GÖTEBORGS UNIVERSITET

Hur använder man x egentligen?

En kvantitativ och kvalitativ studie angående elevers uppfattningar kring bokstavsymboler inom algebra

Agnes Wallgren
Ämneslärarprogrammet Matematik och Kemi för Gymnasiet

Uppsats/Examensarbete: 15 HP
Kurs: LGMA2A
Nivå: Avancerad nivå
Termin/år: VT 2022
Handledare: Jan Stevens
Examinator: Martin Hallnäs

Nyckelord: Bokstavssymboler, Algebra, Variabler, Elever, Matematik, Uppfattningar, Svårigheter, Missuppfattningar, Elevförståelse.

Abstract

The purpose of this thesis was to investigate whether students understanding of letter symbols in algebra has changed since Dietmar Küchemanns study in 1976, as well as to see whether teachers' view on students understanding and their misconceptions correlate with the test results shown by the students. To be able to measure the students understanding, the same test that Küchemann used in 1976 was used on students aged 15/16 today (although on a much smaller scale), and the results were then analysed, and the students were categorised into different levels of understanding, based on the descriptions of the levels made by Küchemann in 1981. If the students are categorized into level 1 or 2, they are able to solve problems where the letter symbols are used as objects, the letters are given a value, or they aren't used. The difference between level 1 and 2 is that the students are able to solve problems with a more complex structure. The students at level 3 are also able to solve problems where the letter symbols are used as specific unknown when the problems have a simpler structure, and finally the students at level 4 are able to also solve problems where the letter symbols are used as specific unknowns even when the questions have a more complex structure, as well as when the symbols are used as generalised numbers and variables. The results of the study showed that the students tended to make the same mistakes as they did in 1976, but the number of students on level 3 had decreased by 11 percentage points and the amount at both level 2 and 4 had increased. The teachers also seemed to have a pretty good understanding of the misconceptions that the students have, as they were able to correctly guess the most common misconceptions on most questions that they were asked about.

Förord

Jag skulle vilja börja med att ge ett stort tack till min kurskamrat Alexzander Hasselholm för hjälpen och samarbetet med detta arbete och sällskapet under skrivandets gång.

Sen så skulle jag vilja tacka min handledare Jan Stevens för den handledningen jag fått under arbetets gång.

I would like to give a huge thank you to Dietmar Küchemann, whose study was the inspiration and foundation for the bigger part of this thesis, as well as his kindness in giving me and Alexzander the questions from his study in order for us to use the same ones for our own study.

Ett stort tack även till min VFU handledare, som var till stor hjälp med att organisera ihop undersökningen på skolan.

Ett stort tack till skolan, eleverna och lärarna som ställde upp på denna undersökning.

Ett stort tack till mina kurskamrater som har varit ett trevligt sällskap under skrivningens tid och har delat med sig av tipps på litteratur.

Jag skulle även vilja tacka min examinator Martin Hallnäs för den respons och den hjälp jag fick efter opponeringen

Och till sist ett jättestort tack till min opponent Linn Appelkvist, för all den respons och alla tipps jag fick angående mitt arbete både under opponeringen och efter.

Innehållsförteckning

1 Inledning

En av matematikens grundpelare är algebra, och inom algebra kan bokstavssymbolerna användas på många olika sätt. Redan i årskurs 1 - 3 börjar elever att lära sig algebra och ju högre upp i ålder eleverna kommer, desto mer komplex blir algebran (Skolverket, 2011).

Då algebra är en stor del av matematiken är det viktigt som lärare att känna till vilka uppfattningar och svårigheter elever kan ha när det kommer till algebra. Detta, blandat med våra egna erfarenheter från VFU och vår egen skolgång, gjorde att jag tillsammans med mina två kurskamrater Alexzander Hasselholm och Sadam Taranis skrev vårt första examensarbete om elevers uppfattningar och svårigheter kring bokstavssymboler inom algebra. Det arbetet hade ett stort fokus på en studie som gjordes av Dietmar Küchemann 1976, där han undersökte elevers kunskaper angående bokstavssymboler och dess olika användningsområden. I slutet av det arbetet tog vi upp att det hade varit intressant att genomföra en liknande studie, fast idag och i Sverige. Den tanken är det som ledde till detta examensarbete som grundar sig i Küchemanns studie från 1976. Studien som genomförts är en liknande studie till Küchemanns (dock på en mycket mindre skala).

Begreppet variabel används dessutom inte som ett övergripande begrepp för bokstavssymboler på grund av att Küchemann använder ordet variabel för att beskriva en specifik kategori för hur bokstavssymboler används (beskrivs i kapitel 3.2.6)

2 Syfte

Syftet med detta examensarbete är att undersöka vad elever har för förståelse och vilka missuppfattningar de kan ha angående bokstavssymboler inom algebra. Syftet är även att jämföra dagens elever med eleverna i Küchemanns studie från 70-talet för att se hur elevernas förståelse har ändrats sedan dess, samt att undersöka vad lärare tror att eleverna har svårt med angående bokstavssymboler och huruvida det överensstämmer med resultatet. Dessa syften kan förtydligas i följande frågeställningar:

2.1 Frågeställning

1. Hur har elevers förståelse och missuppfattningar kring bokstavssymboler ändrats sedan 70-talet?
2. Stämmer lärares uppfattningar kring elevernas svårigheter överens med elevernas resultat?

3 Bakgrund

3.1 Styrdokument

Att elever har en god förståelse kring bokstavssymboler är viktigt för att eleverna ska klara av ett godkänt betyg i både grundskolans och gymnasiets matematik. Enligt Skolverket (2011) bör matematikundervisningen ge eleverna förutsättningarna att utveckla följande:

Gymnasiet:

”Förmåga att hantera procedurer och lösa uppgifter av standardkaraktär utan och med verktyg.”

Grundskola:

”Välja och använda lämpliga matematiska metoder för att göra beräkningar och lösa rutinuppgifter”

Det ingår även i det centrala innehållet för alla kurs 1 på gymnasiet att eleverna ska kunna ” Hantering av algebraiska uttryck, inklusive att faktorisera och multiplicera uttryck” samt för årskurs 7 – 9 att eleverna ska kunna ”Innebörden av variabelbegreppet och dess användning i algebraiska uttryck, formler och ekvationer.” och ”Metoder för ekvationslösning”.

3.2 Tidigare forskning

1976 genomfördes en större studie som undersökte elevers förståelse kring ett flertal olika områden inom matematik i England. Küchemann mer specifikt tittade på elevers förståelse kring *numeriska variabler* och studien genomfördes på 15 olika skolor, spridda mellan ”vanliga” skolor och skolor där något sorts intagnings kriterium krävdes, på över 3000 elever i åldrarna 13 till 15. Studien gick ut på att ett skrivtest med 23 frågor (53 delfrågor allt som allt) (se bilaga 1 för den översatta versionen) där bokstavssymboler används på olika sätt gavs ut till eleverna. Küchemann analyserade sedan elevernas svar och tog fram 6 kategorier för olika sätt som elever tolkar bokstavssymboler (1978). Dessa kategorier kallas för följande:

1. Bokstaven ges ett värde
2. Bokstaven används inte
3. Bokstaven som ett objekt
4. Bokstaven som specifik obekant
5. Bokstaven som ett generellt tal
6. Bokstaven som en variabel

Kategorierna förklaras mer noggrant nedan

Küchemann skrev om sin studie i ett arbete 1981 där han även kategoriserade elevernas svar i olika *Levels of understanding* vilket ses i tabellerna. Dessa kommer beskrivas ytterligare i kapitel 4: Teoretiskt ramverk.

3.2.1 Bokstaven ges ett värde

”This category applies to responses where the letter is assigned a numerical value from the outset” (Küchemann, 1981; s. 104)

Den första av Küchemanns kategorier för bokstavssymbolers användande kallar han för *Letter Evaluated* (Küchemann, 1978). Denna kategori innehåller uppgifter där eleverna ska hitta ett specifikt värde för obekanta tal, men utan att eleverna ska behöva operera på det obekanta (vilket är en av skillnaderna mellan Bokstaven ges ett värde och Bokstaven som en specifik obekant). Eleverna kan bestämma ett värde för bokstavssymbolen direkt utan att behöva se bokstaven som något okänt (Küchemann, 1981). Çelik och Güneş (2013) beskriver att detta kan göras via den så kallade trial and error metoden. Metoden går ut på att eleverna testar sig fram tills de hittar ett svar som fungerar. Till exempel i ekvationen x – 6 = 27 kan eleverna testa sig fram till det korrekta svaret. Tabell 1 nedan visar exempel på frågor och elevsvar från Küchemanns studie som ingår i kategorin Bokstaven ges ett värde.

6(i) (Nivå 1)		**11(i) (Nivå 2)**		**11(ii) (Nivå 2)**	
Vad kan du säga om a om $a + 5 = 8$		Vad kan du säga om u ifall $u = v + 3$ och $v = 1$		Vad kan du säga om m ifall $m = 3n + 1$ och $n = 4$	
a = 3	92%	u = 4	61%	m = 13	62%
		u = 2	14%	Andra värden	14%

Tabell 1: Uppgifter tagna och översatta från Küchemann (1981). Uppgifterna som tillhör kategorin Bokstaven ges ett värde.

Uppgift 6(i) är ett typiskt exempel på en uppgift där eleverna kan använda sig av trial and error metoden som Çelik och Güneş (2013) beskrev, vilket är en av förklaringarna till att majoriteten av eleverna svarade korrekt på denna frågan. En annan anledning är att talen har ett så pass lågt värde, och då krävs inte många försök för att hitta rätt svar. Küchemann (1981) skriver dock att det ursprungliga syftet med uppgiften var att se ifall eleverna hade förmågan att få a ensamt i ett led, med 8–5 i det andra ledet. Uppgifterna 11(i) och 11(ii) involverar dock två bokstavssymboler, vilket ökar svårigheten på frågorna då det inte längre går att enbart köra på trial and error metoden för att komma fram till rätt svar, men majoriteten av eleverna klarar fortfarande av frågan. Anledningen till att eleverna fortfarande klarar av uppgiften i stor utsträckning beror på att eleverna får veta en av bokstavssymbolernas värde, till exempel v = 1, vilket gör att de sen kan lösa uppgiften genom vanlig aritmetik (Küchemann, 1981)

3.2.2 Bokstaven används inte

“Here the children ignore the letter, or at best acknowledge its existence but without giving it a meaning” (Küchemann, 1981; s. 104)

Küchemanns andra kategori kallar han för *Letter not Used.* Uppgifterna i den här kategorin kan eleverna lösa utan att behöva räkna ut vad bokstavssymbolens värde är. Çelik och Güneş (2013) beskriver det som att eleverna kan ignorera eller inte tolka bokstäverna, men att de ändå erkänner deras existens. Om man till exempel ska lösa problemet ”a + b = 43, a + b + 2 = ?” (Küchemann, 1981; s. 106) behöver eleverna inte räkna ut vad a och b är, utan de kan ignorera bokstäverna och direkt addera 2 för att komma fram till det korrekta svaret. Tabell 2 nedan visar exempel på olika uppgifter från Küchemanns studie som tillhör denna kategori.

5(i) (Nivå 1)		5(ii)		4(ii) (Nivå 2)	
Om a + b = 43 a + b + 2 = …		Om n – 246 = 762 n – 247 = …		Lägg på 4 på n + 5	
45	97%	761	74%	n + 9	68%
		763 Andra värden	13% 8%	9	20%

Tabell 2: Uppgifter tagna och översatta från Küchemann (1981). Uppgifterna som tillhör kategorin Bokstaven används inte.

Frågorna 5(i) och 5(ii) är båda frågor där svaret kan räknas ut genom att ignorera tillvaron av bokstavsymbolen. Uppgift 5(i)s förklaring gick Çelik och Güneş (2013) igenom ovan, och uppgift 5(ii) hanteras i samma stil. 5(ii) kan lösas genom att upptäcka att n – 247 kan skrivas om till n – 246 – 1 och sedan ersätta n – 246 i första ekvationsuttrycket och få 762 – 1 vilket blir 761. Båda uppgifterna använder samma metod, men dock var det 97 procent som svarade rätt på första frågan 5(i) och 74 procent som svarade rätt på den andra 5(ii). Antalet elever som svarade rätt sjönk alltså med 23 procentenheter, och Küchemann (1981) beskriver att denna minskning beror på att ekvationen blev mer komplicerad på grund av att talen blev större och att operationen var implicit och kontraintuitiv. Eleverna tenderar att tänka att eftersom 247 är större än 246 bör de addera 1 till 762 istället för att subtrahera, vilket förklarar de 13 procenten som svarade 763.
Lucariello, Tine och Ganley (2013) beskriver att 68 procent eleverna svarade rätt på fråga 4(ii) då de helt enkelt kunde ignorera att jobba med n:et och enbart tänka på att arbeta med 5 + 4. Şahin och Soylu (2011) genomförde även de en studie med en liknande uppgift (4x + 9x = ?) och fann att eleverna helt ignorerade bokstäverna och svarade rent numeriskt (40 procent svarade 13)

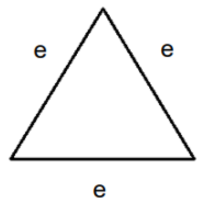
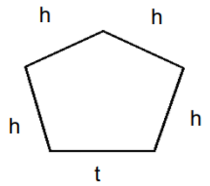
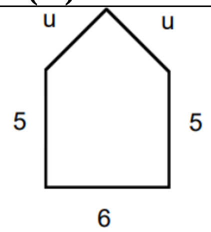
3.2.3 Bokstaven som ett objekt

”The letter is regarded as a shorthand for an object or as an object in its own right” (Küchemann, 1981; s. 104).

