Bokstäver har ingen koppling till matematik, eller?

En kvantitativ och kvalitativ studie om elevers förståelse kring bokstavssymboler

Alexzander Hasselholm
Ämneslärare programmet, Matematik & Fysik för gymnasiet

Uppsats/Examensarbete:	15 hp
Kurs:	LGMA2A
Nivå:	Avancerad nivå
Termin/år:	VT 2022
Handledare:	Jan Stevens
Examinator:	Martin Hallnäs

Nyckelord:

Matematik, Algebra, Bokstavssymboler, Förståelse och Missuppfattning om Bokstavssymboler, Elevförståelse, Küchemann, Elever, Gymnasiet, Grundskolan.

Sammanfattning

Syftet med studien var att belysa vilka missuppfattningar elever har när det kommer till bokstavssymboler från algebra. Studien görs på svenska elever som går årkurs 1 på gymnasiet. Syftet med studien är att få en förståelse vad för missuppfattningar elever har idag, och jämföra om de har samma missuppfattningar från en studie 40 år tillbaka gjord av Dietmar Küchemann. För att mäta elevernas förståelse användes samma test som Küchemann använde under 1976. Studenterna kategoriseras in i 4 olika nivåer av förståelse, baserad ifrån Küchemanns beskrivning från 1981. Studien fokuserade på en kvantitativ undersökning. Studien visar även en kvalitativ undersökning som analyserar elevernas egna resonemang till deras ger svar som kopplas till missuppfattning av bokstavssymboler. Eleverna beskrev liknande missuppfattningar som Küchemann skrev för eleverna 1976.

Studien visar att svenska elever har svårigheter att hantera nivå 3 än 1976, men visar bättre resultat för nivå 4 och 2. De vanliga felaktigt svar som eleverna för 2022 skrev på testet var likt eleverna 1976. Resultatet av studien visar att eleverna tenderar att göra samma misstag som eleverna gjorde 1976. Eleverna visar starka missuppfattning när det kommer till att förstå bokstaven som ett objekt.

Abstract

The purpose of the studies was to shed light on the misconceptions students have when it comes to letter symbols from algebra. The study is conducted on Swedish students who are in year 1 of upper secondary school. The purpose of the studies is to gain an understanding of what misconceptions students have today and compare whether they have the same misconceptions from a study 40 years ago made by Dietmar Küchemann. To measure students 'understanding, the same test was used as Küchemann's used in 1976. Students are categorized into 4 different levels of understanding, based on Küchemann's description from 1981. The study focused on a quantitative study. The study also shows a qualitative study that analyzes students' own reasoning for their answers that are linked to misunderstanding of letter symbols. The students described similar misconceptions that Küchemann wrote for the students in 1976.

The study shows that Swedish students have more difficulty handling level 3 than in 1976 but shows better results for levels 4 and 2. The common incorrect answers that the students for 2022 wrote on the test were similar to the students in 1976. The results of the studies show

that students tend to do the same mistakes that students made in 1976. Students show strong misconceptions when it comes to understanding the letter as an object.

Förord

Jag som skriver detta examensarbete ska bli lärare inom matematik och fysik på gymnasienivån.

Jag vill ge ett stort tack till min studentvän Agnes Wallgren för all diskussion och arbete inför datainsamling under arbetets gång. Utan din hjälp med sökande för skolor, arbetet med data och diskussioner om Küchemanns studie, hade detta arbete varit betydligt mer utmanade.

Jag vill tacka de många andra studentlärare för trevliga diskussioner, rekommendationer på böcker och tips.

Jag vill även ge ett stort tack till Jan Stevens för hans handledningar och tiden han gav mig under arbetet. Dina råd och vägledning gjorde det möjligt för mig att bli klar med examensarbetet. Ytterligare vill jag tacka min examinator, Martin Hallnäs som hjälpte mig att förbättra mitt arbete, genom att informera mig av mina misstag.

Jag vill ge ett stort tack till Filip Landström, min opponent, som läste igenom mitt arbete och punkterade ut mina misstag i arbetet.

I would like to thank Dietmar Küchemann for answering my & Agnes email to send his test questions which are used in much of the work.

Jag vill ge ett stort tack till Elisabeth som gav mig & Agnes möjligen att medverka i datainsamlingar. Jag vill även tacka eleverna som medverkade i mina intervjuer. Utan er hjälp hade inte arbetet varit möjligt att genomföra.

Slutligen vill jag tacka min rumskamrat för all stöttning och kontroll läsandet av min text.

Innehållsförteckning

Tabellförteckning

Figurförteckning

1 Inledning

Algebra är en stor del av matematiken och är ett centralt område inom matematiken. Enligt kursplanen börjar eleverna mellan årskurs 1–3 att arbeta med algebra, inom område som heter ”*Matematiska likheter och likhetstecknets betydelse*” (Skolverket, 2022; årskurs 1–3) och ju äldre man blir kommer algebra bli mer komplex.

Algebra är ett centralt område inom matematiken, vilket gör det viktigt som lärare att känna till vilka uppfattningar och svårigheter som elever kan ha. Denna studie ska vara hjälpsam för mig och andra lärare att förstå vad för svårigheter elever kan ha när det kommer till bokstavssymboler inom algebra. Utöver det är denna studie en försättning av förra examensarbete jag arbetade tillsammans med Agnes Wallgren och Sadam Taranis, elevers uppfattning om bokstavssymboler inom algebra. Arbetet fokuserade på en studie som gjordes av Dietmar Küchemann 1976, som handlade om elevers kunskaper angående bokstavssymboler. I slutet av förra examensarbetet för framtida forskning tog vi upp att vi ville genomföra en liknande studie till Küchemanns, och ledde till detta examensarbete.

Detta examensarbete genomförs liknande till Küchemanns studie, en kvantitativ studie på elever som utför ett algebratest gjord av Küchemann (Küchemann använde samma test för sin egen studie).

2 Syfte

Syftet med denna studie är att undersöka vad elever har för förståelse och missuppfattningar kring bokstavssymboler inom algebra, sedan jämföra med Küchemanns studie. Ytterligare ett mål med studien är att få elevernas resonemang på deras felaktigt svar från testet, för att förstå deras svårigheter med bokstavssymboler.

2.1 Frågeställningar

1. Hur har elevernas uppfattning och missuppfattningar kring bokstavssymboler ändrats sedan 70-talet?
2. Hur resonerar eleverna ett felaktigt svar med missuppfattning kring bokstavssymboler?

3 Bakgrund

3.1 Styrdokument

Skolverket (2022) tar upp att undervisningen i matematik ska eleverna ges förutsättningar att utveckla sin förmåga:

- Grundskolan

”*Välja och använda lämpliga matematiska metoder för att göra beräkningar och lösa rutinuppgifter*”.

Elever som går första året i gymnasiet är förväntad att ha matematiska kunskaper från grundskolan som hantering av ”algebraiska uttryck, formler och ekvationer i situationer som är relevant för eleven” och ”Innebörden av variabelbegreppet och dess användning i algebraiska uttryck, formler och ekvationer.” samt ”Metoder för ekvationslösning”.

- Gymnasiet

”*Förmågan att hantera procedurer och lösa uppgifter av standardkaraktär utan och med verktyg*”.

Under första året i gymnasiet ska eleverna ha kunskaper om ”hantering av former och algebraiska uttryck, inklusive att faktorisera och multiplicera uttryck”, när de arbetar inom algebra.

3.2 Tidigare forskning

År 1976 genomförde Küchemann en studie i England som undersökte elevers förståelse kring numeriska variabler. Studien genomförde på över 3000 elever i åldrarna 13 till 15 från 15 olika skolor med ett skriftligt test på 23 frågor. Testet innehåller ett brett spektrum av gymnasiealgebra aktiviteter, exempelvis att kunna hantera procedurer som ersätta, förenkla, och uppgifter som konstruktioner, tolkning och lösning av ekvationer. Küchemann analyserade elevernas svar och fick fram 6 kategorier som beskriver hur eleverna tolkar bokstavssymboler (Küchemann, 1978). De 6 kategorier kommer förklaras i kommande avsnitten.

Küchemanns studie gick sedan till en bok som heter *Children's Understanding of Mathematic: 11–16* (1981). Han kategoriserar elevernas svar i olika nivåer som han kallar *Level of Understanding*. Nivåerna gås igenom i teoretiskt ramverk (kapitel 4).

3.2.1 Bokstaven ges ett värde

"*This category applies to responses where the letter is assigned a numerical value from the outset*" (Küchemann, 1981; s.104).

Första avsnittet av Küchemanns kategorier kallar han *Letter Evaluated* (Küchemann, 1978). Uppgifter som är kategoriserad i detta avsnitt ska elever hitta ett specifikt värde för ett obekant tal, utan att behöva operera på det obekanta talet först. Eleverna har möjligheten att testa olika värden för bokstavssymbolen utan att behöva fundera på bokstaven som en obekant (Küchemann, 1981). Eleverna bemöter dessa uppgifter genom att använda *trial and error* metoden, som går ut på att eleverna testar olika tal för att få fram ett svar som fungerar (Çelik

& Günes, 2013). Exempelvis med ekvationen x – 6 = 27, eleverna ska lösa ut talet x och kan testa olika värden för att få fram rätta svaret. I tabell 1 uppvisar olika uppgifter från Küchemanns test och elevernas svar som ingår i avsnittet Bokstaven ges ett värde.

6(i) (Nivå 1)		11(i) Nivå 2)		11(ii) (Nivå 2)	
Vad kan du säga om *a* om a + 5 = 8		Vad kan du säga om *u* ifall u = v + 3 och v = 1		Vad kan du säga om *m* ifall m = 3n + 1 och n = 4	
a = 3	92%	u = 4	61%	m = 13	62%
		u = 2	14%	Andra värde	14%

Tabell 1 (Küchemann, 1981; s. 106). Uppgifter som tillhör avsnittet bokstaven som ges ett värde.

Fråga 6(i) är en uppgift som eleverna kan använda sig av *trial and error* metoden och antagligen är det p.g.a. metoden varför många har svarat rätt på frågan, samt att siffrorna har ett lågt värde vilket kräver inte många försök. Küchemann (1981) tar upp att uppgiftens syfte är att se ifall eleverna har förmågan att sätta *a* ensam i vänster led och siffrorna 8 och 5 på högerled (a = 8 – 5). I både uppgift 11(i) och 11(ii) blir de mer utmanade när det börjar involvera två obekanta tal, vilket gör det inte möjligt att förlita sig endast på *trial and error* metoden. Resultatet blev tydligt, färre elever kunde inte lösa uppgifterna när mer än en obekant dök upp, majoriteten svarade fortfarande korrekt. Det beror av att eleverna får veta värdet på en av bokstäverna (v = 1) och gör det möjligt att lösa uppgiften med aritmetik.

3.2.2 Bokstaven används inte

"*Here the children ignore the letter, or at best acknowledge its existence but without giving it a meaning*" (Küchemann, 1981; s.104).

I andra avsnittet av Küchemanns kategori kallar han det *Letter not Used*. Uppgifterna kan besvaras utan att veta värdet på bokstavssymbolerna. Çelik och Günes (2013) beskriver att eleverna ignorera eller inte tolka bokstäverna, men att de erkänner deras existens fortfarande.

5(i) (Nivå 1)		5(i) Nivå 2)		4(ii) (Nivå 2)	
Om a + b = 43 a + b + 2 = _____		Om n – 246 = 762, n – 247 = _____		Lägg till 4 på: n + 5	
45	88%	761	74%	n + 9	68%
		763 Andra värde	13% 8%	9	20%

Tabell 2 (Küchemann, 1981; s. 106). Uppgifter som tillhör avsnittet bokstaven används inte.

Frågorna 5(i) och 5(ii) är bra exempel från Küchemanns test som går att lösa utan att behöva veta vad bokstäverna har för värde och kan ignorera tillvaron av bokstavssymbolerna. Çelik och Günes (2013) förklarar utifrån Küchemanns frågor hur man besvarar 5(i) och 5(ii) med liknande stil. Genom att upptäcka att n – 247 går att skriva om till n – 246 – 1 kan man ersätta n – 246 med första svaret i första ekvationsuttrycket för att få ut 762 – 1 = 761. Både uppgift 5(i) och 5(ii) använder man liknande metod men antalet elever som svarade korrekt uppvisar en skillnad, från 5(i) har vi 97% som svarade rätt och 5(ii) har vi 74%, 23 procentenheter sjönk. Küchemann (1981) förklarar att anledningen av minskningen beror på att ekvationen blev mer utmanade för att talen har större värde och att operation var implicit och kontraintuitiv. Küchemann förklarar att elever ser att 247 är större än 246 och tenderar att tänka att addera 1 till 762 i stället för att subtrahera, vilket förklara varför 13 procent har svarat 763.

I uppgift 4(ii) följer samma koncept som man inte behöver veta vad bokstäverna har för värde och kan ignorera bokstaven n. Till exempel, i problemet "Lägg till 4 på n + 5", svarade 68 % av eleverna rätt (n + 9), men 20 % av eleverna gav det felaktiga svaret 9, vilket antydde att de ignorerade variabeln n (Lucariello, Tine och Ganley, 2013). Soylu och Sahin (2011) utförde en studie med liknande problem till elever (4x + 9x =?) och upptäckte att eleverna hade ignorerat bokstäverna för att svara rent numerisk, 40 procent gav 13 som svar i stället för 13x.

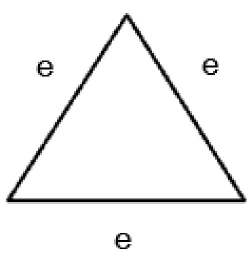
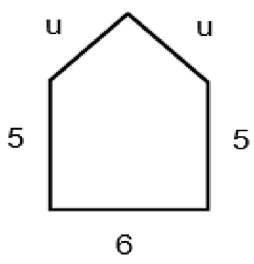
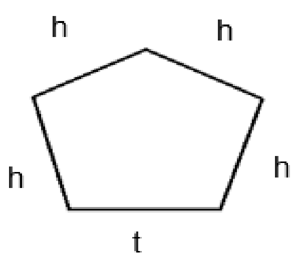
3.2.3 Bokstaven som ett objekt

"*The letter is regarded as a shorthand for an object or as an object in its own right.*" (Küchemann, 1981; s.104).

Tredje avsnittet kallar Küchemann *Letter used as an object*. Çelik och Günes (2013) beskriver detta avsnitt att man kan uppfatta bokstäverna som ett objekt, men det uppstår svårigheter när det representerar ett objekt i stället för antalet objekt. Tittar vi på uppgift 14 från Küchemanns test:

"*Blue pencils cost 5 pence each and red pencils cost 6 pence each. I buy some blue and some red pencils and altogether it costs me 90 pence. If b is the number of blue pencils bought, and if r is the number of red pencils bought, what can you write down about b or r?*" (Kuchemann, 1981; s.107).

De frekventa svaren på uppgiften var "*b + r = 90*" och "*6b + 10r = 90*", dessa svar indikerar att eleverna har ser bokstaven som ett objekt men inte som antalet objekt. Çelik och Günes (2013) förklarar om man ska lösa uppgift behöver man även ha förståelse inom bokstäver som specifika obekanta, vilket tas upp i nästa avsnitt **3.2.4**.

9(i)	9(ii)	9(iii)	13(i) (Nivå 1)	13(iv) (Nivå 2)
 O =	 O =	 O =	2a + 5a =	2a + 5b + a =
3e 94%	2u + 16 u + u + 16 64%	4h + t 4h + 1t 68%	7a 86%	3a + 5b 60%

Tabell 3 (Küchemann, 1981; s. 106–107). Uppgifter som tillhör avsnittet bokstaven som ett objekt.

