



GÖTEBORGS
UNIVERSITET

Den bortprioriterade historien

En kvalitativ undersökning av
matematikhistoriens inkludering
i gymnasieundervisningen

Linn Appelkvist
Ämneslärarprogrammet
med inriktning mot matematik



Informant D:

*På den sjunde dagen kom ljuset
och på den sjätte dagen kom de naturliga talen.*

Eller hur var det nu? Vad står det i Bibeln? Något sådant!

Uppsats/Examensarbete: 15 hp
Kurs: LGMA2A
Nivå: Avancerad nivå
Termin/år: VT 2022
Handledare: Elin Götmark
Examinator: Johanna Pejlaré

Nyckelord: Matematikhistoria. Matematikundervisning. Matematikdidaktik. Didaktisk Transposition. History as a Goal. History as a Tool. History and Heritage.

Sammanfattning

Syftet med denna studie är att klargöra hur historia inkluderas i den svenska gymnasieskolans matematikundervisning. Ytterligare ett mål med studien är att inspirera lärare till en mer meningsfull matematikhistorisk inkludering. Databasinsamlingen gjordes med hjälp av sex kvalitativa intervjuer, där informanterna var verksamma gymnasielärare i matematik. För att koda och analysera datan användes tre teoretiska ramverk: Yves Chevallards teori om *didaktisk transposition*, uttrycken *historia som verktyg* och *historia som mål* myntade av Uffe Thomas Jankvist samt Ivor Grattan-Guinness begrepp *historia* och *arv*.

Med hjälp av den insamlade datan och de tre teoretiska ramverken kunde studiens tre frågeställningar besvaras. *På vilket sätt väljer lärare att inkludera matematikhistoria i sin undervisning?* Studien visar att matematikhistoria av flera anledningar sällan inkluderas i undervisningen. När det väl sker är det främst i form av att läraren förmedlar historisk information till eleverna. *Vad erhåller eleverna med hjälp av matematikhistoria?* Med hjälp av matematikhistoria erhåller eleverna bland annat kunskap om historiska matematiker och olika matematiska områdens utveckling. Studiens informanter framhåller matematikens historiska betydelse för människan, dess användningsområden och delvis även utvecklingens kulturella påverkan. Utöver detta tros eleverna kunna använda matematikhistoria som ett kognitivt hjälpmedel samt motiveras av en matematikhistorisk inkludering. *Hur väl stämmer inkluderingen av matematikhistoria överens med ämnesplanens formuleringar?* Denna studie visar att undervisningen relativt väl stämmer överens med formuleringarna i ämnesplanens inledning och syfte. Formuleringen som hittas i ämnesplanens centrala innehåll tycks däremot vara svårare att uppfylla.

Förord

Jag vill börja med att rikta ett stort tack till Elin Götmark, som under tio veckors tid handlett mig genom studiens alla delar. Jag vill också tacka Johanna Pejlaré för hennes många tips och Laura Fainsilber för hennes hjälp under arbetets inledande fas. Studiens informanter riktas särskilt tack för sin medverkan. Med er hjälp blev studien både underhållande och tänkvärd. Tack riktas även till Emina och Marie som varit till stor hjälp i studiens urvalsprocess. Medförfattaren till tidigare examensarbete Adam Sundqvist tackas för sin medverkan i testintervjun. Ytterligare tack ska han och flera andra kurskamrater ha för gott sällskap under de dagar som spenderades gemensamt på Chalmers. Min opponenter Alexander Hasselholm tackas för en intressant diskussion i arbetets slutfas. Slutligen vill jag tacka min särbo och blivande sambo Tobias Helgesson för att han under fem års studier varit min stöttepelare, inspiratör, nödbroms och cheerleader. Tack!

Innehållsförteckning

1	Inledning	1
1.1	Syfte och frågeställningar	1
2	Bakgrund	2
2.1	Styrdokumentet	2
2.2	Tidigare forskning	2
2.2.1	Varför ska matematikhistoria inkluderas i undervisningen?	2
2.2.2	Hur inkluderas matematikhistoria i undervisningen?	4
2.2.3	Vad begränsar användningen av matematikhistoria i undervisningen?	5
3	Teoretiska ramverk.....	6
3.1	Didaktisk transposition	6
3.2	History and Heritage	8
3.3	History as a Goal and History as a Tool	9
4	Metod.....	11
4.1	Förberedelser	11
4.2	Intervjuguide	11
4.3	Urval	12
4.4	Forskningsetik.....	12
4.4.1	Informationskravet	12
4.4.2	Samtyckeskravet	12
4.4.3	Konfidentialitetskravet	13
4.4.4	Nyttjandekravet.....	13
4.5	Testintervju	13
4.6	Intervjuer.....	13
4.7	Transkribering.....	14
4.8	Kodning	14
4.9	Analys	14
4.10	Trovärdighet	15
5	Resultat.....	16
5.1	På vilket sätt väljer lärare att inkludera matematikhistoria i sin undervisning?	16
5.1.1	När inkluderas matematikhistoria?	16
5.1.2	Hur inkluderas matematikhistoria?	17
5.1.3	Koppling till teoretiska ramverk	17
5.2	Vad erhåller eleverna med hjälp av matematikhistoria?	19

5.2.1	Kunskap om personer och matematiska områden	19
5.2.2	Motivation och kognitiva hjälpmedel	20
5.3	Hur väl stämmer inkluderingen av matematikhistoria överens med ämnesplanens formuleringar?	21
5.3.1	Inledning – matematikens utveckling och kultur	21
5.3.2	Syfte – matematikens betydelse och användning	22
5.3.3	Centralt innehåll – problemlösning.....	24
6	Diskussion	27
6.1	Resultatdiskussion	27
6.2	Metoddiskussion	30
6.2.1	De teoretiska ramverkens relevans	30
6.2.2	Urval.....	32
6.2.3	Intervjuer	32
6.2.4	Arbete med rådata.....	33
6.3	Didaktiska konsekvenser	34
6.3.1	Litteraturtips	34
6.4	Framtida forskning.....	35
	Referenslista.....	36
	Bilagor	39
	Bilaga 1 – Facebook-inlägg	39
	Bilaga 2 – Missivbrev	39
	Bilaga 3 – Intervjuguide	40
	Bilaga 4 – Mall för kodning	42
	Bilaga 5 – Mind map för analys	43

Figurförteckning

Figur 1	– Kunskapens omvandlingsprocess enligt teorin om didaktisk transposition	7
Figur 2	– En del av den mind map som skapades för att analysera koderna.....	15
Figur 3	– Väsentliga delar av teorin om didaktisk transposition för studiens första frågeställning	17
Figur 4	– Uttalanden kategoriserade som motiverande aspekter och kognitiva hjälpmedel...	31

1 Inledning

Intresset för matematikhistoria väcktes under tiden jag läste ämneslärarutbildningen på Göteborgs Universitet. I vissa matematikkurser valde föreläsarna att göra historiska nedslag för att ge en bättre förståelse för det matematiska innehållet, och utanför universitetsstudierna hände det att den historiska kunskapsutvecklingen diskuterades med vänner. Det slog mig att jag knappt aldrig stött på matematikhistoria under min egen tid på gymnasiet. Jag märkte även att matematiklärarna under min VFU sällan inkluderade historia i sin undervisning, och jag började undra varför det var så.

Under utbildningens fjärde år var det dags att skriva en forskningsöversikt på valfritt matematikdidaktiskt område. Jag och min klasskompis Adam Sundqvist kom överens om att undersöka inkluderingen av matematikhistoria i gymnasieskolan. Målet var att ta reda på hur matematikhistoria vanligen inkluderas i undervisningen, och vad det finns för fördelar och nackdelar med att göra det. Vi märkte att det fanns ett internationellt intresse för matematikhistoria bland matematiker och forskare, samt att många länder valt att inkludera det i sina styrdokument. Sverige visade sig vara ett av dessa länder, men trots detta hade vi svårt att hitta svensk forskning som stärkte beslutet om historisk inkludering i den svenska gymnasieskolan. Under skrivandet av forskningsöversikten väcktes en vilja om att personligen bli bättre på att inkludera matematikhistoria i undervisningen. Jag blev även mycket intresserad av att bidra med svensk forskning på temat, och nu gavs möjligheten.

1.1 Syfte och frågeställningar

Syftet med denna studie är således att undersöka hur svenska lärare inkluderar matematikhistoria i sin undervisning, och vad inkluderingen får för konsekvenser för eleverna. Ytterligare ett mål med studien är att få konkreta exempel på hur en meningsfull inkludering skulle kunna se ut.

Studien ämnar besvara följande frågeställningar:

- På vilket sätt väljer lärare att inkludera matematikhistoria i sin undervisning?
- Vad erhåller eleverna med hjälp av matematikhistoria?
- Hur väl stämmer inkluderingen av matematikhistoria överens med ämnesplanens formuleringar?

För att avgränsa studien utgjordes informanterna uteslutande av lärare, trots att även elevers utsagor hade kunnat användas för att besvara frågeställningarna. Ytterligare en avgränsning innebar att enbart gymnasielärare intervjuades. Detta eftersom studiens författare utbildar sig till just matematiklärare på gymnasienivå.

2 Bakgrund

För att förstå matematikhistoriens plats i klassrummet inleds detta kapitel med en genomgång av gymnasieskolans styrdokument. Därefter omnämns tidigare internationell forskning, som bland annat undersökt hur och varför matematikhistoria inkluderas i undervisningen.

2.1 Styrdokumentet

I den svenska gymnasieskolans styrdokument för matematikämnet används begreppet *historia* sparsamt. Ämnesplanen inleds med ett kort stycke som introducerar matematiken som skolämne. Den första meningen i denna *inledning* lyder enligt följande: ”Matematiken har en flertusenårig historia med bidrag från många kulturer” (Matematik, 2010). Begreppet kan även hittas under *ämnets syfte*: ”Vidare ska undervisningen bidra till att eleverna utvecklar kunskaper om matematikens betydelse och användning inom andra ämnen samt i ett yrkesmässigt, samhälleligt och historiskt sammanhang” (Matematik, 2010). Det introducerande stycket och ämnets syfte är mycket övergripande och är ämnade för gymnasieskolans samtliga matematikkurser. Informationen är tänkt att användas av läraren för att planera och genomföra sin undervisning, och bildar tillsammans med ett antal punkter långsiktiga mål som relaterar till matematikkursernas kunskapskrav (Skolverket, 2022).

Utöver ovanstående meningar kan begreppet historia hittas ytterligare en gång i matematikens ämnesplan: ”Matematiska problem med anknytning till matematikens kulturhistoria” (Matematik, 2010). Meningen ses under *centralt innehåll* vid underrubriken *problemlösning, verktyg och tillämpningar*, och är gemensam för gymnasiematematikens alla kurser (exklusive Matematik – specialisering). Informationen under centralt innehåll måste explicit inkluderas i matematikkurserna, men metoden och omfattningen är ospecificerad (Skolverket, 2022).

Det är upp till läraren själv att tolka formuleringarna i styrdokumentet. Då matematikhistoria inte längre inkluderas i kursernas kunskapskrav kan det som lärare vara svårt att avgöra vilken metod och omfattning som är lämplig (SKOLFS 2020:94). Ett tydliggörande från kommentarmaterialet är önskvärt men existerar inte (Skolverket, 2021).

2.2 Tidigare forskning

Bevisligen tycker Skolverket att matematikhistoria är så pass viktigt för matematikämnet att det benämns i ämnets inledning, syfte och centrala innehåll (Matematik, 2010). Man kan då fråga sig varför det är så viktigt att inkludera historia i matematikundervisningen.