Den tredje kategorin kallar Küchemann för *Letter used as an object*. Bokstäverna kan ses som objekt eller som förkortningar för objekt, men det uppstår problem då bokstaven ska stå för antalet objekt istället (Çelik och Güneş, 2013). Problemet tydliggörs i fråga 14 ur Küchemanns studie:

”Blue pencils cost 5 pence each and red pencils cost 6 pence each. I buy some blue and some red pencils and altogether it costs me 90 pence. If b is the number of blue pencils bought, and if r is the number of red pencils bought, what can you write down about b or r?” (Kuchemann, 1981; s. 107).

Några av de vanligaste felen som gavs på denna fråga var b + r = 90 och 6b + 10r = 90, vilket betyder att eleven har sett bokstaven som ett objekt, och inte antalet objekt. För att kunna lösa denna uppgift korrekt behöver eleven kunna se bokstäverna som specifika obekanta, vilket kommer att tas upp i nästa avsnitt (3.2.4).
I tabell 3 nedan följer några av Küchemanns uppgifter som tillhör denna kategori.

9(i)	9(ii)	9(iii)	13(i) (Nivå 1)	13(iv) (Nivå 2)
			2a + 5a =	2a + 5b + a =
3e 94%	4h + t 4h + 1t 68%	2u + 16 u + u + 16 64%	7a 86%	3a + 5b 60%

Tabell 3: Uppgifter tagna och översatta från Küchemann (1981). Uppgifterna som tillhör kategorin Bokstaven som objekt.

Küchemann (1981) skriver att i frågorna 9(i), 9(ii) och 9(iii) kan bokstäverna ses som de faktiska sidorna, och inte längden på sidorna. Samma princip kan användas även i båda svaren på fråga 13 i tabellen ovan. I fråga 13(i) bemöter eleverna en obekant bokstavssymbol som de ska addera ihop, och i fråga 13(iv) finns två obekanta bokstavssymboler. Küchemann (1981) beskriver att för att lösa uppgifterna kan eleverna tänka på bokstäverna som objekt, till exempel kan *a* stå för apelsiner och *b* för bananer. I den första uppgiften har eleven 2 apelsiner och lägger till 5 apelsiner och får sammanlagt 7 apelsiner. Samma princip gäller även i den andra frågan då eleven istället får 2 apelsiner + 5 bananer + 1 apelsin, och då sammanlagt får 3 apelsiner och 5 bananer. Problemet med detta tankesätt är när eleverna behöver kunna addera eller subtrahera två helt olika objekt med varandra, till exempel i uppgifterna i tabell 4 nedan.

13(viii) (Nivå 3)	13(v) (Nivå 4)
3a – b + a =	(a – b) + b =
4a – b 47%	a 23%

Tabell 4: Uppgifter tagna och översatta från Küchemann (1981). Uppgifterna som tillhör kategorin Bokstaven som objekt.

Om eleverna fortsätter att tänka på bokstäverna som objekt i fråga 13(viii) och 13(v) kommer det bli svårt för eleverna att lösa uppgifterna. Att ha 3 apelsiner och sedan ta bort en banan ger inte sammanhanget mycket mening. Ytterligare en svårighet för eleverna sker i fråga 13(v) då det används en parentes som avsiktligt drar uppmärksamheten till uttrycket a – b, vilket i sig själv inte kan förenklas. Küchemann (1981) skriver att genom att använda bokstaven som ett objekt innebär det att bokstavens mening reduceras från något abstrakt till något konkret. Att använda bokstaven som ett objekt gjorde det helt plötsligt möjligt för eleverna att lösa frågor som de i vanliga fall hade haft svårt för att lösa när eleverna använde bokstäverna med den avsedda betydelsen. Dock uppstår problemen när reduceringen av förståelsen av bokstaven inträffar vid olämpliga tillfällen. Till exempel sker detta särskilt ofta när det involverar föremål, så som pennor och frukter, och denna skillnad kan vara svår att förstå.

Lucariello, Tine och Ganley (2013) samt Persson (2010) går även de igenom elevernas olika missuppfattningar likt Küchemann har gjort. De beskriver de missuppfattningar som eleverna gör när de använder uttryck som en etikett för ett objekt. De använder sig av det klassiska exemplet *Students and Professors* problemet som lyder ”Write an equation, using the variables S and P to represent the following statement. ‘At this university there are six times as many students as professors.’ Use S for the number of students and P for the number of professors” (Lucariello, Tine och Ganley, 2013; s. 31). En av de vanliga missuppfattningarna som eleverna har kring det här problemet är att det drar slutsatsen att S och P är etiketter för objekt (studenter och föreläsare) istället för en variabel som står för antalet studenter och antalet föreläsare. Detta leder till att elever ger felaktiga svar som till exempel 6S = P.

Macgregor och Stacey (1997) genomförde en studie på tre skolor (A-C) på elever i årskurs 8 och 9 angående elevernas uppfattning och förståelse kring bokstavssymboler. På skola C uppvisade eleverna en stor svårighet med användningen av bokstavssymbolerna som objekt. Efter att ha diskuterat med lärarna på skolan insåg Macgregor och Stacey att en stor del av förvirringen hos eleverna uppstod från läromedlet som användes i undervisningen, detta på grund av att läromedlet oftast använde bokstäver som förkortningar av ord (k står för katt, 5k står för 5 katter). De uppmärksammade också att lärarna på skolan var en del av orsaken och att lärarna inte tydliggjort bokstävernas kontextuella sammanhang för eleverna. Eleverna på skolan visade också en koppling mellan bokstavssymboler och den alfabetiska ordningen av bokstäverna (H = 8 till exempel). När lärarna uppmärksammades kring detta var det dock hyfsat lätt korrigerat, medan elevernas missuppfattningar kring förkortningarna av ord visade sig vara mer svårkorrigerad och fortsatte att vara en svårighet för eleverna (Macgregor & Stacey, 1997).

3.2.4 Bokstaven som specifik obekant

”Children regard a letter as a specific but unknown number, and can operate upon it directly.” (Küchemann, 1981; s. 104).

Den fjärde kategorin kallar Küchemann för *Letter used as a specifik unknown* och både Küchemann (1981) och Çelik och Güneş (2013) skriver att i de tidigare kategorierna har eleverna kunnat undvika att se bokstäver som specifika obekanta, men nu krävs detta för att kunna lösa uppgifter som till exempel 4(v): multiplicera n + 5 med 4. För att kunna lösa uppgifter som denna måste elever kunna multiplicera 4 med både n och 5, men som syns i tabell 6 nedan är det många elever som ger svar då detta inte har gjorts. Nedanför i tabeller 5 och 6 följer sex uppgifter som tillhör denna kategori.

14 (Nivå 3)	**5(iii) (Nivå 3)**	**9(iv)**
Vad kan du säga om r ifall $r = s + t$ och $r + s + t = 30$	Om e + f = 8 e + f + g = …	 Delar av figuren är inte ritad. Det finns n antal sidor sammanlagt, alla med längd . O = …
r = 15 35% r = 30 – s – t 6%	8 + g 41%	2n 38% n2
r = 10 21%	15 2% 12 26% 8g 3% 9 6%	

Tabell 5: Uppgifter tagna och översatta från Küchemann (1981). Uppgifterna som tillhör kategorin Bokstaven som specifik obekant.

4(iii) (Nivå 3)	4(v) (Nivå 4)	22 (Nivå 4)
Lägg på 4 på 3n	Multiplicera med 4 på n + 5	Blåa pennor kostar 5 kr styck och röda pennor kostar 6 kr styck Jag köper några blåa och några röda pennor och det tillsammans kostar mig 90 kr. Om b är antalet köpta blåa pennor, och r är antalet köpta röda pennor, vad kan du skriva om b och r?
3n + 4 36%	4n + 20 eller 4(n + 5) 17%	5b + 6r = 90 10% Two correct pairs of (6,10), (12,5), (18,0), (0,15) 1%
7n 31% 7 16%	4n + 5 eller 4*n + 5 19% n + 20 31% 20 15%	b + r = 90 17% 6b + 10r = 90 eller 12b + 5r = 90 6%

Tabell 6: Uppgifter tagna och översatta från Küchemann (1981). Uppgifterna som tillhör kategorin Bokstaven som specifik obekant.

Uppgift 14 visade sig vara ganska svår för eleverna då endast 41 procent svarade korrekt på frågan. Uppgiften kunde lösas genom att s + t ersattes av r i den andra ekvationen, alltså krävdes det att eleverna kunde hantera bokstäverna som specifika obekanta. De elever som istället svarade r = 10 verkar ha undvikit denna kategori och istället utvärderat *r* direkt (Küchemann, 1981).

I uppgift 5(iii) kan eleverna också välja att ignorera bokstäverna som i 5(i) och 5(ii), men problemet uppstår sedan i det andra ekvationsuttrycket (e + f + g = …) då vi inte ser ett tal som i det första ekvationsuttrycket (e + f = 8). Då eleverna fortfarande kan ignorera e och f behöver de fortfarande kunna arbeta med den obekanta bokstaven g, det vill säga, de behöver kunna använda sig av en specifik obekant. Eleverna som inte kan hantera bokstavssymboler som specifika obekanta kan då komma att försöka utvärdera variabeln g, till exempel genom att se g som 4 (e + f + g = 4 + 4 + 4 = 12) eller 7 (g är den sjunde bokstaven i alfabetisk ordning) och får då svaren 12 och 15 (Küchemann, 1981).

Küchemann (1981) skriver att en stor utmaning för eleverna var uppgift 4(iii) vilket kan verka förvånande. 3n + 4 kan verka simpelt nog, men det kan vara otillfredsställande för eleverna att svara detta då svaret inte känns ”färdigt”. De eleverna tenderar att istället svara 7n eller bara 7 då de inte kan hantera att *n* är obekant och att de inte kan kombinera elementen mer, och ignorerar bokstaven helt eller lämnar den som den är. Som nämnt ovan var det många elever som hade svårt för uppgift 4(v) på grund av dess större strukturella komplexitet. Multiplikationen måste tillämpas på hela uttrycket, dock multiplicerade många elever 4 med enbart det ena eller det andra elementet i uttrycket. Küchemann (1981) skriver även att svaret 4 * n + 5 kan uppstå på grund av att eleverna har bristande kunskaper angående parenteser, och att de då menade att svara 4(n + 5) men glömde av parenteserna i svaret.

Küchemann (1981) beskriver att uppgift 22 skapade en stor förvirring hos eleverna då eleverna var tvungna att skapa ett algebraiskt uttryck utifrån en text, och att även de elever som hade haft det lätt i de tidigare uppgifterna hade svårt för denna uppgift. För att klara av uppgiften på ett korrekt sett krävs det att eleven kan hantera bokstäverna som specifika obekanta. Om eleverna inte kan hantera det kan detta leda till några intressanta felsvar. Küchemann (1981) skriver att de elever som gav svaret b + r = 90 (17 procent) har en förståelse för grundprincipen i bokstävernas användande (Nivå 3, mer i avsnitt 4.3), men att svaret står för blåa pennor och röda pennor tillsammans kostar 90 kr. Då detta rent tekniskt sett är sant, ger de en begränsad information och visar på att eleven har använt bokstäverna som objekt. De elever som svarade 6b + 10r = 90 eller 12b + 5r = 90 (6 procent) har hittat ett korrekt värde för b och r, men istället för att uttrycka det som att b och r är tal, ser de åter igen b och r som objekt som står för blåa pennor och röda pennor.

3.2.5 Bokstaven som generellt tal

"The letter is seen as representing, or at least as being able to take, several values rather than just one." (Küchemann, 1981; s. 104).

Kategori fem kallar Küchemann *Letter used as a generalized number* och den innebär att till skillnad från förra kategorin kan bokstaven anta ett flertal värden, inte enbart ett specifikt värde. Till exempel krävs det i fråga 16 att bokstäverna kan ses som generella tal, och då är c < 5 ett passande svar (Çelik och Güneş, 2013). I tabell 7 nedan står exempel på frågor som ingår i denna kategori.