Fråga 9(i), 9(ii) och 9(iii) beskriver Küchemann (1981) att bokstäverna kan beteckna figurernas sidor snarare än deras längd. Denna metod kan även användas i uppgift 13(i) och 13(iv), eleverna är tillfrågad att förenkla det algebraiska uttrycket. Küchemann (1981) beskriver att uppgifterna går att lösa genom att föreställa bokstäverna som ett objekt, exempelvis att bokstaven *a* står för ananas och *b* för blodapelsin. Tillämpar man detta tankesätt i uppgift 13(i) går vi från 2a + 5a till 2 ananas + 5 ananas = 7 ananas, och 13(iv) får man ut 2 ananas + 5 blodapelsiner + 1 ananas. Det här tankesättet gör det lättare att hantera föremålen än bokstäverna som specifika obekanta, men det skapar svårigheter senare för eleverna att lösa uppgifter, exempelvis 2a – b har man 2 ananas och sedan ta bort en blodapelsin, sammanhanget ger ingen mening. Liknande svårighet förekommer med fråga 13(v) ((a – b) + a), och förstärks när en parentes läggs till som avsiktligt drar uppmärksamhet på ett uttryck a – b, som i sig själv inte kan förenklas. Küchemann (1981) förklarar att användandet av bokstaven som ett objekt implicerar att bokstavens mening går från abstrakt till mer konkret. Använda konceptet av *bokstav som ett objekt* gjorde det möjligt för eleverna att kunna lösa uppgifter som de tidigare hade svårigheter med när de använda bokstavens som en avsedd betydelse. Küchemann tar upp att det uppstår problem med reducering av förståelsen av bokstaven vid olämpliga tillfällen och händer vanligt när frågan är kopplad till föremål, exempelvis frukter, pennor osv.

Persson (2010) samt Lucariello, Tine och Ganley (2013) liknande till Küchemanns studie tar de upp elevers svårigheter angående bokstavssymboler. Elevers uppvisar missuppfattningar när de använder uttryck som en etikett för ett objekt, de visar ett exempel som kallas *Student and Professors* problemet, som går följande: ” *Write an equation, using the variables S and P to represent the following statement. ‘At this university there are six times as many students as professors.’ Use S for the number of students and P for the number of professors*” (Lucariello, Tine och Ganley, 2013; s. 31). Ett vanligt misstag som elever gör när de drar slutsatsen att S är en etikett (studenter) för ett objekt, i stället för en variabel (antalet studenter) som leder till att eleverna ger ut ett fel svar som 6S = P.

Macgregor och Stacey (1997) framställde ett experiment på tre skolor (Kallar dem skola A-C) för elever som går på årkurs 8 – 9 om deras uppfattning och förståelse om bokstavssymboler. Skola C demonstrerade att ha starka svårigheter med bokstavssymboler som ett objekt, både årkurs 8 och 9. Efter de hade pratat med lärarna på skolan upptäckte dem att bokstäverna som presenterades under lektionen representerade objekt, exempelvis b står för banan och 3b för 3 bananer. Genom att observerat skolan mer upptäckte Macgregor och Staceys (1997) att lärarna i skola C är orsaken till att eleverna uppvisar missuppfattning till bokstavssymboler, lärarna har inte tydliggjort bokstavens kontextuella sammanhang. Eleverna visade till och med att göra ett samband mellan bokstavssymbolen och alfabetiska ordningen, bokstaven skulle ersättas med ett tal beroende på vart den ligger i alfabetiska ordningen (exempelvis D = 4, h = 8). När lärarna blev uppmärksamma om fallet var det lätt att korrigera problemet, men missuppfattning angående bokstaven som förkortade ord visade sig mer utmanade att korrigera och stannade kvar som en svårighet för eleverna (Macgregor & Stacey, 1997).

3.2.4 Bokstaven som specifik obekant

“Children regard a letter as a specific but unknown number, and can operate upon it directly.” (Küchemann, 1981; s.104).

Fjärde avsnittet kallar Küchemann *Letter used as a specifik unknown*. Çelik, Günes (2013) och Küchemanns (1981) lyfter fram i tidigare avsnitten att eleverna har kunnat undkommit att se bokstäver som specifika obekanta, men nu är det nödvändigt att ha kunskapen för att kunna besvara uppgifter som 4(v) (tabell 4): Multiplicera n + 5 med 4. För att lösa uppgiften behöver eleverna multiplicera både n och 5 med 4, men majoriteten av eleverna gjorde inte det.

4(iii) (Nivå 3)	4(v) (Nivå 4)	5(iii) (Nivå 4)
Lägg till 4 på 3n	Multiplicera 4 med n + 5	Om e + f = 8 e + f + g =?
3n + 4 36%	4n + 20 eller 4(n + 5) 17%	8 + g 41%
7n 31% 7 16%	4n + 5 or 4 x n + 5 19% n + 20 31% 20 15%	15 2% 12 26% 8g 3% 9 6%

Tabell 4 (Küchemann, 1981; s. 106, s. 108). Uppgifter som tillhör avsnittet bokstaven som specifik obekant.

9(iv) (Nivå 3)	13(v) (Nivå 4)	22 (Nivå 4)
 Delar av figuren är inte ritad. Det finns n antal sidor sammanlagt, alla med längd 2.	Förkorta följande, om det är möjligt. (a – b) + b	Blåa pennor kostar 5 kr styck och röda pennor kostar 6 kr styck. Jag köper några blåa och några röda pennor och det tillsammans kostar mig 90 kr. Om *b* är antalet köpta blåa pennor, och *r* är antalet köpta röda pennor, vad kan du skriva om *b* och *r*?
2n 38% n2	a 23%	5b + 6r = 90 10% Två korrekta par 1% (6, 10), (12, 5), (18, 0) & (0, 15)
		b + r = 90 17% 6b + 10r = 90 6% eller 12b + 5r = 90

Tabell 5 (Küchemann, 1981; s. 107). Uppgifter som tillhör avsnittet bokstaven som specifik obekant.

Uppgift 4(iii) visar att eleverna har svårigheter att lösa frågan, vilket kan se oväntad när allt som behövs är att addera ekvation med 4. Det kan bero på att eleverna känner sig otillfredsställande att uppgiften inte är klar. De elever som gav svar 7n eller 7 visar att de har svårigheter att hantera n som obekant, genom att inte kombinera elementen eller ignorerat bokstaven. I uppgift 4(v) uppvisade eleverna ha större svårigheter än tidigare uppgift med endast 17 procent klarade av frågan, vilket beror av ökad komplexitet. Det viktigast med uppgiften är att 4 behövs multiplicera på hela uttrycket n + 5, men majoriteten av eleverna multiplicerar 4 enbart med ett av elementen (Küchemann, 1981). Küchemann beskriver att elever som ger svaret 4n + 5 eller n + 20 kan bero på bristande kunskaper att hantera parenteser, men han tar även upp möjligheten att eleverna som skrev 4n + 5 har glömt att skriva med parentesen.

Uppgift 5(iii) är mer utmanade än tidigare uppgift 5(i) och 5(ii), vilket inga tal finns med i andra uttrycket (tabell 4). Eleverna har inte behov att veta värden på bokstäverna men de behöver ha förmågan att arbete med obekanta bokstaven g, och ha kunskapen att använda sig av en specifik obekant. Uppgiften följer liknande lösnings metod som 5(i), men i stället för talet 2 som dyker upp i andra ekvationsuttrycket har vi bokstaven g och elever som inte kan hantera specifika obekanta försöker hitta ett värde på g. Det vanligaste som händer är att eleverna se g som 4 från koppling av första och andra ekvationsuttryck, $e + f = 8 \Leftrightarrow 4 + 4 = 8$ och $e + f + g \Rightarrow 4 + 4 + 4 = 12$ eller sätta g som 7 för att g är sjunde siffran i alfabetisk ordning [En av eleverna intervjuat har bekräftat detta] (Küchemann, 1981).

Uppgift 22 visade sig vara en komplicerad uppgift för eleverna, endast 10 procent som klarade av frågan. Eleverna behöver framställa ett algebraiskt uttryck som baseras från texten, de behöver ha goda kunskaper att hantera bokstäver som specifika obekanta för att lösa uppgiften och vissa elever som inte klarar av att lösa uppgiften kom fram till intressanta algebraiska uttryck. Küchemann beskriver att det vanligaste felaktiga svar elever kom fram var $b + r = 90$ som visar att eleverna har grundförståelsen av bokstävernas användande. Några andra elever svarade $6b + 10r = 90$ eller $12b + 5r = 90$ som uppvisar att de förstår att det finns ett korrekt värde för b och r, men i stället för att formulera att r och b är tal ser de b och r som ett objekt som står för röda och blåa pennor.

3.2.5 Bokstaven som generellt tal

"The letter is seen as representing, or at least as being able to take, several values rather than just one." (Küchemann, 1981; s.104).

I avsnitt fem kommer vi till vad Küchemann kallar *Letter used as a generalized number*. Till skillnad från förra avsnitt kan bokstaven anta flera olika värden och inte ett specifikt värde. Exempelvis uppgift 16 som visas på tabell 6 nedanför behöver man se bokstavssymbolerna som generellt tal, och på uppgiften är ett passande svar $c < 5$ (Çelik och Güneş, 2013).

16 (Nivå 3)		**18(ii) (Nivå 4)**	
Vad kan du säga om c ifall c + d = 10 och c är mindre än d?		L + M + N = L + P + N är Alltid Ibland Aldrig (När?)	
c <5 c = 1, 2, 3, 4 (systematisk lista) c = 10 – d	11% 19% 4%	Ibland, när M = P	25%
Osystematisk lista Endast ett värde (vanligt c = 4)	1% 39%	Ibland eller M och P är given ett specifikt värde Aldrig	14% 51%

Tabell 6 (Küchemann, 1981; s. 109). Uppgifter som tillhör avsnittet bokstaven som generellt tal.

Uppgifterna som tas upp i tabell 6 var mer utmanade för eleverna än de flesta av de specifika obekanta uppgifterna, och Küchemann tro att det beror på att eleverna förstå sig på specifika obekanta innan generellt tal. Uppgifterna i tabell 6 kräver från eleverna att se bokstäverna som generellt tal, fråga 16 testa eleverna om de kan uppfatta att det finns fler än ett svar för c och inte ett specifikt svar, även hur man kan uttryck det. Det syns i uppgiften att många elever (39 procent) vill anta att bokstäverna är bestämda och att bokstavssymbolerna ska ha ett specifikt värde ($c = 4$). Enligt Küchemann är det troligt att eleverna skulle gett fler än ett svar om man hade frågat efter det.

Christou och Vosniadou (2012) skriver trots att elever kan begripa konceptet av att ett tal kan agera som ett generellt tal är det flera elever som har svårigheter att lösa dessa uppgifter. Christou och Vosniadou påstår att det beror på att eleverna fastnar i vad de kallar för *natural number bias*, vilket betyder att elever tenderar att se bokstavssymboler som bara naturliga tal.

Christou och Vosniadous fann även i deras studie att eleverna som besvarade med enbart naturliga svar kunde godkänna ett svar med icke-naturliga tal, som reella- eller negativa tal efter att ha föreslagit det till eleverna. De tror att det beror på att elever fastnar i deras ursprungliga uppfattning av bokstavssymboler, de naturliga talen. När eleverna kommer till användning av bokstavssymboler återanvänder till de ursprungliga uppfattning och svarar med naturliga tal.

3.2.6 Bokstaven som en variabel

"The letter is seen as representing a range of unspecified values, and a systematic relationship is seen to exist between two such sets values." (Küchemann, 1981; s.104).

I sista avsnittet av Küchemanns kategorier kallar han för *Letter used as a variable*. Çelik och Güneş (2013) förklarar att det innebär bokstavssymboler kan ses som variabler och det betyder att bokstäver behöver ibland ses som en mängd olika ospecificerade tal, där det existerar en systematisk relation mellan de två tal.

3 (Nivå 4)	
Vilket är störst, 2n eller n + 2? Förklara.	
Korrekt, villkorligt svar (tex. 2n, när > 2)	6%
2n n + 2 eller ”lika stora”	71% 16%

Tabell 7 (Küchemann, 1981; s. 111). Uppgifter som tillhör avsnittet bokstaven som en variabel.

Syftet med uppgift 3 (tabell 7) var att se ifall eleverna kunde avgöra vilket av uttrycken (*2n* och *n + 2*) som var störst beroende av bokstaven n har för värde. Hela 71 procent av eleverna gav svaret *2n* var störst, deras motivering på svaret var att det ingick en multiplikation i uttrycket (Küchemann, 1981). Küchemann (1981) förklarar utifrån elevernas svar indikerades att ingen elev försökte lösa frågan med hjälp av *Trail and error* metoden, särskilt ingen av eleverna som svarade korrekt på uppgiften. Küchemann förklarar att de som gav ett korrekt svar på uppgiften kunde hitta ett förhållande mellan uttrycken (*2n* och *n + 2*) som han kallar *Second-order Relationship*.

> *The relevance of such a relationship can best be explained by seeing what happens to 2n and n + 2 when specific values are chosen for n. Consider, for example, the values n=4 and n=7 which give the pairs (8, 6) and (14, 9) for (2n, n + 2). Here the obvious (first order) relationship, which holds for each pair in turn and which is prompted by the original question, is that 2n > n + 2. However, it is also possible to establish a second-order relationship between the pairs, which can be expressed as 'as n increases the difference between 2n and n + 2 increases (14 - 9>8 - 6)' or 'the increase in 2n is greater than the increase in n + 2 (14 - 8>9 - 6)'. The significance of this relationship is that it opens up the possibility that for some smaller value of n there may be no difference between 2n and n + 2 (when n=2), or the difference may even be reversed (when n<2)* (Küchemann, 1981; 112).

Küchemann (1981) tar upp att eleverna som klarar av uppgiften gör det inte genom att följa alla dessa steg, men de kan i stället se relationen mellan uttrycken (*2n* och *n + 2*). Resterande elever som inte kan se relationen mellan uttrycken letar till sig ett snabbare och enklare svar (Küchemann, 1981).

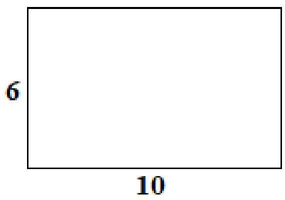
4 Teoretiskt ramverk

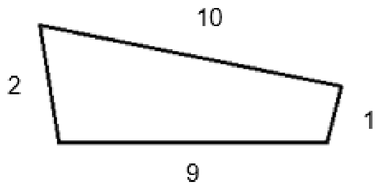
För att besvara frågeställningarna för denna studie kommer Küchemanns arbete om *Level of understanding* användas för att analysera datan.

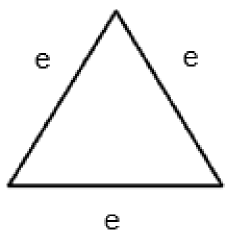
Küchemann tog 30 utav 54 delfrågor från sitt test och fördelat in dem mellan fyra olika nivåer som representerar nivåer av förståelse. Dessa nivåer avgör var eleverna behöver ligga på för att kunna lösa uppgifterna som tillhör varje grupp. Küchemann har även nivå 0, för de elever som inte klarade av nivå 1.

4.1 Nivå 1

Uppgifterna som tillhör nivå 1 är antigen numeriska frågor (Uppgift 8 och 7(ii)), eller mer av en simpel struktur och kan lösas med hjälp av bokstaven som objekt (Uppgift 9(i) och 13(i)), genom att ge bokstaven ett värde (Uppgift 6(i)) eller att ignorera bokstaven helt (5(i)).

<table>
<tr><th colspan="2">Nivå 1</th><th></th><th></th><th></th></tr>
<tr><td>Uppgift</td><td></td><td>13 år</td><td>14 år</td><td>15 år</td></tr>
<tr><td>5(i)</td><td>a + b = 43,
a + b + 2 =</td><td>92%</td><td>97%</td><td>95%</td></tr>
<tr><td>6(i)</td><td>a + 5 = 8
a =</td><td>86%</td><td>92%</td><td>93%</td></tr>
<tr><td>7(ii)</td><td>

A =</td><td>79%</td><td>89%</td><td>90%</td></tr>
<tr><td>8</td><td>

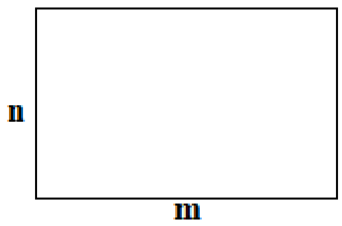
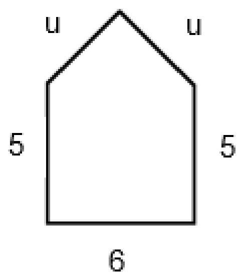
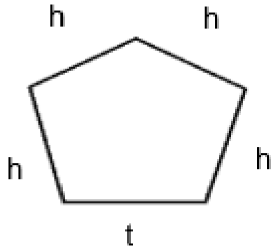
O =</td><td>95%</td><td>97%</td><td>96%</td></tr>
<tr><td>9(i)</td><td>

O =</td><td>91%</td><td>94%</td><td>93%</td></tr>
<tr><td>13(i)</td><td>2a + 5a =</td><td>77%</td><td>86%</td><td>87%</td></tr>
</table>

Tabell 8 (Küchemann, 1981; s. 113). Uppgifter som tillhör kategorin nivå 1 från Küchemanns frågor.