2.2.1 Varför ska matematikhistoria inkluderas i undervisningen?

Den första motiveringen som lyfts i detta kapitel nämns frekvent bland forskare och kan kopplas till elevers motivation. I en studie från Singapore ingick drygt hundra elever från årskurs elva, vilket i Sverige motsvarar en gymnasienivå. Halva gruppen exponerades på tre olika sätt för matematikhistoria i sin undervisning, medan den andra halvan fick lära sig samma matematiska innehåll utan historiska inslag. Studien visade att det fanns en signifikant skillnad mellan

experiment- och kontrollgruppen. De som fick arbeta med matematikhistoria kände större motivation och bedömde det matematiska innehållet som viktigare än de elever som exkluderats från matematikhistoriska inslag (Lim & Chapman, 2015, s. 205). Liknande slutsatser dras av andra forskare på samma tema. Exempelvis kunde Lit, Siu och Wong i sin studie från Hong Kong se att experimentgruppen hade större entusiasm för det matematiska innehållet än kontrollgruppen (2001, s. 20), och Fried menar att matematik blir mer intressant om historia inkluderas i undervisningen (2001, s. 392). Flera forskare hävdar att ett historiskt perspektiv i undervisningen kan få elever att se på matematik med nyfikenhet och entusiasm, och inte enbart som en samling fakta och en mängd oförklarliga sanningar (Fried, 2014; Lim & Chapman, 2015; Siu, 2007). Att elever verkar bli mer motiverade och intresserade för matematik är förstås önskvärt, men Fried anser att historiska inslag inte bara bör inkluderas för nöjes skull. Han poängterar att inslagen även bör underlätta inläringen av det matematiska innehållet (2014, s. 682).

Detta leder till den andra motiveringen som framhävs i detta kapitel, med koppling till förståelsen för matematik. Fried menar att matematikhistoria kan göra det lättare för elever att förstå matematiska koncept, tolka problem och utveckla sin problemlösningsförmåga (2001, s. 392). Ytterligare argument kopplade till förståelse synliggör Gulikers och Blom i sin artikel. De hävdar att elevers kunskapsutveckling ofta liknar den historiska kunskapsutvecklingen inom matematiken, och att dagens elever stöter på samma svårigheter som matematiker gjort genom historien (2001, s. 225–226). En lärare kan därför välja att medvetet fokusera på historiska matematikers svårigheter, misstag och tillkortakommanden. På så sätt får eleverna insikt i att felräkning och osäkerhet är naturliga delar av matematiken, och att det inte bör påverka elevernas självkänsla negativt (2001, s. 227), ett argument som även styrks av Smestad (2007, s. 281). Matematikens historiska upptäckter och misstag visar hur den matematiska utvecklingen skett stegvis, och att det finns en stark matematisk koppling mellan olika tidsepoker, platser och kulturer (Gulikers & Blom, 2001, s. 227). Det sistnämnda påståendet går hand i hand med formuleringarna i ämnesplanens *inledning* och *syfte* (Matematik, 2010).

En tredje motivering som betonas i detta kapitel har koppling till styrdokumentet. Gulikers och Blom skriver nämligen om hur matematikhistorien främst innefattar manliga matematiker, och belyser i sin artikel vikten av att även nämna kvinnor som bidragit till den matematiska utvecklingen. De menar att en undervisning som även inkluderar historiska kvinnor får fler elever att känna sig representerade (2001, s. 227). Jämställdhetsperspektivet är något som genomsyrar den svenska gymnasieskolan. Exempelvis kan begreppet *jämställdhet* hittas i läroplanen under rubrikerna *grundläggande värden*, *övergripande mål och riktlinjer* och *normer och värden* (Läroplan för gymnasieskolan, 2011). Något annat som tycks värderas högt i den svenska gymnasieskolan är mångkultur. Begreppet *kultur* hittas under flertalet rubriker i läroplanen (Läroplan för gymnasieskolan, 2011), och framhävs även i ämnesplanen för matematik (Matematik, 2010). Det är därmed inte otänkbart att även mångkulturella inslag skulle kunna få fler elever att känna sig representerade.

Det sista argumentet på temat styrdokument kan kopplas till variation. ”Varierande former och arbetssätt” är en skrivning som hittas både i matematikens ämnesplan och kommentarmaterial

(Matematik, 2010; Skolverket, 2021). Att arbeta på ett varierande sätt tycks därför vara betydelsefullt. Gulikers och Blom menar att matematikhistoria välkomnar ett varierande arbetssätt (2001, s. 227), något som blir tydligt när befintlig forskning studeras. Här följer ett urval av varierande arbetssätt, inspirerade av forskningen som nämnts i detta kapitel: att skriva en uppsats om en matematiker eller ett matematiskt område, att arbeta med och lösa historiska problem, att studera olika typer av bevis och former för bevisföring, att utföra experiment, att medverka i matematiska aktiviteter samt att använda historiskt betydelsefulla instrument, såsom räknesticka och passare. En varierande undervisning med matematikhistoria som utgångspunkt kan även hjälpa eleverna att uppfylla det kommunikativa målet som hittas i *ämnets syfte*. Där står det nämligen att: ”Undervisningen i ämnet matematik ska ge eleverna förutsättningar att utveckla förmåga att kommunicera matematik muntligt, skriftligt och i handling” (Matematik, 2010).

Att döma av ovanstående forskningsresultat verkar det finnas flera bra motiveringar och argument till varför matematikhistoria bör inkluderas i undervisningen. Det verkar också finnas många sätt att göra det på. Givetvis väcks det frågor kring hur mycket matematikhistoria som letar sig in i klassrummen och på vilket sätt inkluderingen går till.

2.2.2 Hur inkluderas matematikhistoria i undervisningen?

Forskning visar att matematikhistoria sällan inkluderas i undervisningen (Siu, 2007, s. 270). Enligt en internationell studie utförd av Smestad verkar historia främst användas för att förändra elevers attityder, och inte för att förbättra elevers kunskaper och färdigheter (2007, s. 281). En koppling kan här dras till det föregående avsnittets motiveringar och argument. Elevers motivation och intresse för ämnet tycks alltså premieras framför förståelsen för matematiken och det matematiska arbetssättet. Smestad hävdar även att matematikhistoria ofta är något som förmedlas av läraren (2007, s. 283). Han menar att det finns en nackdel med detta, eftersom eleverna då inte får chansen att själva arbeta med det matematiska innehållet.

Det är dock inte bara läraren som kan ta på sig uppdraget att förmedla ett historiskt innehåll till eleverna. Även läroboksförfattare kan ha stor inverkan på vad som händer i klassrummet. En studie utförd av Smestad, Jankvist och Clark visar att danska, norska och amerikanska läroböcker innehåller väldigt lite matematikhistoria, och att innehållet sällan är meningsfullt för eleverna (2014, s. 173–178). Ett vanligt sätt att inkludera matematikhistoria på i en lärobok är att klistra in så kallade ”snippets”, något som kan liknas vid faktarutor. De är i regel korta och innefattar namn, datum, formler, bevis, koncept- och begreppsförklaringar (Schorcht, 2019, s. 2170). Eleverna förväntas därmed läsa faktarutan, men inte arbeta med dess innehåll på ett betydelsefullt sätt.

När lärare och läroböcker enbart förmedlar fakta om matematikhistoria finns det en risk att de ”matematiska problem” som omskrivs i det *centrala innehållet* helt utesluts ur undervisningen (Matematik, 2010). Man kan då fråga sig varför lärare och läroboksförfattare inte inkluderar historien på ett mer meningsfullt sätt. Varför är inkluderingen så svår?

2.2.3 Vad begränsar användningen av matematikhistoria i undervisningen?

Enligt lärarna själva finns det många anledningar till att inte inkludera matematikhistoria i undervisningen. Siu har under sin karriär listat 16 möjliga anledningar (2007, s. 268–269), och i studien framhålls särskilt tre (2007, s. 272). En inkludering av matematikhistoria kräver att läraren avsätter både planeringstid och undervisningstid. Tidsbrist påverkar således inkluderingen av matematikhistoria. Den andra anledningen är att det är svårt att hitta färdigt material att använda sig av. I brist på färdigt material tvingas läraren skapa sitt eget, och ännu en gång blir tidsbristen ett faktum. Den tredje anledningen som Siu nämner är att lärarutbildningar inte inkluderar användningen av matematikhistoria i tillräcklig utsträckning. Lärare har alltså inte den kunskap på området som behövs för att inkludera matematikhistoria i önskvärd grad och på ett meningsfullt sätt.

Ytterligare en begränsning är att man inte vet om matematikhistoria ökar lärandet. För att verkligen kunna påvisa vinsten av att inkludera matematikhistoria i undervisningen hade det varit idealt om det bidrog till att elever presterade bättre i skolan och lärde sig mer. När två studier på temat betraktas visar sig motstridiga resultat. I studien utförd av Lim och Chapman presterade experimentgruppen bättre än kontrollgruppen (2015, s. 205), medan studien utförd av Siu visar motsatt resultat (2007, s. 270). Utifrån dessa två studier kan ingen slutsats dras kring huruvida matematikhistoria leder till ökat lärande. Siu menar även att ”högpresterande” elever kategoriserar matematikhistoria som meningslöst och som ett slöseri med tid, eftersom det historiska innehållet sällan inkluderas i proven. De ”lågpresterande” eleverna däremot verkar ha en större dragning till matematikhistoria, kanske för att deras motivation är mindre prestationsbaserad (2007, s. 271).

3 Teoretiska ramverk

För att besvara frågeställningarna som formulerats för denna studie kommer tre olika teoretiska ramverk att användas för att analysera datan. Det första ramverket som används i denna studie är teorin om *didaktisk transposition*. Studiens andra teoretiska ramverk innefattar begreppen *historia* och *arv*, medan den tredje teorin utgår från uttrycken *historia som mål* och *historia som verktyg*. Det finns kopplingar mellan valda teorier och frågeställningar, vilka specificeras i teoriernas avslutande stycken.

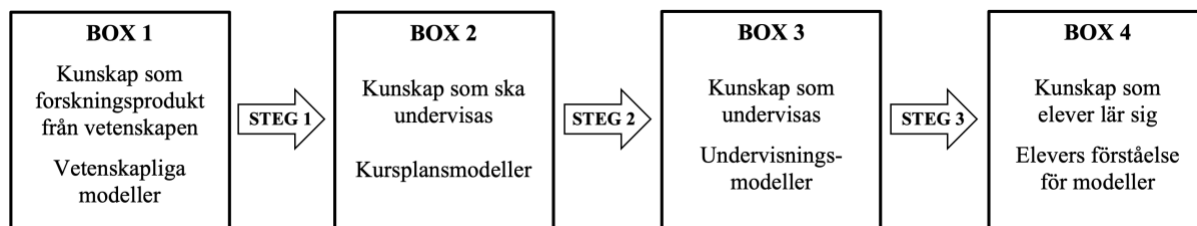
3.1 Didaktisk transposition

Med Guy Brousseau i spetsen genomgick matematikdidaktiken under 1970-talet en stor utveckling, där nya ramverk och begrepp etablerades. Denna grund kunde sedan användas av andra matematikdidaktiker för att vidareutveckla vetenskapen ytterligare. En som gjorde detta var Yves Chevallard. År 1980 höll han sin första kurs i *didaktisk transposition*, och teorin fick snabbt ett genomslag i Frankrike. Tankarna spreds sedan vidare till spansktalande länder, och tids nog nådde de även den engelsktalande delen av världen (Bosch & Gascón, 2006, s. 52).

Teorin om didaktisk transposition används för att studera kunskap och den väg som kunskap tar mellan vetenskaper, institutioner och individer (Chevallard & Bosch, 2014, s. 172). Kunskap måste omarbetas och omvandlas för att nå nya mottagare och miljöer, eftersom den ursprungliga kunskapen inte lämpar sig för alla kunskapsnivåer (Bosch & Gascón, 2006, s. 53). Den didaktiska transpositionen härstammar från matematiken, men har även använts som analysverktyg inom bland annat naturvetenskap, filosofi, musik, språk, teknologi och idrott (Chevallard & Bosch, 2014, s. 170–171). Kunskap kan alltså förflyttas från en institution till en annan, vilket kallas *institutionell transposition*. Exempelvis tar ekonomer och musiker kunskap från matematiken och integrerar den i sitt arbete, kanske på ett sätt som matematikerna inte tänkt sig eller haft som avsikt. Den nya institutionen utvecklar kunskapen vidare för att enklare kunna applicera den på sitt område. Den utvecklade kunskapen kan sedan åter igen genomgå en omvandlingsprocess och återvända till sin ursprungliga institution (Chevallard & Bosch, 2014, s. 171).