16 (Nivå 3)		**18(ii) (Nivå 4)**	
Vad kan du säga om c ifall $c + d$ = 10 och c är mindre än d		$L + M + N = L + P + N$ Alltid Aldrig Ibland, när:	
c < 5	11%	Ibland, då M = P	25%
c = 1, 2, 3, 4 (systematisk lista)	19%		
c = 10 – d	4%		
Osystematisk lista	1%	Ibland, eller	
		M och P är givna specifika värden	14%
Endast ett värde (oftast c = 4)	39%	Aldrig	51%

Tabell 7: Uppgifter tagna och översatta från Küchemann (1981). Uppgifterna som tillhör kategorin Bokstaven som generellt tal.

Uppgifterna för denna kategori var svårare för eleverna att klara av än många av uppgifterna för specifika obekanta, vilket kan bero på att eleverna förstår sig på specifika obekanta innan generella tal (Küchemann, 1981). Uppgift 16 var ute efter att undersöka ifall eleverna uppfattade att det finns flera svar för vad c kan vara och inte enbart ett svar, samt ifall de kan ge ett uttryck för det. Det syns tydligt i fråga 16 att många av eleverna fortfarande antar att bokstäverna har ett värde då 39 procent av eleverna gav ett svar som enbart var ett värde (till exempel c = 4). Küchemann (1981) skriver dock att eleverna förmodligen skulle kunna få fram fler svar ifall man hade frågat efter det.

Christou och Vosniadou (2012) skriver att trots att många elever kan förstå konceptet av att bokstavssymboler kan agera som generella tal, är det många elever som inte klarar av att lösa uppgifter då detta krävs. Detta påstår de är på grund av att eleverna fastnar i vad de kallar för *the natural number bias*, vilket betyder att eleverna tenderar att se på bokstavssymbolerna som enbart naturliga tal. De fann dock att även de elever som enbart svarat naturliga tal kunde acceptera icke naturliga svar efter att de föreslagits för dem. Christou och Vosniadou tror att detta beror på att eleverna fastnar i deras ursprungliga förståelse av tal, vilket innebär de naturliga talen, så att när de kommer till att använda bokstavssymboler återgår eleverna till denna ursprungliga förståelse och svarar enbart med naturliga tal.

3.2.6 Bokstaven som en variabel

"The letter is seen as representing a range of unspecified values, and a systematic relationship is seen to exist between two such sets values." (Küchemann, 1981; s. 104).

Den sista av Küchemanns kategorier kallar han för *Letter used as a variable* och innebär att bokstavssymbolerna kan ses som variabler, vilket betyder att bokstäverna ibland behöver ses som en mängd olika ospecificerade tal och det finns en systematisk relation mellan två sådana tal (Çelik och Güneş, 2013)

3 (Nivå 4)	
Vilken är störst, $2n$ eller $n + 2$? Förklara:	
Korrekt, rätt förklaring (ex 2n, när n > 2)	6%
2n	71%
n + 2 eller "samma"	16%

Tabell 8: Uppgifter tagna och översatta från Küchemann (1981). Uppgifterna som tillhör kategorin Bokstaven som en variabel.

Uppgift 3 i tabell 8 gick ut på att se ifall eleverna kunde avgöra att vilket av uttrycken (2n och n + 2) som var störst beror på värdet av n. Dock var det hela 71 procent som svarade att 2n var störst, och förklaringen bakom detta resonemang var att 2n är störst på grund av att det är multiplikation (Küchemann, 1981). Küchemann beskrev att han inte såg något bevis på att eleverna använt sig av *Trial and error metoden*, framför allt inte hos eleverna som svarade rätt på uppgiften. Küchemann skriver att de som som gav ett korrekt svar på frågan hittade ett förhållande mellan de båda elementen (2n och n + 2) som han kallar för *Second-order Relationship.*

> The relevance of such a relationship can best be explained by seeing what happens to 2n and n + 2 when specific values are chosen for n. Consider, for example, the values n = 4 and n = 7 which give the pairs (8, 6) and (14, 9) for (2n, n + 2). Here the obvious (first order) relationship, which holds for each pair in turn and which is prompted by the original question, is that 2n > n + 2. However, it is also possible to establish a second-order relationship between the pairs, which can be expressed as 'as n increases the difference between 2n and n + 2 increases (14 – 9 > 8 – 6)' or 'the increase in 2n is greater than the increase in n + 2 (14 – 8 > 9 – 6)'. The significance of this relationship is that it opens up the possibility that for some smaller value of n there may be no difference between 2n and n + 2 (when n = 2), or the difference may even be reversed (when n > 2) (Küchemann, 1981; s. 112).

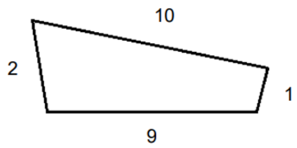
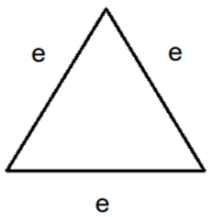
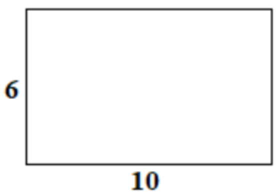
Han tar dock upp att eleverna som löser uppgiften inte går igenom alla dessa steg, utan de kan se relationen mellan 2n och n + 2 redan från början, och de elever som inte ser denna relation letar sig till något snabbare och enklare svar (Küchemann, 1981).

4 Teoretiskt ramverk

Det teoretiska ramverket som används för detta arbete är Küchemanns *Levels of understanding*. Küchemann (1981) tog 30 av sina uppgifter och delade in dem i 4 olika grupper. De fyra olika grupperna representerar 4 olika nivåer av förståelse som eleverna behöver uppnå för att kunna lösa uppgifterna som tillhör varje grupp.
Valet av teori för detta arbete grundas i syftet, vilket är att jämföra resultatet på den egna studien med Küchemanns studie från 70-talet. Då han delat in eleverna i de olika nivåerna av förståelse gjordes samma sak i detta arbete. Nivåerna följer nedan och är alla tagna ifrån Küchemanns arbete från 1981.

4.1 Nivå 1

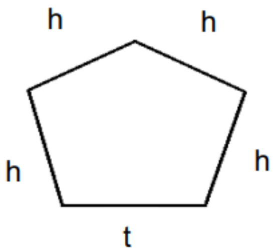
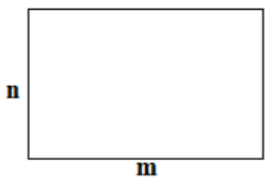
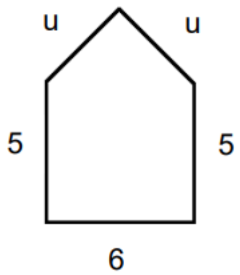
Uppgifterna som eleverna på denna nivå klarar av är antingen rent numeriska (8 och 7(ii)), eller har en mer simpel struktur och kan lösas genom att använda bokstäverna som objekt (9(i) och 13(i)), genom att ge bokstaven ett värde (6(i)) eller genom att inte använda bokstaven alls (5(i)). För de mer komplexa uppgifterna tenderade eleverna som låg på denna nivå att svara 4ht eller 5 ht istället för 4h + t på 9(ii), 8ab istället för 3a + 5b på 13(iv) och 763 istället för 761 på 5(ii). På de frågor då eleverna behövde förstå sig på specifika obekanta tenderade eleverna på denna nivå att istället ge bokstäverna ett värde (p = 32 istället för p = 2n på fråga 9(iv), e + f + g = 12 istället för 8 + g på 5(iii)) eller att de inte använde bokstaven alls (7 eller 7n istället för 3n + 4 på 4(ii)). Nedan i tabell 9 står uppgifter som elever på nivå 1 klarar av att lösa.

Fråga		13 åringar	14 åringar	15 åringar
8	 O =	95%	97%	96%
5(i)	a + b = 43, a + b + 2 =	92%	97%	95%
9(i)	 O =	91%	94%	93%
6(i)	a + b = 8, a =	86%	92%	93%
7(ii)	 A =	79%	89%	90%
13(i)	2a + 5b =	77%	86%	87%

Tabell 9: Uppgifter tagna och översatta från Küchemann (1981). Uppgifterna som elever på nivå 1 klarar av att lösa.

4.2 Nivå 2

Den stora skillnaden mellan uppgifterna som eleverna på denna nivå klarar av till skillnad från nivå 1 är dess stigande komplexitet. Dock behöver eleverna fortfarande bara kunna hantera att ge bokstäverna ett värde (11(i) och 11(ii)) eller användas som objekt (9(ii), 7(iii), 9(iii), 13(iv)). Eleverna på denna nivå kan fortfarande inte hantera bokstäverna som specifika obekanta, generella tal eller variabler. Det kan argumenteras för att förbättringen som görs till denna nivå sker på grund av att eleverna har en större familjaritet med algebraiska notationer. Dock hade eleverna som låg på denna nivå större framgång på provet som helhet.
De förbättrade provresultaten för eleverna på nivå 2 kan också indikera en villighet att acceptera svar som till en viss grad kan ses som ”oklara” (detta fördjupas i nästa nivå) vilket kan beskrivas som *acceptance of lack of closure*. Till exempel kan många av eleverna som svarade 8ab som en förkortning av 2a + 5b + a (där ungefär en tredjedel av dem var på nivå 1) ha vetat att de skulle ha skrivit 3a + 5b men föredrog svaret 8ab då det såg mer ”färdigt” ut. Ett liknande argument kan göras för fråga 11. På fråga 11(i) lämnade de flesta eleverna på nivå 1 denna fråga blank eller svarade u = 2. Dessa två svar kan förklaras av tvetydigheten i u = v + 3 (att det involverar två obekanta till exempel), vilket kan ha fått många av eleverna att helt skippa frågan eller fått dem att läsa frågan som att *u* och *v* tillsammans blir 3, vilket minskade tvetydigheten, men istället gav svaret 2. I tabell 10 nedan står exempel på uppgifter som elever på nivå 2 klarar av.

Fråga		**13 åringar**	**14 åringar**	**15 åringar**
15(i)	(Detta var en numerisk fråga angående diagonaler av månghörningar)	63%	75%	72%
9(ii)	 O =	58%	68%	73%
7(iii)	 A =	54%	68%	76%
9(iii)	 O =	54%	64%	67%
11(ii)	m = 3n + 1, n = 4, m =	44%	62%	67%
11(i)	u = v + 3, v = 1, u =	49%	61%	70%
13(iv)	2a + 5b + a =	40%	60%	66%

Tabell 10: Uppgifter tagna och översatta från Küchemann (1981). Uppgifterna som elever på nivå 2 klarar av att lösa.

4.3 Nivå 3

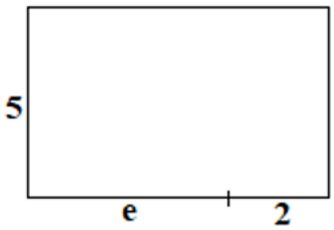
Den stora ökningen i förståelse hos eleverna på denna nivå är att de kan hantera bokstäver som specifika obekanta, dock endas då uppgiftsstrukturen är simpel. Eleverna kan se svar som 8 + g, 3n + 4 och O = 2n som meningsfulla, även då bokstäverna inte representerar objekt och när svaren inte ser färdiga ut. Nedan i tabell 11 står exempel på frågor som elever på nivå 3 klarar av att lösa.

Fråga		**13 åringar**	**14 åringar**	**15 åringar**
15(ii)	En figur med k sidor har … diagonaler (förlängning av 15(i))	34%	52%	54%
13(viii)	3a – b + a =	27%	47%	56%
13(ii)	2a + 5b =	29%	45%	51%
5(iii)	e + f = 8, e + f + g =	25%	41%	50%
14	r = s + t, r + s + t = 30, r =	30%	41%	39%
9(iv)	 Delar av figuren är inte ritad. De finns n antal sidor sammanlagt, alla med längd 2 O =	24%	38%	41%
4(iii)	Lägg till 4 på 3n	22%	36%	41%
16	c + d = 10, c < d, c =	21%	30%	35%

Tabell 11: Uppgifter tagna och översatta från Küchemann (1981). Uppgifterna som elever på nivå 3 klarar av att lösa.

4.4 Nivå 4

Eleverna på denna nivå kan inte bara hantera bokstäver som specifika obekanta med en komplex uppgiftsstruktur (13(v), 4(v), 7(iv)). De kan också lösa uppgifter som 20, 22 och 17(i), som kräver att bokstäverna ses som specifika obekanta, trots att det finns en stor frestelse att se dem som objekt (tårtor och bullar, pennor, med mera). 18(ii) handlar om att kunna hantera bokstäver som generella tal, vilket elever på denna nivå klarar. På fråga 21 krävs det att eleverna kan inse att ett bestämt x lika väl kan representeras av ett uttryck som 5x, samt att det resulterar i transformationen $\div 5$ *och inte* $\times 5$ på x värdet. Att kunna hantera användandet av *x* och operationerna i denna fråga är på några sätt likt den koordinationen som krävs för att kunna använda bokstäver som variabler som krävs för fråga 3. Nedan i tabell 12 står exempel på uppgifter som elever på nivå 4 klarar av.

