför att hans framställningar blir allt mer kortare. En annan matematiker vid namn Lodovico Ferrari var lärling till Cardano och lyckades sedan presentera en lösning till fjärdegradsekvationen. Lösningarna innehöll oftast en eller två reella lösningar. Faktorsatsen säger oss att en n:te gradsekvation har exakt n:st lösningar, detta kom matematiker på när komplexa tal introducerades. Cardano började diskutera negativa lösningar till ekvationer, vilket 100 år senare skulle leda till utvecklingen av komplexa tal. Detta skede i historien är stadiet innan algebran övergår till symboliska algebra (Tengstrand, 2020).

3.1.4 Den symboliska algebran (1500 – 1700)

Euklides, Arkimedes, Diofantos och Pappos verk ligger till grund för den symboliska algebrans utveckling. Deras arbeten översattes till latin i början av 1500-talet. Den symboliska algebran kännetecknas av ett konsekvent beteckningssystem och generaliserande. De fyra matematikerna vars gärningar mest har influerat den symboliska algebran är Francois Vieté, Simon Stevin, René Descartes och John Wallis (Tengstrand, 2020). En gemensam nämnare för dessa matematiker är deras stora intresse för historia och äldre matematikers tänkande. Tack vare att grekernas matematiska verk blev översatta till latin i början av 1500-talet kunde dessa män ta efter grekernas tänkande och utveckla algebran vidare. (Thompson, 1994)

3.1.4.1 Francois Vieté (1540 – 1603)

Den symboliska algebran har sin utgångspunkt i Francois Vietés arbete som kallas *In artem analyticem isagoge* (Introduktion till analytisk konst), utgiven i Tours 1591. Vietés generaliserade det grekiska *arithmos* (tal), som han senare kallar för "tingens form". Vietés tanke är "let the given magnitudes be distinguished from the undetermined unknowns by a constant, everlasting, and very clear symbol, as, for instance, by designating the unknown magnitude by means of the letter *A* or some other vowel *E, I, O, U* or *Y,* and the given magnitudes by means of letters *B, G* and *D* or the other consonants" (Klein 1968, s.340).

Tengstrand (2020) menar på att Vieté framhäver i sitt arbete vikten av storhetens dimensioner. Han menar på att storheter kan ha längd, bredd, plan och volym. Vieté experimenterar med storheter med högre dimensioner än en kub och han namnger de olika dimensionerna. Han är strikt emot addition och subtraktion av storheter med olika dimensioner. I samband med dimensionsresonemangen skriver han upp motsvarigheterna till dagens potenslagar.

En bredd gånger en längd ger plan Ett bredd gånger en plan ger volym En bredd gånger en volym ger plano-plan En bredd gånger ett plano-plan ger plano-volym En bredd gånger en plano-volym ger volym-volym Ett plan gånger ett plan ger plano-plan Ett plan gånger en volym ger plano-volym Ett plan gånger en plano-volym ger volym-volym En volym gånger en volym ger volym-volym En volym gånger ett plano-plan ger plano-plano-volym

Tabell 2 (Tengstrand, 2020)

Boyer (1968) menar på att Vietés algebra är snarare synkoperad än abstrakt, men han påstår samtidigt att Vieté är modern i vissa avseenden. Han är förmodligen den första att skriva andragradsekvationen på formen $BA^2+CA+D=0$, där A står för det okända och B, C, D är parametrar. Vieté anammade de tyska symbolerna för addition och subtraktion som liknar dagens symboler.

3.1.4.2 Simon Stevin (1548 – 1620)

Samtida med Viéte levde Simon Stevin. Två av hans viktigaste verk är *De Thiende* och *l'Arithmétique* (Aritmetik). Karaktäristiskt för Stevin är hans genomtänkta notation för decimalform. Decimalform användes inte i Europa förrän i slutet av renässansen. Tidigare försök gjordes av Vieté och Rudolff att utveckla decimalform men utan större framgång. Vietés försök att räkna ut roten ur 2 löste han genom att lägga till så många nollor som var nödvändiga. Efter att 34 nollor lags till efter 2 ($2*10^{34}$) fick Vieté slutligen att roten ur 2 är approximativt till $1\frac{41\,421\,356\,237\,309\,505}{100\,000\,000\,000\,000\,000}$. Rudolffs sätt att beteckna tal i decimalform var med hjälp av en lodrät linje, exempelvis 123|398 för att beteckna 123,398. (Katz, 2009).

Stevin uttrycker två definitioner som är väsentliga för hans insatser i matematiken.
"1: Aritmetik är läran om tal
2: Tal är det som det som förklarar kvantiteten av varje sak" (översatt från Katz, 2009; s.416).

3.1.4.3 René Descartes (1596 – 1650)

René Descartes var en fransk filosof och matematiker, hans viktigaste bidrag till matematiken är *La Géométrie* (Geometri). Det gavs ut året 1637 som ett appendix till hans stora filosofiska verk *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences* (Avhandling om metoden att rätt vägleda sitt förstånd och söka sanningen i vetenskapen). Detta verk ligger till grund för den analytiska geometrin. Analytisk geometri är ett område som knyter ihop algebra och geometri. *La Géométrie* består av tre delar. Den första handlar om geometriska konstruktioner med passare och linjal, där Descartes undersöker sambandet mellan geometriska konstruktioner och algebraiska operationer. I den andra delen studerar han kurvor och där ingår bland annat lösningen av Pappos problem. Enligt Bos är "Pappus' problem was a locus problem.

That is, it required the determination of a curve all of whose points shared a certain given property. Pappus mentioned the problem in his Collection noting that mathematicians at his time had not achieved a full solution" (Bos, 2001; s.272). Den tredje delen behandlar Descartes högregradsekvationer. En av Descartes filosofiska antaganden är att det behövs en metod för att nå sanningen, det är därför som han studerade äldre matematiska verk och försökte finna vägen till en universell matematik. Descartes använde liknande symboler som dagens, hans likhetstecken betecknade han som ∝ (Boyer, 1968).

3.1.4.4 John Wallis (1616 – 1703)

Wallis var en engelsk matematiker som studerade matematik vid Cambridge. Wallis ser den universella matematikens objekt som tal. Han menade på att alla storheter kan uppfattas som tal. "Talens och storheternas natur är att vara tecken, dvs. de är symboler som inte bara representerar, utan själva *är* matematiska objekt" (Thompsson 1994, s.415). Särdraget för Wallis sätt att se på tal är det grekisk begreppet *logos*, vilket betyder kvot. Wallis menar på att man kan se varje tal som en kvot. Exempelvis talet ⅘ , detta är ett förhållande som talen 4 och 5 har till varandra. Även heltal ser han som kvot. Heltalet 4 är en ett förhållande mellan talen 4 och 1, 4:1(Katz, 2009).

3.1.5 Abstrakt algebra (1900 – Idag)

Dagens algebra är till sin karaktär abstrakt och börjar studeras först på universitetskurser. Det var först i början av 1900-talet som abstrakt algebra utvecklades men den har sina rötter i 1800-talets matematiska landvinningar. Det är studien av ekvationer, talteori och geometri som har lett fram till den abstrakta algebran. De tre grundläggande strukturer som ingår i abstrakt algebra är grupper, ringar och kroppar. En förutsättning för dessa strukturer är den historiska utvecklingen av begrepp inom linjär algebra. Determinant, matriser, vektorrum och linjära ekvationssystem utvecklades innan den abstrakta algebran kunde utvecklas till den vi ser idag (Tengstrand, 2020).

Den algebra som elever i grundskolan och gymnasiet möter på brukar kallas för elementär algebra. Enligt Skolverkets (2020) kursplan för matematik är algebra involverad i det centrala innehållet för årskurs 1–3.