Didaktisk transposition kan därmed ses som en omvandlingsprocess som sker i flera steg (Chevallard & Bosch, 2014, s. 170). I detta examensarbete kommer fokus ligga på den omvandlingsprocess och de steg som binder samman ren vetenskap med den kunskap som når eleverna i undervisningen. Mer specifikt kommer processen att studeras i den riktning som visas i figur 1, men det är även möjligt att analysera kunskap i motsatt riktning (Chevallard & Bosch, 2014, s. 170). I den valda riktningen väljs kunskap ut, avgränsas, omorganiserar och omdefinieras innan den når eleverna i klassrummet (Bosch & Gascón, 2006, s. 55). Det är viktigt att lärare gör sin del i omvandlingen och reflekterar kring processen i sitt vardagliga arbete (Gericke, 2017, s. 1). I omvandlingsprocessen uppstår en *didaktisk relation*, som inkluderar läraren, eleven och kunskapen som ska förmedlas (Chevallard, 1989, s. 4). Men det finns många andra aktörer som också påverkar omvandlingsprocessen, för att länken mellan skolans värld

och samhället ska vara stark och för att innehållet i undervisningen ska motsvara samhällets krav (Chevallard & Bosch, 2014, s. 170).



Figur 1 – Kunskapens omvandlingsprocess enligt teorin om didaktisk transposition (inspirerad av Chevallard & Bosch, 2014 samt Gericke, 2017).

För att beskriva teorin om didaktisk transposition mer detaljerat kommer figur 1 användas som utgångspunkt. Den didaktiska transpositionen startar i vad som i detta examensarbete kallas box 1, och genomgår omvandlingar i tre steg innan den avslutas i box 4. Box 1 innefattar vanligen den kunskap som universitet och forskning genererar (Chevallard & Bosch, 2014, s. 170). Teorins upphovsman kallar boxens innehåll för *scholarly knowledge* (Chevallard, 1989, s. 7), medan det på svenska benämns som *kunskap som forskningsprodukt från vetenskapen* (Gericke, 2017, s. 1). I detta examensarbete kommer Gericikes svenska översättningar att användas genomgående, medan Chevallards begrepp fortsättningsvis kommer uteslutas. I box 1 används kunskapen för att frambringa ytterligare kunskap och för att organisera befintlig och nyproducerad kunskap (Chevallard, 1989, s. 8). Här växer nya teorier och modeller fram, vilka benämns som *vetenskapliga modeller*.

I den didaktiska transpositionens första steg väljs kunskap från box 1 ut och skrivs in i relevanta styrdokument, såsom läroplaner, kursplaner och ämnesplaner (Gericke, 2017, s. 1). Kunskapen, teorierna och modellerna som når styrdokumenten bestäms av bland annat Skolverket och kallas *kursplansmodeller*. En annan aktör som sällar bland vetenskapens stoff och därmed arbetar med steg 1 är läroboksförfattare (Gericke, 2017, s. 2). Både Skolverket och läroboksförfattare måste således ställa sig många frågor kring vilken kunskap som är viktig, varför just den kunskapen är viktig, och eventuellt även hur kunskapen ska benämnas (Bosch & Gascón, 2006, s. 56). Genom steg 1 bestäms alltså den *kunskap som ska undervisas* i skolan, och box 2 skapas.

Den svenska gymnasieskolans ämnesplaner är relativt ospecifika och lämnar lärare stort tolkningsutrymme. I steg 2 tvingas lärare förhålla sig till innehållet i box 2 och välja ut den kunskap som de vill förmedla till sina elever. Valet ska baseras på styrdokumenten men kan också baseras på läroböckernas innehåll, kunskaper inhämtade under lärarutbildningen, diskussioner med kollegor, beprövad erfarenhet och befintlig ämnesdidaktisk forskning (Gericke, 2017, s. 5). Kunskapen som väljs måste i regel omarbetas för att passa elevernas förkunskaper och det valda arbetssättet (Gericke, 2017, s. 6). Därmed omvandlas kursplansmodellerna till *undervisningsmodeller*, och kunskapen i box 3 består således av *kunskap som undervisas* (Gericke, 2017, s. 1).

Det tredje och sista steget i teorin om didaktisk transposition fokuserar på den didaktiska relationen mellan lärare, elever och kunskap (Chevallard, 1989, s. 4). Här tolkar eleverna informationen i undervisningsmodellerna och skapar sina egna uppfattningar kring innehållet (Gericke, 2017, s. 2). Box 4 består därmed av *elevens förståelse för modeller* och *den kunskap som eleverna lär sig*.

Teorin om *didaktisk transposition* kommer i denna studie att användas för att analysera hur lärare planerar, genomför och reflekterar kring sin undervisning. Studiens första frågeställning: *På vilket sätt väljer lärare att inkludera matematikhistoria i sin undervisning?* kommer främst att analyseras med hjälp av steg 2 och box 3, men delvis även steg 1. Den andra frågeställningen: *Vad erhåller eleverna med hjälp av matematikhistoria?* har stark koppling till steg 3 och box 4. För att analysera studiens sista frågeställning: *Hur väl stämmer inkluderingen av matematikhistoria överens med ämnesplanens formuleringar?* kommer teorins helhet att studeras. För att ge en mer nyanserad bild av lärarens arbetssätt kommer ytterligare två teoretiska ramverk att användas.

3.2 History and Heritage

”History” och ”heritage” är två termer som den brittiske matematikhistorikern Ivor Grattan-Guinness använder för att analysera hur exempelvis historiker och matematiker tolkar matematikhistoria. När Grattan-Guinness beskriver sitt analysverktyg utgår han från en matematisk ”notion”. I detta examensarbete har de tre termerna översatts till *historia*, *arv* och *begrepp* (i bred mening). Det är inte ovanligt att historia och arv oavsiktligt blandas ihop och används synonymt (Grattan-Guinness, 2004b, s. 165). Att förstå skillnaden mellan historia och arv är således inte lätt, och kräver att man utgår från termen begrepp.

Begrepp används av författaren som ett paraplybegrepp, och kan exempelvis vara en teori, definition, bevisföringsmetod, teknik, algoritm eller ett helt område inom matematiken (Grattan-Guinness, 2004b, s. 164). För att studera ett begrepps *historia* kan följande frågor ställas: Vad hände, och vad hände inte under begreppets utveckling? Varför hände det, respektive varför hände det inte? (Grattan-Guinness, 2004a, s. 1). Historiker är därmed intresserade av att skapa en bred bild av begreppets utveckling och få en generell förståelse för det (Grattan-Guinness, 2004b, s. 165). Nedan följer exempel på aspekter som de undersöker för att skapa denna breda bild.

Historiker intresserar sig bland annat för vad som motiverade matematikerna i fråga till att utveckla begreppet. Både positiva och negativa influenser är av intresse för denna utveckling, vilket bland annat inkluderar framgångar, misslyckanden, förseningar och tillägg. Historiker undersöker även relationer, alltså likheter och skillnader, mellan begreppet i fråga och tidigare samt senare begrepp. Att blicka både framåt och bakåt är viktigt när historiker fastställer utvecklingens kronologi (Grattan-Guinness, 2004a, s. 4). Historiker intresserar sig även för tillämpningar inom och utanför matematikområdet, samt för begreppets påverkan på matematiken och samhället (Grattan-Guinness, 2004a, s. 1). Utöver detta försöker historiker även att ta reda på vad matematikerna som utvecklade begreppet hade för tankar och

förhoppningar kring begreppets framtida användningsområden (Grattan-Guinness, 2004b, s. 168).

Begreppet *arv* har i stället koppling till frågan: Hur kom vi hit? (Grattan-Guinness, 2004a, s. 1). Detta är en fråga som matematiker ofta ställer sig, och det tycks vara vanligt att matematisk forskning görs med fokus på just arv (Grattan-Guinness, 2004b, s. 165). Bilden som skapas när fokus ligger på begreppets arv blir smalare än när historiker studerar begreppet, eftersom aspekterna av intresse är färre och mer begränsade. En person som undersöker ett begrepps arv intresserar sig främst för positiva influenser i begreppets utveckling, med andra ord utvecklingens framgångsrika delar, och skillnaderna mellan olika begrepp är av mindre betydelse än likheterna. En detaljerad kronologi är därmed mindre relevant och i regel mer översiktlig (Grattan-Guinness, 2004a, s. 4).

Sammanfattningsvis kan man föreställa sig att en historiker i tanken åker bakåt i tiden, och försöker se begreppets utveckling med matematikernas ögon (Grattan-Guinness, 2004a, s. 3). En person som i stället intresserar sig för begreppets arv söker ett historiskt perspektiv genom att utgå från nutid och blicka bakåt med hjälp av ett fåtal historiska nedslag (Grattan-Guinness, 2004b, s. 168). Grattan-Guinness poängterar att det finns stora skillnader mellan dessa förhållningssätt, men att det ena inte är bättre än det andra (2004a, s. 1). Han menar därför att både historia och arv bör genomsyra matematikundervisningen (Grattan-Guinness, 2004a, s. 7).

I denna studie kommer begreppen *historia* och *arv* användas för att undersöka vilken typ av matematikhistoria som inkluderas i undervisningen. Begreppen har viss koppling till studiens första och andra frågeställning, där lärarens val av arbetssätt och elevernas lärande står i fokus. För att slippa återupprepning kommer begreppen dock främst att användas när studiens tredje frågeställning besvaras. Då undersöks typen av kunskap som Skolverket syftar till i ämnesplanen.

3.3 History as a Goal and History as a Tool

Uffe Thomas Jankvist är en dansk professor som specialiserar sig på matematikundervisning. Han använder uttrycken "history as a goal" och "history as a tool" för att besvara frågan om varför matematikhistoria bör inkluderas i undervisningen (Jankvist, 2009, s. 235). I detta examensarbete har uttrycken översatts till *historia som mål* och *historia som verktyg*. Enligt Jankvist kan historia användas i matematikundervisningen för att stödja både lärandet och undervisningen. Han menar att de påverkas av vilka aspekter av matematikhistoria som inkluderas, och att det därmed finns en skillnad mellan att se historien som ett mål och som ett verktyg (2009, s. 237).

När matematikhistoria används som ett *verktyg* kan de historiska inslagen öka elevers motivation (Jankvist, 2009, s. 237). Jankvist menar att användandet av matematikhistoria kan göra matematiken mindre skrämmande, eftersom det finns en koppling mellan matematikers historiska misslyckanden och samtida elevers misslyckanden (2009, s. 238). Att misslyckas är uppenbarligen en naturlig del av matematiken, som enkelt belyses med hjälp av historia. Han

menar också att matematikhistoria har potentialen att göra matematiken mer human, eftersom historien om matematikens utveckling är lång och fylld av oförståelse (2009, s. 237). Användningen av historia i undervisningen kan därför bidra till att eleverna accepterar att även deras förståelse för matematik kan ta tid (Jankvist, 2009, s. 238). Att använda historia som ett verktyg kan alltså delvis ses som motivationshöjande, men även som ett kognitivt hjälpmedel (Jankvist, 2009, s. 238). Historiska inslag kan göra det enklare för eleverna att se matematiken ur ett nytt perspektiv, och det kan även göra det enklare för läraren att se matematiken från elevernas perspektiv (Jankvist, 2009, s. 238).

Då matematikhistoria i stället används som ett *mål* är det kunskapen om historien i sig som är av intresse (Jankvist, 2009, s. 237). Målet är således att få förståelse för hur matematik utvecklas och hur matematikens evolution sett ut. Här ingår bland annat anledningar till att matematiken utvecklats och beskrivningar av när och var utvecklingen ägt rum. Med historia som mål är det lätt att belysa att många olika kulturer påverkat matematikens utveckling, och att matematikens utveckling påverkat många olika kulturer. Jankvist poängterar att målet kan vara att eleverna får en generell bild av hur matematiken som disciplin fungerar, men också att målet kan vara mer specifikt och fokusera på hur ett visst begrepps evolution sett ut (Jankvist, 2009, s. 239).