Fråga		**13 åringar**	**14 åringar**	**15 åringar**
18(ii)	$L + M + N = L + P + N$, Alltid Aldrig Ibland, när:	11%	25%	27%
13(v)	(a – b) + b =	15%	23%	32%
20	Vad står 4t + 3b för (om tårtor kostar t kr och bullar kostar b kr, och om t tårtor köps, och så vidare)?	14%	22%	30%
4(v)	Multiplicera n + 5 med 4	8%	17%	25%
7(iv)	 A =	7%	12%	16%
21	Om denna ekvation är sann när $x = 6$, $(x + 1)\ 3 + x = 349$ vilket värde på x kommer då att göra denna ekvation sann? $(5x + 1)\ 3 + 5x = 349$ x =	4%	12%	16%
22	Blåa pennor kostar 5 kr styck och röda pennor kostar 6 kr styck. Jag köper några blåa och några röda pennor och det tillsammans kostar mig 90 kr. Om b är antalet köpta blåa pennor, och r är antalet köpta röda pennor, vad kan du skriva om b och r?	2%	11%	13%
3	Vilken är störst, $2n$ eller $n + 2$? Förklara:	4%	6%	10%
17	Frågan handlar om totala lönen L efter t timmars övertid, när man fått grundlönen och övertids lönen	2%	5%	8%

Tabell 12: Uppgifter tagna och översatta från Küchemann (1981). Uppgifterna som elever på nivå 4 klarar av att lösa.

5 Metod

5.1 Datainsamlingsmetod

Datainsamlingsmetoden för detta examensarbete bestod av två delar: en kvantitativ och kvalitativ.

5.1.1 Kvantitativ studie

Den första delen av datainsamlingen var en kvantitativ studie, och bestod av ett prov som gavs ut till elever för att mäta deras förståelse kring bokstavssymbolers användningar inom algebra. Denna del av studien gjordes tillsammans med min kurskamrat Alexzander Hasselholm. Då vi var speciellt intresserade av att kunna jämföra vårt resultat med Küchemanns resultat från hans studie 1976, utformades vårt prov utifrån det prov som Küchemann använde i sin studie. (Provet i bilaga 1)

5.1.2 Kvalitativ studie

Den kvalitativa studien bestod av intervjuer med tre olika matematiklärare på skolan där den kvantitativa studien genomfördes. Målet med intervjuerna var att undersöka vad matematiklärare tror att elever har för missuppfattningar kring bokstavssymboler och deras användningar inom algebra, samt att jämföra lärarnas uppfattningar med elevernas faktiska resultat. Intervjuformen valdes till en semistrukturerad intervju, då intresset låg i att höra lärarnas allmänna uppfattningar, men även deras tolkningar av vissa specifika frågor (Dalen, 2021) (Intervjuguide i bilaga 2).

5.2 Urval

Förfrågan om att få genomföra provet med elever skickades ut till 12 olika gymnasie- och högstadieskolor i göteborgsområdet. Det var dock endast en skola som svarade och sa att de hade tid att genomföra provet (E-mail till skolorna i bilaga 4).
Det ursprungliga urvalet av ålder på eleverna valdes till årskurs nio på högstadiet eller ettan på gymnasiet, då dessa åldrar stämde bra överens med de äldre åldrarna som Küchemann gjorde sin studie på. Dock var det, som nämnt ovan, endast en skola som svarade, en gymnasieskola. Urvalet blev endast på elever i ettan på gymnasiet. Studien gjordes på 5 olika klasser (sammanlagt 59 elever) som gick både yrkes- och högskoleförberedande program.

Urvalet av lärarna som skulle intervjuas gjordes genom att i första hand fråga de lärare som hade de klasser som provet gjordes på, och sedan tillfrågades ytterligare en matematiklärare på skolan. Detta gjordes för att förhoppningen var att lärarna vars klasser provet gjordes på skulle ha en bra insikt i vad deras egna elever har för förståelser, samt att den sista läraren skulle ha ytterligare insikt utanför de klasserna då hen hade många klasser ibland annat olika introduktionsprogram.

5.3 Genomförande

Den kvalitativa delen av undersökningen genomfördes tillsammans med en av mina kurskamrater, Alexzander Hasselholm. Datainsamlingen började med skapandet av provet. För att kunna jämföra resultaten med studien som Küchemann gjort innan behövde provet vara så likt originalet som möjligt. Vi tog kontakt med Küchemann och fick hans originalprov som sedan översattes till svenska innan det gavs ut till eleverna (E-mail till Küchemann i Bilaga 3).

Provet delades ut till eleverna på skolan under två olika dagar. Vi började med att presentera oss själva för alla klasser och berättade varför vi var där och vad proven skulle användas till. Eleverna fick sedan cirka en timme på sig att svara på uppgifterna på provet.

Under de två dagarna som jag var på plats på skolan tog jag även kontakt med några av matematiklärarna och frågade ifall jag kunde få genomföra intervjuer med dem veckan efter. När jag fått tre lärare som sa ja till förfrågan kontaktade jag dem via email och planerade in tider för intervjuerna under en dag veckan efter provdatainsamlingen.

Intervjuguiden hölls kort då jag ville hålla intervjuerna till max 20 minuter. Detta på grund av att jag dels inte ville ta upp för mycket tid av lärarna, men också på grund av att intervjudelen av datainsamlingen inte skulle bli lika tidskrävande som den kvantitativa provdelen. Intervjuguiden bestod av en bakgrundsfråga (angående antalet år de jobbat som lärare), en väldigt öppen fråga angående lärarnas allmänna uppfattningar kring elevers svårigheter kring bokstavssymboler, samt 4 kortare frågor angående specifika frågor från provet och vad de tror att elever kan göra för misstag på de frågorna. En pilotstudie genomfördes på min kurskamrat, och efter pilotstudien byttes en av frågorna från provet ut till en annan fråga, men allt annat behölls som det var. Intervjuerna blev alla mellan 9 och 22 minuter långa (Lärare 1: 21.56, Lärare 2: 8.59 och Lärare 3: 9.57)

5.4 Forskningsetik

Enligt Vetenskapsrådet (2002) krävs det att forskare följer följande fyra delar för att studien ska bli forskningsetisk:

5.4.1 Informationskravet

> Regel 1: Forskaren skall informera uppgiftslämnare och undersökningsdeltagare om deras uppgift i projektet och vilka villkor som gäller för deras deltagande. De skall därvid upplysas om att deltagandet är frivilligt och om att de har rätt att avbryta sin medverkan. Informationen skall omfatta alla de inslag i den aktuella undersökningen som rimligen kan tänkas påverka deras villighet att delta (Vetenskapsrådet, 2002; s. 7)

Inför båda formerna av datainsamling började jag med att förklara studiens syfte för eleverna och lärarna. Jag beskrev också hur deras svar skulle komma att användas i studien och att de kunde svara på så många av frågorna som de ville/ kunde svara på.

5.4.2 Samtyckeskravet

> Regel 2: Forskaren skall inhämta uppgiftslämnares och undersökningsdeltagares samtycke. I vissa fall bör samtycke dessutom inhämtas från förälder/vårdnadshavare (t.ex. om de undersökta är under 15 år och undersökningen är av etiskt känslig karaktär)
>
> Regel 3: De som medverkar i en undersökning skall ha rätt att självständigt bestämma om, hur länge och på vilka villkor de skall delta. De skall kunna avbryta sin medverkan utan att detta medför negativa följder för dem.
> Regel 4 I sitt beslut att delta eller avbryta sin medverkan får inte undersökningsdeltagarna utsättas för otillbörlig påtryckning eller påverkan.

> Beroendeförhållanden bör heller inte föreligga mellan forskaren och tilltänkta undersökningsdeltagare eller uppgiftslämnare. (Vetenskapsrådet, 2002; s. 9 – 10)

Eleverna fick reda på innan provet började att de fick svara på så många frågor som de ville/ kunde och att om de ville gå innan lektionens tid var slut fick de det. De blev också tillsagda att deras lärare inte skulle få reda på någon del av informationen om specifika elever. Lärarna gav sitt samtycke till intervjuerna i person och/ eller över email. De fick hade också valet att inte svara på någon av frågorna ifall de så hade velat det.

5.4.3 Konfidentialitetskravet

> Regel 5: All personal i forskningsprojekt som omfattar användning av etiskt känsliga uppgifter om enskilda, identifierbara personer bör underteckna en förbindelse om tystnadsplikt beträffande sådana uppgifter.
>
> Regel 6: Alla uppgifter om identifierbara personer skall antecknas, lagras och avrapporteras på ett sådant sätt att enskilda människor ej kan identifieras av utomstående. I synnerhet gäller detta uppgifter som kan uppfattas vara etiskt känsliga. Detta innebär att det skall vara praktiskt omöjligt för utomstående att komma åt uppgifterna. (Vetenskapsrådet, 2002; s. 12)

Eleverna blev ombedda att skriva ner sitt förnamn, skola, klass samt födelseår på framsidan av provet. Detta gjordes så att vi sedan skulle kunna organisera och analysera alla proven på ett lättare och smidigare sätt. Eleverna blev dock garanterade att deras prov inte skulle ses av några anda än oss och att inga namn eller skolnamn skulle ingå i själva rapporten, utan allt kommer att vara anonymt. Lärarna fick också reda på att deras svar på intervjun skulle förbli anonymt i rapporten.

5.4.4 Nyttjandekravet

> Regel 7: Uppgifter om enskilda, insamlade för forskningsändamål, får inte användas eller utlånas för kommersiellt bruk eller andra icke-vetenskapliga syften.
>
> Regel 8: Personuppgifter insamlade för forskningsändamål får inte användas för beslut eller åtgärder som direkt påverkar den enskilde (vård, tvångsintagning, etc.) utom efter särskilt medgivande av den berörda. (Vetenskapsrådet, 2002; s. 14)

Eleverna blev garanterade att provsvaren enbart skulle användas till vår studie, och att det inte på något sätt skulle påverka deras betyg i matematik. Materialet från både provet och intervjuerna kommer inte att användas till något annat en denna studie.

5.5 Trovärdighet

5.5.1 Reliabilitet

Reliabilitet handlar om hur pålitligt det som mäts är. Det finns tre viktiga faktorer som har en påverkan på hur hög reliabilitet något har: stabilitet, intern reliabilitet och interbedömarreliabilitet (Bryman, 2011).

5.5.1.1 Stabilitet

Stabilitet innebär att ifall samma grupp skulle mätas två gånger, ska resultatet inte skilja sig i stor utsträckning (Bryman, 2011). Detta är något som vi inte tog särskilt stor hänsyn till när vi genomförde provet, då det inte handlar om åsikter, utan kunskaper. Ifall man hade låtit eleverna göra provet igen några månader senare har de dels sett provet innan, men också, förhoppningsvis, förbättrat sina kunskaper inom matematik och borde då få ett bättre resultat. Med provet fanns inte heller tiden till att kunna genomföra studien igen med samma individer.

5.5.1.2 Intern reliabilitet

Intern reliabilitet innebär att det finns en samstämmighet mellan de olika delarna av undersökningen som tar upp samma fråga (Bryman, 2011). Under rättningen av provet visade det sig att de elever som låg på nivå 1 klarade de flesta nivå 1 frågor, att de som låg på nivå 2 klarade de flesta nivå 2 och så vidare, vilket jag tycker visar på en hyfsat hög grad av intern reliabilitet.

5.5.1.3 Interbedömarreliabilitet

Interbedömarreliabilitet innebär att bedömningen inte ska vara subjektiv. Om flera olika bedömare eller observatörer hade varit inblandade hade de alla kommit fram till samma resultat (Bryman, 2011). Detta försökte vi göra genom att jag och Alexzander Hasselholm analyserade och kategoriserade in alla eleverna i olika kategorier tillsammans.

Utöver detta försökte vi även att höja reliabiliteten i mätningen genom att eliminera de elevprov där vi misstänkte eller kände till att eleven hade fuskat.

5.5.2 Validitet

Validitet innebär att mätningen mäter det man är ute efter, det vill säga mätningens relevans och trovärdighet är hög (Bryman, 2011).