- "Elever ska arbeta med matematiska likheter och likhetstecknets betydelse.
- Hur enkla mönster i talföljder och enkla geometriska mönster kan konstrueras, beskrivas och uttryckas.
- Hur entydiga stegvisa instruktioner kan konstrueras, beskrivas och följas som grund för programmering. Symbolers användning vid stegvisa instruktioner." (Skolverket, 2020, årskurs 1–3)

Eleverna kommer att möta på algebra genom hela grundskolan och på gymnasiet. I de högre kurserna i matematik på gymnasienivå får elever även börja arbeta med linjär algebra och utforska några centrala begrepp. Det är tydligt hur algebraundervisningen är tänkt att följa en progression (Skolverket, 2020). Både Thompsson (1994) och Sfard och Linchevski (1994) framhäver teorin att individens progression i algebra kan kopplas till den historiska utvecklingen, detta kallas rekapitulationstesen. "Individen upprepar (rekapitulerar) under sitt korta jordeliv det mänskliga släktets kognitiva utveckling" (Thompsson, 1994; s. 450). Rekapitulationstesen har sina rötter i 1800-talets biologiforskning, man menade på att fostrets utveckling går att koppla till artens evolutionära utveckling. I matematikundervisningen kan ett liknande tänkande ge oss anvisningar om hur man bör undervisa (Thompsson, 1994).

Bråting och Pejlare (2015) problematiserar och nyanserar denna syn på matematikhistoria och elevers kognitiva utveckling. De gör en teoretisk ansats utifrån Grattan-Guinness försök att skilja på *historia* och *arv*. Bråting och Pejlare hävdar att när man drar parallellen mellan matematikhistoria och elevers kognitiva utveckling blandas dessa två begrepp ihop. Denna syn är problematiskt då matematiska idéer och definitioner måste tolkas i sitt rätta historiska sammanhang och konceptuella ramverk. Vidare hävdar författarna att kulturella och lokala idéer varierar vid olika tidsperioder som påverkar den konceptuella utvecklingen i olika riktningar oavsett om det är historiskt eller individuell utveckling som beaktas.

3.2 Elevers uppfattningar kring bokstavssymboler

När det kommer till elevers uppfattningar om bokstavssymboler kan man klassificera in det i antingen bokstavssymbolernas olika användningsområden eller genom att dela in elevers förståelse i hierarkiskt ordnade nivåer. Det är Dietmar Küchemann som i två olika arbeten från 1978 respektive 1981 var en av de första att kategorisera in bokstavssymboler i dessa kategorier, då han i arbetet från 1978 kategoriserade in de olika användningsområdena i sex kategorier:

"1. Letter Evaluated

2. Letter Ignored

3. Letter as Object

4. Letter as Specifik Unknown

5. Letter as Generalised Number

6. Letter as Variable" (Küchemann, 1978; s. 24)

Han gjorde detta genom att ge ut ett prov till 3000 elever i åldrarna 13 till 15 med målet att se elevers förståelse kring bokstavssymboler. Küchemann använde sen samma resultat som han fick från arbetet 1978 och utvecklade sina kategorier och kategoriserade även in resultatet i 4 nivåer av elevers förståelse till ett nytt arbete i 1981. Dessa kategorier och nivåer kommer att mer ingående presenteras i arbetet, först de sex kategorierna för de olika användningsområdena för bokstavssymboler och sedan de fyra nivåerna av elevförståelse.

Andra forskare har använt Küchemanns kategorier för att förklara sina egna resultat från sina studier eller utvecklat hans kategorier och nivåer till sina egna versioner. Enligt Persson (2010) uttrycker forskarna att bokstavssymboler har olika innebörd beroende på i vilket sammanhang de används. Exempelvis kan samma bokstav dyka upp i ett uttryck, formel eller en ekvation, och detta kan skapa missuppfattningar för eleverna. Samo (2009) lyfter fram att elever förstår bokstavssymboler på olika sätt, förutom kognitiva svårigheter där vissa tänkbara missuppfattning uppstår. Eleverna kan till exempel tolka 10m som tio meter från ett algebraiskt uttryck, när det egentligen står för 10 multiplicerat med m som en variabel.

3.2.1 Bokstaven ges ett värde

Küchemann (1981) identifierar det första avsnittet för bokstavssymboler som *Letter Evaluated*, och beskriver den på följande sätt:

"*This category applies to responses where the letter is assigned a numerical value from the outset*" (Küchemann, 1981; s.104).

Küchemann (1981) beskriver att denna kategori hänvisar till uppgifter där eleverna ska försöka hitta ett specifikt värde för ett okänt tal, men utan att först behöva operera på det okända. I denna kategori kan elever sätta in ett värde för bokstavssymbolerna direkt utan att behöva tänka på bokstaven som en okänd. Detta kan eleverna till exempel göra genom *trial and error* metoden, som går ut på att eleverna försöker sig fram för att få ut svaret, till exempel om man har ekvationen $x - 6 = 27$ och eleven ska hitta vad x har för värde kan de pröva sig fram till rätt svar (Çelik och Güneş, 2013).

6(i) (Level 1)	11(i) (Level 2)	11(ii) (Level 2)	14 (Level 3)
What can you say about a if a + 5 = 8	What can you say about u if u = v + 3 and v = 1	What can you say about m if m = 3n + 1 and n = 4	What can you say about r if r = s + t and r + s + t = 30
a = 3 92%	u = 4 61%	m = 13 62%	r = 15 35% r = 30 – s – t
	u = 2 14%	Other values 14%	r = 10 21%

Tabell 3 (Küchemann, 1981; s.105)

Tabell 3 som Küchemann (1981) har gjort är baserad på elevernas svar på uppgifterna de fick som ingår i kategorin *Bokstaven ges ett värde*. I första uppgiften 6(i) svarade majoriteten av eleverna korrekt och det berodde på att de kunde pröva sig fram till rätt svar, men även på grund av att siffrorna har ett lågt värde vilket inte kräver så många försök. Detta är ett typiskt exempel av *trial and error* metoden som Çelik och Güneş (2013) beskrev. Dock så skriver Küchemann att uppgiftens ursprungliga syfte var att se elevernas förmåga att kunna få *a* ensam i vänster led och *8 - 5* i högerled.

I uppgift 11(i) och 11(ii) blir frågorna svårare när det börjar involvera två variabler och det inte längre går att endast pröva sig fram till svaret, men majoriteten av eleverna svarar fortfarande korrekt. Detta beror på att eleverna får veta en av variablerna, $v = 1$ vilket gör att de kan lösa ut *u* genom vanlig aritmetik.

Den sista uppgiften 14 visade sig vara den svåraste med endast 41 procent av eleverna som svarade korrekt på frågan. Uppgiften kunde lösas genom att ersätta $s + t$ med *r* i andra ekvationens uttryck. Uppgiften kräver att eleverna kan hantera bokstäverna som specifika okända, vilket kommer tas upp mer noggrant i avsnitt **3.2.4**. 21 procent av eleverna svarade att $r = 10$, genom att anta att $r = s = t = 10$ så att $r + s + t = 30$. Detta verkar bero på att eleverna undvikit den högre kategorin specifika okända genom att utvärdera *r* direkt från det andra ekvationsuttrycket.

3.2.2 Bokstaven används inte

Den andra kategorin som Küchemann identifierar kallar han för *Letter not Used* och den beskrivs såhär:

"*Here the children ignore the letter, or at best acknowledge its existence but without giving it a meaning*" (Küchemann, 1981; s.104).

I den här kategorin ingår uppgifter där man kan komma fram till ett svar utan att behöva räkna ut vad alla bokstavssymboler är. Çelik och Güneş (2013) skriver att eleverna kan ignorera eller inte tolka bokstäverna, men de erkänner fortfarande deras existens. Till exempel om man ska lösa problemet "$a + b = 43$, $a + b + 2 = ?$" (Küchemann, 1981; s.106) kan eleverna ignorera bokstäverna och arbeta direkt med "*+ 2*" för att komma fram till rätt svar.

5(i) (Level 1)		**5(ii)**		**5(iii) (Level 3)**	
If a + b = 43 a + b + 2 = …		If n – 246 = 762 n – 247 = …		If e + f = 8 e + f + g = …	
45	97%	761	74%	8 + g	41%
		763 Other Values	13% 8%	15 12 8g 9	2% 26% 3% 6%

Tabell 4 (Küchemann, 1981; s.106)

I de två första frågorna, 5(i) och 5(ii) kan båda lösas genom att ignorera tillvaron av bokstavssymbolerna. Första uppgiften 5(i) går Çelik och Güneş (2013) igenom i texten ovanför.