4.2 Nivå 2

Den märkbara skillnaden mellan uppgifterna från nivå 1 till nivå 2 är dess ökad komplexitet, där eleverna behöver fortfarande kunna hantera ge bokstäverna ett värde (11(i) och 11(ii)) eller användas som ett objekt (9(ii), 7(iii), 9(iii), 13(iv)). Eleverna på denna nivå kan inte hantera bokstaven som specifika obekant, generellt tal eller variabler än. Det kan argumenteras att framsteg som görs på denna nivå sker på grund av att eleverna har bättre förståelse för algebraiska notationer. De elever som klarar av nivå 2 uppgifter uppvisar framför allt bättre prestation på testet som helhet.
Förbättringen av testresultatet för eleverna på nivå 2 kan också antyda på en villighet att acceptera svar som är i en viss mån ”ofullständiga” (gås igenom mer på nivå 3), det här kan beskrivas som *acceptance of lack of closure*. Till exempel kan de elever som svarade 8ab från en förkortning av 3a +5b + a (20 procent som svarade frågan, ungefär tre fjärdedelar var på nivå 1) troligen vetat svaret blir 3a + 5b men föredrog 8ab för att det ser komplett ut. Ett liknande argument gäller uppgift 11(i), de flesta elever på nivå 1 svarade blankt eller 2 i stället för 4 som kan bero av tvetydigheten i u = v + 3 (det involverar <u>två</u> obekanta tal). Det här fick eleverna få avskräck och skippade frågan eller uppfattade ekvationen u och v tillsammans bli 3, som minskar tvetydigheten men leder till ett svar som 2.

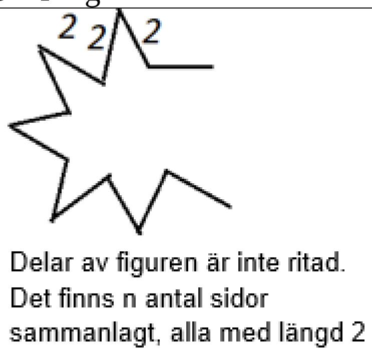
Nivå 2				
Uppgift		13 år	14 år	15 år
7(iii)	 A =	54%	68%	76%
9(ii)	 O =	58%	68%	73%
9(iii)	 O =	54%	64%	67%

11(i)	u = v + 3, v = 1 u =	95%	97%	96%
11(ii)	m = 3n + 1, n = 4 m =	44%	62%	67%
13(iv)	2a + 5b + a =	40%	60%	66%
15(i)	Detta var ett numeriskt objekt som gällde diagonaler av polygoner.	63%	75%	72%

Tabell 9 (Küchemann, 1981; s. 114). Uppgifter som tillhör kategorin nivå 2 från Küchemanns frågor.

4.3 Nivå 3

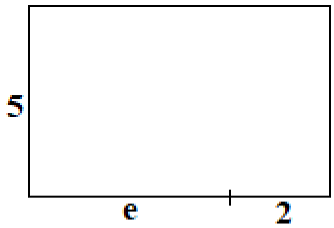
Elevernas stora framsteg på denna nivå är att de kan hantera bokstäver som specifika obekanta, men endast när strukturen för uppgiften är tydlig och enkel. Eleverna kan tolka svar som exempelvis 8 + g, 3n + 4 eller O = 2n som meningsfulla, även om bokstäver står för tal och inte objekt.

Nivå 3				
Uppgift		13 år	14 år	15 år
4(iii)	Addera 4 på 3n	22%	36%	41%
5(iii)	e + f = 8, e + f + g =	25%	41%	50%
9(iv)	 O =	24%	38%	41%
13(ii)	2a + 5b =	29%	45%	51%
13(viii)	3a – b + a =	27%	47%	56%
14	r = s + t, r + s + t = 30 r =	30%	41%	39%
15(ii)	En figur med k sidor har ... diagonaler (förlängning av 15(i))	34%	52%	54%
16	c + d = 10, c <d c =	21%	30%	35%

Tabell 10 (Küchemann, 1981; s. 115). Uppgifter som tillhör kategorin nivå 3 från Küchemanns frågor.

4.4 Nivå 4

För nivå 4 förväntas det av eleverna att hantera uppgifter som specifika obekanta objekt och komplexa strukturer (exempelvis 13(v), 4(v) och 7(iv)). Eleverna ska ha förmågan att klara av de svårare uppgifter (20, 22 och 17(i)), åtminstone de uppgifter som kräver att bokstäverna som betraktas som specifika obekanta, men som testar dem att se om de behandlar dem som objekt (ex. uppgift 22, 20 och 17). I uppgift 21 är det viktigt att förstå att x kan stå för ett uttryck som 5x, och resulterar till övergång division med 5 (inte multiplicera med 5) på de obekanta värdena eller värdet av x. Denna omvandling i användandet av x, och kravet att anpassa de inblandade operationerna är likt de synkronisering som behövs att använda bokstav som en variabel (Uppgift 3 testar denna förmåga).

Nivå 4				
Uppgift		13 år	14 år	15 år
3	Vilken är störst, *2n* eller *n + 2*? Förklara	4%	6%	10%
4(v)	Multiplicera n + 5 med 4	8%	17%	25%
7(iv)	 A =	7%	12%	16%
13(v)	(a – b) + b =	15%	23%	32%
17	(Fråga om totallön, W, efter timmars övertid, givet grundlönen och övertidstaxan.)	2%	5%	8%
18(ii)	L + M + N = L + P + N, Alltid, Aldrig, Ibland (när)	11%	25%	27%
20	Vad står 4x + 3b för (om kakor kostar c kr styck och bullar b kr styck, och om 4 kakor köps, etc)?	14%	22%	30%
21	Om $(x+1)^3 + x = 349$ när x = 6, vilket värdet på x gör $(5x+1)^3 + 5x = 349$ sann?	4%	12%	16%
22	Blå pennor och röda pennor ...	2%	11%	13%

Tabell 11 (Küchemann, 1981; s. 115). Uppgifter som tillhör kategorin nivå 4 från Küchemanns frågor.

5 Metod

5.1 Datainsamlingsmetod

I syftet att studera elevers förståelse om bokstavssymboler valdes testfrågor som kvantitativ metod och intervju som kvalitativ metod för datainsamling. Datainsamlingen kommer ifrån en gymnasieskola med varierande olika program (Natur-, Samhälle-, El-, Bygg- och Ford-programmet) för årkurs 1 elever. Totala antal elever som var delaktig i arbetet var 59st. Arbetet fokuserar mer på den kvantitativa- över den kvalitativa studien.

5.1.1 Kvantitativ studien

Den kvantitativ studie består av ett algebratest, som gavs ut till gymnasieelever för att mäta deras förståelse om bokstavssymbolers användning. Intresserat var att jämföra Küchemanns resultat med vårt resultat, för det utformade vi provet utifrån Küchemanns prov som användes i hans studie. Algebratestet innehåller 23st frågor (59st delfrågor) som testar elevernas förståelse om bokstavssymboler, som att förstå procedurer att ersätta och förenkla eller uppgifter som kräver konstruktion, tolkning och lösning av ekvationer. (Testet i bilaga 4)

5.1.2 Kvalitativ studien

Den kvalitativ studie består av intervjuer med grupp av elever från tre olika programlinjer (Natur, Samhälles och Bygg) från skolan vi genomförde den kvantitativa studien. Intervjun genomfördes med elever som gjorde testet för att höra deras resonemang för de mest vanligaste felaktigt svar och förstå vad deras missuppfattningar ligger. Intervjuerna följde efter en semistrukturerad intervju, där eleverna fick en fråga och kunde diskutera mellan varandra, för att skapa en bekväm miljö. Intervjun följdes efter en intervjuguide (finns på bilaga 1), och varje intervju var mellan 10-20min lång. Intervjuerna spelades in genom en telefon, sedan överfördes till min dator för transkribering genom Word.

5.2 Pilotintervju

Innan intervjuerna genomfördes testades frågorna med en lärarstudent, Agnes Wallgren och en bekant. Syftet var att se hur frågorna kunde uppfattas, tolkas och möjligen omformuleras för att förbättra dem. Dalen (2015) rekommenderar att man genomför en pilotintervju, för delvis att kontrollera att den tekniska utrustningen fungerar och för att se att frågorna är rätt formulerade, även att kunna få feedback på sitt beteende. Under varje intervju upptäckte jag att det alltid fanns minst en sak som kunde justeras och förbättra inför nästa. För mig var min betoning i vissa frågor, kunde varit mer tydligare med mina ord och fumlade ibland med orden när jag ställde frågorna.

5.3 Intervjuguide

Intervjufrågorna är anpassad för semistrukturerad karaktär där frågorna i förväg hade sammanställts men det lämnade utrymme för respondenterna att utveckla sina svar (Dalen, 2015). Däremot är det viktigt att vara uppmärksam att frågornas ordning kan påverka respondentens svar (Denscombe, 2016). Dalen (2015) tar upp att man ska sätta fokus på intervjuguide att den ska vara uppbyggt med konkreta tema att frågorna ger svar på studiens problemformulering, de ska vara relevanta för frågeställningarna. Alla intervjuer genomfördes i grupp av 2–3 elever på deras skola och spelades in.

Inför intervjun konstruerades en intervjuguide med de teman som skulle användas under intervjun, de fanns för att påminna informanterna deras rättighet kring intervjun, syfte med arbetet, hur materialet kommer användas och att det kommer vara anonymt. Bryman och Nilsson (2011) beskriver att det skapar informanterna en trovärdig anledning att delta i studien.

Intervjun sattes i gång med bakgrundsfrågor för att skapa en bekväm miljö för deltagarna. Dalen (2015) berättar att man ska försöka forma en tillitsfull miljö med inledningsfrågorna för att deltagaren ska känna en bekväm intervjusituation. Intervjuguiden finns i bilaga 2.

5.4 Urval

Studien började med att skicka ut mejl med förfrågan att genomföra algebratestet med elever ut till olika gymnasie- och högstadieskolor i Göteborg. Majoriteten av skolorna tackade nej p.g.a. brist av tid med kommande slutprov och nationella prov i matematiken. En skola svarade tillbaka och lät oss genomföra algebratestet, skolan trevlig nog att låna ut fem olika klasser från fem olika program att genomföra testet (Natur-, Samhälle, Bygg-, Fordon- och Elprogrammet).
Det ursprungliga urvalet var elever för årkurs 9 i högstadiet eller årkurs 1 på gymnasiet, där åldrarna för eleverna stämde överens med åldrarna på Küchemanns studie.
Urvalet av elever som intervjuades gjordes genom att fråga eleverna under testet, och de som ville delta skrev ned sin mailadress på sitt test för senare ta kontakt med dem. Idén grundade sig i förhoppningen att få nya insikter att höra vad eleverna tänker i deras förståelse om bokstavssymboler och diskutera frågor från testet.

5.5 Genomförande

Den kvantitativa undersökningen genomfördes tillsammans med min kurskamrat Agnes Wallgren. Datainsamlingen började med skapandet av testet för att kunna jämföra vår data med Küchemanns. För att få testet likt originalet tog vi kontakt med Küchemann via mejl och frågade om vi fick tillgång till testfrågorna och godkännandet att använda dem för vårt examensarbete. Den 11/4–2021 fick vi mejl av Küchemann med godkännandet och PDF-fil med frågorna (Se bilaga 2). Testet vi fick var på engelska, vilket vi översatte till svenska. Vi skrev ut till flera olika skolor att få låna en eller flera klasser för en lektion av årkurs 1 elever att vara med på vår studie (se bilaga 3).

Innan vi gav ut testet till eleverna, introducerade vi oss och förklarade varför vi är här och syftet med testet. Eleverna fick ca 1 timma på sig att svara som många frågor de kunde, och de elever som ville bli intervjuad av mig skulle skriva ned deras mejl på pappret. Vi gick till skolan på två olika dagar för fem olika klasser, årkurs 1. När vi hade all datainsamling förde vi över allt till Excel dokument för att färg koda de svar som gavs under testet för att sedan analyseras.

Tog kontakt med eleverna som gav deras mejl under testet för tid och datum för att träffas. Intervjuerna höll max 20min, dels för jag ville inte ta mycket av deras tid när de har ett slutprov och nationellt prov som var på väg. Andra skälet var att datainsamlingen av intervjun inte skulle bli för stort och ta för mycket tid från mig som det kvantitativa testet gjorde.

5.6 Forskningsetik

Deltagarna från intervjun fick frågan om de ville medverka i studien både i klassrummet och mejlet. Studiens syfte och bakgrund förklarades i klassrummet enkelt, men mer tydligare i mejlet. Deltagarna fick information om deras rättigheter som medverkande i arbetet i mejlet, men även vid inledningen av intervjun som visas i bilaga 1. Vetenskapsrådet (2002) nämner upp fyra punkter som upplyser hur etiskt arbete ska utöva: informations-, samtyckes-, konfidentialitets- och nyttjande-kravet. Dessa fyra krav förekommer för att bevara respondenten som är valde att vara en medverkan i studien.

Informationskravet innebär att forskaren har en skyldighet att informera deltagaren i en undersökning deras roll i studien och vad de ger sig in på. Både i klassrummet och mejlet får eleverna veta om studiens syfte och vad jag vill få ut från testet samt intervjun.

Samtyckeskravet innebär att deltagarna själva har rätt att göra beslut över sin medverkan i studien. Det implicerar att forskaren ska förse sig med deltagarens godkännande av forskningen. Både i klassrummet och mejlen informeras till eleverna att deras delaktighet var frivillig och att de kan avbryta sin medverkan när de vill.

Konfidentialitetskravet implicerar att uppgifter insamlat från alla deltagare i en undersökning ska hanteras med konfidentialitet, ett sätt som obehöriga inte kan ta del av informationen. Både i klassrummet och mejlet upplyser jag till eleverna att deras medverkan kommer vara helt anonyma.

Nyttjandekravet innebär att uppgifter som deltagaren var delaktig ska få det underrättat att informationen kommer endast användas till studien. Det implicerar att den insamlade data får inte användas till något annat än syftet av studien, exempelvis kommersiellt bruk. Både i klassrummet och mejlet får eleverna veta att information kommer endast ämnas för studien. Information om algebratestet är endast jag och Agnes Wallgren medveten om, sedan information om de elever som var delaktig i intervju är endast jag som har informationen.

5.7 Trovärdighet

I grunden av ett trovärdigt arbete är att få studien mäta det den är avsett att mäta och kunna få liknande resultat om man återskapar det. För att förklarar studiens tillförlitlighet används *validitet* och *reliabilitet*.

5.7.1 Validitet & reliabilitet

Reliabilitet beskriver tillförlitlighet och anger hur exakt en mätning gjorts, har mätningen en hög reliabilitet blir resultatet samma vid upprepande tillfällen. För ett sätt att öka reliabilitet i datainsamlingen hos algebratestet har alla klasser fått identisk information med samma hjälpmedel, och de resultat som indikerar av att fusk (härma av en väns papper) togs bort från data. Bryman och Nilsson (2011) tar upp tre viktiga faktorer för att bestämma om en mätning är reliabelt: *stabilitet, intern reliabilitet* och *interbedömarreliabilitet*.