Det vi var ute efter med undersökningen var att kunna jämföra resultatet med vår studie med Küchemanns resultat från hans studie 1976. Att vi hade samma prov i vår undersökning som han hade i hans undersökning gjorde definitivt att validiteten i vår mätning ökade. När det kom till intervjuerna var jag ute efter att se ifall lärarnas uppfattningar om vad elever har för missuppfattningar kring bokstavssymboler stämde överens med elevsvaren från provet. Genom att först ställa en öppen fråga till lärarna för att få deras ursprungliga tankar, men även sedan ställa frågor angående specifika uppgifter från provet för att kunna göra en mer konkret jämförelse mellan de båda.

5.6 Analys/bearbetning

5.6.1 Provet

Analysen av provet gjordes tillsammans med Alexzander Hasselholm. Vi började med att sortera och organisera alla elevproven efter klass och sedan rättades alla proven. Vi organiserade in alla svaren i ett Excel dokument och färgkodade svaren efter följande: rätt svar, vanliga missuppfattningar, intressanta felsvar, nästan rätt svar samt diskvalificering.

Rätt svar var för alla svar som var helt rätt, vanliga missuppfattningar var för de vanligaste förekommande felsvaren, intressanta felsvar var för andra felsvar som var intressanta att uppmärksamma men som inte uppstod lika ofta, nästan rätt svar var för de svaren som nästan

var rätt fast det saknades en liten bit för att få det att bli 100 procent rätt, och diskvalificering var för de elever som antingen fuskade eller lämnade in nästan helt tomma prov.
Efter att vi organiserat allt i Excel-dokumentet började vi dela in eleverna i de olika nivåerna av förståelse. Detta gjorde vi genom att titta på vilka uppgifter och svar som motsvarade vilken nivå, och titta sedan på vad varje individuell elev svarat på de olika uppgifterna. Genom att göra detta delade vi i eleverna i de olika nivåerna baserat på hur många frågor eleverna klarat på varje nivå. Efter att vi delat in eleverna i de olika nivåerna skapade jag en figur (figur 1) för att visa fördelningen mellan de olika nivåerna, och figurer (figur 2 och 3) för hur nivåerna idag ligger till jämfört med nivåerna från 1976. Sedan skapade jag även en tabell (tabell 14) som jämförde andelen korrekta svar och vanligt förekommande felsvar på vissa frågor jämfört med Küchemanns resultat.

5.6.2 Intervjuerna

Efter att intervjuerna genomfördes transkriberades intervjuerna med hjälp av Microsoft Word onlines transkriberingsprogram. Intervjuerna avkodades sedan efter följande teman: bokstäverna ignoreras, bokstäverna ges ett värde, läsförståelse, bokstavsovana, teckenovana.

6 Resultat

Resultatet kommer inledas med resultatet från vår egen undersökning. Sedan jämförs vårt resultat med Küchemanns. Sist ses resultatet från intervjuerna.

6.1 Provresultat

6.1.1 Våra resultat

Fråga	% korrekt svar
2(i)	93
2(ii)	94
3	4
4(i)	73
4(ii)	64
4(iii)	56
4(iv)	61
4(v)	29
4(vi)	63
5(i)	88
5(ii)	66
5(iii)	53
6(i)	92
6(ii)	39
7(i)	93
7(ii)	93
7(iii)	85

Fråga	% korrekt svar
7(iv)	27
8	92
9(i)	92
9(iii)	71
9(ii)	83
9(iv)	36
10(i)	12
10(ii)	10
11(i)	75
11(ii)	85
12	81
13(i)	93
13(ii)	58
13(iii)	61
13(iv)	85
13(v)	34
13(vi)	64

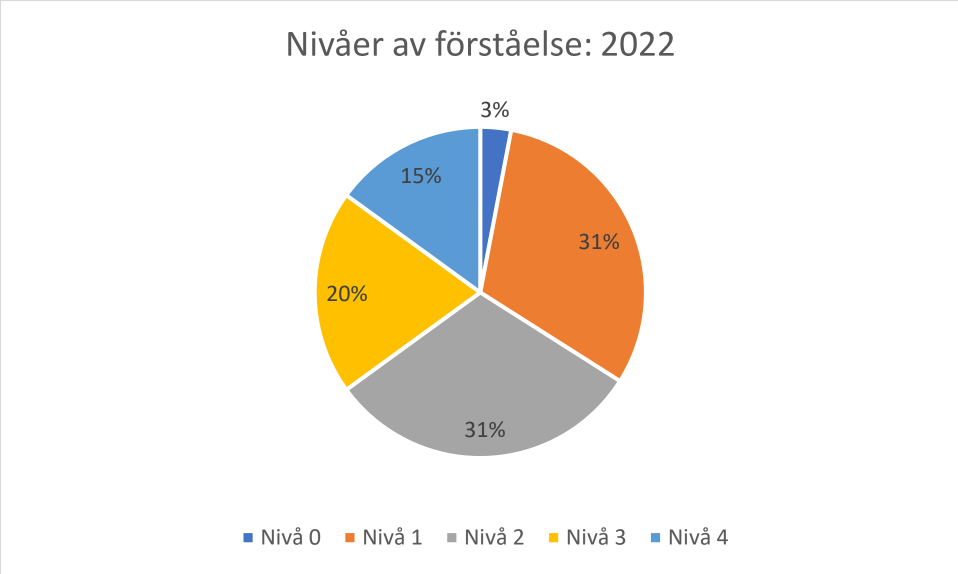
Fråga	% korrekt svar
13(vii)	51
13(viii)	49
13(ix)	25
14	54
15(i)	32
15(ii)	46
16	14
17(i)	17
17(ii)	48
18(i)	68
18(ii)	20
19(i)	32
19(ii)	9
20	27
21	15
22	19
23	2

Tabell 13: Andelen elever som gav ett korrekt svar på frågorna

Provet bestod av, som nämnt tidigare, 23 frågor med sammanlagt 53 delfrågor. Dock räknades resultatet från fråga 1 bort i bestämningen av de olika nivåerna, då det framkom under mätningens gång att majoriteten av eleverna inte förstått sig på frågan.

Som kan ses i tabellen var det frågorna 23, 3 och 9(ii) som eleverna hade svårast för, vilket alla är nivå 4 frågor. Eleverna hade däremot lättare för frågorna som till exempel 2(i), 2(ii), 6(i), 7(i), 8 och 9(i), vilket alla är nivå 1 frågor.

Resultatet från studien har blivit sammanställt genom att eleverna har blivit indelade i Küchemanns olika nivåer av förståelse, vilket kan ses i figuren nedan.

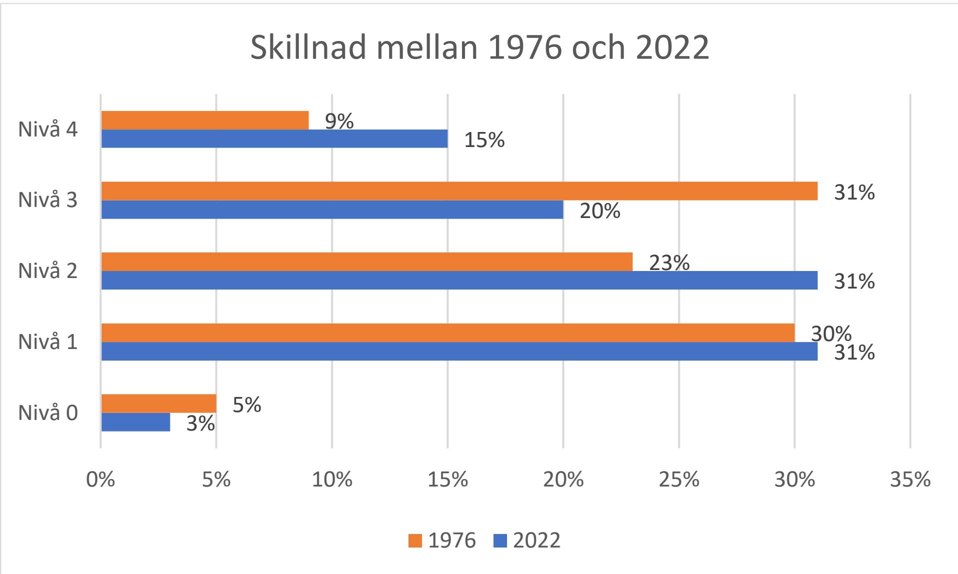


Figur 1: Andelen elever på varje nivå

Majoriteten av eleverna låg jämnt fördelade mellan nivå 1 och 2 (31 procent vardera). 3 procent av eleverna låg på nivå 0, vilket betyder att eleverna i fråga inte uppnådde kraven för nivå 1 som beskrevs i det teoretiska ramverket. Sedan var det 20 procent som låg på nivå 3 och 15 procent som låg på nivå 4.

6.1.2 Jämförelse med Küchemann

I figur 2 nedan ser vi en jämförelse mellan Küchemanns resultat på nivåer av förståelse jämfört med resultatet av vår studie.



Figur 2: Skillnaden i nivåer av förståelse mellan 1976 och 2022

Skillnaden på nivå 0 och 1 är liten, och skillnaden kan i stort sett bortses (en minskning på 2 procentenheter för nivå 0 och en ökning på 1 procentenhet för nivå 1). Däremot är skillnaden på nivå 2, 3 och 4 rätt stor. Det har skett en stor minskning på nivå 3, en minskning på 11 procentenheter. Det har dock skett en ökning på både nivå 4 och nivå 2. Nivå 4 har en ökning på 6 procentenheter och en ökning på 8 procentenheter för nivå 2.

Nedan i tabell 14 följer en mer detaljerad beskrivning av elevsvar på några frågor, både från 1976 och 2022.

Fråga	**2022 (15/16 åringar)**	**1976 (14 åringar)**
6(i) (Nivå 1) Vad kan du säga om a om $a + 5 = 8$	a = 3 92%	a = 3 92%
11(i) (Nivå 2) Vad kan du säga om u ifall $u = v + 3$ och $v = 1$	u = 4 75% u = 2 2%	u = 4 61% u = 2 14%
11(ii) (Nivå 2) Vad kan du säga om m ifall $m = 3n + 1$ och $n = 4$	m = 13 85% andra värden 0%	m = 13 62% andra värden 14%
14 (Nivå 3) Vad kan du säga om r ifall $r = s + t$ och $r + s + t = 30$	r = 15 54% r = 30 – s – t 0% r = 10 10%	r = 15 35% r = 30 – s – t 6% r = 10 21%
5 (i) (Nivå 1) Om a + b = 43 a + b + 2 = …	45 88%	45 97%
5(ii) Om $n - 246 = 762$ $n - 247 =$ …	761 66% 763 14% Andra värden 8%	761 74% 763 13% Andra värden 8%
5(iii) (Nivå 3) Om e + f = 8 e + f + g = …	8 + g 53% 15 0% 12 10% 8g 2% 9 0%	8 + g 41% 15 2% 12 26% 8g 3% 9 6%
13 (i) (Nivå 1) 2a + 5a =	7a 93%	7a 86%
13(viii) (Nivå 3) 3a – b + a = …	4a – b 47%	4a – b 47%
13(v) (Nivå 4) (a – b) + b = …	a 34%	a 23%
22 (Nivå 4) Blåa pennor kostar 5 kr	5b + 6r = 90 19%	5b + 6r = 90 10%

styck och röda pennor kostar 6 kr styck. Jag köper några blåa och några röda pennor och det tillsammans kostar mig 90 kr. Om b är antalet köpta blåa pennor, och r är antalet köpta röda pennor, vad kan du skriva om b och r?	b + r = 90 6b + 10r = 90 eller 12b + 5r = 90	5% 7%	b + r = 90 6b + 10r = 90 eller 12b + 5r = 90	17% 6%
4(ii) (Nivå 2) Lägg på 4 på n + 5	n + 9 9	64% 5%	n + 9 9	68% 20%
4(iii) (Nivå 3) Lägg på 4 på 3n	3n + 4 7n 7	56% 8% 0%	3n + 4 7n 7	36% 31% 16%
4(v) (Nivå 4) Multiplicera med 4 på n + 5	4n + 20 eller 4(n + 5) 4n + 5 eller 4*n + 5 n + 20 20	29% 27% 14% 0%	4n + 20 eller 4(n + 5) 4n + 5 eller 4*n + 5 n + 20 20	17% 19% 31% 15%
16 (Nivå 3) Vad kan du säga om c ifall $c + d$ = 10 och c är mindre än d	c < 5 c = 1, 2, 3, 4 (systematisk lista) c = 10 – d Osystematisk lista Ett värde bara (oftast c = 4)	14% 12% 0% 4% 37%	c < 5 c = 1, 2, 3, 4 (systematisk lista) c = 10 – d Osystematisk lista Ett värde bara (oftast c = 4)	11% 19% 4% 1% 39%
18(ii) (Nivå 4) $L + M + N = L + P + N$ Alltid Aldrig Ibland, när:	Ibland, när M = P Ibland. Eller M och P är givna specifika värden Aldrig	20% 19% 34%	Ibland, när M = P Ibland. Eller M och P är givna specifika värden Aldrig	25% 14% 51%
3 (Nivå 4) Vilken är störst, $2n$ eller $n + 2$? Förklara:	Korrekt, rätt förklaring (ex 2n, när n > 2) 2n n + 2 eller ”samma”	 4% 68% 7%	Korrekt, rätt förklaring (ex 2n, när n > 2) 2n n + 2 eller ”samma”	 6% 71% 16%

Tabell 14: Uppgifterna tagna och översatta från Küchemann (1981). Jämförelse av andelen elever som uppgett de olika svaren 2022 och 1976. Ordningen är grupperade efter de 6 olika kategorierna som Küchemann beskrev.