Andra uppgiften 5(ii) kan hanteras i samma stil som 5(i) genom att para ihop de två ekvationsuttrycken, och upptäcka att man kan skriva om *n - 247* till *n – 246 - 1*. Därefter kan man ersätta *n-246* med första svaret i första ekvationsuttrycket och få *762 – 1* som blir *761*. I båda uppgifterna använde man samma metod, men i 5(i) så var det 97 procent som svarade korrekt medan i 5(ii) var det 74 procent som svarade rätt, antalet elever som svarade korrekt på uppgiften sjönk alltså med 23 procentenheter. Küchemann (1981) förklarar att anledningen till att fler svarade fel på 5(ii) beror på att ekvationen var svårare på grund av de större talen och för att operation var implicit och kontraintuitiv. Küchemann berättar även att eleverna ser att 247 är större än 246 och det övertalade dem att addera 1 till 762 istället för att subtrahera, som förklarar varför 13 procent svarade 763.

I sista uppgiften 5(iii) kan eleverna också använda samma metod att ignorera bokstäverna genom att matcha ihop ekvationerna, men i andra ekvationsuttrycket (*e + f + g = ...)* ser vi ingen siffra som i ekvationsuttrycket *e + f = 8* utan istället en till okänd variabel *g*. Där de som vanligt kan undvika *e* och *f* behöver de fortfarande kunna arbeta med *g*, vilket betyder att de behöver kunna använda sig av specifika okända. Küchemann (1981) förklarar att eleverna försöker lösa uppgiften genom att utvärdera variabeln *g*, och att många av eleverna gjorde detta genom att antingen se *g* som 4 (*e + f + g = 4 + 4 + 4 = 12*) eller som 7 (*g* är den sjunde bokstaven i alfabetisk ordning, *g = 7*) för att få svaren 12 och 15. Küchemann spekulerar att de elever som gav svaret 9 har tänkt att då man adderar ett nytt okänt tal så ska värdet öka, och de adderade då *1* för att det var det enklaste sättet att få ett större tal. Şahin och Soylu (2011) tar upp ett liknande resultat där ett fåtal elever ersatte bokstäverna med ett slumpvalt tal. De såg *x*:et i *4x* som ett tal som skulle ingå i ett tvåsiffrigt tal, exempelvis kan *4x* tolkas som 47.

3.2.3 Bokstaven som ett objekt

Den tredje kategorin kallas för *Letter used as an object*. Küchemann (1981) sammanfattar kategorin på detta sätt:

"*The letter is regarded as a shorthand for an object or as an object in its own right.*" (s.104).

Çelik och Güneş (2013) skriver att man kan se bokstäverna som objekt, men att problemet uppstår när det representerar ett objekt istället för antalet objekt. De tar upp följande fråga:

"*Blue pencils cost 5 pence each and red pencils cost 6 pence each. I buy some blue and some red pencils and altogether it costs me 90 pence. If b is the number of blue pencils bought, and if r is the number of red pencils bought, what can you write down about b or r?*" (Kuchemann, 1981; s.107). Några av de vanligaste svaren som gavs på denna uppgift var "*b+r=90*" och "*6b+10r=90*". Çelik och Güneş säger även att för att kunna lösa denna uppgift korrekt så behöver man även se bokstäverna som specifika okända, vilket kommer att tas upp i avsnitt **3.2.4**.

Uppgifterna i tabell 6 gick ut på att eleverna skulle förenkla olika uttryck.

13(i) (Level 1)	**13(iv) (Level 2)**	**13(viii) (Level 3)**	**13(v) (Level 4)**
2a + 5a =	2a + 5b + a =	3a – b + a =	(a – b) + b =
7a 86%	3a + 5b 60%	4b – b 47%	a 23%

Tabell 5 (Küchemann, 1981; s.107)

I första frågan 13(i) möter eleverna på en okänd variabel som de ska addera ihop och en stor del av eleverna svarade rätt på frågan. Küchemann (1981) förklarar hur man kan tänka för att lösa uppgiften, och det är genom att tänka om bokstäverna som ett objekt, exempelvis *a* kan stå för apelsin, därmed i första uppgiften så har man 2 apelsiner och lägger till 5 apelsiner som blir 7 apelsiner.

Küchemann tar upp samma förklaring till nästa fråga 13(iv) genom att omvandla *b* till banan, 2 apelsiner + 5 bananer + 1 apelsin har vi totalt 3 apelsiner och 5 bananer. Problemet med detta tankesätt börjar när man ska addera eller subtrahera två olika objekt med varandra, som i nästa uppgift 13(viii), när man tänker 3 apelsiner tar bort en banan, ger den sammanhanget lite mening. Liknande svårigheter inträffar med (*a* - *b*) i 13(v), och elever möter mer besvär när det skrivs i parenteser som avsiktligt skapar uppmärksamhet på ett uttryck som i sig själv inte kan förenklas.

Küchemann (1981) skriver att användandet av bokstaven som ett objekt innebär att man reducerar bokstavens mening från något helt abstrakt till något mer konkret. Han kom fram till att användandet av en bokstav som ett objekt gjorde det möjligt för eleverna att svara på vissa frågor som de i vanliga fall hade svårt för när de behövde använda den avsedda betydelsen av bokstaven. Men Küchemann förklarar att denna reducering av förståelsen av bokstaven inträffade ofta när det inte var lämpligt. Detta händer särskilt när det involverar föremål, exempelvis frukter, pennor osv. Denna skillnad kan ibland vara väldigt svår att förstå.

Lucariello, Tine och Ganley (2013) och Persson (2010) går igenom elevers missuppfattningar, precis som Küchemann gjort. De förklarar missuppfattningar som elever gör när de bygger upp ett uttryck som en etikett för ett objekt. De förklarar från ett klassiskt exempel som kallas *Students and Professors* problemet, som lyder följande: "*Write an equation, using the variables S and P to represent the following statement. 'At this university there are six times as many students as professors.' Use S for the number of students and P for the number of professors*" (Lucariello, Tine och Ganley, 2013; s. 31). En felaktig förståelse som elever har är att de drar slutsatsen att S är en etikett för ett objekt (studenter), istället för en variabel (antal studenter) som leder till att eleverna ger ett felaktigt svar som $6S = P$.

Uppgift 22 skapade en stark förvirring för eleverna då de skulle skapa ett algebraiskt uttryck utifrån texten. Küchemann (1981) påpekade även att de elever som inte har haft problem vid tidigare uppgifter även hade svårigheter på denna uppgift.

Question 22 (Level 4)	
Blue pencils cost 5 pence each and red pencils cost 6 pence each. I buy some blue and some red pencil and altogether it costs me 90 pence. If b is the number of blue pencils bought and if r is the number of red pencils bought, what can you write down about b and r?	
5b + 6r = 90	10%
Two correct pairs, of (6, 10), (12, 5), (18, 0), (0, 15).	1%
b + r = 90	17%
6b + 10r = 90 or 12b + 5r = 90	6%

Tabell 6 (Küchemann, 1981; s.107)

För att kunna lösa uppgiften krävs det att eleverna ska kunna betrakta bokstäverna som specifika okända. Küchemann (1981) förklarar hur man kan tänka runt uppgiften: "*I bought b blue pencils which therefore cost 5 x b pence altogether etc. It was not possible to classify all the different responses that children gave, but of the answers that were coded, ´b + r = 90´ and answers like ´6b + 1 + r = 90' are probably the most interesting.*" (s. 108)

Enligt Küchemann (1981) så visade 17 procent av eleverna som gav svaret *b + r = 90* en förståelse för grundprincipen av användning för bokstäver (Level 3, mer i avsnitt **3.2.7**), men deras svar verkar stå för ***b****låa pennor och* ***r****öda pennor som kostar 90 pence*. Men även om det är sant ger det endast en begränsad information och använder bokstaven som objekt.

De 6 procent av elever som svarade *6b + 10r = 90* (eller *12b + 5r = 90*) hade hittat ett korrekt par värden för *b* och *r* (6, 10) men istället för att uttrycka detta som visar att *b* och *r* är siffror (b = 6, r =10), så uttrycker de: *6 blåa pennor och 10 röda pennor kostade 90 pence*. Detta visar återigen att bokstäverna har använts som objekt (Küchemann, 1981).