Stabilitet ska testet användas två gånger på samma individer men på två olika tillfällen, för kunna få en hög korrelation mellan de två resultaten. Algebratestet genomfördes endast en gång vilket gör det svårt att säga om stabilitet (Bryman och Nilsson, 2011).

Intern reliabilitet handlar om hur väl de olika frågorna är relaterade till varandra. I testet kopplas alla frågor ihop med varandra till bokstavssymboler och hur individerna tolkar dem.

Interbedömarreliabilitet handlar om hur ett område hade bedömds om det gjordes av fler än en person. Den här metoden tar ut faktorn att en lösning inte bedöms subjektiv, när en person bedömer uppgifter finns den risk att en lösning bedöms en vis grad subjektiv som förstör konceptet av reliabilitet. Uppgifterna i denna studie är tagna från Küchemann (1981) studie, sedan jämförs våra resultat för att ge studien en högre trovärdighet. Utöver detta rättades uppgifterna av både mig och Agnes Wallgren, vi minskar risken att bedöma subjektiv.

Validitet beskriver om huruvida studien mäter det som den är avsett att mäta, menas mätningars relevans, trovärdighet i arbetet. Formuleringen av mina intervjufrågor ska inte få eleverna att känna sig utsatta eller ifrågasätta sin egen kunskap. Dalen (2015) tar upp några frågor som riktlinjer som man kan tänka efter när man ser över sina frågor. Är frågan tydlig? Är frågan ledande? Krävs det någon speciell kunskap eller information för att besvara frågan? Innehåller frågan något känslig information? Ger frågan någon möjlighet för individ att uttrycka sina egna uppfattningar? Dessa frågor fanns i bakgrunden för skapande av mina frågor inför intervjuerna.

5.8 Transkribering

Innan inspelningen började gav alla respondenter sitt godkännande att intervjun kommer spelas in och sedan transkriberas. Med hjälp av Word dokuments funktion ”Diktera” finns förmågan att kunna transkribera ljudfilen direkt till text format. Det finns även extra funktioner som att kunna få text formatet kopplat med tiden av ljudfilen och skilja åt vem som pratar genom att skriva: ”Talare 1” & ”Talare 2”. Det är viktigt att kolla igenom transkriberingen från Word för att Word missuppfattar vissa meningar annorlunda, exempelvis säger man 2n skriver Word det till 2 1. Dalen (2015) tar upp att transkribering ger forskaren möjligheter att bekanta sig med sin data.

5.9 Analys/bearbetning

Analyseringen av algebratestet gjordes tillsammans med Agnes Wallgren och började med att sortera eleverna efter den klass de går i. Sedan började vi med att skriva in de svar som eleverna gav i algebratestet i ett Exceldokument.
Varje uppgift var analyserad med fyra olika kategorier: Rätt svar, Fel svar, Vanligt fel och Diskvalificera. Rätt svar kategoriserar elever som besvara frågan korrekt, behövs ingen förklaring hur man kommer till svaret. Fel svar är de svar som har inte svarat korrekt, räknefel, inte förkortat talet eller har lämnat frågan blankt. Vanligt fel är felaktigt svar på specifika frågor som förekommer vanligt hos eleverna. Diskvalificera är de elever som visar starkt på fusk genom att härma en annan elev på pappret eller lämnat pappret tomt, dessa elever togs bort från studien för att hålla en trovärdig studie.
För att kunna särskilja mellan dessa olika kategorier skapades ett kodsystem, varje kategorier fick sin egen färg, exempelvis Rätt svar fick färgen grön och Vanligt fel fick färgen gul. Varje svar som elever skrev på testet delades in i kategorierna Rätt svar, Fel svar, Vanligt fel och Diskvalificera. När allt var organiserat i Excell började vi räkna ut hur många rätta svar som fanns på varje uppgift för att veta antalet procentenheten av korrekt svar för varje uppgift och även på vanligt fel.
Vi började sedan dela in elever i de olika nivåer av förståelse. Det här gjorde vi genom att kolla på vilka uppgifter och svar i Küchemanns (1981) studie som motsvarade den nivå (nivå 1 till 4), och tittade vad varje elev gav för svar på uppgifterna. Vi hade delat in eleverna i de

olika nivåerna baserat på hur många frågor eleverna klarade av respektive nivå. Efteråt kunde vi skapa en figur som visade andelen av elever som ligger på varje nivå för 1976 och en figur för idag, för att jämföra andelen elever på varje nivå. Till slut skapade jag fyra tabeller, en för varje nivå som visade andelen korrekta svar och de vanliga fel mellan 2022 och 1976.

Under intervjuprocesserna skrev jag ned mina forskningsfrågor på ett papper för att uppmärksamma mig på saker som informanterna säger som besvara frågorna eller sticker ut i jämförelse med de andra. De som stack ut jämförelse med resten av informanterna antecknades ned direkt för att inte glömma av eller missa dem senare i analysen. Efter insamlingen av data gjordes transkribering som beskrivs vid 5.10 Transkribering. När transkriberingen var klar var det att fixa ordning det som var användbart till arbetet, och ta bort det överflödiga. Det som var fokus var elevernas resonemang på uppgifter som visade missuppfattning av bokstavssymbolerna, för att få elevernas egna ord till vad elever visar missuppfattningar på.

6 Resultat

Resultatet presenteras i tre avsnitt, de första två avsnitt motsvarar första frågeställningen och tredje avsnitt motsvarar andra frågeställningen. Första avsnitt går igenom vår undersökning från datainsamlingen, andra avsnittet går igenom jämförelsen mellan 2022 och 1976. Tredje avsnitt går igenom intervjuerna med eleverna.

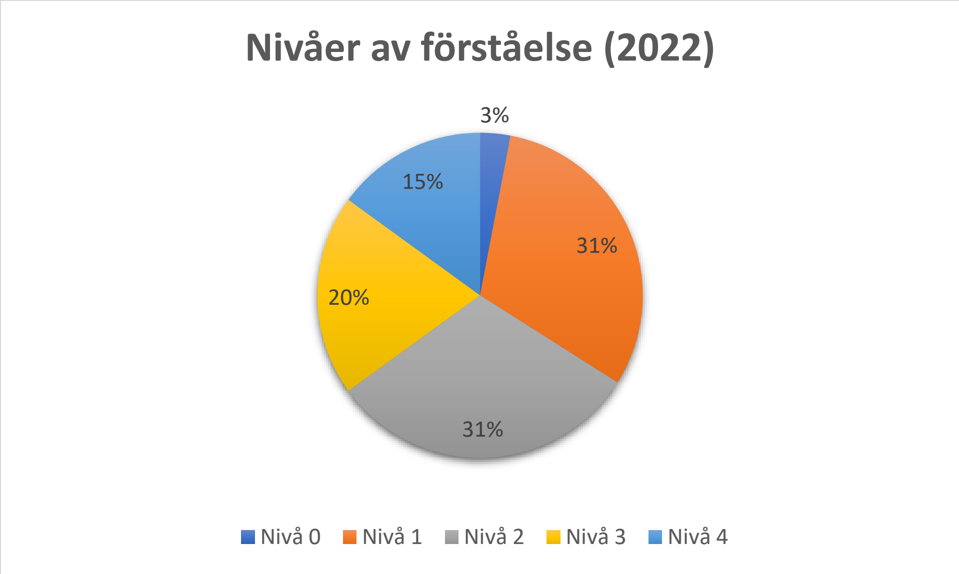
6.1 Våra resultat

Algebratestet består av 23 frågor, men totalt 54st deluppgifter. I tabell 12 visar hur många elever som klarade av varje delfråga, av 59st deltagare. I tabellen kan vi se att eleverna har svårigheter med nivå 3 och 4 uppgifter (exempelvis uppgift 3, 10, 19(ii) och 23), majoriteten av dem som ligger på nivå 4. Eleverna visade goda kunskaper till exempelvis uppgift 2, 6(i), 8, 9(i) och 11 som ligger på nivå 1 och 2. Cirkeldiagram (figur 1) nedanför visar vilken procenthalt av elever som tillhör varje nivå av förståelse från 1 – 4.

Fråga	
1(i)	49%
1(ii)	44%
1(iii)	48%
2(i)	93%
2(ii)	94%
3	2%
4(i)	73%
4(ii)	64%
4(iii)	56%
4(iv)	61%
4(v)	29%
4(vi)	63%
5(i)	88%
5(ii)	66%
5(iii)	53%
6(i)	92%
6(ii)	39%
7(i)	93%
7(ii)	93%
7(iii)	85%
7(iv)	27%
8	92%
9(i)	92%
9(ii)	71%
9(iii)	83%
9(iv)	36%
10(i)	12%
10(ii)	10%

Fråga	
11(i)	76%
11(ii)	85%
12	81%
13(i)	93%
13(ii)	58%
13(iii)	61%
13(iv)	85%
13(v)	34%
13(vi)	64%
13(vii)	51%
13(viii)	49%
13(ix)	25%
14	54%
15(i)	32%
15(ii)	46%
16	14%
17(i)	17%
17(ii)	48%
18(i)	68%
18(ii)	20%
19(i)	32%
19(ii)	9%
20	27%
21	15%
22	19%
23	2%

Tabell 12. Elevers procentenhet för algebratests frågor.

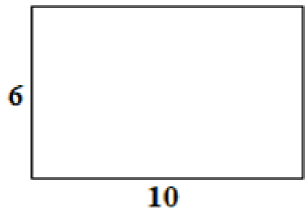
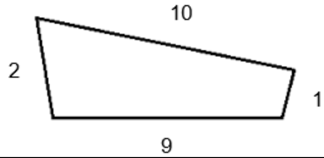
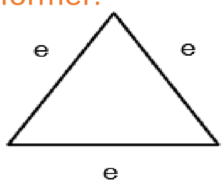


Figur 1. Diagram på andelen elever som tillhör de olika nivåer av förståelse.

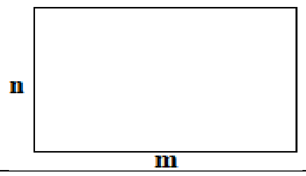
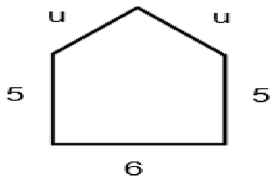
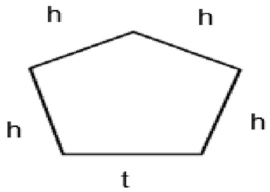
Cirkeldiagrammet visar de fyra nivåer av förståelse 1 – 4, och nivå 0 för de som inte klarade av nivå 1. En skola, fem klasser, 59st elever var delaktig för att få fram cirkeldiagrammet och kunna få en förståelse var elever ligger i nivåer av förståelse.
För nivå 4 var det 15% som visade starka kunskaper om bokstavssymboler, majoriteten av dessa elever kom från naturprogrammet och några från samhällsprogrammet.
Nivå 3 var det 20% som visade goda kunskaper, majoriteten var från samhällsprogrammet, några från elprogrammet och de resterande elever från naturprogrammet.
För nivå 2 var 31% som uppvisade god kunskap, majoriteten av elever var från Elprogrammet och blandat mellan resten av programmen.
För nivå 1 var det 31% som visade godkännande kunskaper, majoriteten kom från byggprogrammet och blandat från resten av programmen. Nivå 0 som visade ingen kunskap om bokstavssymboler var det 3%, dess elever kom från bygg- och fordonsprogrammet.

6.2 Sammanställning av algebratestet mellan 2022 & 1978

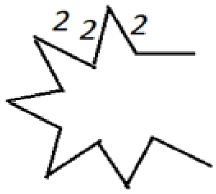
I detta avsnitt delas resultaten in i de olika nivåer av förståelse i tabell 13, 14, 15 och 16, vilket visar elevernas svar från 2022 och 1976. Tabellerna delas upp i nivåerna 1 - 4 för att tydligt se skillnaden på frågornas komplexitet samt att se skillnaden antalet rätta svar från eleverna. Tabellerna visar hur stor procent av eleverna från 2022 och 1976 som gav rätt svar och vanligt fel. Kolumnen med rätt svar finns korrekta svaret nedskriven och för kolumnen med vanligt fel finns de återkommande felaktigt svar. Den övriga procentenheten som står inte med i tabellen är övriga svar eller blankt. Alla procentenheter i tabellerna är avrundade till närmaste heltal.

	Algebratest Nivå 1				
Uppg. Nummer	**Rätt svar 2022 (15/16år)**	**Rätt svar 1976 (14år)**	**Vanligt fel 2022 (15/16år)**	**Vanligt fel 1976 (14år)**	**Uppgiften**
5(i)	45 88%	45 97%			Om a + b = 43 a + b + 2 = ____
6(i)	7a 92%	7a 92%			Vad kan du säga om a om a + 5 = 8
7(ii)	60 93%	60 89%			Vad är arean av: 
8	22 92%	22 97%			Räkna ut omkretsen av denna form: 
9(i)	3e 92%	3e 94%			Vad kan vi skriva för omkretsen för följande former: 
13(i)	7a 93%	7a 86%			2a + 5a = ____

Tabell 13. Nivå 1 frågorna och procentenheten av elever som svarade.

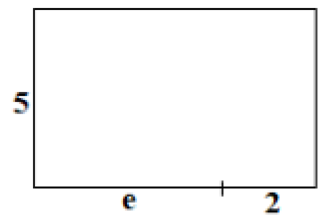
	Algebratest Nivå 2				
Uppg. Nummer	**Rätt svar 2022 (15/16år)**	**Rätt svar 1976 (14år)**	**Vanligt fel 2022 (15/16år)**	**Vanligt fel 1976 (14år)**	**Uppgiften**
4(ii)	n + 9 64%	n + 9 68%	9 5%	9 20%	Lägg till 4 på n + 5
5(ii)	761 66%	761 74%	763 14%	763 13%	Om n - 246 = 762, n-247=___
7(iii)	nm 85%	nm 68%			Vad är arean av: 
9(ii)	4h + t 71%	4h + t 68%			Vad kan vi skriva för omkretsen för följande former: 
9(iii)	2u + 16 83%	2u + 16 64%			Vad kan vi skriva för omkretsen för följande former: 
11(i)	u = 4 75%	u = 4 61%		u = 2 14%	Vad kan du säga om u ifall $u = v + 3$ och $v = 1$
11(ii)	m = 13 85%	m = 13 62%			Vad kan du säga om u ifall $m = 3n + 1$ och $n = 4$

Tabell 14. Nivå 2 frågorna och procentenheten av elever som svarade.