I denna studie kommer uttrycken *historia som mål* och *historia som verktyg* att användas för att fördjupa analysen av arbetssätt ytterligare. Uttrycken kommer användas på ett liknande sätt som begreppen historia och arv, för att se hur lärare arbetar, vad eleverna lär sig och om arbetssättet motsvarar ämnesplanens formuleringar. Studiens alla frågeställningar är således relevanta för även detta teoretiska ramverk.

4 Metod

Frågeställningarna i denna studie har stark koppling till en lärares erfarenheter, uppfattningar och val av arbetssätt. Studien krävde att hänsyn togs till den sociala verklighet som lärare är verksamma inom, vilket stämmer väl överens med målet för kvalitativ forskning (Dalen, 2015, s. 15). Det var passande att välja en kvalitativ intervjustudie framför en observationsstudie, eftersom studien skulle fokusera på informantens upplevelser och tankar kring deras livssituationer (Dalen, 2015, s. 14).

4.1 Förberedelser

Enligt Dalen (2015, s. 32) bör en kvalitativ studie inledas med att forskaren fastställer studiens tema. Författaren till detta examensarbete hade tidigare skrivit en forskningsöversikt med fokus på matematikhistoriens inkludering i undervisningen. Skrivandet av forskningsöversikten väckte såväl intresse som idéer till denna studie. Efter att temat faststälts och ytterligare forskning studerats undersöktes möjliga teoretiska referensramar, i enighet med Dalens arbetsprocess (2015, s. 32). Därefter formulerades studiens syfte och frågeställningar (Dalen, 2015, s. 33). Till en början var frågeställningarnas formuleringar mycket kortfattade och ospecifika, och kom att utvecklas under arbetets gång. *Hur undervisar lärarna?* lade grunden för studiens första frågeställning: *På vilket sätt väljer lärare att inkludera matematikhistoria i sin undervisning?* Den andra frågeställningen: *Vad erhåller eleverna med hjälp av matematikhistoria?* föddes ur frågan: *Vad lär sig eleverna?* Den sista frågan: *Uppnås skrivningarna i ämnesplanen?* omformulerades till studiens tredje frågeställning: *Hur väl stämmer inkluderingen av matematikhistoria överens med ämnesplanens formuleringar?*

4.2 Intervjuguide

Efter ovanstående förberedelser kunde intervjuguiden skapas (se Bilaga 3). Den krävde en viss struktur för att den insamlade datan skulle kunna användas för att besvara de valda frågeställningarna. Samtidigt fanns en önskan om att informanterna skulle få prata förhållandevis fritt under intervjun. För att uppnå en balans mellan dessa två ytterligheter valdes en semistrukturerad intervjutyp (Dalen, 2015, s. 34), och en intervjulängd på 20–30 minuter. Intervjun utgjordes av tre delar, vilket rekommenderas av Dalen (2015, s. 36). Den första delen bestod av ett fåtal frågor som fick informanten att slappna av och bli bekväma med personen som utförde intervjun. Del två utgjorde majoriteten av intervjun och bestod av frågor med direkt koppling till studiens frågeställningar och de teoretiska ramverken. Den sista delen bestod av enbart en fråga som gav informanten möjlighet att lägga till ytterligare information.

Intervjuguidens frågor formulerades på ett sådant sätt att de inte skulle gå att misstolkas. Det lades även vikt vid att frågorna inte skulle vara ledande eller kräva någon särskild specialkunskap av informanten. Avslutningsvis var frågorna så pass sakliga att de inte skulle kunna anses för känsliga för att besvara sanningsenligt (Dalen, 2015, s. 36). För att frågorna i intervjuguiden skulle ge detaljerade och nyanserade svar formulerades flertalet följdfrågor, som kom att uttalas i olika utsträckning beroende på fylligheten i informanternas svar.

4.3 Urval

Då syftet med denna studie var att analysera matematiklärares arbetssätt i gymnasieskolan, var det just bland gymnasielärare i matematik som urvalet ägde rum. När transkriberade intervjuer från en kvalitativ studie analyseras eftersöks både nyanser och maximala skillnader mellan informanternas svar (Dalen, 2015, s. 54). Målet med urvalet var således att få spridning bland svaren genom att hitta lärare som undervisat i flertalet matematikkurser, och gärna inom flera av matematikkursernas olika spår (Skolverket, 2021, s. 5). För att få ytterligare spridning bland informanterna gjordes urvalen även inom flera kommuner.

Då informanterna var vuxna och informationen ansågs okänslig behövdes inga särskilda tillstånd för att utföra intervjuerna (Dalen, 2015, s. 41). Sökandet efter informanter startade med hjälp av ett inlägg i Facebookgruppen ”Matematikundervisning” (se Bilaga 1). Två lärare från denna grupp visade intresse och fick ytterligare information om studien via missivbrev (se Bilaga 2). Därefter kontaktades två större gymnasieskolor i olika kommuner i södra Sverige. Personliga kontakter på dessa kommunala skolor gjorde det möjligt att kontakta majoriteten av skolornas matematiklärare med hjälp av missivbrev via mejl.

Studien kom till slut att innefatta sex intervjuer, med informanter från tre olika skolor. Två av dem var kvinnor och fyra av dem var män. De hade arbetat som matematiklärare i 6–32 år, men majoriteten av dem hade över 20 års erfarenhet. Tack vare den långa erfarenheten hos informanterna fanns det en stor spridning bland erfarenheter, matematikkurser och spår.

4.4 Forskningsetik

För att säkerställa informanternas individuella utgångspunkt utgick studien från fyra huvudkrav: *informationskravet*, *samtyckeskravet*, *konfidentialitetskravet* och *nyttjandekravet* (Vetenskapsrådet, 2002, s. 6). Information om dessa huvudkrav nådde inledningsvis informanterna via missivbrev (se Bilaga 2). Samma information lyftes sedan även muntligt vid intervjuernas start.

4.4.1 Informationskravet

Det första huvudkravet innebär att informanterna ska informeras om deras roll i studien. De ska även få information om att deras medverkan är frivillig och att de har rätt att avbryta sin medverkan om så önskas (Vetenskapsrådet, 2002, s. 7). I missivbrevet användes följande mening för att klargöra detta krav: ”Du har rätt till att medverka på dina villkor och avbryta din medverkan när du vill.”

4.4.2 Samtyckeskravet

Vetenskapsrådet (2002, s. 10) betonar att ett avbrytande av medverkan inte får mötas av negativa följder eller påtryckningar från forskaren. Huvudkrav nummer två har därmed stora likheter med det föregående kravet, och ansågs inte kräva någon explicit motivering i missivbrevet.

4.4.3 Konfidentialitetskravet

Huvudkrav nummer tre betonar vikten av tystnadsplikt och anonymitet i en studie (Vetenskapsrådet, 2002, s. 12). Anonymitet är särskilt viktigt att säkerställa i ett litet land som Sverige, där antalet gymnasielärare i matematik är relativt få (Dalen, 2015, s. 20). För att klargöra denna information skrevs följande in i missivbrevet: ”Intervjun kommer att spelas in så att jag har möjlighet att transkribera vårt samtal. Jag är den enda som kommer ha tillgång till ljudfilen, och den kommer raderas när arbetet är färdigt. I enighet med forskningsetiska principer kommer du att förbli anonym. Exempelvis kommer informanterna att få benämningar som ”Person 1, Skola A”.”.

4.4.4 Nyttjandekravet

Det sista huvudkravet finns för att garantera att uppgifterna från informanterna inte används för kommersiellt bruk, eller för beslut och åtgärder som påverkar de medverkande (Vetenskapsrådet, 2002, s. 14). Detta krav sammanfattades i missivbrevet med hjälp av följande mening: ”Informationen kommer enbart att användas för att skriva detta examensarbete, och inget annat.”.

4.5 Testintervju

För att pröva intervjuguidens innehåll och utformning hölls en testintervju innan studiens riktiga intervjuer ägde rum (Dalen, 2015, s. 40). Medförfattaren till det tidigare examensarbetet ansågs ha såväl intresse som goda förkunskaper på temat, och ställde tacksamt nog upp på att agera erfaren lärare. Testintervjun gav insikt om att intervjuguidens innehåll var bra, men att tre mindre korrigeringar av intervjuguiden kunde göra den ännu bättre. Den första ändringen som gjordes var att frågornas olika teman förtydligades. Detta gjordes för att informanten lättare skulle hålla sig till frågan och inte komma från det tänkta området alltför mycket. För att göra jämförelser mellan olika matematikkurser enklare innebar intervjuguidens andra korrigering att följdfrågor om kurser och elevgrupper adderades till vissa befintliga frågor. För att övergången mellan de olika frågorna skulle bli så naturlig som möjligt innebar den sista ändringen att vissa frågor bytte plats (se Bilaga 3).

4.6 Intervjuer

Då informanterna var verksamma i olika kommuner fanns det inte möjlighet att utföra alla intervjuer ansikte mot ansikte. För att premisserna skulle bli så lika som möjligt för alla informanter utfördes i stället intervjuerna på distans via Zoom. I kvalitativa studier är informanternas egna ord och formuleringar viktiga för analysen (Dalen, 2015, s. 37). Av denna anledning spelades intervjuerna in, så att de skulle kunna transkriberas. Eftersom intervjuerna spelades in ansågs det inte nödvändigt att föra anteckningar under intervjuerna, och riskera att samtalet kändes ofokuserat. Eventuella pauser i intervjuerna fylldes utan svårigheter av informanternas beskrivningar, genom att intervjuaren ibland vågade sitta tyst (Dalen, 2015, s. 43). Intresse för informanternas svar visades med hjälp av kroppsspråk, ögonkontakt, instäm-

manden, skratt och korta följdfrågor (Dalen, 2015, s. 42). Det inspelade materialet utgjordes av sex intervjuer på cirka 20 minuter vardera.

4.7 Transkribering

Transkriberingen gjordes så snabbt som möjligt efter intervjun för att inte förlora några väsentliga detaljer från samtalet. De gjordes utan transkriberingsprogram för att naturligare kunna bekanta sig med materialet. För att det transkriberade materialet skulle bli enklare att koda och citera gjordes valet att korrigerera texten något. Exempelvis så utelämnades halvt påbörjade meningar och utfyllnadsord, och ytterligare en form av korrigering var att översätta talspråk till ett mer korrekt grammatiskt språk. Vid dessa korrigeringar var det viktigt att betydelsen från alla uttalanden bibehölls. Förhoppningen är att dessa korrigeringar inte ska ha påverkat tolkningen av materialet.