Macgregor och Stacey (1997) gjorde ett experiment på tre skolor (School A-C) för elever vid årskurs 8 och 9, om uppfattning och förståelse om bokstavssymboler. Skola C uppvisade en stor svårighet med bokstavssymbol som ett objekt för både årskurs 8 och 9. Från diskussioner med lärarna på skolan fick de reda på att läromedel som använts i undervisningen ofta presenterar bokstäver som förkortade ord (k står för katt, så 5k stå för 5 katter). Macgregor och Staceys (1997) upptäckte att lärarna i skola C var orsaken till denna missuppfattning på grund av att de inte tydliggjorde bokstavens kontextuella sammanhang. Tydligen visade eleverna även en koppling till den alfabetiska tolkningen för bokstavssymboler. Eleverna ersatte bokstäverna med tal beroende i vilken ordning bokstaven kommer i alfabetisk ordning (exempelvis H = 8). Lärarna var inte medvetna om detta missförstånd, men när de fick kännedom om det var det lätt att korrigera problemet. Däremot elevernas missuppfattning av bokstaven som förkortade ord visade sig vara mer svår att korrigera och fortsatte som en källa för elever som hade svårigheter (Macgregor & Stacey, 1997).

3.2.4 Bokstaven som specifik okänd

Den fjärde kategori kallas för *Letter used as a specific unknown* och beskrivs på följande vis:

"Children regard a letter as a specific but unknown number, and can operate upon it directly." (Küchemann, 1981; s.104).

Çelik och Güneş (2013) och Küchemann (1981) tar upp att i de tidigare tre avsnitten har eleverna kunnat undvika att behöva se på bokstäverna som specifika okända, men att det nu krävs för att kunna lösa uppgifter som till exempel "*Multiply n + 5 by 4*" (Küchemann, 1981; s. 108). För att kunna lösa uppgiften måste eleverna multiplicera 4 med både n och 5, men många elever ger svar där detta inte har gjorts.

4(i) (Level 2)		**4(ii) (Level 3)**		**4(iii) (Level 4)**	
Add 4 onto n + 5		Add 4 onto 3n		Multiply n + 5 By 4	
n + 9	68%	3n + 4	36%	4n + 20 or 4(n + 5)	17%
9	20%	7n 7	31% 16%	4n + 5 or 4 x n + 5 n + 20 20	19% 31% 15%

Tabell 7 (Küchemann, 1981; s.108)

Lucariello, Tine och Ganley (2013) förklarar att 68 procent av eleverna svarade korrekt på fråga 4(i) genom att lägga till fyra i $n + 5$ och får $n + 9$, men att 20 procent gav 9 som svar. Lucariello, Tine och Ganley poängterar att eleverna som gav svaret 9 förenklade problemet på ett felaktigt sätt, genom att helt enkelt ignorera variabeln helt när de gav sitt svar. Şahin och Soylu (2011) genomförde en studie där dom gav en liknande uppgift ($4x + 9x = ?$) till eleverna och fann även de att eleverna ignorerade bokstäverna och svarade rent numeriskt då 40 procent svarade 13 istället för $13x$.

Küchemann (1981) förklarar att eleverna hade en stor utmaning med uppgift 4(ii) vilket kan verka förvånande. När svaret visar sig vara $3n + 4$ kan det se enkelt ut, men det är just därför som det är otillfredsställande för eleverna att ange detta som svar. Küchemann förklarar att ingenting speciellt har hänt med $3n$ och 4 för att få svaret, men av den orsaken att n är okänt är det nödvändigt att eleverna inser att detta är allt som kan göras för att kombinera elementen. De elever som inte kunde hantera detta gav svar som $7n$ (31 procent) eller bara 7 (16 procent), där elementen kombineras grundligt men bokstaven ignorerades eller lämnades helt enkel som den var.

Sista uppgiften 4(iii) var betydligt svårare än de tidigare uppgifter där endast 17 procent svarade korrekt, detta på grund av dess större strukturella komplexitet. Uppgiftens operation att multiplicera 4 måste tillämpas på båda elementen i uttrycket $n + 5$, istället har eleverna bara multiplicerat fyra i ena elementet, men inte det andra (Küchemann, 1981). Küchemann skriver att det kan diskuteras att svaret $4 * n + 5$ uppstår på grund av eleverna har bristande kunskaper med parenteser, men det är också mycket möjligt att eleverna hade menat ett svar som $4(n + 5)$, men att de glömde parenteserna i svaret.

3.2.5 Bokstaven som generellt tal

Den femte kategorin heter *Letter used as a generalized number* och Küchemann beskriver den på följande sätt:

"The letter is seen as representing, or at least as being able to take, several values rather than just one." (Küchemann, 1981; s.104).

Skillnaden mellan denna kategori och den förra är att man nu kan se att bokstaven kan anta ett flertal värden, inte bara ett specifikt. Till exempel måste bokstavssymbolerna kunna ses som generella tal i följande uppgift: "*What can you say about c if c+d=10 and c is less than d?*" (Küchemann, 1981; s. 109), och då är ett svar som $c < 5$ passande (Çelik och Güneş, 2013).

16 (Level 3)		**18(ii) (Level 4)**	
What can you say about c If c + d = 10 And c is less than d?		L + M + N = L + P + N is Always Sometimes (when) Never true	
c < 5 c = 1, 2, 3, 4 (systematic list) c = 10 – d	11% 19% 4%	Sometimes, when M = P	25%
Unsystematic list One value only (usually c = 4)	1% 39%	Sometimes. Or M and P given a specific value Never	14% 51%

Tabell 8 (Küchemann, 1981; s.109)

Küchemann (1981) lyfter fram att uppgifterna i tabell 8 var svårare för eleverna än många av de specifika okända uppgifterna och det kan bero på att eleverna förstår sig på specifika okända innan generella tal. Både uppgift 16 och 18(ii) kräver att eleverna ska kunna se bokstäverna som generella tal. Det visar sig i tabell 8 enligt Küchemann (1981) att eleverna visade större svårigheter med generella tal än i avsnittet **3.2.4**.

I uppgift 16 (tabell 8) undersöker man om eleverna uppfattar att det inte bara finns ett svar, utan om de kan se att det finns flera svar för c och att de förhoppningsvis kan ge ett uttryck som beskriver det. Man kan se att eleverna antar att bokstäverna är bestämda och bokstavssymbolerna ska ha ett värde. I uppgiften syns det att majoriteten av svaren från eleverna var ett värde (c = 4 (39 procent)), där man ville få ut att c kan ha flera svarsalternativ och troligen skulle eleverna kunna ge fler än ett svar ifall man hade frågat efter det.

Christou och Vosniadou (2012) skriver att även om flera elever kan förstå sig på konceptet av att ett tal kan agera som ett generellt tal är det fortfarande många elever som inte klarar av att lösa dessa uppgifter. Detta är på grund av att elever fastnar i det som Christou och Vosniadou kallar för ett *natural number bias*, vilket innebär att eleverna tenderar att tro att bokstavssymbolerna endast kan stå för naturliga tal. I Christou och Vosniadous studie fann de att även eleverna som svarat med endast naturliga tal kunde acceptera ett svar med icke-naturliga tal, så som reella tal eller negativa tal, efter att de föreslagit det för eleven i fråga. Detta tror Christou och Vosniadou beror på att eleverna fastnar i deras första förståelse av vad tal är, vilket är de naturliga talen. När det sedan kommer till att använda bokstavssymboler återgår eleverna till den första förståelsen av tal och svarar därför endast med de naturliga talen.