	Algebratest Nivå 3				
Uppg. Nummer	Rätt svar 2022 (15/16år)	Rätt svar 1976 (14år)	Vanligt fel 2022 (15/16år)	Vanligt fel 1976 (14år)	Uppgiften
4(iii)	3n + 4 56%	3n + 4 36%	7n 10%	7n 31% 7 16%	Lägg till 4 på 3n
5(iii)	8 + g 53%	8 + g 41%	12 12%	15 2% 12 26% 8g 3% 9 6%	Om e + f = 8, e + f + g= _____
9(iv)	2n 36%	2n 38% eller n2	Varierande siffror		Vad kan vi skriva för omkretsen för följande former:  Delar av figuren är inte ritad. Det finns n antal sidor sammanlagt, alla med längd 2
13(ii)	2a + 5b 58%	2a + 5b 45%	7ab 20%		Förkorta följande, om det är möjligt. 2a + 5b = _____
13(viii)	4a – b 49%	4a – b 47%			Förkorta följande, om det är möjligt. 3a – b + a = ______
14	r = 15 54%	r = 15 41% r = 30 – s – t 6%	r = 10 8%	r = 10 21%	Vad kan du säga om *r* ifall r = s + t och r + s + t = 30
15(ii)	k – 3 46%	k - 3 52%			I en form som denna kan man räkna ut antalet diagonaler genom att **ta bort 3** från antalet sidor. Så, en form med 5 sidor har 2 diagonaler: En form med k sidor har __________ diagonaler

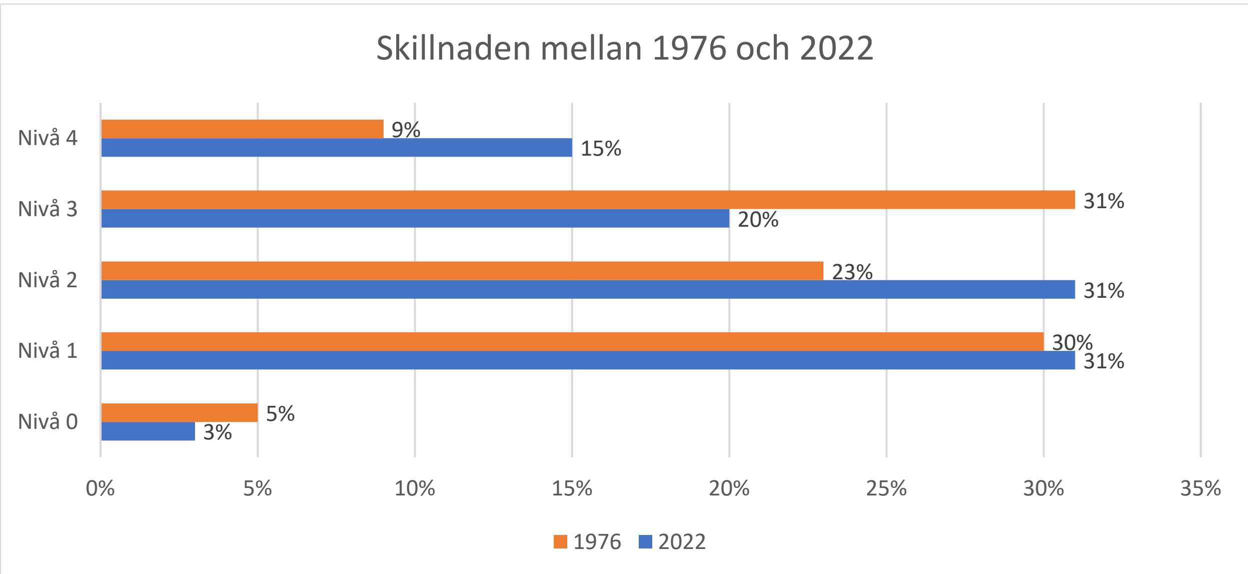
16	c <5 14%	c <5 11% c = 1, 2, 3, 4 (systematisk lista) 19% c = 10 – d 4%	Ett värde endast, vanligtvis, c=4 41%	Osystematisk lista 1% Ett värde endast, vanligtvis, c = 4 39%	Vad kan du säga om *c* ifall c + d = 10 och *c* är mindre än *d*

Tabell 15. Nivå 3 frågorna och procentenheten av elever som svarade.

	Algebratest Nivå 4				
Uppg. Nummer	**Rätt svar 2022 (15/16år)**	**Rätt svar 1976 (14år)**	**Vanligt fel 2022 (15/16år)**	**Vanligt fel 1976 (14år)**	**Uppgiften**
3	2n, när n>2 eller n + 5, när n<2 2%	2n, när n>2 eller n + 5, när n<2 6%	2n 68%	2n 71% n+2 eller ”samma” 16%	Vilken är störst, 2n eller n+2? Förklara.
4(v)	4(n + 5) 29% eller 4n + 20	4(n + 5) 17% eller 4n + 20	n+20 14% 4n + 5 27%	3n+5 eller 4n+5 19% n+20 31% 20 15%	4 multiplicerat med n kan skrivas som 4n. Multiplicera med 4 på dessa: n+5
7(iv)	5(e + 2) 27% eller 5e + 10	5(e + 2) 12% eller 5e + 10	5e+2 17% 10e 15%		 A = ___________
13(v)	a 34%	a 23%			Förkorta följande, om det är möjligt. (a – b) + b = _____
17(i)	L = 20 + 2t 17%	L = 20 + 2t 5%	L=20+t 10%		Maries grundlön är 20 kr per vecka. Hon får också 2 kr för varje timme övertid hon jobbar. Om t står för antalet timmar övertid som hon

					jobbar, och L står för den totala lönen (i kr). Skriv ner en ekvation som kopplar ihop L och t:
18(ii)	Ibland, 20% när M = P	Ibland, 25% När m = P	Aldrig 34%	Aldrig 51% Ibland, 14% eller M och P given ett specifikt värde	När är följande sant – *alltid, aldrig* eller *ibland*? Stryk under rätt svar: L+M+N=L+P+N Alltid, Aldrig, Ibland, när:
20	Prissumman 27%	Prissumman 22%	4 tårtor & 3 bullar 20%		Tårtor kostar t kr styck och bullar kostar b kr styck. Om jag köper 4 tårtor och 3 bullar, vad står 4t + 3b för?
22	5b + 6r = 90kr 19%	5b + 6r = 90kr 11%	b + r = 90 7%	b + r = 90 17% 6b + 10r =90 eller 12b + 5r = 90 6%	Blåa pennor kostar 5 kr styck och röda pennor kostar 6 kr styck. Jag köper några blåa och några röda pennor och det tillsammans kostar mig 90 kr. Om b är antalet köpta blåa pennor, och r är antalet köpta röda pennor, vad kan du skriva om b och r?

Tabell 16. Nivå 4 frågorna och procentenheten av elever som svarade.



Figur 2. Diagram på datainsamlingen mellan 2022 och 1976, av nivåer av förståelse.

På nivå 0 och 1 är skillnaden liten mellan 2022 och 1976 att det kan ignoreras. Skillnaden för nivå 2 till 4 är stor, för nivå 3 har det minskat andelen elever på vår studie som klarar av dess uppgifter (11 procentenhet). För nivå 2 och 4 har vi ökat andelen elever som ligger på den nivå (Nivå 4 ökat 6 procentenhet och nivå 2 ökat med 8 procentenhet).

De missuppfattningar som sker mellan 2022 och 1976 är likt varandra och de vanliga felaktiga svar som eleverna skriver

För nivå 1 uppgifterna kan vi se att 1976 och 2022 eleverna klarade av majoriteten av dessa frågor, och låg nära varandra i procentenhet. Exempelvis uppgift 6(i) kan vi se i tabell 13 att båda studierna var på 93% som gav korrekt svar. De elever som fick fel på nivå 1 var slarvfel eller lämnat frågan blankt. Det uppvisade ingen indikation att eleverna har missuppfattning för uppgifterna. Nivå 1 uppgifter kräver inte mycket av förståelse av bokstavssymbolen som beskrivs på avsnitt 4.1.

Nivå 2 började det att visa missuppfattningar från eleverna, exempelvis uppgift 4(ii) och 5(ii) från tabell 14. Uppgift 4(ii) visar att eleverna från 1976 gav mer korrekta svar, men även antalet elever som gav ett vanligt felaktigt svar 9. För uppgift 5(ii) ser vi fler elever från 1976 som svarade korrekt och färre antal felaktigt svar.

För nivå 3 visade minskning av elever som svarar rätt och fler missuppfattningar. Resultat på uppgift 14 var annorlunda än förväntad, 2022 studien visar minskning av elever på nivå 3 än 1976. För 1976 var det 41% som gav ett korrekt svar och för 2022 var det 54% som svarade korrekt, skillnaden är 14 procentenhet.
Liknande händelse sker på uppgift 4(iii) och 5(iii). Sedan skiljer sig antalet missuppfattningar som eleverna gör på uppgifterna, eleverna tenderar inte i vår undersökning att sätta värdena 7n eller 12 lika mycket som Küchemanns elever.
Uppgift 16 visade sig att vara en av frågorna som både studierna indikerar att elever har svårigheter med och visade liknande missuppfattningar som ledde till samma felaktigt svar. För uppgift 16 anser Küchemann svaret c = 1, 2, 3, 4 som en systematisk lista korrekt, vilket vi inte gjorde i vår studie för att eleverna inte visar kunskapen att förstå c kan vara ett negativt tal eller ett decimaltal (talet mellan 4 och 5).

För nivå 4 var det mindre än hälften av eleverna för både 2022 och 1976 som gav ett korrekt svar och de vanligaste missuppfattningar som utfördes. Utifrån diagrammet (fig. 2) mellan 2022 och 1976 har fler elever från vår studie visat att ha kunskaper att klara av nivå 4 uppgifter. Över 10 procentenhet av eleverna gav ett korrekt svar som visas på tabell 16 för uppgift 4(v), 7(iv), 13(v) och 17(i).
Uppgift 3 var det minst antal elever som svarade korrekt (2% för 2022 och 6% 1976), samtidigt som det högsta missuppfattade uppgiften i hela testet (68% för 2022 och 71% för 1976) för både 2022 och 1976.
Uppgift 4(v) visade även den stora skillnaden i vilket som var det vanligaste felaktiga svaret på frågan. För 1976 var det vanligaste felsvaret n + 20 som 31 procent av eleverna svarade, en minskning av 17 procentenhet jämför med vår studie. Däremot i vår studie var det vanligaste felsvaret 4n + 5 med hela 27 procent av elever som uppgav det svaret, en ökning av 8 procentenhet jämför med Küchemanns studie.

6.3 Intervju

Intervju är uppdelat i tre avsnitt, ett avsnitt per program (Natur, Samhälle och Bygg). Intervjun gjordes i grupp, mellan 2-3st deltagare. Intervjun fokusera på 6 specifika uppgifter från testet som var mest de vanligaste uppgifter för elever att ha missuppfattningar (3, 5(iii), 10, 13(ii), 16 och 18(ii)). Varje uppgift fick eleverna förklara hur de svarar på frågan och deras resonemang varför de besvarade på frågan på det sättet. Uppgifterna kan ses på bilaga 4.

6.3.1 Samhällsprogrammet

Samhällsprogrammet var det två elever som deltog i intervjun.
För uppgift 5(iii), 13(ii) och 16 uppvisade eleverna goda kunskaper och inga svårigheter. Gjorde ett misstag på fråga 16 men inget som indikerar missuppfattning för bokstavssymboler, eleverna tänkte inte att c kan vara ett decimaltal.

6.3.1.1 Uppgift 3

Båda eleverna gav svaret att 2n är större, men kände sig osäker med sitt svar. Deras resonemang var att uttrycket med operationen multiplikation (2n) kommer alltid ge större värde än uttrycket (n + 2) med addition som operation. De gav ut olika exempel på värden som visar att uttrycket med multiplikation ger ut större värde än addition, tills en av eleverna kom till ett lägre tal.

Jag: *Slutsatsen, ni får fram att 2n är större än n + 2 för alla värden?*

Talare 1: *Ja, jag tänker att det är multiplikationen som är störst, men nu kom jag på att om vi säger att n är 1 då blir ju n + 2 större. Det verka bero på vilket tal n kommer vara, kom jag på nu. Men jag besvarade 2n på provet.*

Talare 2: *Men jag tänker mig att 2n var störst för att alla värden man kan använda är fler än n + 2.*

Jag: *Under testet när ni gjorde frågan, testade ni ett tal eller flera?*

Talare 1: *Jag tror jag testade ett tal bara, kommer inte ihåg vilket men det var större än jag kunde få med n + 2. Därför tänkte jag att 2n är störst var på grund av multiplikation.*

Talare 2: *Jag tänkte samma sak.*

Eleverna kände sig säker med att om ett värde indikerar att uttrycket är större än det andra, kommer det uttrycket vara större än den andra. Men under diskussion när de gav ut andra värde kom de fram att det fanns tillfällen n + 2 är beroende på värdet av n.

6.3.1.2 Uppgift 10

För uppgift 10 uppvisar eleverna bristande kunskaper om bokstaven som ett objekt, när de definierar bokstaven v och r för vitkål och rödbetor, samma svar de gav på testet. Eleverna säger att det inte går att få ut ett svar för att bokstäverna saknar värde, det indikerar problem med bokstaven som objekt. De visade svårigheter med bokstaven används inte, de vill att det ska finnas ett värde för bokstäverna för att räkna ut frågan rent numerisk.

Jag: *Vad tror du 8v + 6r står för i denna fråga?*

Talare 1: *Ja, jag tror det står för 8vitkål och 6rödbetor för det vi har på frågan. För vi vet ju inte vad bokstäverna har för värde. Jag tänker mig om man fick veta hur många de hade köpt så kan man svara på frågan.*

Nästa följdfråga där elever ska skriva ned uttrycket för totala antal grönsaker visar det starka svårigheter att förstå man kan beteckna det med bokstäver.

Jag: *Ni vet inte hur man löser frågan?*

Talare 1: *Nej, för vi vet inte hur många grönsaker som köptes.*

Talare 2: *Exakt, vi kan inte skriva ett antal vi inte vet.*

Jag: *Ok, vi säger att vi ersätter v för 5st vitkål och r för 6st rödbetor. Vad är den totala antal köpta grönsaker?*

Talare 1&2: *11st.*

Jag: *Bra, om vi går tillbaka till frågan igen. Vad har ni precis adderat ihop från texten?*

Talare 2: *V och r?*

Jag: *Precis!*

6.3.1.3 18(ii)

Första delfrågan på 18 kunde båda eleverna, resonerar att det är samma bokstäver på vänster led och höger led. Fråga 18(ii) gav de att svaret ska vara *Aldrig* för att bokstäverna i vänster led inte är samma som höger led denna gång.

Jag: *Kan ni resonera varför ni gav svaret aldrig här.*

Talare 1: *För att p inte är samma sak som M. Och så då borde väl det ha någon ändring. Jag tänkte att dom inte kan ha samma.*

Talare 2: *Jag håller med.*

6.3.2 Byggprogrammet

För bygg var det två som deltog i intervju.

6.3.2.1 Uppgift 3

Eleverna uppvisar egna missuppfattningar, den första var att anta 2n var störst p.g.a. operationen multiplikation. Den andra var att eleven hade testat ett tal som fick båda uttrycket bli lika stort (n = 2) och resonerande att båda uttrycken är lika stora. Eleverna ser att bokstaven n har endast ett tal och talet de sätter visar vilket uttryck som är störst, vilket indikerar att de har svaga kunskaper om bokstaven som generellt tal.

Talare 1: *Jag tror det är 2n för då gångrar man ju dom.*

Talare 2: *Jag tror de är lika stora.*

Jag: *Varför tror du att de blir lika stora?*

Talare 2: *När man plussa med 2 och gångra med 2, blir det lika stort.*

6.3.2.2 Uppgift 5(iii)

Denna uppgift visar båda en eget intressant missuppfattning. Första är när eleven ersätter bokstäver med siffran 4.

Talare 1: *Jag tror det blir typ 12, att g är lika med 4 också. Har inte ett bra svar varför, men det ser att vara det enda talet som funkar. Tror jag.*

Jag: *Hur kom du fram till att g är också lika med 4, tänker du att de andra bokstäver är 4?*

Talare 1: *Inte helt säker men tror det. För att i första uttrycket har vi två bokstäver och det ser ut att passa om e och f är 4. Sen i andra uttrycket har vi tre bokstäver och vi vet att e och f är 4, då är g också 4.*

Eleven här har bestämt sig att bokstäverna ska ha ett värde och kan inte vara obekanta. Tidigare uttryck ser eleven att e + f = 8 och ser det som 2 obekanta tal blir 8. Andra uttrycket ser eleven inget numeriskt tal endast bokstäver (e + f + g =), utan antalet bokstäver är lika med ett tal och i andra uttrycket är det 3 bokstäver. Eleven resonerar till antalet bokstäver dividera med talet är svaret för att få fram ett värde på bokstäverna. Personen resonerar att alla bokstäver ska vara 4 som leder till att få svaret 12 på andra uttrycket.

Andra är när eleven kopplar bokstäverna till alfabetisk ordning.

Talare 2: *Det skulle kunna vara alfabetet.*

Jag: *Hur tänker du?*

Talare 2: *Att ordningen av alfabetet kanske har något kopplat till detta, eller något sånt. Asså då g blir 7, för den ligger i sjunde ordningen.*

Eleven gav ett intressant svar som 15, hen resonerade att bokstäverna har ett numeriskt värde som beror på vilken ordning av den bokstaven ligger i alfabetet och för bokstaven g gav eleven värde 7 för den ligger i sjunde ordningen i alfabetet. Han förklarade att vi vet e + f är 8 och g ersätter vi mot 7 då vi får fram 8 + 7 = 15.