4.8 Kodning

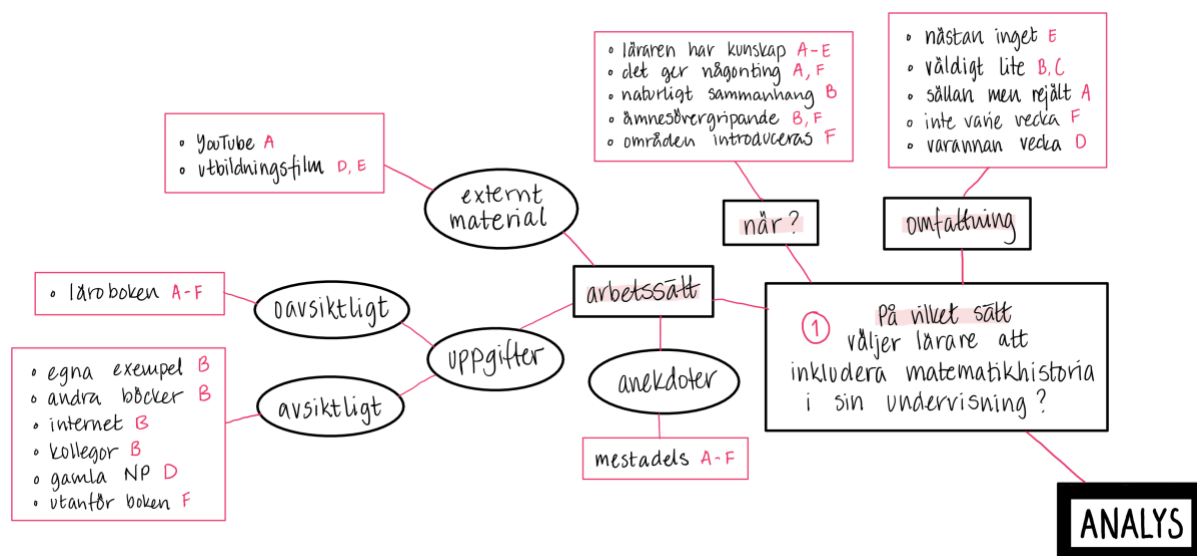
De transkriberade intervjuerna utgjorde studiens rådata (Jacobsson & Skansholm, 2019, s. 115). För att enklare kunna analysera materialet, få en överblick över rådatan och för att identifiera de mest centrala aspekterna krävdes en kodningsprocess (Jacobsson & Skansholm, 2019, s. 125). Koderna i denna studie grundades i de valda teoretiska ramverken. Från teorin om didaktisk transposition valdes sju koder ut, vilka motsvarade *de fyra boxarna* och *de tre stegen* i figur 1. De övriga två teorierna representerades av koderna *historia*, *arv*, *verktyg* och *mål*. Ytterligare en kod skapades för att enklare hitta information om informanternas *yrkeserfarenhet* (se Bilaga 4). Ibland kodades enstaka ord, ibland hela meningar och vid vissa tillfällen längre stycken. Utöver kodandet med överstrykningspennor skrevs även korta kommentarer i dokumentets marginal, för att tydliggöra citatens kopplingar till de teoretiska ramverken. Målet med kodningsprocessen var att hitta rådata som hade koppling till studiens syfte, frågeställningar och teori, men också till aspekter som lyfts fram i tidigare forskning och som nämnts i studiens bakgrund. Kodningsprocessen utgjorde på så vis en bra grund i skrivandet av både resultat- och diskussionsdelen.

4.9 Analys

När rådatan kodats organiserades koderna genom att kategorisera dem ytterligare. För detta ändamål skapades en mind map (se Bilaga 5), där studiens frågeställningar utgjorde de tre huvudgrenarna. Information kunde sedan sorteras i förhållande till de tre huvudgrenarna och skapa ett större grenverk med information i olika nivåer. Mind mapen skapades digitalt för att göra korrigeringar och designmässiga förändringar så enkla som möjligt.

I figur 2 ses en av huvudgrenarna i denna mind map. Till den första frågeställningen hittades koder som hade med omfattning, tillfällen och arbetssätt att göra. Dessa begrepp fick utgöra den första nivån i grenverket, vilket tydliggjordes med hjälp av en rektangel och färgöverstrykning. För att exemplifiera olika typer av arbetssätt gjordes valet att skapa ytterligare nivåer i grenverket. Dessa nivåer visas med hjälp av ellipser. Trädets lövverk innehåller konkreta

exempel från de transkriberade intervjuerna. De framhävs med hjälp av en färgglad inramning och kopplas till respektive informant med hjälp av bokstäverna A–F.



Figur 2 – En del av den mind map som skapades för att analysera koderna.

4.10 Trovärdighet

För att en studie ska vara trovärdig krävs det hög reliabilitet och validitet. Inom kvalitativ forskning innebär en hög reliabilitet att en annan forskare ska kunna återskapa samma studie (Dalen, 2015, s. 116). Genom att metoden i denna studie beskrivits utförligt bör detta vara möjligt, och reliabiliteten kan därför anses vara hög. En välgenomtänkt och väldokumenterad studie är även en bra grund för validiteten (Dalen, 2015, s. 120). Denna studie bedöms ha teoretisk validitet eftersom sambanden mellan frågeställningarna, teorierna, kodningen och analysen är starka (Dalen, 2015, s. 122). För att stärka validiteten ytterligare var det viktigt att kvaliteten på inspelningen var hög, så att transkriberingen blev korrekt (Dalen, 2015, s. 121). Studien bedöms även ha hög tolkningsvaliditet eftersom fylliga och bokstavliga uttalanden premierades i kodningsprocessen (Dalen, 2015, s. 121). Vid tillfällen när mindre bokstavliga tolkningar gjordes var det viktigt att andra delar av informantens uttalanden kunde styrka den tolkning som gjordes (Dalen, 2015, s. 122). Under hela processen var det därför viktigt att forskaren var medveten om sin subjektivitet och sina eventuella åsikter och förhoppningar (Dalen, 2015, s. 117). Denna subjektivitet problematiseras ytterligare i metoddiskussionen.

5 Resultat

Studiens resultat presenteras i tre delar som motsvarar studiens tre frågeställningar.

5.1 På vilket sätt väljer lärare att inkludera matematikhistoria i sin undervisning?

5.1.1 När inkluderas matematikhistoria?

Det visar sig att matematikhistoria inkluderas i undervisningen i varierad utsträckning. De flesta informanterna i denna studie säger sig göra det sällan, men det finns viss spridning mellan dem. Ytterligheterna kan belysas med hjälp av följande två citat, där informant E verkar göra det minst och informant D mest.

E – 0% om jag är smärtsamt ärlig. Jag nämner väl Pythagoras när man pratar om Pythagoras sats. Det tar ju ungefär 15 sekunder.

D – Säg att man i alla fall nämner det en gång varannan vecka, i mer eller mindre utsträckning.

Enligt informanterna finns det flera anledningar till att det görs relativt sällan, men tidsbrist är den vanligaste anledningen. Flera av lärarna påpekar även att formuleringarna i ämnesplanen är svårtolkade, att det saknas kunskapskrav kopplade till matematikhistoria och att de nationella proven inte prioriterar uppgifter med historisk anknytning.

D – Väljer man att inte ha med det i bedömningsanvisningarna, och ändå ha fullsmockade kurser, då har man ett tudelat uppdrag och då får man prioritera. Då prioriterades det som inte är med i kunskapskraven ofta bort.

F – Jag försöker alltid att gå efter ämnesplanen, men när man tittar på det så finns det ju egentligen en punkt som tar upp någonting om kulturhistoria, eller något sådant där står det. Det är inte jättespecifikt det målet skulle man kunna säga.

Matematikhistoria tycks främst inkluderas när läraren anser att hen har tillräckligt med kunskap sedan tidigare, men ytterligare research kan förekomma när tiden räcker till. Flera lärare nämner även vikten av ett naturligt sammanhang och särskilt givande information. Följande citat från informant B visar på flera av dessa aspekter.

B – Det är mest utifrån där det passar med ämnesområde. Oftast tangerar det med där man har en egen kunskap bakåt. Men det är klart att, om jag ska stå och prata om Gauss eller någon, då måste jag läsa in mig på det först också, därför att man tyvärr gör det så sällan.

5.1.2 Hur inkluderas matematikhistoria?

När matematikhistoria väl letar sig in i klassrummet är det enligt lärarna främst i form av ett berättande. Anekdoter om historiska personer och matematiska genombrott utgör majoriteten av det historiska innehåll som når eleverna. Informant C beskriver arbetssättet på följande vis.

C – Det är mest att jag berättar helt enkelt, om själva personen och om vad den har gjort. Som extra fakta, som anekdoter. Det är inte så att vi har någon större interaktion i klassen, det händer inte.

Enligt vissa lärare kan berättandet även ske genom externa medier, som exempelvis längre utbildningsfilmer om aritmetik och Youtubeklipp som kommenterar SI-enheter. Ett mindre vanligt, men mer elevaktiverande arbetssätt, är räkneuppgifter med historisk anknytning. Vissa lärare arbetar aktivt med att leta fram denna typ av uppgifter. Informant B beskriver hur hen bland annat tar hjälp av boken ”Matematiska nedslag i historien”.

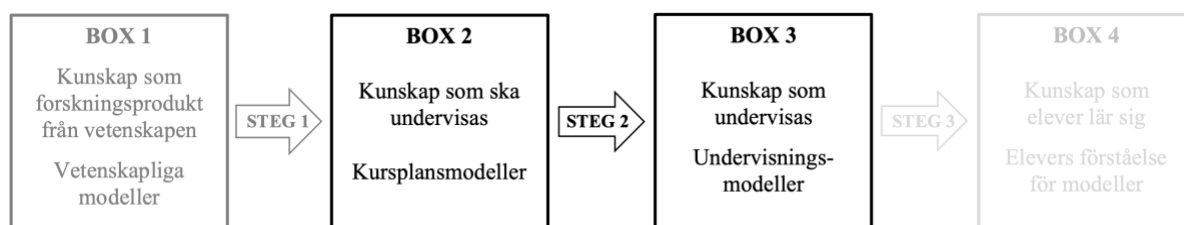
B – Ja, den har en del. Sen har man också samlat på sig själv och från kollegor. Man läser också på nätet om historiska matematikproblem. Så då har jag en liten bank av problem.

Andra lärare förlitar sig helt på att läroboksförfattarna inkluderar räkneuppgifter på temat matematikhistoria. Informant E beskriver det så här.

E – Jo, men det kan ju faktiskt finnas i böckerna ibland, vissa tal som stambråk som de räknade med under antiken eller när det nu var. Då kommer det ju faktiskt till dem i form av uppgifter. Men det är ju inte tack vare mig, utan det är ju för att det råkar finnas i boken.

5.1.3 Koppling till teoretiska ramverk

Enligt teorin om *didaktisk transposition* kan studiens första frågeställning främst kopplas till teorins andra box och de beslut som läraren fattar för att förflytta kunskapen till teorins tredje box (Chevallard & Bosch, 2014). Nedan ses en omarbetad version av figur 1 där de mindre väsentliga delarna av transpositionen markerats i två nyanser av grått.



Figur 3 – Väsentliga delar av teorin om didaktisk transposition för studiens första frågeställning (inspirerad av Chevallard & Bosch, 2014 samt Gericke, 2017).

Som tidigare setts vittnar flera lärare om att formuleringarna i ämnesplanen är få och tolkningsbara. Det visar sig också finnas lärare som saknar kunskap om vad som faktiskt står i ämnes-

planen. Skolverket ger inte förslag på något specifikt matematikhistoriskt innehåll, vilken omfattning som är eftersträvansvärd eller vilka typer av arbetssätt, utöver problemlösning, som är lämpliga för en historisk inkludering (Matematik, 2010; Skolverket, 2021). Lärarna har således stor frihet i sin planering och undervisning. Enligt denna studie väljs de historiska inslagen främst efter egen kunskap och hur väl de passar in i kursen, men information och inspiration kan även hämtas från läroboken och ytterligare research. Det kan därför vara rimligt att även inkludera box 1 i denna transposition, eftersom undervisningsmaterialet kan grundas i egen research. Materialet plockas då från *kunskap som forskningsprodukt från vetenskapen* och omarbetas för en muntligt lärarledd presentation eller räkneuppgifter på elevernas kunskapsnivå. Omvandlingsprocessen innefattar därmed främst steg 2, men i vissa fall även steg 1. Detta är förklaringen till varför box 1 och steg 1 i figur 3 markerats i en mörkare nyans av grå än steg 3 och box 4.

Denna studie grundas i ytterligare två teorier som passar den första frågeställningen väl, men då det finns ett visst överlapp bland studiens tre frågeställningar togs beslutet att djupdyka i dessa teorier först när studiens andra och tredje frågeställning besvaras. Nedan beskrivs således kopplingar mellan teorierna och lärarens arbetssätt i korthet.

Begreppet *verktyg* lämpar sig väl för att beskriva matematikhistoria som ett kognitivt hjälpmedel och de motiverande aspekter som följer en historisk inkludering (Jankvist, 2009, s. 237–238). Denna koppling görs detaljerat då frågeställning två besvaras, men ett kort exempel på hur historien används som ett verktyg lyfter informant C.

C – Ja, att det inte blir så sterilt som matten kan vara ibland. Att man sätter det i ett visst perspektiv.