Philipp (1992) lyfter fram sina åsikter angående vilka kunskaper eleverna har kring bokstavssymbolens olika kontexter i gymnasiet. Han drar upp ett exempel med exponentiella ekvationer, $A=Pe^{kt}$, som används för att beräkna ut mängden pengar man skulle ha efter tiden t om P kronor, insatta i ett konto, sammansattes oavbruten till räntesats k per tidsenhet. I denna ekvation används bokstavssymboler på tre olika sätt:

1. Används som konstanter (e)
2. Används som kvantiteter som varierar (t, A)
3. Används som parametrar (P, k).

Philipp (1992) funderar om eleverna inser de olika roller som bokstavssymboler kan spela. Han funderar om läraren poängterar ut dessa skillnader för eleverna, när det är komplicerat att förstå sig på och är lätt att missuppfatta. Ett sätt att hantera användning av bokstavssymboler som generella tal är att omvandla ett uttryck, exempelvis att förenkla $2t + 3t – 9$ till $5t – 9$. Implicit i denna omvandling är elementen $2t + 3t = 5t$, men det är en användning av bokstavssymbolen som ett generellt tal.

När elever möter på uppgifter som kräver dem att förenkla ett uttryck, exempelvis $3x +5x – 24$, visar det vara vanligt enligt Philipp (1992) att eleverna skriver om uttrycket till en ekvation som till exempel $3x + 5x – 24 = 0$ och löser uppgiften med $x = 3$. Eleverna behöver vara medvetna om att ekvationen $3x + 5x – 24 = 0$ behandlar bokstavssymbolen som en okänd för att lösas, men att uttrycket $3x + 5x – 24$ behandlar bokstavssymbolen som ett generellt tal. Eleverna behöver lära sig att kunna arbeta med flera olika typer av bokstavssymboler samtidigt i ett problem, som i det tidigare exemplet som involverar det exponentiella ($A = Pe^{kt}$). De behöver även lärdom om att en given bokstavssymbol kan ta mer än en enda roll inom det givna problemet. Philipp (1992) tar upp en ekvation som elever vid första året på gymnasiet behandlar:

$$2x + 3x – 8 = 25$$
$$5x – 8 = 25$$
$$5x = 33$$
$$x = \frac{33}{5}.$$

Vid första ögonkastet ser det ut som att eleverna har behandlat bokstavssymbolen som en okänd, men vid närmare granskning visar det sig att eleverna behandlar uttrycket $2x + 3x = 5x$ implicit som ett generellt tal.

3.2.6 Bokstaven som en variabel

Küchemanns sista kategori kallas för *Letter used as a variable* och han sammanfattar denna kategori på följande sätt:

“The letter is seen as representing a range of unspecified values, and a systematic relationship is seen to exist between two such sets values.” (Küchemann, 1981; s.104).

Çelik och Güneş (2013) skriver att bokstavssymbolerna även kan ses som variabler, och menar på att bokstäverna ibland måste kunna ses som en rad olika ospecificerade tal, där det finns en systematisk relation mellan två sådana tal. Till exempel i följande fråga behöver man se bokstavssymbolen som en variabel: *"Which is larger, 2n or n+2? Explain."* (Küchemann, 1981; s. 111).

Various responses to Question 3 (14-year olds)	
Which is larger, 2n or n + 2? Explain.	
Correct, conditional response (eg 2n, when > 2)	6%
2n	71%
n + 2	16%
Or 'the same'	

Tabell 9 (Küchemann, 1981; s.111)

Uppgiften i tabell 9 hade som mål att se om eleverna kunde avgöra vilken av de två uttrycken (*2n* och *n+2*) som var störst beroende på vad n hade för värde. Men 71 procent av eleverna skrev att *2n* var störst och deras resonemang grundades i att det ingick en multiplikation i uttrycket (Küchemann, 1981). Küchemann (1981) skrev att utifrån elevernas svar såg han inga bevis på en användning av *Trial and error* metoden, speciellt inte bland eleverna som svarade korrekt på uppgiften. Küchemann förklarar att de som svarade korrekt kunde hitta ett förhållande mellan *2n* och *n + 2*, som han kallar *Second-order Relationship* (Andra ordningens relation)

> The relevance of such a relationship can best be explained by seeing what happens to *2n* and *n + 2* when specific values are chosen for n. Consider, for example, the values *n=4* and *n=7* which give the pairs (8, 6) and (14, 9) for (*2n, n + 2*). Here the obvious (first order) relationship, which holds for each pair in turn and which is prompted by the original question, is that *2n > n + 2*. However, it is also possible to establish a second-order relationship between the pairs, which can be expressed as 'as *n* increases the difference between *2n* and *n + 2* increases (14 - 9>8 - 6)' or 'the increase in *2n* is greater than the increase in *n + 2* (14 - 8>9 - 6)'. The significance of this relationship is that it opens up the possibility that for some smaller value of n there may be no difference between *2n* and *n + 2* (when *n=2*), or the difference may even be reversed (when *n<2*) (Küchemann, 1981; 112).

Küchemann (1981) skriver att eleverna inte löser uppgiften genom att följa alla dessa steg, utan att de som svarade korrekt kan se relationen mellan *2n* och *n + 2* redan från början. De elever som inte klarade av att se relationen mellan uttrycken letade efter något enklare och snabbare svar.

3.2.6.1 Användning av begreppet variabel

Termen variabel går att definiera på en mängd olika sätt. Enligt dictionary.com så lyder definitionen för variabel så här:

1. "a quantity or function that may assume any given value or set of values.
2. a symbol that represents this." ("Variable", 2020)

Küchemann (1981) använder begreppet variabel för att beskriva en bokstavssymbol som varierar i värde. Küchemann skriver att termen variabel används som en *blanket term* som inte bara täcker in hans egen användning av variabelbegreppet, men används även mer vardagligt inom matematiken för att beskriva bokstavssymboler som helhet. Han tar även upp att han tycker det är konstigt att vi talar om alla bokstavssymboler som variabler då det uppenbarligen går att lösa uppgifter utan att behöva använda sig av en andra ordningens relation.

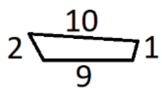
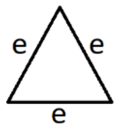
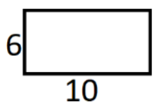
Schoenfeld och Arcavi (1988) tar upp i sitt arbete de många olika definitionerna och användningsområdena för begreppet *variabel*. Själva begreppet variabel används i skolorna idag för att beskriva väldigt många olika saker och inte endast för att beskriva något som varierar i värde, vilket skapar stor förvirring hos elever.

3.2.7 Nivåer av förståelse

I tabellerna i de föregående avsnitten har Küchemann (1981) även delat in elevers förståelse i fyra olika nivåer (levels). Dessa beskriver de olika nivåerna av förståelse som eleverna behöver ligga på för att kunna lösa uppgifterna korrekt. Nedanför följer förklaringar av varje enskild nivå.

Nivå 1:

Küchemann (1981) skriver att elever som ligger på denna nivå endast kan lösa uppgifter som antingen är rent numeriska (8 och 7(ii)), eller som har en "lättare struktur" och kan kategoriseras in i *Bokstaven ges ett värde* (6(i)), *Bokstaven används inte* (5(i)) eller *Bokstaven används som ett objekt* (9(i) och 13(i)).

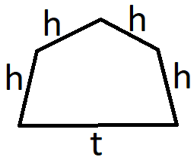
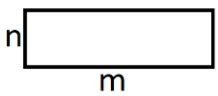
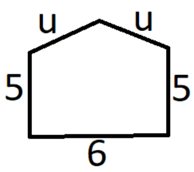
Item			13-year olds	14-year olds	15-year olds
8		p =	95%	97%	96%
5(I)	a + b = 43	a + b + 2 =	92%	97%	95%
9(i)		p =	91%	94%	93%
6(i)	a + 5 = 8	a =	86%	92%	93%
7(ii)		A =	79%	89%	90%
13(i)		2a + 5a =	77%	86%	87%

Tabell 10 (Küchemann, 1981; s.113)

Eleverna som ligger på denna nivå av förståelse svara till exempel *4ht* eller *5ht* istället för *4h+t* på fråga 9(ii) (tabell 11), *8ab* istället för *3a+5b* på 13(iv) (tabell 11) och 763 istället för 761 på 5(ii) (tabell 4). 9(ii), 13(iv) och 5(ii) är alla frågor som kräver en förståelse på nivå 2 eller högre för att kunna lösa korrekt. När det istället handlade om frågor som kräver att eleverna skulle kunna hantera bokstäverna som specifika okända valde eleverna på denna nivå att istället utvärdera bokstaven, till exempel genom att svara *p=32* istället för *p=2n* på fråga 9(iv) (tabell 12), eller inte använda bokstaven överhuvudtaget genom att svara 7 eller *7n* på fråga 4(ii) (tabell 12) istället för det korrekta *3n+4*.