Båda eleverna visar svårighet när det kommer till bokstaven används inte och generellt tal, de tänker inte på möjligheten att uppgiften går att lösa utan numeriska värden att bokstäverna kan ha flera olika värden.

6.3.2.3 Uppgift 10

Första deluppgiften gav eleverna ett gemensamt svar som indikerade stark missuppfattning av bokstavssymbolerna. Eleverna visar gemensamma missuppfattning som samhälle eleverna, svårigheter bokstaven som objekt för att värde på bokstäverna saknas. Talare 2 gör ett intressant drag och adderar ihop elementen till ett tal, det visar att eleven har svårigheter med bokstav som specifik obekant.

Jag: *..., vad står 8v + 6r för?*

Talare 1: *8 köpta vitkål och 6 köpta rödbetor.*

Jag: *Kan du resonera varför du besvarade så?*

Talare 1: *Jag tror för att V:et och r:et står för köpta antalet. Alltså 8st antal köpta vitkål och 6st antal köpta rödbetor.*

Talare 2: *Jag tror typ samma, men det är köpt en av varje kanske. För priset är 8 kr för en vitkål är 8 v liksom och sen 6 kr för rödbetor och det är 6r.*

Jag: *Vad skrev ni på frågan då?*

Talare 1: *8 köpta vitkål och 6 köpta rödbetor.*

Talare 2: *Jag hade skrivit 8v + 6r lika med 14vr, kanske.*

Andra deluppgiften visade eleverna individuella missuppfattningar.

Jag: *Vad är det totala antalet köpta grönsaker?*

Talare 1: *8 + 6 lika med 14 skulle jag säga.*

Talare 2: *2 stycken.*

Talare 1 visade klassiska missuppfattningen många elever svarade på frågan, där de vill leta efter ett numeriskt värde och ersätter kostnaden till antalet. Talare 2 gav ett mer unikt svar som omvandlar bokstäverna till ett tal, 1 och uppgiften har två bokstäver för att få ut ett numeriskt tal 2.

6.3.2.4 Uppgift 13(ii)

Uppgift 13(ii) gav båda eleverna det mest vanligaste missuppfattningen, och har adderat ihop elementen.

Talare 1: *Jag tror det blir 7 AB.*

Talare 2: *Jag svarade samma.*

Jag: *Kan ni resonera varför ni fick 7 AB?*

Talare 2: *Ja, vi har ett plustecken i mitten här och ska lägga ihop dem. Vet inte vad mer man göra.*

Talare 1: *Tänkte liknande.*

Båda visade svårigheter att förstå vad man ska göra när två obekanta variabler är med i addition.

6.3.2.5 Uppgift 16

En elev visste inte hur man löste uppgiften, den andra var inte säker heller men gav det vanligaste svaret.

Talare 1: *Jag tror att man kan helt enkelt säga c är mindre än d. Att c=4 och d=6.*

Jag: *Skulle du svarat på provet att c=4 och…*

Talare 1: *Och d=6, ja.*

Eleven har svårigheter att se uppgiften kan ha flera tal än ett som kopplar sig till bokstaven som generellt tal.

6.3.2.6 Uppgift 18

Eleverna uppvisade och gav samma respons som samhälle eleverna gjorde. Klarade av första deluppgiften, men andra deluppgiften var de bestämd att bokstaven M och P inte kan ha samma värde.

Talare 2: *Aldrig.*

Talare 1: *Tror också det är Aldrig.*

Jag: *Varför tror ni det är Aldrig?*

Talare 1: *För att m och p är olika bokstäver på varsin sida. Det blir inte samma summa.*

6.3.3 Naturprogrammet

För natur var det tre elever som deltog.
Natur eleverna visade bra kunskaper och låg på nivå 4, de svarade rätt på alla uppgifter jag gick igenom med dem. Två utav tre elever svarade fel på uppgift 3 under testet, men under intervju förklarade de bra nog att visa ha kunskapen för att lösa uppgiften. Det fanns ingen indikation att de skulle ha missuppfattning eller svårigheter med att hantera bokstavssymboler.

7 Diskussion

7.1 Metoddiskussion

Det var uppenbart för mig att göra en kvantitativ studie för att jämföra vårt resultat med Küchemanns studie. Det var det bästa valet vi kunde göra för att kunna jämföra med Küchemann resultatet at använda hans egna testfrågor. Jag och Agnes Wallgren tog kontakt med Küchemann via mejl för att fråga honom om vi kunde få hans frågor och använda dem inför vårt examensarbete, 30 minuter senare fick vi ett mejl med en PDF-fil som innehöll 23 frågor om bokstavssymboler och Küchemanns godkännande att använda frågorna. För den kvantitativa delen arbetade jag och Agnes gemensamt, där vi översatte Küchemanns frågor till svenska, tog kontakt med flera olika skolor för att testa studien på, åkte ut till skolan tillsammans när vi skulle ge ut testet och samla in data. Vi arbetade tillsammans med att rätta och analysera testet vi fick tillbaka från skolan, vilket var riktigt tidskrävande och är glad jag kunde göra det med Agnes. Allt det här tog lång tid att komma i gång, vi behövde hitta en skola som kunde ta in oss när deras elever skulle strax ha slutprov och nationella provet i matte. Vi hade tur med Agnes gamla VFU skola som fick till oss 5 klasser med 5 olika riktlinjer.
Om arbetet hade givit en större tidsram och en bättre tid för att tillämpa en kvantitativ studie inom matematik hade vi försökt få tag i fler skolor för elever att göra testet. Den kvalitativa studien ger oss åskådare en synvinkel från elevernas perspektiv varför de ger de unika felaktiga svar och var deras missuppfattning kan uppstå ifrån. Men även under två månaders tid fick jag och Agnes tag i relativt många elever som deltog i studien, nämligen 59 elever, vilket gjorde det möjligt att kunna generalisera resultatet. För att göra resultatet av studien mer trovärdig skulle en större studie behöva göras, fler elever från fler skolor på olika orter. Deltagarna gick alla första året på gymnasiet och alla elever som deltog kom från samma skola. Algebratestet var anpassad för elever från London mellan 13 och 15 år gammal, vilket motsvarar årkurs 9 i grundskolan eller första året i gymnasiet, eleverna ska ha kunskapen att klara av testet. Studien inkluderade olika nivåer av förståelse av bokstavssymboler inom algebra, vilket gav studien en större bred för kunna ge en bättre förståelse vad elever kan.

Om jag hade haft mer tid tror jag att en stabilitetmätning av studien hade varit bra att använda, hade ökat studiens reliabilitet men dessvärre var det inte möjligt med tidsaspekten. Men en stabilitetmätning kunde vi även ha sett elevernas korrelation för resultatet. Något man behöver tänka på är att vissa elever presterar sämre under prov för att de känner sig stressad, även om detta var ett test var det ett oförberedd test för dem, vilket kan leda till att eleverna visa missuppfattning på grund av stress. Med flera mätningar blir resultatet mer trovärdig och de missuppfattningar som sker är verkliga missuppfattningar då.

7.1.1 Felkällor

Under de senaste två månaderna har misstag hänt och information inte varit användbart. På fråga 13(iv) gjorde vi ett misstag när vi skrev om Küchemanns frågor, uppgiften skulle ha stått 2a + 5b + a, vi skrev 2a + 5a + a. Hur den skulle ha varit, hade visat om de har kunskap för nivå 2, men vi sänkte ned den till nivå 1 när endast en variabel är med.
Fråga 4 ligger inte i samma ordning som Küchemanns frågor, och kan skapa förvirring om man skulle jämföra, exempelvis hans fråga 4(i) är vår 4(ii). Ordningen ligger fel, men inget mer.
Vi upptäckte när vi observerade eleverna göra testet att två frågor inte var givande, fråga 1 och 23. Första frågan var för otydligt och ingen av eleverna uppfattade vad pilen indikerade,

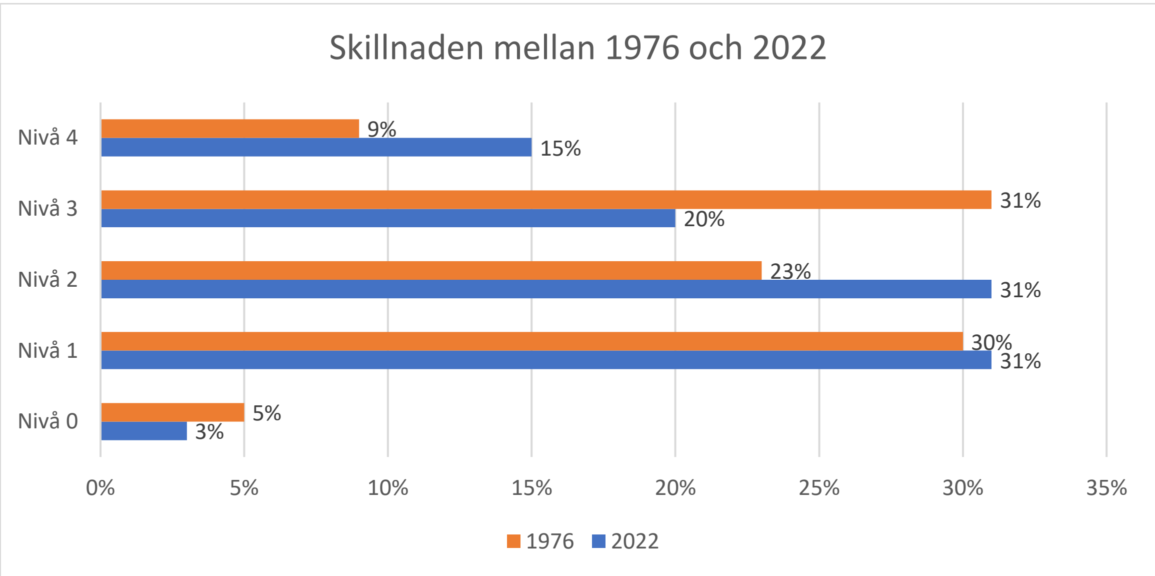
vi håller med att frågan var för otydligt och behövde förklara för eleverna vad de skulle göra på fråga 1. Sista frågan 23 var för komplex, och endast en elev lyckades ge korrekta svaret. Nu skulle man kunna jämföra med uppgift 3, där endast en lyckades svara korrekt, men problemet var att ingen visste hur de skulle påbörja för att lösa uppgiften och det var mer vanligt att eleverna lämnade frågan blankt. Utifrån detta kände vi att uppgift 1 och 23 var inte givande till algebratestet, möjligen kunna justeras.

7.2 Resultatdiskussion

Här går frågeställningarna igenom utifrån studien.

7.2.1 Elevers svårigheter med bokstavssymboler

Den stora skillnaden mellan vårt och Küchemanns resultat var antalet elever som ligger på de olika nivåer av förståelse. Från nivå 0 – 1 ligger antalet elevers kunskaper likt varandra, men från nivå 2 – 4 skiljer det sig åt. I vårt resultat har vi fler antal elever som presterade bra att nå nivå 4 än Küchemann och även fler antal elever som ligger på nivå 2, men mindre mängd av elever som klarade av nivå 3 jämför med Küchemanns elever.



Figur 3. Diagram på datainsamlingen mellan 2022 och 1976, av nivåer av förståelse.

Men vad säger denna diagram om eleverna? Vad betyder det att vårt resultat har färre elever som klarade av nivå 3? De elever som klarar av nivå 3 kan hantera bokstäver som specifika obekanta, som är ett viktigt koncept att kunna när man arbetar med bokstavssymboler. Det säger att majoriteten av eleverna som gjorde testet 2022 har sämre koll på boksavssymboler än 1976, men vi har större andel av elever som klarar av den högsta nivån som har mer komplex struktur med uppgifter som kräver specifika obekanta. Eleverna i Küchemanns (1981) studie visar att ligga på en medelgod kunskapsnivå kring bokstavssymbolen, medan våra elever ligger utspritt men majoriteten under den kunskap de ska kunna.
Resultatet mellan vår och Küchemanns studie var inte en stor skillnad av vad elever skrev som missuppfattning när vi tittar på tabell 13 till 16, det som skiljde åt var antalet procentenheten av elever som svarade korrekt och vanliga felaktigt svar. Küchemanns (1981) förklaring till elevers resonemang av deras missuppfattningar stämmer bra överens med vår. Nedan följer fem uppgifter i tabell 17 tagna från testet för att visa de likheter och skillnader med Küchemanns resultat, samt intressanta resultat från elever. Alla upptäckelser som har hänt på uppgifterna gjordes av mig och Agnes Wallgren.

Uppgift	4(ii)	5(iii)	16	3	18(ii)
Nivå	2	3	3	4	4
Vanligt fel	9	12	c = 4	2n	Aldrig
Vanligt fel (2022)	5%	12%	41%	68%	34%
Vanligt fel (1976)	20%	26%	39%	71%	51%
Rätt svar (2022)	64%	53%	14%	2%	20%
Rätt svar (1976)	68%	41%	11%	6%	25%

Tabell 17. Vanliga missuppfattningar och rätta svar.

Det man märker först på tabell 17 att det finns inga nivå 1 uppgifter. Det här beror på att majoriteten av eleverna för både vår och Küchemanns studie klarar av nivå 1, de fel vi hittade i vår data var slarvfel eller lämnat svaret blankt. Inga av elevernas svar visade att de hade någon missuppfattning om uppgiften, men det här kan bero på att nivå 1 är lätta nog att gå lösa rent numeriskt, exempelvis uppgift 6(i), 7(ii) och 8 (se tabell 8).

Uppgift 4(ii) kräver kunskap om *bokstaven används inte*, i vår studie visar 5% missuppfattningar och i Küchemanns studie där 20% av eleverna visar missuppfattningar (se frågan i tabell 14). I Küchemanns noterade att eleverna som svarade på frågan korrekt ignorerade bokstaven och adderade 4 endast med siffran 5 för att få ut n + 9. De 20% som gav svaret 9 har förenklat uppgiften fel och har möjligen glömt av bokstaven, ignorerat bokstaven helt eller möjligen ersätt n:et mot 4 för att få uppgiften helt numeriskt. Eleverna i vår studie påvisade mer troligt att de ignorerade bokstaven helt för att få uppgiften numeriskt, möjligen ersätt n:et mot 4 men det var ingen som visade att de hade glömt bokstaven. De eleverna som svarade på uppgiften med 9 ligger på nivå 1 eller 2, som indikerar att de har svårigheter med att hantera bokstäver. De är mer troligt att ignorera bokstaven eller ersätta n:et mot ett numeriskt tal som 4 för att kunna få uttrycket helt numeriskt. Det är möjligt att eleverna kan ha svårigheter att hantera parenteser, då det är vanligt att de multiplicerar 4 endast

Uppgift 5(iii) kräver att eleverna kan hantera bokstäver som specifika obekanta och bokstaven används inte. I uppgiften får eleverna två uttryck med tre obekanta tal och ett numeriskt tal, eleverna ska skriva ut ett uttryck vad e + f + g kan vara utifrån första uttrycket e + f = 8. I vårt resultat visade att 12% av eleverna har svårigheter med frågan, de ser att bokstäverna behöver ha ett värde och kan inte vara obekanta. I första uttrycket har vi 2 obekanta tal som blir 8 och andra uttrycket tre obekanta tal med inget numeriskt tal, eleverna känner behov att skapa numeriska tal från de obekanta. De resonerar fram till antalet bokstäver i uttrycket kan ha en koppling som i första uttrycket ser vi 2 obekanta tal blir 8, där de tar då antalet obekanta dividera med talet 8 för att få fram värde på bokstäverna och får 4 för bokstaven e och f. Eleverna resonerar då att alla bokstäver ska vara 4 och får e + f + g = 4 + 4 + 4 = 12. Küchemanns elever visade ha mer svårigheter med uppgiften där 26% gav svaret 12, han förklarade att eleverna gjorde liknande sätt att omvandla e + f + g till 4 + 4 + 4 = 12. Han tar dock upp ett intressant svar som 2% av hans elever gav, vilket 15. Eleven hade ersatt i andra uttrycket att och e + f = 8, men g ersattes med talet 7 för att g är sjunde bokstaven i alfabetet. I min intervju med byggeleverna svarade en elev likt Küchemanns elev, personen hade ersatt bokstaven g mot 7 för att g ligger i sjunde ordningen i alfabetet. Det här kan bero på elevernas tidigare lärare och hur de har förklarat bokstavssymboler. Macgregor & Staceys (1997) tar upp angående skola C där lärarna hade inte tydliggjort bokstavens kontextuella sammanhang vilket orsakade att eleverna koppla bokstavssymbolen med den alfabetiska ordningen.