Begreppet *mål* går i stället hand i hand med matematikens utveckling och kulturella påverkan (Jankvist, 2009, s. 239). Kopplingen kan ses i följande citat från informant D, men betonas mer utförligt då den tredje frågeställningen besvaras.

D – Tänk på hur du skapar en liksidig triangel. Det kunde de [antikens matematiker] göra för flera tusen år sedan.

När den tredje frågeställningen besvaras lyfts även skillnaden mellan begreppen *historia* och *arv*. Det visar sig vara svårt att dra en exakt gräns mellan begreppen i denna studie, något som Grattan-Guinness också påpekar (2004b, s. 165). Flera lärare tycks inkludera både historiska och arvmässiga aspekter i sin undervisning, vilket kan ses i intervjun med informant D.

D – Jag vet att det finns någon sådan här klassisk uppgift som ligger ute som handlar om kalendrar. Där man jämför vår kalender med kalendern som man använder inom islam, med månen. Då tittar man på vad man har för matematisk formel. För år 2022 i vår kalender, vad blir det enligt den islamska kalendern?

Hens jämförelse mellan olika kalendrar kan tolkas som en jämförelse mellan olika historiska företeelser. Båda kalendrarna i fråga grundas i att ett år består av tolv månader, och har därmed

stora likheter. Likheter är av stort intresse när fokus riktas mot begreppets *arv* (Grattan-Guinness, 2004a, s. 4). Det finns dock även skillnader mellan kalendrarna, såsom månadernas och årets längd. När skillnader i stället betonas är begreppets *historia* snarare i fokus. Uppgiften visar även att matematik kan tillämpas för att förstå andra vetenskaper bättre, i detta fall astronomi och religion. Tillämpningar och användning inom och utanför matematiken är också något som belyses med hjälp av historia (Grattan-Guinness, 2004a, s. 1).

5.2 Vad erhåller eleverna med hjälp av matematikhistoria?

Enligt informanterna inkluderas matematikhistoria aldrig eller mycket sällan i bedömningen. Informant A säger sig inte göra det längre, men menar att hen eventuellt gjort det förr i formativt syfte.

A – Möjligtvis i min ungdom, mer som en koll på om de har lyssnat.

Ett alternativt sätt att testa de historiska kunskaperna på presenterar informant B. Hen poängterar att de ämnesövergripande projekt som ofta förekommer på hens skola, kan ge bedömningsunderlag som innefattar matematikhistoria.

B – Sen är man också väldigt dålig på, eller man... jag är väldigt dålig på att utvärdera det. Jag lägger inte in en historisk aspekt-fråga i proven på det sättet. Däremot så får de ändå med sig, i och med att vi väver ihop det med till exempel historian. Då kan vetenskapshistorien komma in där, i andra kurser. Så jag känner ändå att de får med sig den kunskapen.

Endast informant F säger att uppgifter med matematikhistorisk anknytning kan inkluderas i proven.

F – Det är då provuppgifter som kanske bygger på, till exempel grafteori och de här broarna [syftar till Königsbergs sju broar]. Alltså att uppgiftstyper kan ha en historisk klang, men sen att man räknar på samma sätt, eller vad man säger. Men det är just där det ligger. Jag har inte kört några rena historieinlämningar eller så, det har jag inte gjort.

Då kunskapen sällan testas är det svårt att analysera vad eleverna får med sig med hjälp av steg 3 och box 4 i teorin om didaktisk transposition. I stället får denna studie förlita sig på vad lärarna tror eller uppfattar att eleverna erhåller med hjälp av matematikhistoria.

5.2.1 Kunskap om personer och matematiska områden

Den matematikhistoriska inkluderingen innefattar enligt denna studie tre olika typer av historisk information: kunskap om viktiga personer för den matematiska utvecklingen, historia kopplad till större och mer övergripande områden samt historia kopplad till mindre och mer specifika områden. De mest frekvent nämnda historiska personerna är Newton, Pythagoras och Gauss. Sammanlagt nämns elva historiska personer, vars matematiska bidrag lämpar sig för olika matematikkurser i gymnasiet. Inkluderingen i olika kurser blir även tydlig när informanterna ger exempel på matematiska områden där historia inkluderas. Bland de övergripande områdena

nämns geometri och integraler av flest informanter, medan SI-enheterna, pyramiderna i Egypten och det gyllene snittet utgör de mest frekvent nämnda specifika områdena som inkluderas. Sammanlagt nämns 10 övergripande och 25 specifika områden, som tillsammans visar hur matematikhistoria lämpar sig för allt från matematik 1 till matematik 5 (se Bilaga 5). Vissa lärare tyckte att inkluderingen var enklare i de lägre kurserna, medan andra uttryckte det precis motsatta.

Exakt vad och hur mycket av denna information som eleverna lägger på minnet är omöjligt att säga, eftersom det inkluderas i bedömningen i mycket liten grad. Informant F spekulerar i att elever med ett intresse för matematikhistoria lägger informationen på minnet i högre utsträckning än de utan sådant intresse. Informant A ger exempel på ett tillfälle där en elev, flera år efter att hen tagit studenten, hört av sig för att säkerställa detaljerna kring en historisk anekdot. I samma veva poängterar informant A skämtsamt att elever aldrig hör av sig för att säkerställa att de minns pq-formeln korrekt.

5.2.2 Motivation och kognitiva hjälpmedel

Utöver kunskaper om personer och matematiskt innehåll tror studiens informanter att inkluderingen även kan gynna andra aspekter av undervisningen. När lärarna berättar om sina syften och mål med att inkludera matematikhistoria radas många olika exempel upp. Observera att detta delavsnitt lika väl hade kunnat placeras under studiens första frågeställning. Det finns nämligen en koppling mellan dessa gynnande aspekter och lärarens val av arbetssätt. Kopplingen mellan de gynnande aspekterna och vad eleverna erhåller bedömdes dock som starkare, och därför placerades delavsnittet här under studiens andra frågeställning.

De exempel på gynnande aspekter som studiens informanter lyfter har kategoriserats med hjälp av Jankvists begrepp *verktyg*. Jankvist menar att matematikhistoria kan fungera som ett verktyg om informationen och arbetssättet är *motiverande* eller fungerar som ett *kognitivt hjälpmedel* (Jankvist, 2009, s. 237–238).

Bland *motiverande* exempel nämner majoriteten av informanterna att matematikhistoria används för att öka intresset för matematik och för att göra innehållet mer intressant. Informant A uttrycker detta syfte på följande vis.

A – Det är verkligen bara som en reklamfilm för att matte är intressant.

Ett annat vanligt motiverande exempel är att matematikhistoria gör lektionen roligare, något som informant D belyser. Hen berättar också om hur svårt det är att veta exakt vad eleverna kan och bör erhålla med hjälp av matematikhistoria.

D – Det är väl ett roligt sidospår, att ha lite anekdoter att hänga upp det på. Men frågan är om det ska vara mer än så, om det hade gjort matematiken mer tillgänglig eller något. Jag vet inte.

Utöver att göra det mer intressant och roligt nämner informanterna ytterligare åtta exempel på motiverande aspekter (se Bilaga 5). Några av dem är att historiska inslag får eleverna att vakna

till, att lektionen känns mindre steril och att historien gör det matematiska innehållet mer meningsfullt.

Bland *kognitiva hjälpmedel* nämns förmågan att enklare minnas det matematiska innehållet av majoriteten av informanterna. Informant B säger så här.

B – Det gör också att jag tror att eleverna kommer ihåg det på ett bättre sätt.

Informant F beskriver hur variation och olika representationer ger eleverna möjlighet att minnas lektionsinnehållet bättre. Hen lyfter matematikhistoriska bilder som ett exempel.

F – Jag jobbar mycket med bilder, så absolut. Sätta bilder på varje område. Att man minns tillbaka. Det kan vara en gubbe eller en kvinna, eller det kan vara en rolig bild. Det finns många historiska lite roliga bilder, då kan man ha det. Så allt man kan hänga upp det på är bra.

Studiens informanter lyfter ytterligare tio exempel på hur matematikhistoria kan fungera som ett kognitivt hjälpmedel (se Bilaga 5), bland annat att historien sätter det matematiska innehållet i ett sammanhang samt att eleverna får mer kontext och därmed en djupare förståelse för matematiken. Informant C uttrycker matematikhistoria som ett kognitivt hjälpmedel på följande sätt.

C – Att ge lite historiskt perspektiv, att man kan sortera in det i någon tidsepok. Lite så.

För att få en mer nyanserad bild av vad eleverna erhåller med hjälp av matematikhistoria kan även begreppen *mål*, *historia* och *arv* användas, framför allt i besvarandet av den tredje och sista frågeställningen.

5.3 Hur väl stämmer inkluderingen av matematikhistoria överens med ämnesplanens formuleringar?

För att besvara denna forskningsfråga har en indelning i tre underrubriker valts, vilka motsvarar de tre formuleringar som går att hitta i matematikens ämnesplan för gymnasieskolan.

5.3.1 Inledning – matematikens utveckling och kultur

I ämnesplanen möts läsaren av följande introducerande mening: ”Matematiken har en flertusenårig historia med bidrag från olika kulturer.”. Från denna mening har begreppen *flertusenårig* och *kulturer* plockats ut och använts i studiens analys. Det första begreppet kodades om till *utveckling i tid*, medan begreppet *kulturer* inte krävde omkodning. De valda koderna går hand i hand med Jankvists *mål* (2009, s. 237). Han menar att elever får kunskap om matematikens utveckling och dess påverkan från olika kulturer när matematikhistoria används som ett mål i undervisningen (Jankvist, 2009, s. 239).

Studiens samtliga informanter nämner att matematikens *utveckling* är en relevant aspekt att lyfta i undervisningen. Flera lärare berättar att de inkluderar matematikens ursprung, att matematikens som vetenskap är föränderlig och att den lever och utvecklas än idag. Informant C belyser dessa aspekter.

C – Man har ju ofta föreställningen som elev, att matematik är urgammalt, det har alltid funnits. Så, ”när kom vissa saker upp”, helt enkelt. Då kan man koppla det till vissa personer som uppfann eller formulerade matematik kring det. Att man ser att det är en historisk utveckling som fortfarande pågår. Att ny matematik fortfarande upptäcks, som vi tyvärr knappast kan ta in i vår undervisning, det är alldeles för abstrakt. Men att det är en pågående utveckling.

Begreppet *kultur* nämns i mindre utsträckning än begreppet utveckling. Informant B är en av de som explicit beskriver hur kulturer påverkat den matematiska utvecklingen.

B – Men att man får en känsla och en förståelse för att det faktiskt är en utveckling som sker också, och att utvecklingen har skett från många olika håll. Var uppstod det, i olika delar och kulturer? Att man får det sammanhanget.

Trots att inte samtliga informanter nämner begreppet kultur uttryckligen, verkar många elever ändå stöta på matematiskt innehåll från olika kulturer. Detta eftersom lärarnas anekdoter och uppgifter tycks handla om många olika personer, tidsepoker och områden i matematiken.

Enligt denna studie verkar det som att ämnesplanens första formulering uppfylls i viss mån. Vissa lärare inkluderar mer historia i sin undervisning än andra, och tycks då lägga tyngd vid matematikens utveckling och kulturella påverkan. De lärare som mer sällan inkluderar historia i sin undervisning berör också utvecklingen och olika kulturer, men inte alls i samma grad.

5.3.2 Syfte – matematikens betydelse och användning

Nästa formulering kan hittas i ämnets syfte: ”Vidare ska undervisningen bidra till att eleverna utvecklar kunskaper om matematikens betydelse och användning inom andra ämnen samt i ett yrkesmässigt, samhälleligt och historiskt sammanhang.”. Ur denna mening plockades koderna *betydelse* och *användning* ut för att analyseras. Matematikens betydelse och olika användningsområden kan dock inkluderas i undervisningen utan att matematikhistoria behandlas. Då denna intervjustudie kretsade kring begreppet matematikhistoria antas dock alla citat nedan grundas i en historisk inkludering.