Nivå 2

Küchemann (1981) tar upp att den stora skillnaden mellan nivå 1 och nivå 2 är att frågorna nu kräver en djupare förståelse för att kunna lösa på ett korrekt sätt. Dock kan elever som ligger på nivå 2 fortfarande inte hantera bokstäver som specifika okända, generella tal eller variabler. Frågorna som kopplas till nivå 2 kan kategoriseras in som antingen *Bokstaven ges ett värde* (11(i) och 11(ii)) eller *Bokstaven som ett objekt* (9(ii), 7(iii), 9(iii) och 13(iv)).

Item			**13-year olds**	**14-year olds**	**15-year olds**
15(i)	(This was a numerical item concerned with diagonals of polygons)		63%	75%	72%
9(ii)		p =	58%	68%	73%
7(iii)		A =	54%	68%	76%
9(iii)		p =	54%	64%	67%
11(ii)	m = 3n + 1, n = 4	m =	44%	62%	67%
11(I)	u = v + 3, v = 1	u =	49%	61%	70%
13(iv)		2a + 5b + a =	40%	60%	66%

Tabell 11 (Küchemann, 1981; s.114)

Küchemann (1981) skriver att en av anledningarna till de förbättrade resultaten mellan elever på nivå 1 och nivå 2 kan vara att eleverna som ligger på nivå 2 börjar att acceptera att svaren inte alltid kommer att se färdiga ut (vilket utvecklas ännu mer till nivå 3). Detta skulle kunna förklara varför 20 procent av eleverna (varav tre fjärdedelar av dessa elever låg på nivå 1) svarade *8ab* på fråga 13(iv) istället för *3a + 5b*. Eleverna kan ha kommit fram till *3a + 5b* men inte ha tyckt att svaret såg komplett ut och försökt förenkla svaret ännu mer än vad som var möjligt.

Nivå 3

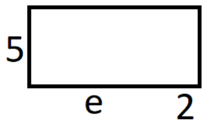
Küchemann (1981) menar att den stora skillnaden mellan elever på nivå 2 och 3 är att eleverna på nivå 3 kan hantera bokstäver som specifika okända, dock endast om frågorna inte är för komplexa. Det är även på denna nivå som elever kan se svar som till exempel *8 + g*, *3n +4* eller *p = 2n* och vara helt nöjda med att svaren kan se "oklara" ut.

Item			13-year olds	14-year olds	15-year olds
15(ii)	A figure with k sides has… Diagnoals (extension of 15(i))		34%	52%	54%
13(viii)		3a – b + a =	27%	47%	56%
13(ii)		2a + 5b =	29%	45%	51%
5(iii)	e + f = 8	e + f + g =	25%	41%	50%
14	r = s + t, r + s + t = 30	r =	30%	41%	39%
9(iv)	n-sided figure, each side of length 2.		24%	38%	41%
4(ii)	Add 4 onto 3n	p =	22%	36%	41%
16	C + d = 10, c < d	c =	21%	30%	35%

Tabell 12 (Küchemann, 1981; s.115)

Nivå 4

Det är först på den här nivån som eleverna inte bara kan hantera bokstäverna som specifika okända även när frågorna har en mer komplex struktur (13(v), 4(iii) och 7(iv)), utan det är även först när det når denna nivå som de kan hantera bokstäverna som generella tal (18(ii)) och variabler (3). Eleverna klarar av att hantera bokstäverna på ett korrekt sätt i till exempel frågorna 20, 22 och 17(i) där bokstäverna behöver ses som specifika okända, men elever på lägre nivåer tenderar att hantera bokstäverna som objekt istället (Küchemann, 1981).

Item		**13-year olds**	**14-year olds**	**15-year olds**
18(ii)	L + M + N = L + P + N, Always, Sometimes (when), Never	11%	25%	27%
13(v)	(a – b) + b =	15%	23%	32%
20	What does 4c + 3b stand for (if cakes cost c pence each and buns b pence each, and if 4 cakes are bought, etc)?	14%	22%	30%
4(iii)	Multiply n + 5 by 4	8%	17%	25%
7(iv)	 A=	7%	12%	16%
21	If (x + 1)^3 + x = 349 when x + 6, what value of x makes (5x + 1)^3 +5x = 349 true?	4%	12%	16%
22	Blue pencils and red pencils…	2%	11%	13%
3	Which is larger, 2n or n + 2? Explain.	4%	6%	10%
17	(Question concerning a total wage, W, after h hours of overtime, given the basic wage and the rate for overtime.)	2%	5%	8%

Tabell 13 (Küchemann, 1981; s.115)

Det finns även andra författare som har försökt att kategorisera in elevers förståelse i olika nivåer, till exempel Quinlans (1993) nivåer av elevers uppfattningar. Den består av fem hierarkiskt ordnade nivåer som beskriver hur elever uppfattar och tolkar bokstavssymboler i matematiken. Quinlan skriver även vilken sorts uppgifter, från Küchemanns sex kategorier, som eleverna kan lösa när det ligger på de olika nivåerna.

Nivå	Förklaring av nivån	Küchemanns kategorier
1	Bokstaven ses som ett objekt utan mening, som att bokstaven står för ett objekt, att bokstaven får sitt värde från dess plats i alfabetet, etc.	Bokstaven som objekt eller Bokstaven används inte
2	Det räcker att pröva ett tal istället för bokstaven	Bokstaven ges ett värde
3	Det är nödvändigt att pröva flera tal	Bokstaven som generellt tal och Bokstaven som specifik okänd
4	Bokstaven ses som att representera en klass av tal och det räcker att pröva ett av dessa tal	Bokstaven som generellt tal
5	Bokstaven ses som att representera en klass av tal och det är inte nödvändigt att pröva något av dessa tal	Bokstaven som variabel

Tabell 14 översatt och om formaterad från Quinlan (1993)

Bergsten m.fl (2012) skriver att det i Quinlans nivåer är många elever som har svårt att nå ända vägen upp till nivåerna 4 och 5, och att det dessvärre är många elever som fastnar på nivå 1. Eleverna har svårt för när bokstavssymboler används som variabler, men de har lättare att se bokstavssymboler som ett specifikt tal i en ekvation.

Det är dock inte alla som håller med Küchemann och Quinlan när det kommer till deras hierarkiska nivåer av förståelse. Persson (2010) skriver att idag är det många forskare som ifrågasätter idén om att kategorisera in elever i hierarkiskt ordnade nivåer, där elever börjar på nivå ett och sedan rör sig uppåt. Det är många forskare som idag tvivlar på att utvecklingen sker på ett sådant linjärt sätt. Idag menar forskare på att eleverna snarare bygger upp sina kunskaper utan att förlora de gamla, istället för att deras kunskaper byts ut.

4 Diskussion

4.1 Algebrans historiska utveckling

Algebrans historia är en lång tradition av mänsklig aktivitet av sökandet efter sanningen. Man ville finna generella samband i aritmetiken. Den retoriska algebran är det första stadiet i algebrans utveckling och problemen som formulerades var vardagliga. Man lyckades lösa ganska komplicerade problem med hjälp av retorisk algebra men det uppstod komplikationer med att uttrycka matematiska samband och objekt i en retorisk form. Detta ledde till att matematikerna började använda sig av förkortningar och införde egna symboler, det här stadiet kallas för synkoperad algebra. Nackdelen med synkoperad algebra är att matematikerna införde sina egna beteckningssystem som inte var gemensamt bland alla matematiker, vissa beteckningssystem var mer eller mindre genomtänkta (Tengstrand, 2020). Framställningen av den retorisk och synkoperade algebran har varit svårt att separera från varandra i detta arbete. Anledningen till detta är att den synkoperade formen framkommer sporadiskt ur den retoriska algebran. Om man tänker sig den historiska utvecklingen av algebra, har algebra samtidigt följt en utveckling från enkla och vardagliga problem till en mer abstrakt nivå, kan man säga att abstraktionsnivån mellan retorisk och synkoperad algebra inte ökar avsevärt mycket.