På uppgift 6(i) kan vi se att resultatet är den samma mellan 1976 och 2022. I båda studierna var det 92% som gav ett korrekt svar på frågan. Då detta är en nivå 1 fråga kan det resultatet verka logiskt eftersom det inte var någon signifikant skillnad för nivå 1 mellan de båda studierna.

Uppgifter 11(i) och 11(ii) visar på att det skett en ökning i andelen korrekta svar jämfört med 1976. Det kan även vara värt att nämna att fler elever klarade av fråga 11(ii) än 11(i) i båda mätningarna, trots att fråga 11(ii) la till ett steg för multiplikation.

Uppgift 14s resultat är dock lite annorlunda mot vad skulle kunna vara förväntat. Då 2022 studien visade på en minskning av elever på nivå 3, skulle det vara förväntat att se en minskning i andelen som klarade av frågorna på nivå 3 också, dock är detta inte alltid fallet. Då det enbart var 41 procent som gav ett korrekt svar på frågan 1976, är det istället 54 procent som svarade korrekt 2022, vilket är en signifikant skillnad.

Samma fenomen kan hittas i uppgift 5(iii). Där är det även värt att nämna att vissa svar som Küchemann såg mycket av i sin undersökning saknades helt från 2022 undersökningen. Svar som 15 och 9 inte existerade på vår undersökning, det vill säga tenderade inte eleverna i vår undersökning att sätta värdena 7 eller 1 på g (7 för sjunde bokstaven i alfabetet, 1 för att det är det ”simplaste” värdet).

Vi såg däremot en ökning i antalet rätta svar på fråga 22 (från 11 till 19 procent) Detta är dock också kanske mer väntat då det var en rätt signifikant ökning med elever som ligger på nivå 4 från 1976. Samma gäller på fråga 4(iii), där det var en ökning från 17 till 29 procent. Dock kan det vara intressant att nämna den stora skillnaden i vilket som var det vanligaste felsvaret på fråga 4(iii). 1976 var det vanligaste felsvaret n + 20, vilket hela 31 procent av eleverna svarade. Sedan låg 4n + 5 eller 4*n + 5 på 19 procent och 20 på 15 procent. Däremot i vår studie var det 4n + 5 eller 4*n + 5 som var det vanligaste felsvaret med 27 procent av eleverna som uppgav det svaret (en ökning på 8 procentenheter). n + 20 har också fått en stor minskning, från 31 procent till 14 procent (en minskning på 17 procentenheter). Det var inte en enda elev som gav svaret 20 på fråga 4(iii), vilket också var en stor skillnad från 1976.

Fråga 16 visade på en liten minskning i korrekta svar. 2022 var det 26 procent som gav ett korrekt svar, medan 1976 var det 34 procent som uppgav ett korrekt svar (minskning på 8 procentenheter). Däremot var det fortfarande den största delen av elever som enbart uppgav ett envärdes svar (vanligaste var c = 4). 1976 var det 39 procent av eleverna som gav ett sådant svar, och 2022 var det 37 procent.

Fråga 3 visade sig vara en av de svåraste frågorna för eleverna att klara av i båda undersökningarna, då endast 6 procent (1976) och 4 procent (2022) av eleverna gav ett korrekt svar på frågan. Majoriteten av eleverna uppgav svaret 2n på frågan (71 procent 1976 och 68 procent 2022).

6.2 Lärarintervjuer

Nedan följer resultaten från de transkriberade lärarintervjuerna, indelade efter de teman som skrevs med i metoden, vilket representerar de delar som lärarna uppfattar att eleverna har störst problem med.

6.2.1 Bokstäver ignoreras

Något som alla tre lärarna var överens om var att elever som har svårt för att använda bokstavssymboler tenderar att ignorera bokstäverna. Att de antingen väljer att inte räkna med de överhuvudtaget eller att de ignorerar dess närvaro till slutet av uppgiften.

När lärarna fick frågan om vad de trodde att det vanligaste felsvaret var på uppgift 13(ii) (2a + 5b) var de alla överens om att det vanligaste felet var 7ab. De var också alla överens om att en av anledningarna till detta felsvar var att eleverna ignorerar bokstäverna, eller inte ser någon skillnad på a och b.

”[7ab] man lägger ihop 2 och 5 så blir det typ 7 och sen lägger man till a:na och b:na så du blandar liksom äpplen och päron, för de ser inte någon skillnad på det för siffror är siffror och bokstäver är bokstäver. Det tror jag är en jättevanlig miss.” (Lärare 1)

Ett annat exempel då lärare trodde att eleverna ignorerar bokstäverna var på fråga 5(iii). Där svarade en lärare:

”Jag tror att man kan få vissa svar som bara är 8. För att man tänker sig att i exemplen, så ska det bli ett tal. Och då ska det väl bli ett tal och så vet man inte vad man ska ta sig till med G och så bara skriver man 8 skulle jag kunna tänka mig.” (Lärare 2)

Samma lärare tog även upp att denna missuppfattning skulle kunna vara ett problem på även fråga 4(v).

*”Och de som skriver 20n, då tror jag att man är medveten om att man ska multiplicera allt, men man tänker inte att man ska multiplicera n och 5 var för sig med 4 utan man tänker att man liksom kan göra allting i ett. Alternativt att man inte tänker så mycket utan bara 4 * 5 är 20 och så skriver jag väl bara 20n.”* (Lärare 2)

6.2.2 Bokstäver ges ett värde

En av lärarna tog även upp att eleverna helt enkelt bestämmer ett värde för bokstaven i fråga. Om de inte vet vad bokstaven är värd, kan de sätta vilket värde som helst istället för att behålla bokstaven som den är. Läraren sa detta om fråga 5(iii):

”Sen kan jag egentligen tänka mig att de kan skriva vilket tal som helst också. De bara liksom tänker vadå det spelar väl ingen roll att jag vet att e och f är 8, för jag vet ju ändå inte g så då kan jag lika gärna svara 357 som 211.” (Lärare 2)

6.2.3 Läsförståelse

Lärarna var överens om att på fråga 20 var det, i de flesta fall, elevernas läsförståelse som orsakade problemen. Att de antingen inte läste frågan ordentligt eller att de inte hade tillräckligt god läsförståelseförmåga.

Två av lärarna tog även upp att eleverna som svarat 7ab på fråga 13(ii) även kan ha läst frågans formulering och missat eller ignorerat att det stod ”Förkorta följande, om det är möjligt” och helt enkelt känt att de var tvungna att göra någonting. Även ifall de kanske visste att svaret var 2a + 5b kände de sig tvingade till att försöka förkorta problemet ytterligare.

”De förväntar sig att det alltid ska jag gå och göra det som står och då vet man kanske egentligen att det ska vara 2a + 5b, men man försöker ändå med något man egentligen vet inte stämmer” (Lärare 2)

”och sen framför allt så står det beräkna eller förkorta 2a plus 5b och då tar man för givet: Jag måste göra något.” (Lärare 3)

6.2.4 Bokstavsovana

En av lärarna tog även upp svårigheten i att använda olika bokstäver. Hen tog upp att i flera fall hade eleverna kanske haft en större chans att klara av frågorna ifall bokstäverna hade hållits till x och y, då det är de bokstäver som eleverna är vana vid att använda.

”Och sen, dessutom så tror jag att det blir svårare om det står e plus f. Vad betyder det e? Vad betyder f? Och en del… Jag vet att många frågar ju så här: varför kallar vi det alltid för x och y?”
”De har aldrig sprungit på bokstäverna t och b förr i en uppgift så tror de att det är så jäkla svårt. Jag tror kanske nästan att det varit lättare om man har kallat det för x och y” (Lärare 1)

Detta visar lite på en motsägelse, då läraren tar upp att eleverna ibland kan ifrågasätta varför man använder just bokstäverna x och y, men samtidigt förstår de kanske sig på uppgifterna lättare ifall x och y är bokstäverna som används.

6.2.5 Teckenovana

På fråga 4(v) var lärarna överens om att en stor del av felen som kan ske på denna frågan handlar om att eleverna inte kan hantera parenteser på ett korrekt sett eller att de glömmer av parenteserna när de skriver ner sitt svar.

*”Det finns säkert ett gäng som svarar 4n + 5 och de är ovana vid att tänka på algebraiska uttryck som enheter så att de tänker att de skriver kanske ner det på papper 4 * n + 5 utan parentes, och sen efter det så glömmer de bort vad det var de skulle göra och så bara att se dem att stå 4 * n och så skriver de 4n och så plus 5.”* (Lärare 2)

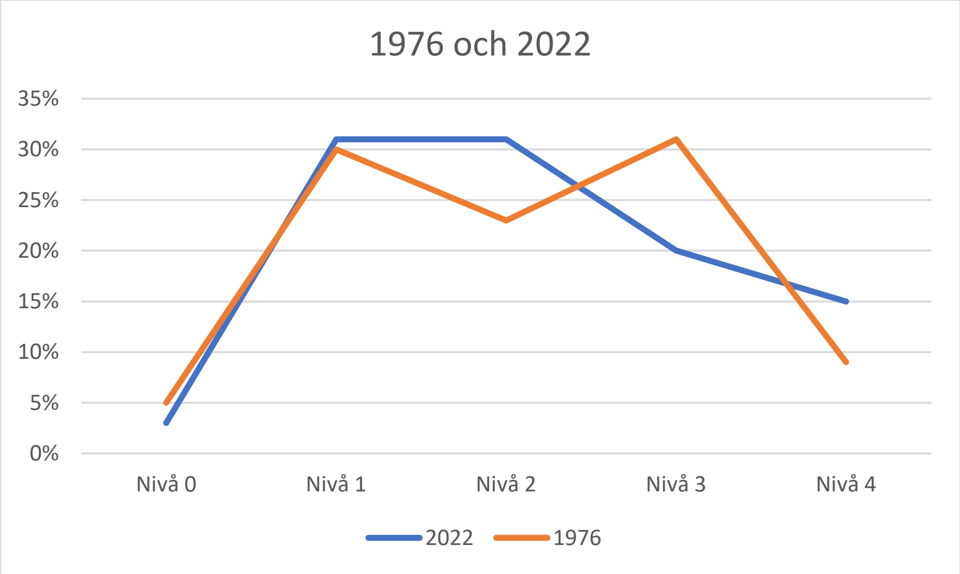
”multiplicerar med 4 på dessa och de missar parenteserna kring n + 5 i så fall om man nu skulle ställa upp det.” (Lärare 3)

7 Diskussion

7.1 Resultatdiskussion

7.1.1 Hur har elevers förståelse och missuppfattningar kring bokstavssymboler ändrats sedan 70-talet?

Den stora skillnaden mellan Küchemanns (1981) resultat och vårt resultat var skillnaderna på nivåer av förståelse. Som jag skrev i resultatet var det ingen större skillnad mellan nivåerna 0 och 1 för de båda studierna. Dock var det en stor skillnad på nivåerna 2, 3 och 4. Då vi hade en större andel elever som låg på nivå 4 jämfört med Küchemann, hade vi också en större andel som låg på nivå 2 och mindre på nivå 3.



Figur 3: Jämförelse av elever på varje nivå 2022 och 1976

Men vad innebär denna skillnad? Vad innebär det att färre elever ligger på nivå 3? Om vi tittar på Küchemanns (1981) beskrivning av vad elever som ligger på nivå 3 kan hantera, står det att elevernas största förbättring jämfört med nivå 2 är att de nu kan hantera bokstäver som specifika obekanta då uppgifterna har en simplare struktur, samt att de kan se svar som 3n + 4 och känna sig nöjda med de svaren, trots att de kan se ”ofärdiga” ut (Küchemann, 1981). Detta innebär i vår studie att färre elever klarar av att hantera bokstäverna som specifika obekanta då vi hade 35 procent av elevernas som låg på antingen nivå 3 eller 4, medan Küchemann hade 40 procent. Dock hade vi en större andel av elever som låg på nivå 4 jämfört med Küchemann. Skillnaden mellan nivå 3 och 4 är att elever på nivå 4 klarar av att hantera bokstäver som specifika obekanta även när uppgifterna har en mer komplex struktur, inklusive uppgifter som kräver specifika obekanta men där eleverna tenderar att vilja se bokstäverna som objekt. De klarar även av att hantera bokstäver som generella tal och variabler (Küchemann, 1981). Detta betyder att trotts att det var färre elever i vår studie som ligger på de högre nivåerna, är det en större andel av de eleverna som ligger på den högsta nivån. Även ifall vi hade färre elever som kan hantera bokstäver som specifika obekanta var det en större del av de som kan hantera det som också kunde lösa mer komplexa uppgifter.