Uppgift 16, en nivå 3 fråga, ska eleverna förklara vad de vet om bokstaven c med informationen de får från frågan, här behöver de förstå bokstaven som generellt tal att c kan vara mer än ett värde.
Denna uppgift var det vanligt att eleverna gav ett felaktigt svar, antigen 2 eller 3, men det mest vanligaste var c = 4 och d = 6. Syftet med frågan är att förstå det finns mer än ett svar och kunna skriva det tydligt, eleverna visar att de saknar förståelse om bokstaven som generellt tal när de ger ut endast ett svar. Lösning c = 4 är ett exempel de kan ge som stämmer, men det är bara en av oändligt många exempel. Det var oväntad att flera elever som gav c ett värde, eleverna kan använda vad Çelik & Günes (2013) kallade *trial and error* metoden. Med den metoden kan de se att värde c kan ha fler värden, men även negativa och decimaltal.
För Küchemann framgår det i tabell 17 att 39% som gav ett enstaka värde, vanligaste värde var c = 4. Küchemann (1918) förklarar att eleverna kan hitta ett värde som stämmer överens med uppgiften, men han påpekar att vissa skulle kunna hitta fler värden om de blivit tillfrågade.
I tabell 15 visar det att endast 14% av 2022 svarade korrekt som skrev c <5 som jag anser är korrekta svar, men Küchemann har gett rätt för elever som skrivit c = 1, 2, 3, 4 som en systematisk lista. Vi har fått liknande svar men vi anser att det är felaktigt svar, eleverna missar uppfattningen att bokstaven kan vara ett negativt tal och ett decimalt tal.

Uppgift 3 var den mest intressanta uppgiften under testet, det var frågan som visade minst antal elever som svarade korrekt (2% 2022 och 6% 1976) men flest elever som visade tydlig missuppfattning (68% 2022 och 71% 1976). Uppgiften gick ut på att veta vilken av de två uttrycken 2n eller n + 2 är störst, och förklara varför. Majoriteten av eleverna från båda studierna gav svaret 2n, elevernas resonemang från 2022 förklarade att det är multiplikation på det uttrycket jämför med det andra uttrycket där operationen är addition. De beskriver att multiplicera ett tal ger högre värde än att addera, för den anledningen fokuserar eleverna mer på operationen i stället för uttrycket. Det här visar att eleverna ha svårigheter med bokstaven som en variabel och möjligen bokstaven som generellt tal, om de endast testar höga tal för att få 2n störst men det här visar att de inte har testat något negativt tal.
Men det som gör dessa svar intressanta är att det fanns inga bevis på användning av *Trial and error* metoden, speciellt bland eleverna som svarade korrekt. Küchemann tar upp det i sin studie att de elever som svarade korrekt eller fel, hittade han inga bevis på en användning av metoden. Under min intervju med bygg och samhälle elever förklarade dem att de testade ett tal för n eller var fokuserad på operationen endast och kom fram till svaret att 2n är störst. Men när jag föreslog att de skulle testa flera andra tal för bokstaven n, börja de upptäcka att 2n är endast störst när n är större än 2. Küchemann förklarar att de som svarade korrekt på uppgiften ser ett förhållande mellan 2n och n + 2, han kallar det *Second-order Relationship*, och det verka stämma överens med eleverna från vår studie. De elever som jag intervjuade från natur, såg relationen mellan de två uttrycken och när de resonerade till svaret förklarade de aldrig att de testade flera olika värde. Det var några få elever som svarade på testet att 2n och n + 2 är lika stora, som visar att de har endast testat ett värde på n (n = 2). Vi hade några få elever som förstod konceptet på uppgiften och svarade att det beror på värdet av n, men de skrev inte vilka värde av n då 2n är störst och n + 2. Vi bestämde att räkna dessa elevers svar som fel.

När det kom till andra deluppgiften 18(ii), visar eleverna från Küchemanns studie har bättre kunskap än vår studie (20% för 2022 och 25% för 1976, korrekt svar). Däremot har eleverna i Küchemanns studie visat större missuppfattning om bokstaven (34% 2022 och 51% 1976), eleverna har gett svaret Aldrig. I uppgiften får eleverna en ekvation med obekanta bokstäver, L + M + N = L + P + N, där de får tre svarsalternativ för ekvationen: Alltid, Aldrig och Ibland (förklara). Eleverna har gett svaret aldrig för att de uppfattar bokstäverna har ett eget bestämt tal, med det resonemanget kan inte M ha samma värde som P. I mina intervjuer med bygg och samhälle säger eleverna att P inte kan vara samma som M, för att de är olika bokstäver och att de har egna tal. Küchemann beskriver att i ögonen för eleverna ser de två obekanta bokstäverna (M och P) inget gemensamt värde.

Sammanfattningsvis kan vi se att resultaten i denna studie visar överlag på de mer utmanade frågorna (nivå 4), men allmänna frågor demonstrerar Küchemanns elever bättre kunskap. De missuppfattningar som sker på uppgifterna resonerar eleverna likt den andra studie, och skiljer sig inte mycket åt. Vi kan säga dock att eleverna i vår studie demonstrerade en mindre andel missuppfattningar än Küchemanns elever.

7.2.2 Elevernas resonemang på missuppfattade svar

I detta avsnitt går vi igenom vad eleverna har för gemensamma svårigheter och missuppfattningar för bokstavssymboler. Naturprogram eleverna kommer inte vara med i diskussionen, de visade att ha bra kunskap och ingen indikation att ha missuppfattning för bokstavssymbolen.

7.2.2.1 Uppgift 3

Här uppvisade eleverna från intervjun två olika svarsalternativ, 2n och n + 2. Båda svaren baserar sig på samma missuppfattning av bokstavssymbolen att värdet av n har endast ett svar, det indikerar även att de har svårigheter med bokstaven som generellt tal (se avsnitt 3.2.5). Deras resonemang för att 2n är störst baserade på operationerna och inte uttrycken, där de ser att uttrycket med multiplikationen kommer alltid ge ett större värde än andra uttrycket med addition för att det är multiplikation. Eleverna ignorerar eller tolka inte bokstäverna och fokuserar endast på operationerna, vilket kopplas till bokstaven används inte (se avsnitt 3.2.2). Det här är vad eleverna sa till mig:

Talare 1 (Bygg): *Jag tror det är 2n för då gångrar man ju dom.*

Talare 1 (Samhälles): *Ja, jag tänker att det är multiplikationen som är störst…*

Talare 2 (Samhälles): *Men jag tänker mig att 2n var störst för att alla värden man kan använda är fler än 2 + n.*

För när eleverna tänker multiplikation är det endast värde som är positiva men inte de negativa talen. För samhälles eleverna frågade jag dem om de testade endast ett tal eller flera, för att bekräfta om det är bokstaven som generellt tal de har svårigheter med.

Talare 1(Samhälles): *Jag tror jag testade ett tal bara, kommer inte ihåg vilket men det var större än jag kunde få med n + 2. Därför tänkte jag att 2n är störst var på grund av multiplikation.*

Talare 2(Samhälles): *Jag tänkte samma sak.*

Det här bekräftar att eleverna är fast med tankesättet att bokstavssymbolerna har ett värde och inte flera, och har inte koll på bokstaven som generellt tal.

För svaret att 2n är lika stort som n + 2 har eleven testat ett specifikt värde på n, vilket är n = 2 (2*2 = 4, 2 + 2 = 4). Det som skiljer åt nu är att denna elev inte har brytt sig om operationerna för uttrycken men fokuserat på bokstäverna, men har liknande svårigheter med bokstaven som generellt tal och har endast testat ett värde på n. Det här vet man för att enda gången 2n är lika stort som n + 2 är när n = 2, och hade eleven testat vilket tal som helst hade personen upptäckte att beroende på n är för värde varierar vilket uttryck som är störst.

Talare 2 (Bygg): *Jag tror de är lika stora.*

Talare 2 (Bygg): *När man plussar med 2 och gångra med 2, blir det lika stort.*

Slutsatsen är att eleverna har två missuppfattningar om bokstavssymbolen som orsakar att de svarar fel på frågan. Första är att de ignorerar bokstaven eller tolka den inte och fokuserar endast på operationen, som kopplas till bokstaven används inte. Den andra är att eleverna testar endast ett värde för n och får fram ett numeriskt tal som de är nöjd med, vanligtvis ett värde som är större än 2. Eleverna tänkte inte att n kan ha ett negativt värde, det här kopplas till bokstaven som generellt tal.

7.2.2.2 Uppgift 5(iii)

Här demonstrerade två elever från intervjun två olika svar, 12 och 15. Båda svaren baserar sig på att eleverna försöker ersätta bokstäverna till ett numeriskt tal och kan inte hantera bokstaven som specifik obekant (se avsnitt 3.2.4). Elevens resonemang för 12 baserade på antalet obekanta i varje uttryck, och numeriska talet i första uttrycket (8).

Talare 1 (Bygg): *... För att i första uttrycket har vi två bokstäver och det ser ut att passa om e och f är 4. Sen i andra uttrycket har vi tre bokstäver och vi vet att e och f är 4, då är g också 4.*

I första uttrycket har vi e + f = 8, två obekanta tal och ett numeriskt tal. Andra uttrycket har vi e + f + g =, tre obekanta och inga numeriska tal. För att vi fyra tar eleven antalet bokstäver i första uttrycket och dividera med talet 8, $\frac{8}{2} = 4$. Nu ser eleven att värde på bokstaven e och f är 4, för att 4 + 4 blir 8 och om det stämmer, bör sista bokstaven g vara 4 för att få ut svaret 12. Eleven vill ersätta bokstäverna till ett numeriskt tal, för att hen inte kan hantera algebraiskt uttryck med obekanta värde.

Eleven som svarade 15, gick en mer ovanlig och intressant strategi att försöka lösa uppgiften. Eleven tog informationen att e + f = 8 från första uttrycket och satte in det i andra uttrycket för att få 8 + g =, men liknande svårigheter som förra eleven ville hen att ha ett numeriskt tal som svar.

Talare 2 (Bygg): *Att ordningen av alfabetet kanske har något kopplat till detta, eller något sånt. Asså då g blir 7, för den ligger i sjunde ordningen.*

Eleven resonerar att g har ett numeriskt värde och det beror på vilken ordning bokstaven ligger i alfabetet. Bokstaven g blir värdet 7 för att det ligger i sjunde ordningen i alfabetet, och då har eleven fått från 8 + g till 8 + 7 = 15.

I slutändan visade båda eleverna liknande problem, vilket var att försöka definiera värde på bokstäverna när man kunde ignorera dem. Elever som besvarade frågan på detta sätt uppvisar svårigheter med bokstaven som specifik obekant (avsnitt 3.2.4) och bokstaven används inte (avsnitt 3.2.2).

7.2.2.3 Uppgift 10

I denna uppgift uppvisade eleverna från intervju en gemensam missuppfattning för deluppgift 1, 8vitkål och 6rödbetors. För deluppgift 2 visade två olika svar, 14 och 2.
För första frågan skulle eleverna beskriva vad 8v + 6r står för, vilket var priset för varorna (se bilaga 4, uppgift 10). Eleverna beskriver 8v + 6r för deras objekt (8vitkål och 6rödbetor), men inte som ett uttryck.

Talare 1 (Samhälles): *Ja, jag tror det står för 8vitkål och 6rödbetor för det vi har på frågan. För vi vet ju inte vad bokstäverna har för värde…*

Talare 1 (Bygg): *Jag tror för att V:et och r:et står för köpta antalet. Alltså 8st antal köpta vitkål och 6st antal köpta rödbetor.*

Eleverna har svårigheter till bokstaven som objekt, där svaret för värdet på bokstäverna saknas och skriver endast ned vad de har (8vitkål och 6rödbetor). Talare 1 från samhällsprogrammet beskriver att de inte vet vad de ska gör när bokstäverna har inget värde, som indikerar att de har svårigheter med bokstaven används inte. De vill att det ska finnas ett värde för bokstäverna för att uppgiften ska bli rent numeriskt.

För deluppgift 2 ska eleverna skriva ned ett uttryck för antalet köpta grönsaker, vilket är v + r. Denna fråga svarade alla ett numeriskt tal, som visade starkt på att eleverna ignorerade eller tolkade inte bokstäverna och fokuserade endast på de numeriska talen. I början berättade vissa elever att det inte går svara på frågan, för att man vet inte hur många grönsaker är köpta. Detta ledde till att eleverna adderade ihop de enda numeriska tal som fanns med i uppgiften, 8 + 6 = 14. En av eleverna gav svaret 2 som hen resonerar att bokstäverna kan addera ihop med varandra som ett numeriskt värde. Varsin bokstav representerade värdet 1 och uppgiften har två bokstäver, hen adderade ihop dem för att få svaret 2.

Eleverna i denna uppgift visar starka svårigheter i både bokstaven som objekt och bokstaven används inte. I första uppgiften visar de ha svårigheter att förstå vad v och r står för, vilket resulterar att deras objekt blir kallad vitkål och rödbetor. För andra uppgiften visar de fortfarande att inte förstå vad v och r står för, men även börjar ignorera dem för att komma fram till ett numeriskt tal.

7.2.2.4 Uppgift 13(ii)

För uppgift 13(ii) var det inte många elever från intervju som gav det vanliga felsvaret 7ab. I uppgiften ska eleverna förkorta uttrycket 2a + 5b, vilket svaret är 2a + 5b. De som svarade 7ab resonerade ifrån operationen addition och ignorerade bokstäverna, de visade även osäkerhet hur man skulle lösa uppgiften.

Talare 2 (Bygg): *… vi har ett plustecken i mitten här och ska lägga ihop dem…*

Båda eleverna visar svårigheter att hantera bokstäver, de förstår inte vad man ska göra när två obekanta variabler är med i en addition. De har inte förståelsen om bokstaven som generellt tal, att bokstaven a behöver inte vara lika stort som b.

7.2.2.5 Uppgift 16

Uppgift 16 var en intressant uppgift, alla elever som var med på intervjun visste att c ska vara mindre än 5. Några elever hade svårigheten att inse att bokstaven kan ha fler än ett värde, vanliga svaret var c = 4 och d = 6, som indikerar att eleven har svårigheter med bokstaven som generellt tal. Andra elever visste att c kan ha fler än ett värde och gav c = 1, 2, 3 och 4, men missar ut att c kan vara negativt tal eller ett decimaltal.

Det är osäker om eleverna som visste att c är mer än ett värde har svårigheter med likhetstecknen och visste inte att man kunde skriva c <5.

7.2.2.6 Uppgift 18

Sista uppgiften 18 var uppdelad i två deluppgifter, båda har sin egen ekvation som eleverna ska avgöra om de är alltid, aldrig eller ibland (när) sann. Första deluppgiften visade ingen elev att ha svårighet med, andra deluppgiften svarade alla ett gemensamt svar att ekvationen L + M + N = L + P + N är aldrig sann.

Talare 1 (Samhälles): *För att p inte är samma sak som M...*

Talare 1 (Bygg): *För att m och p är olika bokstäver på varsin sida. Det blir inte samma summa.*

Eleverna uppfattar att bokstäverna har ett eget bestämt tal och inte möjligen att M kan ha samma tal som P. Uppgiften kräver att eleverna ha en förståelse för bokstaven som generellt tal, behöver de även kunna hantera bokstaven som specifik obekant. De visar ha svårigheter när de hanterar bokstäver i stället för siffor.