Den matematik som muslimerna hade utvecklat genom att studera de gamla grekernas verk och hinduiska skrifter nådde så småningom Europa under medeltiden. I samband med matematikern Leonardo Fibonaccis arbeten i matematik lyckades den europeiska algebran blomstra. Efter gynnsamma förhållanden kunde begynnelsen av den symboliska algebran äga rum. Lösningen av tredje- och fjärdegradsekvationer var en av de bidragande faktorerna till att den symboliska algebran kunde utvecklas (Tengstrand, 2020). Problemställningarna handlar längre inte om vardagligt bundna problem utan fokuset är att hitta generella samband, därmed högre abstraktionsnivå. Matematiken får härmed en alltmer framträdande roll i andra forskningsdiscipliner. Vissa matematiker pratar om matematiken som ett universellt språk. Kunskaper i algebra kunde bidra till att ett industrisamhälle långsamt kunde växa fram i bakgrund mot upplysningsfilosofernas bidrag till en ny världsbild. Sista fasen i algebrans utveckling är den abstrakta algebran. Det är först på universitetsnivå som man studerar abstrakt algebra. Det är bland annat studien av algebraiska strukturer som kropp, ring och grupp. Moderna datorer är till stor fördel för utvecklingen av algebrans strukturer.

Att undervisa om algebrans historia kan uppfylla flera syften. Ett av de sju förmågorna som eleverna ska utveckla i matematiken handlar om historia, eleven ska kunna relatera matematiken till dess betydelse och användning inom andra ämnen, i ett yrkesmässigt, samhälleligt och historiskt sammanhang (Skolverket, 2020). Ett historiskt perspektiv på matematikundervisningen kan fungera dels som en inspirationskälla och dels som ett medvetandegörande av kulturarvet. Att belysa förhållandet mellan människa, matematik och samhälle är nödvändigt. Efter denna litteraturöversikt har vi insett hur algebran har drivits av vetgiriga personer men algebrans utveckling har periodvis drivits ur ett behov att tillfredsställa samhällets krav, vilket i sin tur har lett fram till nya insikter i algebra.

Algebrans notation bygger på konventioner som är allmänt accepterade av matematiker världen över. Detta medför en svårighet för läraren att förmedla denna sociala konvention till eleverna. Att lära sig algebra är då likställt att lära sig ett nytt språk, med alla dess bokstäver. Det är en utmaning för eleven att få ta del av det kollektiva språket som används i algebra.

Thompssons (1994) syn på rekapitulationstesen är att den historiska utvecklingen av algebran kan kopplas till individens kognitiva utveckling. Bråting och Pejlare (2015) delar inte samma uppfattning som Thompsson och hävdar att teorin är diskrediterad av dagens forskare. Även om vi håller med om Bråting och Pejlares syn på matematikhistoria och elevers matematikinlärning anser vi även att vetskapen av rekapitulationstesen kan vara till stor hjälp för lärare att bli uppmärksam på vissa svårigheter som elever möter på under deras utveckling i algebra. Vissa svårigheter som eleverna möter på, kan man med ett historiskt perspektiv försöka förebygga genom att anpassa undervisningen.

En omtvistad debatt i forskningen om algebraundervisning har varit om hur tidigt elever kan introduceras till algebra och om de yngsta eleverna har en förmåga att tänka algebraiskt. Under den historiska utvecklingen har aritmetik varit ett förstadium till algebra. Men många av dagens forskare hävdar att aritmetik inte behöver läras ut innan algebra. Eftersom algebra är en sån central del av matematiken och att forskningen stödjer en tidigare introduktion av algebra anser vi att en tidig introduktion av algebra är bra då de skulle vara till fördel för eleven och läraren. Fördelen är att eleven får mer tid att utveckla sin algebraiska förståelse.

4.2 Elevers uppfattningar kring bokstavssymboler

Elevers uppfattningar och förståelse om bokstavssymboler är väldigt varierad. Vissa elever kan greppa de olika användningsområdena för bokstavssymboler och kan på så vis lösa en mängd olika uppgifter, medan andra elever har väldigt svårt att förstå de många olika sätten som bokstäver kan användas inom algebra (Küchemann, 1981; Çelik och Güneş, 2013). Om man tittar på Küchemanns nivåer av förståelse (levels of understanding) och Quinlans nivåer av förståelse (avsnitt **3.2.7**) så kan man se att det tyvärr är många elever som fastnar på de första nivåerna, och kommer alltså inte vidare till de högre nivåerna av förståelse (Küchemann, 1981; Quinlan, 1993). Elever som ligger på den första nivån klarar oftast av att lösa uppgifter som är enbart numeriska eller lättare uppgifter som har en bokstavssymbol. Till exempel i avsnittet **3.2.1** får eleverna en uppgift som ursprungligen var menad att se elevernas förmåga att kunna få *a* ensam i vänster led och 8 - 5 i högerled ($a + 5 = 8$) (Küchemann, 1981). Küchemann såg att eleverna istället tenderade att använda sig av *trial and error* metoden. Küchemann poängterar att användning av metoden är väldigt vanligt hos elever som ligger på den första nivån av förståelse. I avsnitt **3.2.7** kan man se utifrån Küchemanns (1981) studie att elever som ligger på en lägre nivå av förståelse än vad som krävs för att lösa uppgiften försöker att ge svar på frågorna som passar in på den nivån de själva ligger på. Till exempel i fråga 13(iv) (tabell 6) kan en elev som ligger på nivå 1 svara *8ab* istället för $3a + 5b$ (vilket kräver en förståelse på nivå 2 för att lösa).

När vi började att leta källor till detta examensarbete fokuserade vi inom elevers missuppfattningar och svårigheter när det kom till bokstavssymboler. Vi var intresserade av elevers missuppfattningar och svårigheter på grund av att vi ville arbeta med något som vi skulle kunna ha användning för i vårt framtida yrkesliv. Men när vi började att titta på de olika källorna fann vi att de flesta forskare inte har fokuserat sina studier på just missuppfattningar, utan uppfattningar som helhet. Detta gjorde att vårt fokus skiftade från missuppfattningar och svårigheter, till uppfattningar och förståelse.

Även fast vårt arbete inte längre har sitt huvudfokus på elevers svårigheter kring bokstavssymboler tror vi fortfarande att arbetet kommer att kunna vara till stor hjälp som framtida lärare. Genom att ha kunskapen om de många olika användningsområdena för bokstavssymboler kommer vi att kunna hjälpa våra framtida elever när de stöter på problem kopplade till dessa användningsområden. Då vi studerar till att bli gymnasielärare i framtiden, hoppades vi på att vi skulle hitta mer studier kring gymnasieelevers uppfattningar om bokstavssymboler, dock var de flesta studierna vi fann baserade på elever som gick i årskurserna 7 till 9. Annan forskning vi hade hoppats att hitta mer av var svenska studier eftersom vi kommer jobba på svenska skolor i framtiden. Dessvärre hittade vi inte många relevanta texter som var baserade på svenska skolor utöver Persson (2010). I och med att vi inte hittade några svenska studier har vi inte fått någon konkret information kring hur svenska elever uppfattar bokstavssymboler, utan vi har varit tvungna att dra slutsatser utifrån utländska elevers uppfattningar och förståelser. Skolorna i andra länder kan vara väldigt olika i jämförelse med svenska skolor, det kan vara oklart ifall man kan använda forskning från andra länder och tillämpa dem på svenska elever.

Küchemanns studie var gjord 1976 och då kan man ställa sig frågan, är resultaten från hans studie fortfarande relevant idag? Gör elever fortfarande samma misstag som de gjorde 1976? Hade man fått ett liknande resultat ifall man hade genomfört samma studie idag? Vi tror, utifrån våra egna erfarenheter och upplevelser från vår egna skolgång och VFUn, att om man hade gått ut till några svenska skolor idag och bett eleverna att göra samma test som eleverna fick av Küchemann år 1976 hade man förmodligen fått ett liknande resultat som Küchemann fick. Trots att samhället och skolvärlden har förändrats väldigt mycket sedan 1976, brukar elever fortfarande fastna på samma problem och ha samma missuppfattningar.