I största allmänhet var det ingen jättestor skillnad mellan vår studie och Küchemanns. Felsvaren som gavs var i de flesta fall desamma idag som på 70-talet. Den största skillnaden kommer i många fall istället i andelen av eleverna som gett de olika svaren.

Vissa uppgifter som det inte är någon större skillnad på förväntade vi oss inte heller någon stor skillnad på. Till exempel på uppgift 6(i) var det ingen skillnad i andelen elever som svarat korrekt på frågan, vilket vi förväntade oss då det knappt var någon skillnad på andelen elever på nivå 1 mellan de två studierna. I allmänhet var skillnaderna på nivå 1 frågorna inte stor, vilket verkar logiskt. Även ökningen i andelen elever som klarade fråga 22 och 4(v) verkar stämma överens med resultatet då vi fick en stor ökning i andelen elever på nivå 4. Fråga 16 (nivå 3) visade också på en minskning i andelen elever som klarade den, vilket även det stämmer överens med nivåerna.

Sedan var det några uppgifter som gav svar som vi inte hade förväntat oss. Till exempel visade både uppgift 14 och 5(iii) att det var en större andel av eleverna som klarade av uppgifterna idag än på 70-talet, trots att andelen elever på nivå 3 och 4 minskat. Det var även en liten minskning i andelen elever som klarade av fråga 3 (en nivå 4 fråga) trots den stora ökningen i elever på nivå 4.

På frågorna 11(i) och 11(ii) skedde något som både jag och Alexzander tycket var intressant då det hände i både vår undersökning och i Küchemanns. Fler elever svarade rätt på uppgift 11(ii) trots att den vid första anblick ser mer komplex ut på grund av multiplikationen. Jag tror dock att detta beror på det som Küchemann beskrev angående fråga 11(i) som jag beskrev i det teoretiska ramverket: de läser frågan som *u* och *v* tillsammans blir 3 (Küchemann, 1981). Detta tror jag är lättare hänt på fråga 11(i) än på fråga 11(ii) vilket är varför vi ser en ökning i antalet korrekta svar på fråga 11(ii)

Allt som allt var det inga enorma skillnader på resultatet från vår studie jämfört med Küchemanns. På grund av att vi bara fick in data från en skola blir det även svårt att dra generella slutsatser angående hur elevers förståelse har ändrats sedan 70-talet. Men det verkar som att färre elever klarar av att använda bokstäver som specifika obekanta, men att det däremot är fler elever utav de elever som klarar det som även klarar av mer komplexa uppgifter.

7.1.2 Stämmer lärares uppfattningar kring elevernas svårigheter överens med elevernas resultat?

När det kommer till hur väl lärarnas uppfattningar kring elevernas svårigheter stämde överens stämde det generellt bra överens. Alla tre lärare var helt överens om de vanligaste felsvaren på fråga 4(v) och 13(ii). På fråga 13(ii) (2a + 5b) var det första alla lärarna tog upp att eleverna förmodligen kunde svara 7ab på uppgiften och att detta förmodligen berodde på att de antingen helt ignorerade eller inte förstod att det är olika bokstäver och att det inte går, som en lärare beskrev, att ”blanda äpplen och päron”, eller att de inte kände sig bekväma med att det inte gick att förkorta mer, då det stod i frågan att de skulle förkorta uttrycken, om det var möjligt. På fråga 4(iii) var lärarna också överens om att det vanligaste felsvaret förmodligen var 4n + 5. Dock trodde lärarna att detta förmodligen berodde på att eleverna inte har tillräckligt med förståelse kring parenteser. Några av lärarna tog även upp några av de andra felsvaren som exempel på andra fel som kunde ha skett (n + 20 till exempel) men gav aldrig någon förklaring till varför det felet ka ha skett, utan alla lärarna var överens om att det vanligaste felet var 4n + 5.

När det kom till fråga 20 var lärarna överens om att det förmodligen var elevernas läsförståelse som kunde skapa en stor svårighet. Detta tror jag stämmer väl överens med det som eleverna visade. Läser eleverna inte igenom frågan ordentligt eller har problem med sin läsförståelse kan det lätt bli att eleverna ser bokstäverna t och b och automatiskt antar att det står för tårtor och bullar, och inte priset som det står i uppgiften. Då eleverna svarar att b står för bullar och t för tårtor visar det att eleverna har använt bokstäverna som objekt och inte som specifik obekant.

Fråga 5(iii) var den enda frågan där lärarnas uppfattningar kring vad de vanligaste felsvaren kunde vara inte stämde överens med vad eleverna visade. Lärarna trodde att eleverna förmodligen bara skulle sätta vilket tal som helst istället för g i ekvationen, men detta var inte något som vi såg en tendens till i vårt arbete, och var även en av skillnaderna mellan vår studie och Küchemanns. Elevernas vanligaste felsvar på fråga 5(iii) (för både oss och Küchemann) var 12, vilket förmodligen kommer ifrån att eleverna har sätt att $e + f = 8$ och antagit att det betyder att $e = f = 4$, och sedan antagit att $e = f = g = 4$ och att då $e + f + g = 12$. Men att eleverna satt in ett helt slumpmässigt värde var inte något som vi såg mycket av hos någon av eleverna.

7.2 Metoddiskussion

När det kom till att välja metod för studien kändes det uppenbart att välja en kvantitativ studie för att kunna jämföra Küchemanns studie med vår egen, då Küchemanns studie också var kvantitativ. Jag och Alexzander Hasselholm tog gemensamt kontakt med Küchemann och fick hans prov och hans godkännande till att använda frågorna till vår egen studie. Vi arbetade sedan tillsammans med alla delar kring den kvantitativa studien. Vi tog kontakt med skolor, översatte provet till svenska, åkte ut till skolan för att samla in data och arbetade sedan gemensamt med att rätta och analysera proven. Denna del av studien var definitivt den mest tidskrävande delen, då det tog en lång tid för oss att komma igång och försöka hitta skolor som kunde ställa upp under de veckorna vi föreslagit. Vi hade tur med att min gamla VFU skola hade tid då en av matematiklärarna skulle resa bort under en vecka, och att vi därför kunde få tillgång till hens ettor under den veckan, samt att en annan lärare på skolan låg i bra till i planingen och hade tid att låta oss ta över en lektion samma vecka. På grund av det korta tidsintervallet för detta arbete hade vi tyvärr inte tid att genomföra undersökningen på flera skolor, vilket var något vi egentligen hade velat göra. Dock var det kanske lite tur i oturen att endast en skola kunde då, åter igen, tidsintervallet för detta arbete hade gjort det svårt att hinna med fler skolor och fler klasser.

Jag genomförde sedan även en kvalitativ studie med tre lärare, för att kunna jämföra lärarnas uppfattningar kring elevernas svårigheter med elevernas faktiska svar. Jag valde att genomföra studien för att få fram lärarnas uppfattningar som en kvalitativ studie just för att jag ville höra lärarnas tankar kring eleverna svårigheter på ett sett som jag visste att en kvantitativ studie inte skulle kunna fånga upp. Jag valde även att genomföra den som en semistrukturerad intervju då jag ville ha en mer avslappnad och öppen diskussion kring lärarnas uppfattningar och tankar, samtidigt som jag ville styra lärarna mot de frågor som jag var nyfiken kring att titta mer på.

7.2.1 Felkällor

Något som är värt att tänka på med att försöka dra slutsatser mellan vår studie och Küchemanns studie är dels att vi är olika människor, vilket betyder att våra tolkningar kring de olika nivåerna kan differentiera. En elev som vi satt på nivå 2 kanske Küchemann hade satt på nivå 1 eller tvärt om. Vi har försökt att följa Küchemanns nivåer så noggrant som möjligt, men det kan ju så klart ha skett tolkningsskillnader.

Vi hade även, som nämnt ovan endast en skola som tog del i undersökningen (59 elever) vilket gör det väldigt svårt att dra generella slutsatser utifrån vår studie angående resten av Sverige. Vi var även tvungna att diskvalificera 5 elever, då vi antingen misstänkte fusk, visste att de fuskat, eller att eleven inte svarat på mer än 1 eller 2 frågor.

Det var även några andra små delar som blev fel med provet som vi tagit hänsyn till. För det första satte vi två av delfrågorna i fel ordning (9(ii) och 9(iii)). Vi tror dock inte att detta har haft någon större inverkan på elevernas resultat på frågorna.

En av frågorna (13(v)) blev fel när vi skrev ner den, och felet upptäcktes inte förens vi började analysera proven. Uppgiften ifrån Küchemanns prov löd 2a + 5b + a, medan den i vårt prov löd 2a + 5a + a. Detta fel gjorde att vi inte kunde jämföra svaren med Küchemann, samt att det inte räknades med som en Nivå 2 fråga längre.

Vi valde även att helt räkna bort fråga 1 från analysen, då eleverna hade stora svårigheter med hur denna uppgift var ställd. Vi är osäkra på ifall det var något som möjligtvis blev fel under översättningen eller ifall det var något annan som orsakade denna stora missförståelse kring uppgiften.

7.3 Didaktiska konsekvenser

Något som jag kommer att ta med mig som lärare angående detta är att vara noggrann med eleverna. Som var beskrivet i bakgrunden (kapitel 3.2.3), skrev Macgregor och Stacey (1997) att om lärarna inte är noggranna med att tydliggöra oklarheter som kan uppstå hos eleverna kommer de inte själva att kunna utvecklas vidare. Man måste som lärare vara väldigt uppmärksam på alla missuppfattningar som uppstår hos eleverna, och att vissa av dessa missuppfattningar kan komma från läroböckerna.

Något annat som jag har uppmärksammat under arbetets gång är att för att eleverna ska ha en chans att utvecklas i sitt matematiska tänkande och kunna lösa fler problem, behöver eleverna komma ifrån tänket med ”bokstaven som objekt”. Att se på bokstäver som objekt är nödvändigt för vissa uppgifter, men i många fall fastnar eleverna i detta och lär sig därför aldrig att hantera de som specifika obekanta eller vidare (de når alltså inte upp till nivå 3 och 4). Detta är något som man som lärare behöver tänka på att reda ut hos eleverna.

7.4 Framtida forskning

I slutet av mitt förra examensarbete skrev vi att för framtida forskning hade det varit intressant att se en studie idag i Sverige, för att se ifall det var några skillnader kring resultaten från idag jämfört med 70-talet. Detta är något som jag fortfarande tycker är en intressant idé, då detta arbete tyvärr är för litet för att kunna dra några generella slutsatser kring ifall en förändring har skett.

Referenslista

Bryman, A. (2011). *Samhällsvetenskapliga metoder* (2 uppl). Liber.

Çelik, D., & Güneş, G. (2013). Different grade students' use and interpretation of literal symbols. *Kuram ve Uygulamada Eğitim Bilimleri*, *13*(2), 1168–1175.

Christou, K., & Vosniadou, S. (2012) What Kinds of Numbers Do Students Assign to Literal Symbols? Aspects of the Transition from Arithmetic to Algebra. *Mathematical Thinking and Learning*, *14*(1), 1–27. doi:10.1080/10986065.2012.625074

Dalen, M. (2021). *Intervju som metod* (2 uppl.). Gleerups.

Küchemann, D. (1978). Children's understanding of numerical values. *Mathematics in school*, *7*(4), 24-27.

Küchemann, D. E. (1981). Children's Understanding of Mathematics: 11-16. I K. M. Hart (Ed.), *Algebra* (s. 102-119). John Murray.

Lucariello, J., Tine, M, T. & Ganley, C, M. (2013). A formative assessment of students' algebraic variable misconceptions. *The Journal of Mathematical Behavior*, *33*(2014), 30-41. doi: 10.1016/j.jmathb.2013.09.001

Macgregor, M. & Stacey, K. (1997). Students' Understanding of Algebraic Notation: 11-15. *Educational Studies in Mathematics*, *33*(1), 1-19. Hämtad från: https://www.jstor.org/stable/3483002?origin=JSTOR-pdf&seq=1

Persson, P-E. (2010). *Räkna med bokstäver* [Doktorsavhandling]. Lund: Universitetstryckeriet. Hämtad från https://www.divaportal.org/smash/get/diva2:989792/FULLTEXT01.pdf

Şahin, Ö. & Soylu, Y. (2011). Mistakes and misconceptions of elementary school students about the concept of variable. *Procedia Social and Behavioral Sciences. 15*(2011) 3322–3327.