Koderna betydelse och användning har stark koppling till Grattan-Guinness begrepp *historia* och *arv* (2004a, s. 1), som används för att analysera hur ämnesplanens andra formulering påverkar den historiska inkluderingen.

Matematikens *betydelse* nämns av majoriteten av studiens informanter. Informant A lyfter matematikens storhet och poängterar hur matematikens historiska betydelse kan få eleverna att uppskatta matematikens värde.

A – Däremot att visa dem [eleverna] hur otroligt viktig matten har varit, så kanske de kan tänka själva att den ändå spelar roll, och att vi inte hade varit någonstans på något område vi är idag utan matematikens historia, att den sitter ihop med den profana historien utanför matematiken. Det är att levandegöra. Som sagt, det är svårt att ”Idag måste du kunna matte för att...”, för det finns alltid en motreplik till det, att ”Det kan jag lösa så”. Däremot att få dem att fatta att det är stort med matte.

Informant B framhäver också matematikens betydelse, men betonar matematiken som vetenskapsgren. Hen menar att denna aspekt har särskild betydelse i undervisning riktad mot natur- och teknikelever, och att det utan matematikshistoriska inslag skulle vara svårt att belysa vetenskapsgrenens betydelse.

B – Jag tror att det både ger en förståelse för att matematiken är en vetenskap som är föränderlig men har sin grund långt bak. Det blir ändå någonstans att de [eleverna] förstår just matematikens värde som egen vetenskapsgren, att det inte bara är räkning. Nu har jag c-spåren som man säger, och att de förstår att här handlar det inte alltid om att du ska ha nytta av det här när du går till Ica. Släpp den frågan, för det är matematik för matematikens egen skull. Det handlar inte om att du ska räkna, utan det handlar om en förståelse där det kan vara intressant just för matematiken som en vetenskap. Då tror jag att historiedelen är jätte viktig i det.

Majoriteten av studiens informanter nämner även matematikens olika *användningsområden*. Informant D lyfter hur matematik generellt används för att förstå vår omvärld.

D – Vi har en svinkonstig värld att förstå. Matematiken är ett sätt att få ord på det. Vi kan inte beskriva allt som händer runt omkring oss, men vi kan använda matematiken för att göra en helt okej tolkning av verkligheten.

Studiens informanter nämner även konkreta användningsområden. Matematik är enligt informanterna en nödvändighet inom medicin och för att utveckla ny teknik och uppfinningar. Med kopplingar till fysikämnet nämns astronomi och beräkningar av luftmotstånd som exempel. Flera lärare inkluderar berättelser och uppgifter med kulturella kopplingar, som pyramiderna i Egypten, den muslimska kalendern och Da Vincis konst. Informant B poängterar även vilken roll talbaser spelat historiskt och i dagens teknologiska samhälle.

B – Det jag vill att de ska få med sig är just den här kontexten, att det kommer ur ett sammanhang. Varför ser det ut som det gör? Varför kan det se ut på olika sätt? Hur kan vi tänka vidare om vi jobbar med datorer och går över i andra talbaser och andra talsystem, hur hänger det ihop bakåt? Så att man har en grund i att matematiken också är en vetenskap som utvecklas. Så det

är det man vill få med. Det blir någon form av bildning kring ämnet som jag tycker är viktig.

Informant B lyfter i citatet ovan många frågor som historiker ställer sig (Grattan-Guinness, 2004a, s. 1). Studiens samtliga informanter tycks fokusera på aspekter som Grattan-Guinness kategoriserar som *historia*. Exempelvis är matematiska tillämpningar och matematikens påverkan inom och utanför matematiken något som präglar undervisningen (Grattan-Guinness, 2004a, s. 1), vilket blir tydligt när koderna *användning* och *betydelse* analyseras.

Begreppet *arv* använder Grattan-Guinness i stället för att beskriva en smalare bild av matematikhistorien. Då fokus ligger vid det matematiska arvet premieras positiva influenser framför negativa, likheter mellan begrepp ges större plats än skillnader och utvecklingens kronologi är översiktlig (Grattan-Guinness, 2004a, s. 4). Med informanternas uttalanden och omfattningen i åtanke verkar lärarna i denna studie även luta sig mot begreppet *arv*. Informant A ger exempel på arvmässiga aspekter i sin undervisning.

A – En förklaring till varför vi ska kunna derivera är för att ta oss till integralkalkyl och vad Newton gjorde.

Med tankesättet som informant A använder blir den matematiska analysens kronologi översiktlig och derivata tycks avsiktligt leda till integralkalkyl. Informant A antas se den matematiska utvecklingen med moderna glasögon och ställa frågan ”Hur kom vi hit?”. En historiker hade i stället försökt se utvecklingen med historiska glasögon och ställt frågor som de historiska matematikerna själva skulle ställt.

Enligt Grattan-Guinness bör både historia och *arv* genomsyra undervisningen med matematikhistoriska inslag (2004a, s. 7). Vissa lärare tycks sträva efter att ge eleverna en bred och nyanserad bild av matematikens utveckling, och använder således ett arbetssätt med kopplingar till historia. Andra lärare verkar ge eleverna en smalare och mer fokuserad bild av samma utveckling, och fokuserar därför mer på *arv*. Det är dock inte lätt att dra en definitiv gräns mellan historia och *arv*. Med studiens insamlade data är det därför svårt att säga vilket av begreppen som premieras. Denna gränsdragning problematiseras ytterligare i metod-diskussionen.

För de flesta av studiens informanter tycks matematikens betydelse och användningsområden betonas i undervisningen med matematikhistorisk anknytning. De kan bedömas uppfylla ämnesplanens andra formulering i hög grad. Studien visar dock att andra lärare inkluderar denna typ av historiskt innehåll mycket sällan, så att ämnesplanens andra formulering uppfylls i lägre grad.

5.3.3 Centralt innehåll – problemlösning

Den tredje och sista formuleringen hittas i det centrala innehållet: ”Matematiska problem med anknytning till matematikens kulturhistoria”. I kodningsarbetet har begreppet *problem* använts för att analysera materialet. Meningen är i ämnesplanen placerad vid en underrubrik som syftar

till elevernas problemlösning. Det räcker alltså inte att eleverna får se matematiska problem med kulturhistorisk anknytning, de måste även få arbeta med dem aktivt. Det finns också en komplexitet i ordvalet ”anknytning till matematikens kulturhistoria” som är värd att ta upp. Rent krasst är det inte omöjligt att hävda att alla matematiska problem har kulturhistorisk anknytning, men hur djup den bör vara för att uppfylla formuleringen är svårt att säga.

För att se om formuleringen uppfylls eller ej måste uppgifter och problem särskiljas. Som tidigare nämnts tycks studiens samtliga informanter inkludera historiska uppgifter i sin undervisning, aktivt eller med hjälp av läroboken. Dessa uppgifter skulle kunna ha en problemlösande karaktär, men det är också fullt möjligt att de går att lösa med hjälp av en för eleven redan känd lösningsmetod. Därför analyseras enbart de påståenden som explicit innehåller begreppet problem. Informant A säger sig introducera ett historiskt problem kopplat till Pascal och sannolikhetslära och visa hur problemet kan lösas tack vare Pascals matematiska bidrag.

A – Det blir ju så perfekt anpassat, när man drar den storyn för att introducera sannolikhetslära, att Pascal var en av de första som trodde att det kanske inte var Gud som styrde det här, utan att det kanske går att räkna på det. Så då introducerar man det här problemet, och så släpper man det, och sen när man har lärt sig Pascals diagram så visar man hur otroligt lätt det är att lösa ett problem som ingen kunde lösa då.

Från citatet att döma får eleverna själva inte arbeta med problemlösning. Matematiska problem tycks alltså kunna inkluderas utan att det räknas som problemlösning. Läraren i fråga verkar inte vara ensam om att presentera historiska problem på detta sätt. Informant F däremot säger sig inkludera problem med historisk karaktär i sina prov.

F – Det kanske kommer en fråga på det, i bedömningen och så där. Man kanske har med det i lite frågor. Det kan vara ett matematikproblem som man formulerar lite utifrån ett historiskt perspektiv.

Exakt hur mycket problemlösning med historisk karaktär som når eleverna är svårt att säga utifrån dessa intervjuer. Enligt studien verkar dock den tredje och sista formuleringen i ämnesplanen vara den som uppfylls av först lärare och i minst utsträckning. När lärarna studerar ämnesplanen får de mycket liten hjälp i sina val, eftersom formuleringarna är få och tolkningsbara. Majoriteten av studiens informanter tycks lägga större vikt vid formuleringarna i inledningen och syftet, än den i det centrala innehållet.

Det är möjligt att detta är ett aktivt val. Flera informanter vittnar nämligen om att det är svårt att hitta matematiska problem med anknytning till matematikens kulturhistoria, och att läroböckerna som lärarna har till sitt förfogande inte hjälper dem tillräckligt med att uppfylla formuleringen. Då tidsbristen spelar en stor roll i lärarnas planering prioriteras inte problemlösningen. Dessa lärare studerar ämnesplanen och plockar selektivt ut historiskt innehåll, som enligt teorin om didaktisk transposition omvandlas innan den når eleverna i form av anekdoter och räkneuppgifter. Det är dock också möjligt att problemlösningen bortprioriteras omedvetet,

eftersom några av studiens informanter inte har kunskap om ämnesplanens exakta formuleringar. De omvandlingar som görs mellan teorins andra och tredje box grundas därmed inte i enbart ämnesplanen, utan främst i egna kunskaper och åsikter. Oavsett om bortprioriteringen görs aktivt eller omedvetet är det alltså inte ovanligt att formuleringar i ämnesplanen faller mellan stolarna när den didaktiska transpositionen äger rum.

6 Diskussion

Diskussionskapitlet har delats in i fyra avsnitt. Inledningsvis diskuteras och problematiseras resultatet från föregående kapitel, följt av en diskussion kring studiens utförande och metod. Utifrån studiens resultat lyfts sedan didaktiska konsekvenser och ett antal litteraturtips presenteras för läsaren. Kapitlet avslutas med en reflektion kring hur framtida forskning kan utformas.

6.1 Resultatdiskussion

Enligt denna studie inkluderas matematikhistoria i matematikundervisningen sällan och i liten utsträckning, något som bekräftas av tidigare forskning (Siu, 2007, s. 270). Personligen hade jag samma uppfattning från min egen skolgång, och jämnåriga vänner intygar att det varit likadant för dem. Den bortprioritering som tycks äga rum väcker spännande nog känslor hos flera av informanterna i denna studie. När jag frågar informant E om vilka syften och mål hen har med att inkludera matematikhistoria i undervisningen får jag detta som svar.

E – Det är bara för att få lite mindre dåligt samvete, att jag i alla fall har sagt någonting. Det är ju för att jag vet att det står i kursplanen [hen menar egentligen ämnesplanen], att vi ska ha med det. Men det är ju ett otroligt dåligt samvete. Jag gör det aldrig, och man vet att man borde. Men det är ju inget som testas av någonsin.

Informant E lyfter avsaknaden av historisk inkludering i bedömningen som en av orsakerna till bortprioriteringen, något som flera av studiens informanter poängterar. Informant D menar att historien bedöms i mindre utsträckning idag än tidigare. Hen hänvisar till ett kunskapskrav som ingick i ämnesplanen Gy11, men som nyligen reviderats bort (SKOLFS 2020:94).

D – Men jag vet att det har ändrats någon gång, så att det tonades ner mycket mer. För att det landade fel. Så om man från Skolverkets sida hade velat, så hade man nog kunnat trycka in det på ett helt annat sätt. Men, då måste ju något annat bort, och det tror jag inte man vill heller.

Denna bortprioritering tycks även speglas i de nationella provens innehåll, vilket flera av studiens informanter också poängterar. I Sverige genomförs de nationella proven bland annat för att säkerställa utbildningens likvärdighet. De både guidar lärarna i sin undervisning och hjälper dem med betygssättningen. Enligt Skollagen (SFS 2010:800) 10 kap. 20a § ska nämligen resultaten på de nationella proven ”särskilt beaktas” när betygen sätts. Jag tycker därför inte att det är särskilt konstigt att kunskaper om matematikhistoria bortprioriteras av lärare. Studiens informanter riktar även uppmärksamhet mot ämnesplanens tolkningsbara formuleringar. Skolans ämnesplaner har på senare år blivit mer tolkningsbara för att ge lärare större frihet i undervisningen. Under lärarutbildningen sägs friheten stärka lärarnas professionalitet och tolkas som ett politiskt initiativ till att höja läraryrkets status.