7.3 Didaktiska konsekvenser

Under utbildningen, men speciellt under VFU-perioderna, inser jag hur viktigt det är för eleverna att förstå bokstavssymbolerna för att kunna hantera dem på ett korrekt sätt. Det är viktigt som lärare att vara noggrann hur man lär ut matematik till eleverna, tydliggör allt som är oklart för att det inte ska utveckla vidare och blir problematisk i framtiden (exempelvis från Macgregor och Staceys skola C, avsnitt 3.2.3). Läraren behöver vara uppmärksam hos elever på deras missuppfattningar, och kunna hjälpa dem att förstå momentet.

Men något som jag har lärt mig från detta arbete är att uppmärksamma elever om ”bokstaven som objekt”. Det är väldigt vanligt att eleverna ser bokstäver som objekt när det förekommer i text, många elever fastnar på dessa uppgifter och lär sig inte hantera dessa problem.

7.4 Framtida forskning

När både jag och Agnes höll på att skriva ned resultatet från algebratestet märkte vi båda att det skulle vara mer roligt och trovärdigt arbete om algebratestet kunde göras på fler elever än 59st. Sedan något som jag hade velat se är en longitudinell studie, som går från årkurs 7 till första året i gymnasiet, för att se elevernas utveckling och förståelse om bokstavssymbolen över åren.
Men en rimlig framtida forskning hade varit att utföra detta algebratest på fler gymnasieskolor, möjligen årkurs 9 i grundskolan för att få ett mer trovärdigt arbete. Möjligen

intervjua flera lärare i matematik för att fråga vilken lösning kan vi göra för att förbättra elevernas förståelse i bokstavssymboler.

Referenser

Bryman, A., & Nilsson, B. (2011). Samhällsvetenskapliga metoder. Malmö: Liber (2., [rev.] uppl. ed.).

Çelik, D., & Güneş, G. (2013). Different grade students' use and interpretation of literal symbols. *Kuram ve Uygulamada Eğitim Bilimleri, 13*(2), 1168–1175.

Christou, K., & Vosniadou, S. (2012) What Kinds of Numbers Do Students Assign to Literal Symbols? Aspects of the Transition from Arithmetic to Algebra. *Mathematical Thinking and Learning*, *14*(1), 1-27. doi:10.1080/10986065.2012.625074

Dalen, M. (2015). Intervju som metod. 2. uppl. Malmö: Gleerups.

Denscombe, M. (2016). Forskningshandboken: För småskaliga forskningsprojekt inom samhällsvetenskaperna. 3. rev. och uppdaterade uppl. ed. Lund: Studentlitteratur.

Küchemann, D. (1978). Children's understanding of numerical values. *Mathematics in school, 7*(4), 24-27.

Küchemann, D. E. (1981). Children's Understanding of Mathematics: 11-16. I K. M. Hart (Ed.), *Algebra* (s. 102-119). London: John Murray.

Kvale, S., & Brinkmann, S. (2014). Den kvalitativa forskningsintervjun (3. [rev.] uppl.). Lund: Studentlitteratur.

Lucariello, Tine & Ganley (2013). A formative assessment of students' algebraic variable misconceptions. *The Journal of Mathematical Behavior, 33*(2014), 30-41. doi: 10.1016/j.jmathb.2013.09.001

Macgregor, M. & Stacey, K. (1997). Students' Understanding of Algebraic Notation: 11-15. *Educational Studies in Mathematics, 33*(1), 1-19. Hämtad från: https://www.jstor.org/stable/3483002?origin=JSTOR-pdf&seq=1

Persson, P-E. (2010). *Räkna med bokstäver* (Doktorsavhandling). Lund: Universitetstryckeriet. Hämtad från https://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:989792/FULLTEXT01.pdf

Şahin, Ö. & Soylu, Y. (2011). Mistakes and misconceptions of elementary school students about the concept of variable. *Procedia Social and Behavioral Sciences. 15*(2011) 3322–3327.

Skolverket (2022). Läroplan och kursplan för grundskolan, Matematik. Hämtad från: https://www.skolverket.se/undervisning/grundskolan/laroplan-och-kursplaner-for-grundskolan/laroplan-lgr11-for-grundskolan-samt-for-forskoleklassen-och-fritidshemmet?url=1530314731%2Fcompulsorycw%2Fjsp%2Fsubject.htm%3FsubjectCode%3DGRGRMAT01%26tos%3Dgr&sv.url=12.5dfee44715d35a5cdfa219f

Vetenskapsrådet. (2002). Forskningsetiska principer inom humanistisk-samhällsvetenskaplig forskning. Stockholm: Vetenskapsrådet.

Bilaga 1: Intervjuguide

Inledning:
1. Förklara att intervjun spelas in och kommer transkriberas. Materialet kommer inte att användas till annat bruk än till arbete sig själv.
2. Tydliggör att deltagaren och skolan deltagaren går i kommer att vara helt anonyma. Deras namn kommer endast användas för mig att kunna kategorisera vem som säger vad.
3. Berätta vad syftet med intervjun och vad det kommer användas till.
4. Deltagaren kan undvika att besvara en fråga om det känns obekväm.
5. Deltagaren kan när som helst att välja avbryta sin medverkan.

Bakgrundsfråga:
1. Vad heter du?
2. Hur gammal är du?
3. Vilken årskurs går du?
4. Vilket program går du?

Nyckelfrågorna:
1. Vad tycker ni om matte?
2. Vad tyckte ni om algebratestet?
   a) Tyckte ni den var utmanade eller var den för enkel?
   b) Vad tycker du är dina styrkor och svagheter i algebratestet? Börja med styrkor!
3. Hade ni någon uppgift som ni fastnade på eller var bara svår att lösa?
   a) Varför tyckte du att den var svår att lösa?
4. *Väljer ut uppgifterna 3, 5(iii), 10, 13, 16 & 18 från algebratestet.*
   a) Hur skulle ni besvara på denna uppgift?
   b) Kan ni resonera varför ni besvarade på uppgift på det sättet?

Avslutning:
Tacka eleverna för deltagit i mitt arbete genom att ställa upp inför intervjun, och att de kan kontakta mig om de vill ställa några frågor eller om något var oklart.

Bilaga 2: Mejlet till Küchemann

Hello Mr. Küchemann.

We are two university students from Gothenburg, Sweden, who are writing our master thesis on secondary students' understanding of letters symbols in algebra. We have read your study about children's understanding of numerical variables and we are curious if you still have the questions you used for the study, as we wanted to do similar studies on a smaller scale here in Gothenburg. We figure we could use your questions as the foundation for our own questions.

We were also curious to see if there is a significant difference in your study and the results that we would get here in Sweden today.

Thank you in advance!

Agnes Wallgren and Alexzander Hasselholm

Bilaga 3: Mejlet till skolorna

Hejsan!

Vi är två lärarstudenter som håller på att skriva våra examensarbeten i matematik vid Göteborgs Universitet.
Vi är intresserade av att undersöka elevers förståelse och missuppfattningar kring bokstavssymboler inom algebra, och hade tänkt att genomföra ett prov på max 1,5 timme på elever i årskurs 9 och 1:an på gymnasiet angående detta. Sen hade vi också varit intresserade att genomföra några intervjuer med några lärare och elever.
Är detta något som vi skulle kunna genomföra på er skola? I så fall så är det de två första veckorna efter påsklovet som vi skulle vilja genomföra detta.

Tack på förhand!
Agnes Wallgren och Alexzander Hasselholm

Bilaga 4: Algebratest frågor

Algebra

Namn: ___________________________________ **Datum:** ________________

Skola: ____________________________________ **Klass:** _________________

Födelsedag: ____

Svaren sammanställs till en undersökning om elevers förståelse och missuppfattningar inom algebra. Informationen kommer enbart använda insamlade data till den aktuella undersökningen där ingen personlig information kommer att avslöja.

1. Fyll i luckorna:

$x \to x + 2$ | $x \to 4x$

$6 \to$ ______ | $3 \to$ ______

$r \to$ ______

---

2. Skriv ner den minsta och den största av dessa:

$n + 1,\quad n - 3,\quad n,\quad n + 4,\quad n - 7$ *Minsta*: ______ *Största:* ______

---

3. Vilken är störst, $2n$ eller $n + 2$?

Förklara: ____

---

4. **4 adderat med n** kan skrivas som **n + 4**. Lägg till 4 på dessa

8 | $n + 5$ | $3n$

________ | ________ | ________

4 multiplicerat med n kan skrivas som **4n**. Multiplicera med 4 på dessa

8 | $n + 5$ | $3n$

________ | ________ | ________

---

5. Om $a + b = 43$, | Om $n - 246 = 762$, | Om $e + f = 8$

$a + b + 2 =$ ______, | $n - 247 =$ ______, | $e + f + g =$ ______

6. Vad kan du säga om a om $a + 5 = 8$

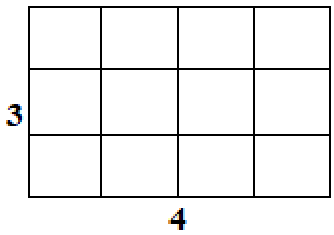
Svar: _______________

Vad kan du säga om b om $b + 2$ är lika med $2b$

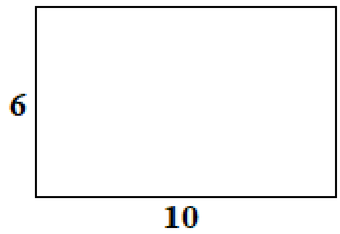
Svar: _______________

---

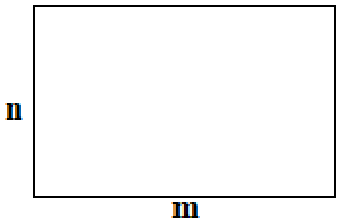
7. Vad är arean av dessa former:



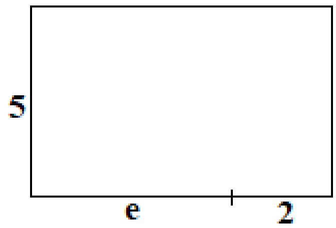
$A =$ __________



$A =$ __________

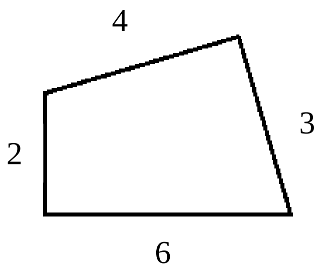


$A =$ __________

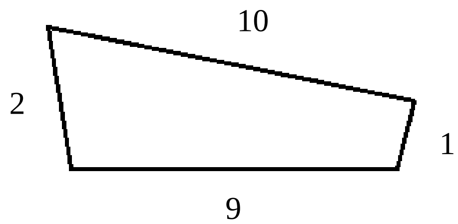


$A =$ __________

8.



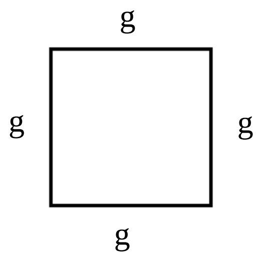
Omkretsen av denna form är lika med 6 + 3 + 4 + 2, vilket är lika med 15.



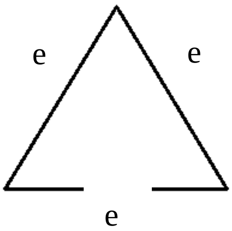
O = _________________

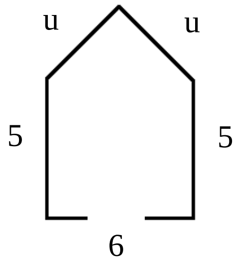
Räkna ut omkretsen av denna form.

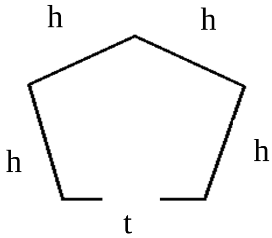
9. Denna kvadrat har sidor med längden g.
Så, för dess omkrets, kan vi skriva O = 4g

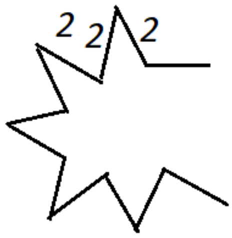


Vad kan vi skriva för omkretsen för följande former:









Delar av figuren är inte ritad. Det finns n antal sidor sammanlagt, alla med längd 2

O = __________ O = _________ O = ___________ O = _______________

---

10. Vitkål kostar 8 kr styck och rödbetor kostar 6 kr styck.

Om v står för **antalet** köpta vitkål och r står för **antalet** köpta rödbetor, vad står 8v + 6r för?

Svar: ______________

Vad är det totala antalet köpta grönsaker?

Svar: ______________

---

11. Vad kan du säga om u ifall $u = v + 3$
och $v = 1$ **Svar**: ______________

Vad kan du säga om m ifall $m = 3n + 1$
och $n = 4$ **Svar**: ______________

---

12. Om John har J kulor och Peter har P kulor, vad kan du skriva för antalet kulor de har tillsammans?

Svar: _______________

13. $\boldsymbol{a + 3a}$ kan förkortas och skrivas som $\boldsymbol{4a}$.

Förkorta följande, om det är möjligt.

$2a + 5a =$ ________ $\quad 3a - (b + a) =$ ________

$2a + 5b =$ ________ $\quad a + 4 + a - 4 =$ ________

$(a + b) + a =$ ________ $\quad 3a - b + a =$ ________

$2a + 5a + a =$ ________ $\quad (a + b) + (a - b) =$ ________

$(a - b) + b =$ ________

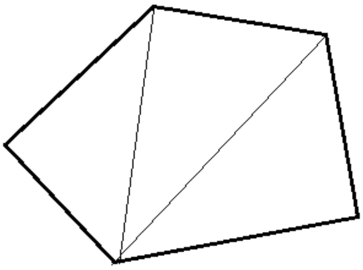
---

14. Vad kan du säga om *r* ifall $r = s + t$
och $r + s + t = 30$

Svar: ______________

---

15. I en form som denna
kan man räkna ut antalet diagonaler genom att
ta bort 3 från antalet sidor.



Så, en form med 5 sidor har 2 diagonaler:

En form med 57 sidor har __________ diagonaler;

en form med k sidor har __________ diagonaler.

---

16. Vad kan du säga om c ifall $c + d = 10$
och c är mindre än d

Svar: ______________________________

17. Maries grundlön är 20 kr per vecka.
Hon får också 2 kr för varje timme övertid hon jobbar.

Om *t* står för antalet timmar övertid som hon jobbar, och
L står för den **totala** lönen (i kr).
Skriv ner en ekvation som kopplar ihop **L** och *t*:

Svar: ______________

Vad skulle Maries totala lön vara om hon
jobbade 4 timmars övertid?

Svar: ______________

---

18. När är följande sant – *alltid, aldrig* eller *ibland*? **Stryk under rätt svar:**

$A + B + C = C + A + B$ Alltid Aldrig Ibland, när:

Svar: ______________

$L + M + N = L + P + N$ Alltid Aldrig Ibland, när:

Svar: ______________

---

19. $a = b + 3$. Vad händer med a ifall b ökar med 2?

Svar: ______________________________

$f = 3g + 1$. Vad hände med f ifall g ökar med 2?

Svar: ______________________________

---

20. Tårtor kostar *t* kr styck och bullar kostar *b* kr styck.

Om jag köper 4 tårtor och 3 bullar,
vad står $4t + 3b$ för?

Svar: ____________________________________

21. Om denna ekvation är
sann när $x = 6$,

$$(x + 1)^3 + x = 349$$

vilket värde på x kommer då
att göra denna ekvation sann?

$$(5x + 1)^3 + 5x = 349$$

$x =$ ___________

---

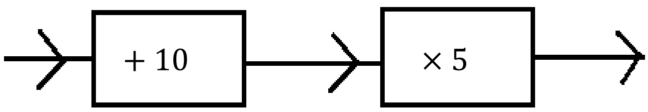
22. Blåa pennor kostar 5 kr styck och röda pennor kostar 6 kr styck. Jag köper några blåa och några röda pennor och det tillsammans kostar mig 90 kr.

Om *b* är antalet köpta blåa pennor, och
r är antalet köpta röda pennor,
vad kan du skriva om *b* och *r*?

Svar: ______________________

---

23. Du kan mata in vilket tal som helst in i maskinen:



Kan du hitta en annan maskin som har samma övergripande effekt?