Läroplan och kursplan för grundskolan, Matematik[ämnesplan]. (2020). Skolverket. Hämtad från: https://www.skolverket.se/undervisning/grundskolan/laroplan-och-kursplaner-for-grundskolan/laroplan-lgr11-for-grundskolan-samt-for-forskoleklassen-och-fritidshemmet?url=1530314731%2Fcompulsorycw%2Fjsp%2Fsubject.htm%3FsubjectCode%3DGRGRMAT01%26tos%3Dgr%26p%3Dp&sv.url=12.5dfee44715d35a5cdfa219f

Läroplan och kursplan för gymnasiet, Matematik[ämnesplan]. (2011). Skolverket. Hämtad från: https://www.skolverket.se/undervisning/gymnasieskolan/laroplan-program-och-amnen-i-gymnasieskolan/gymnasieprogrammen/amne?url=1530314731%2Fsyllabuscw%2Fjsp%2Fsubject.htm%3FsubjectCode%3DMAT%26tos%3Dgy&sv.url=12.5dfee44715d35a5cdfa92a3

Vetenskapsrådet. (2002). *Forskningsetiska principer inom humanistiska-samhällsvetenskaplig forskning*. Vetenskapsrådet.

Bilagor

Bilaga 1: Provet

Algebra

Namn: ___________________________________ **Datum:** ________________

Skola: ____________________________________ **Klass:** _________________

Födelsedag: ____

Svaren sammanställs till en undersökning om elevers förståelse och missuppfattningar inom algebra. Informationen kommer enbart använda insamlade data till den aktuella undersökningen där ingen personlig information kommer att avslöja.

1. Fyll i luckorna:

$x \to x + 2$ $\qquad$ $x \to 4x$

$6 \to$ ______ $\qquad$ $3 \to$ ______

$r \to$ ______

---

2. Skriv ner den minsta och den största av dessa:

$n + 1,\quad n - 3,\quad n,\quad n + 4,\quad n - 7$ $\qquad$ *Minsta*: ______ $\qquad$ *Största:* ______

---

3. Vilken är störst, $2n$ eller $n + 2$?

Förklara: ____

---

4. **4 adderat med n** kan skrivas som **n + 4**. Lägg till 4 på dessa

8	$n + 5$	$3n$
________	________	________

4 multiplicerat med n kan skrivas som **4n**. Multiplicera med 4 på dessa

8	$n + 5$	$3n$
________	________	________

---

5. Om $a + b = 43$, $\qquad$ Om $n - 246 = 762$, $\qquad$ Om $e + f = 8$

$a + b + 2 =$ ______, $\qquad$ $n - 247 =$ ______, $\qquad$ $e + f + g =$ ______

6. Vad kan du säga om a om $a + 5 = 8$

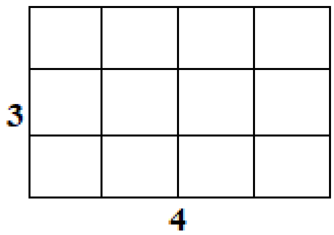
Svar: _______________

Vad kan du säga om b om $b + 2$ är lika med $2b$

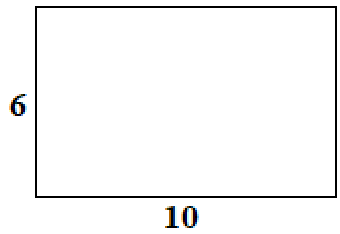
Svar: _______________

---

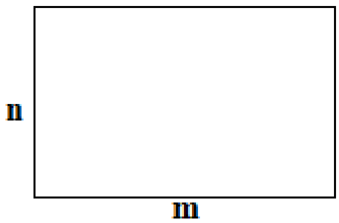
7. Vad är arean av dessa former:



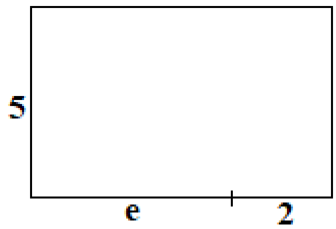
$A =$ __________



$A =$ __________

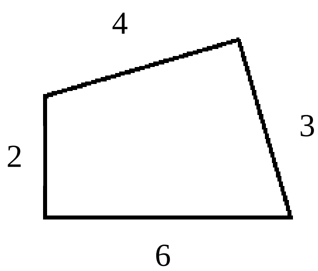


$A =$ __________

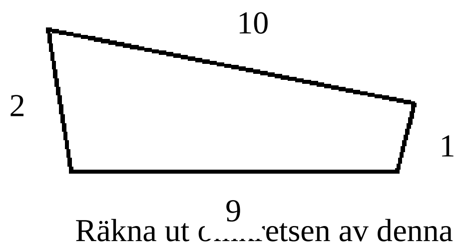


$A =$ __________

8.



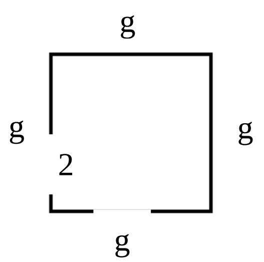
Omkretsen av denna form är lika med 6 + 3 + 4 + 2, vilket är lika med 15.



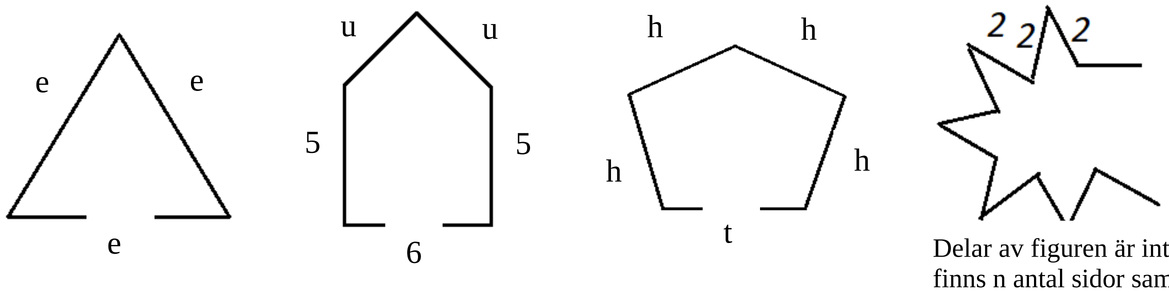
Räkna ut omkretsen av denna form.

O = _______________

9. Denna kvadrat har sidor med längden g.
Så, för dess omkrets, kan vi skriva O = 4g



Vad kan vi skriva för omkretsen för följande former:



Delar av figuren är inte ritad. Det finns n antal sidor sammanlagt, alla med längd 2

O = __________ O = _________ O = ___________ O = _______________

---

10. Vitkål kostar 8 kr styck och rödbetor kostar 6 kr styck.

Om v står för **antalet** köpta vitkål och r står för **antalet** köpta rödbetor, vad står 8v + 6r för?

Svar: ______________

Vad är det totala antalet köpta grönsaker?

Svar: ______________

---

11. Vad kan du säga om u ifall $u = v + 3$ och $v = 1$

Svar: ______________

Vad kan du säga om m ifall $m = 3n + 1$ och $n = 4$

Svar: ______________

---

12. Om John har J kulor och Peter har P kulor, vad kan du skriva för antalet kulor de har tillsammans?

Svar: _______________

13. $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{3a}$ kan förkortas och skrivas som $\boldsymbol{4a}$.

Förkorta följande, om det är möjligt.

$2a + 5a =$ ________ $3a - (b + a) =$ ________

$2a + 5b =$ ________ $a + 4 + a - 4 =$ ________

$(a + b) + a =$ ________ $3a - b + a =$ ________

$2a + 5a + a =$ ________ $(a + b) + (a - b) =$ ________

$(a - b) + b =$ ________

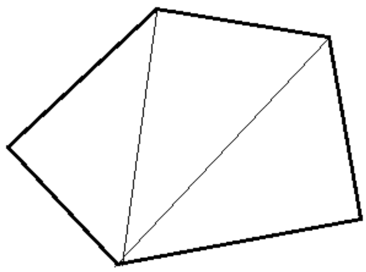
---

14. Vad kan du säga om *r* ifall $r = s + t$
och $r + s + t = 30$

Svar: _____________

---

15. I en form som denna
kan man räkna ut antalet diagonaler genom att
ta bort 3 från antalet sidor.



Så, en form med 5 sidor har 2 diagonaler:

En form med 57 sidor har _________ diagonaler;

en form med k sidor har _________ diagonaler.

---

16. Vad kan du säga om c ifall $c + d = 10$
och c är mindre än d

Svar: ____________________________

17. Maries grundlön är 20 kr per vecka.
Hon får också 2 kr för varje timme övertid hon jobbar.

Om t står för antalet timmar övertid som hon jobbar, och
L står för den **totala** lönen (i kr).
Skriv ner en ekvation som kopplar ihop **L** och t:

Svar: ______________

Vad skulle Maries totala lön vara om hon
jobbade 4 timmars övertid?

Svar: ______________

---

18. När är följande sant – *alltid, aldrig* eller *ibland*? **Stryk under rätt svar:**

$A + B + C = C + A + B$ Alltid Aldrig Ibland, när: ______________

$L + M + N = L + P + N$ Alltid Aldrig Ibland, när: ______________

---

19. $a = b + 3$. Vad händer med a ifall b ökar med 2?

Svar: _____________________________

$f = 3g + 1$. Vad hände med f ifall g ökar med 2?

Svar: _____________________________

---

20. Tårtor kostar t kr styck och bullar kostar b kr styck.

Om jag köper 4 tårtor och 3 bullar,
vad står $4t + 3b$ för?

Svar: ___________________________________

21. Om denna ekvation är sann när $x = 6$,

$$(x+1)^3 + x = 349$$

vilket värde på x kommer då att göra denna ekvation sann?

$$(5x+1)^3 + 5x = 349$$

$x =$ ___________

---

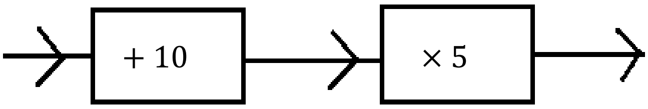
22. Blåa pennor kostar 5 kr styck och röda pennor kostar 6 kr styck. Jag köper några blåa och några röda pennor och det tillsammans kostar mig 90 kr.

Om *b* är antalet köpta blåa pennor, och
r är antalet köpta röda pennor,
vad kan du skriva om *b* och *r*?

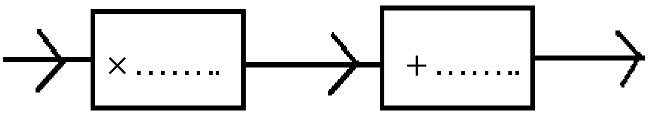
Svar: ______________________

---

23. Du kan mata in vilket tal som helst in i maskinen:



Kan du hitta en annan maskin som har samma övergripande effekt?



Bilaga 2: Intervjuguide

Intervjuguide

Bakgrundsfrågor:

Hur länge har du jobbat som lärare?

Intervjufrågor:

Allmänt:

Vad tror du att elever har svårt för när det kommer till bokstäver inom algebra?

Hur tror du att det kommer sig?

Följande frågor:

Vilka fel tror du att eleverna kan göra på denna fråga?

Varför sker det felet?

1. $2a + 5b =$ _________ (Fråga 13ii)

2. Om $e + f = 8$
   $e + f + g =$ ______ (Fråga 5iii)

3. Tårtor kostar *t* kr styck och bullar kostar *b* kr styck.
   Om jag köper 4 tårtor och 3 bullar,
   vad står 4*t* + 3*b* för? (Fråga 20)

4. Multiplicera med 4 : n + 5 (4v)

Bilaga 3: Meddelande till Küchemann

Hello Mr. Küchemann.

We are two university students from Gothenburg, Sweden, who are writing our master thesis on secondary students' understanding of letters symbols in algebra. We have read your study about children’s understanding of numerical variables and we are curious if you still have the questions you used for the study, as we wanted to do similar studies on a smaller scale here in Gothenburg. We figure we could use your questions as the foundation for our own questions.

We were also curious to see if there is a significant difference in your study and the results that we would get here in Sweden today.

Thank you in advance!
Agnes Wallgren and Alexzander Hasselholm

Bilaga 4: Email till skolorna

Hejsan!

Vi är två lärarstudenter som håller på att skriva våra examensarbeten i matematik vid Göteborgs Universitet.
Vi är intresserade av att undersöka elevers förståelse och missuppfattningar kring bokstavssymboler inom algebra, och hade tänkt att genomföra ett prov på max 1.5 timme på elever i årskurs 9 och 1:an på gymnasiet angående detta. Sen hade vi också varit intresserade att genomföra några intervjuer med några lärare och elever.
Är detta något som vi skulle kunna genomföra på er skola? I så fall så är det de två första veckorna efter påsklovet som vi skulle vilja genomföra detta.

Tack på förhand!
Agnes Wallgren och Alexzander Hasselholm