4.3 Framtida forskning

När vi höll på att skriva resultatet för vår litteraturstudie märkte vi snabbt att det fanns vissa områden som var mindre forskade om än andra. Det första vi upptäckte var att det inte fanns många studier som var baserade på svenska elever. De flesta studierna vi hittade var baserade på elever från andra länder, till exempel England, Turkiet och Grekland. När vi började leta information till detta examensarbete var vi mest intresserade av studier kring gymnasieelever, då vi alla tre läser till gymnasielärare. Majoriteten av de studier som har gjorts kring förståelse av bokstavssymboler har baserats på elever i högstadieålder eller yngre. Sen var även de flesta studier vi hittade grundade i Küchemanns studie från 1978. Då denna studie nästan är 40 år gammal kan man kanske ifrågasätta exakt hur relevant den är idag. För framtida forskning hade vi velat se mer studier baserade på svenska gymnasieelever. Något som vi hade velat se är en longitudinell studie, från årskurs 7 till gymnasiet, för att se hur elevers uppfattningar och förståelse utvecklas över åren. Men vi är medvetna om att detta är svårt att utföra på grund av till exempel skolbyten med mer.

Ett annat område som vi anser bör studeras mer är hur matematikhistoria kopplas ihop med elevers matematiklärande. Rekapitulationstesen och Bråting och Pejlares (2015) tar upp olika perspektiv på hur elevers matematikinlärning och matematikhistoria kopplas ihop. Då vi anser att detta kan vara givande kunskap för lärare att ha när det kommer till undervisning tycker vi att detta område borde studeras mer.

Referenslista

Aritmetik. (2020). I *Nationalencyklopedin*. Hämtad 2020-10-19 från https://www.ne.se/uppslagsverk/encyklopedi/l%C3%A5ng/aritmetik

Arzarello, F., Bazzini, L. & Chiappini, G. (2001). A model for analyzing algebraic processes of thinking. I R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell & R. Lins (red.). *Perspectives on school algebra* (s. 61-81). Dordrecht: Kluwer.

Bergsten, C., Häggström, J., & Lindberg, L. (1997). *Algebra för alla*. Göteborg: Nämnaren.

Bernström, M. K., & Asad, M. (1998). *Koranens budskap*: (I svensk tolkning av M. K. Bernström). Stockholm: Proprius.

Bos, H. J. M. (2001). *Redefining Geometrical Exactness - Descartes' Transformation of the Early Modern Concept of Construction*. New York: Springer.

Boyer, C. B. (1968). *A history of mathematics*. New York: Wiley.

Bråting, K., & Pejlare, J. (2015). On the relations between historical epistemology and students' conceptual developments in mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 89*(2), 251–265. doi: 10.1007/s10649-015-9600-8

Çelik, D., & Güneş, G. (2013). Different grade students' use and interpretation of literal symbols. *Kuram ve Uygulamada Eğitim Bilimleri, 13*(2), 1168–1175.

Christou, K., & Vosniadou, S. (2012) What Kinds of Numbers Do Students Assign to Literal Symbols? Aspects of the Transition from Arithmetic to Algebra. *Mathematical Thinking and Learning, 14*(1), 1-27. doi:10.1080/10986065.2012.625074

Davis, T. (2010). *Forty two problems of first degree from Diophantus' Arithmetica* (Master's thesis). Kansas: Dept. of Mathematics and Statistics, Wichita State University, College of Liberal Arts and Sciences. Hämtad från http://www.math.wichita.edu/~pparker/classes/Davis_Tinka_FL2010.pdf

Drouhard, J-Ph. & Teppo, A. (2004). Symbols and language. I K. Stacey, H. Chick & M. Kendal (red.) *The future of the teaching and learning of algebra. The 12th ICMI Study* (s. 227-264). Dordrecht: Kluwer.

Elementary algebra. (2020). britannica.com. Hämtad 2020-10-30 från https://www.britannica.com/science/elementary-algebra

Klein, J. (1968). *Greek mathematical thought and the origin of algebra.* New York: Dover.

Kristiansson, L., & Rosengren, M. (2006). *Från text till algebra*. (Examensarbete). Kalmar: Institutionen för Hälso- och beteendevetenskap, Kalmar högskolan universitet. Hämtad från http://ncm.gu.se/media/luma/GE-2007-Nominerade/kristiansson-rosengren.pdf

Küchemann, D. (1978). Children's understanding of numerical values. *Mathematics in school*, *7*(4), 24-27.

Küchemann, D. E. (1981). Children's Understanding of Mathematics: 11-16. I K. M. Hart (Ed.), *Algebra* (s. 102-119). London: John Murray.

Lucariello, Tine & Ganley (2013). A formative assessment of students' algebraic variable misconceptions. *The Journal of Mathematical Behavior*, *33*(2014), 30-41. doi: 10.1016/j.jmathb.2013.09.001

Macgregor, M. & Stacey, K. (1997). Students' Understanding of Algebraic Notation: 11-15. *Educational Studies in Mathematics*, *33*(1), 1-19. Hämtad från: https://www.jstor.org/stable/3483002?origin=JSTOR-pdf&seq=1

Modern algebra. (2020). britannica.com. Hämtad 2020-10-30 från https://www.britannica.com/science/modern-algebra

Persson, P-E. (2010). *Räkna med bokstäver* (Doktorsavhandling). Lund: Universitetstryckeriet. Hämtad från https://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:989792/FULLTEXT01.pdf

Philipp, R. A. (1992). The Many Uses of Algebraic Variables. *The Mathematics Teacher*, *85*(7), 557-561. Hämtad från: https://www.jstor.org/stable/27967771?seq=1#metadata_info_tab_contents

Quinlan, C. (1992). *Developing an understanding of algebraic symbols* (Doktorsavhandling). Tasmanien: School of Education. Hämtad från https://eprints.utas.edu.au/21301/1/whole_QuinlanCyrilRonaldEdmund1993_thesis.pdf

Şahin, Ö. & Soylu, Y. (2011). Mistakes and misconceptions of elementary school students about the concept of variable. *Procedia Social and Behavioral Sciences*. *15*(2011) 3322–3327.

Samo, M. A. (2009). Students' Perceptions about the Symbols, Letters and Signs in ALgebra and How do These Affect Their Learning of Algebra: A Case Study in a Government Girls Secondary School Karachi. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning.*

Schoenfeld, A, H., & Arcavi, A. (1988) On the Meaning of Variable. *The Mathematics Teacher*, 81(6), 420-427.

Sfard, A. & Linchevski, L. (1994). The gains and pitfalls of reification – The case of algebra. *Educational Studies in Mathematics, 26*(2), 191-228. doi: 10.1007/BF01273663

Skolverket. (2015). *Retorisk algebra*. Hämtad från Skolverket: https://larportalen.skolverket.se/LarportalenAPI/api-v2/document/path/larportalen/material/inriktningar/1-matematik/Gymnasieskola/444_undervisamatematikpayrkesprogram%20GY/7_spra kochmatematik/material/flikmeny/tabA/Artiklar/YGy_07A_03_Retorisk_151117.docx

Skolverket (2020). *Läroplan och kursplan för grundskolan, Matematik*. Hämtad från: https://www.skolverket.se/undervisning/grundskolan/laroplan-och-kursplaner-for-grundskolan/laroplan-lgr11-for-grundskolan-samt-for-forskoleklassen-och-fritidshemmet?url=1530314731%2Fcompulsorycw%2Fjsp%2Fsubject.htm%3FsubjectCode%3DGRGRMAT01%26tos%3Dgr&sv.url=12.5dfee44715d35a5cdfa219f

Tengstrand, A. (2020). *Historiska perspektiv på matematiken.* Malmö: CA Andersson.

Thompson, J. (1994). *Matematiken i Historien*. Lund: Studentlitteratur AB.

Variable. (2020) Dictionary.com. Hämtad 2020-10-19 från https://www.dictionary.com/browse/variable