Studiens informanter menar dock att tidsbrist är den störta anledningen till att matematikhistoria bortprioriteras. Att läraryrket präglas av tidsbrist är för mig välkänt, och det är därför inte förvånande att planeringstiden inte räcker till. Lärarna hinner helt enkelt inte göra matematikhistorisk research, och får i stället luta sig mot befintlig kunskap. Min uppfattning är att lärarutbildningen ger mycket lite kunskap om matematikhistoria, något som studiens informanter tycks hålla med om. Informanterna riktar även kritik mot den stofffrängsel som präglar ämnesplanerna. Informant C uttrycker dilemmat på följande vis.

C – Ja, så är det. Kanske man önskade att man hade lite mer, men tiden räcker oftast inte till. Det är lite stofffrängsel känner man. Eleven måste ha tid till at jobba själv och så. Man offrar rätt mycket för det.

Denna studies ovan nämnda resultat tycks rimliga när en jämförelse med tidigare forskning görs. Siu menar att tidsbrist, avsaknaden av färdigt undervisningsmaterial och bristande kunskap från lärarutbildningen, är de tre vanligaste anledningarna till att lärare bortprioriterar matematikhistoria i sin undervisning (2007, s. 272).

Enligt denna studie utgör berättande det dominerande arbetssättet när matematikhistoria inkluderas i undervisningen. De historiska kunskaperna förmedlas i regel till eleverna i form av anekdoter, något som tidigare forskning bekräftar (Smestad, 2007, s. 283). Anledningen till detta tycks åter igen vara bristen på tid och färdigt undervisningsmaterial. Bland studiens informanter verkar det dock finnas en vilja att arbeta mer med matematikhistoria. Informant B lyfter flera idéer.

B – Så det handlar nog mer om presentation än att de själva djupdyker i något eget arbete eller så kring någon historisk person till exempel. Det är också något man skulle kunna utveckla. Som, beskriv bakgrunden kring de här satserna. Vad är historiken bakom dem? Vem var det som forskade kring det? Och så vidare. Där har man ju jätteintressanta ingångsvinklar, som tyvärr kan falla mycket på tiden. Jag tänker också att i matte 5 så har man någon fördjupningsuppgift. Där hade man också kunnat fördjupa sig i något matematiskt problem, och då med historiken bakom. Alltså, hur kom man fram till det här? När man diskuterar Fermat och sådana som är mer pågående problem. Så där finns ju en enorm utvecklingsmöjlighet, att få eleverna att självständigt jobba med det.

Det verkar alltså finnas många svårigheter med att inkludera matematikhistoria i undervisningen. I intervjun med informant D lyfts även ett dilemma kring ordet kulturhistoria. Informanten menar att ordet kulturhistoria är svårdefinierat, både för lärare och elever. Hen har av denna anledning svårt att säga exakt hur mycket kulturhistoria som hen inkluderar i sin undervisning, och att eleverna också tros ha svårt att bedöma inkluderingens omfattning.

D – Skulle man sätta upp en definition av vad matematikens kulturhistoria är, och fråga i eleverna i juni ”Har du hört något om detta?”. Då hade nog

ganska många sagt ja. Men hade man sagt "Har du hört något om kulturhistoria?", utan att berätta vad det är, då tror jag inte eleverna hade sagt ja.

Ett annat relativt vanligt arbets sätt är uppgiftslösning med historisk anknytning. Uppgifter av denna sort förväntas av flera lärare inkluderas i läroboken, medan andra söker ytterligare uppgifter på annat håll. Jag tror det kan vara problematiskt att förlita sig på läroböckernas inkludering när tidigare forskning visar att läroboksförfattare i regel prioriterar historiska faktarutor över uppgifter. Inkluderingen i läroböckerna bedöms därmed inte som meningsfull (Smestad, Jankvist & Clark, 2014, s. 173–178). Detta är något som jag även bevittnat under min VFU, där läroböckerna som användes oftast inkluderade matematikhistoria i form av anekdoter, och eleverna inte förväntades arbeta med innehållet aktivt.

Matematikhistoria tycks enligt denna studie och tidigare forskning främst inkluderas för att förändra elevers attityder och inställning till matematik (Smestad, 2007, s. 281). Enligt denna studie används matematikhistoria ofta för att öka intresset för matematik och för att göra matematiken mer intressant. Fried är en av de forskare som menar att matematikhistoria ger denna möjlighet (2001, s. 392). Enligt en studie visar elever som exponerats för matematikhistoria större entusiasm för det matematiska innehållet än andra elever (Lit, Siu & Wong, 2001, s. 20). Lim och Chapman kunde efter en liknande studie dra slutsatsen att matematikhistoria också har potential att motivera elever (2015, s. 205), något som informanterna tycks hålla med om. Ytterligare en motiverande aspekt som grundas i matematikhistoria lyfter Gulikers och Blom. De menar att fler elever får möjlighet att känna sig representerade i klassrummet när kvinnliga matematiker lyfts (Gulikers & Blom, 2001, s. 227). Från denna studie framgår det inte hur vanligt detta sistnämnda fokus är bland lärare. Informant F är nämligen den enda som poängterar att manliga matematiker dominerar historien. Hen belyser såväl svårigheten i som vikten av att hitta kvinnliga matematiker att inkludera.

F – Absolut, så fort jag kan. Men i fysiken är det, tycker jag, lättare. Det finns mer i fysiken som jag känner till, fler i alla fall. Men det är många herrar, men det är på gång med damer för fullt. Så det kommer bli mycket bättre.

Utöver anledningar kopplade till attityder och inställning nämner informanterna även aspekter som har koppling till kognitiva hjälpmedel. De menar bland annat att matematikhistoria kan hjälpa eleverna att minnas det matematiska innehållet bättre. Då informanterna inkluderar matematikhistoria både i motiverande syfte och som kognitivt hjälpmedel tycks historia användas som ett *verktyg* (Jankvist, 2009, s. 237–238). I resultatkapitlet framgår det även att informanterna värderar matematikens utveckling och kulturella påverkan högt. Av denna anledning bedöms historia även användas som ett *mål* (Jankvist, 2009, s. 237). Vilket av dessa begrepp som främst präglar undervisningen är svårt att säga. Min uppfattning är att de med stor sannolikhet göder varandra. Å ena sidan tror jag att motiverade elever med kognitiva hjälpverktyg har lättare att ta till sig den matematiska utvecklingen. Å andra sidan tror jag även att elever som får information om matematikens utveckling motiveras och lättare kommer ihåg det matematiska innehållet.

Informanterna tror även att historien ger innehållet kontext, sammanhang och en djupare förståelse för matematiken. Tidigare forskning visar att matematikhistoria kan få elever att lättare förstå matematiska koncept, tolka problem och utveckla sin problemlösningsförmåga (Fried, 2001, s. 392). Jag kan tänka mig att lärarna i min studie arbetar på ett sådant sätt att förståelsen förbättras, men då problemlösning med historiskt fokus sällan inkluderas finns en stor risk att eleverna går miste om utvecklingen av problemlösningsförmågan.

En annan aspekt kring utveckling lyfter Gulikers och Blom i sin forskning. De menar att den historiska matematikutvecklingen ofta följer samma mönster som den individuella matematikutvecklingen (Gulikers & Blom, 2001, s. 225–226). Jag tror denna insikt skulle kunna inspirera många lärare som frågar sig vad matematikhistoria ska vara bra till. Spännande nog lyfter informant C just denna aspekt under intervjun.

C – Man kan ju se vissa paralleller mellan matematikkunskapens utveckling över flera hundra år, och hur vi utvecklar matematik som människor. Från enkelt räknande på fingrarna till lite mer abstrakt och mer koncept osv. Man måste utveckla ett symbolspråk och så. Det är nästan samma utveckling. Så är man medveten om vad vetenskapsmän, eller i över huvud taget mänskligheten kämpade med för problem, så man kan koppla det. Det mesta av matematiken har inte bara uppfunnits. Det har alltid funnits ett behov. Att ta hjälp av historien för att se hur det gick till, och försöka överföra det till utvecklingen för den enskilda eleven.

Enligt mig verkar det finnas många kopplingar mellan informanternas arbetssätt, förhoppningar och tidigare forskning. Trots att matematikhistoria inkluderas i undervisningen relativt sällan, tycks eleverna ändå dra nytta av inkluderingen. Den stora frågan är om inkluderingen görs på ett sätt som överensstämmer med ämnesplanens formuleringar. Enligt denna studies resultat tycks formuleringarna i inledningen och ämnets syfte uppfyllas i högre grad än formuleringen som hittas i det centrala innehållet. Detta tycker jag är mycket spännande, eftersom det centrala innehållet *måste* inkluderas i undervisningen, medan skrivningarna i inledningen och syftet snarare ska *inspirera* lärarna i deras planering och undervisning. Innan intervjuerna genomfördes var min hypotes att det omvända gällde. Jag trodde att lärarna skulle prioritera formuleringen i det centrala innehållet och mer eller mindre strunta i skrivningarna som hittas i inledningen och ämnets syfte.

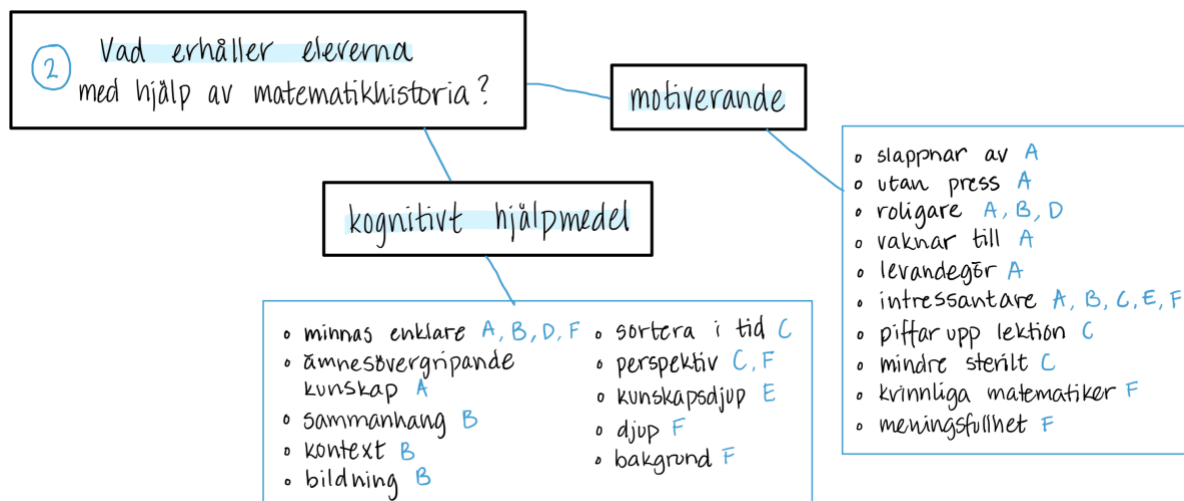
6.2 Metoddiskussion

6.2.1 De teoretiska ramverkens relevans

Under studiens förberedande fas formulerades studiens syfte och frågeställningar och därefter valdes tre teoretiska ramverk såg ansågs ha hög relevans för dessa. Den initiala tanken var att teorin om didaktisk transposition skulle användas till störst del i analysen, medan begreppen verktyg, mål, historia och arv skulle användas för att komplettera den förstnämnda teorin.

De fyra begreppen var för studien högst relevanta, men visade sig vara mer komplicerade att använda än jag först trodde. Anledningen till detta var att gränsdragningen mellan dem var komplex. Exempelvis var det ibland svårt att med den insamlade datan avgöra om informanterna talade om historia eller arv. Då historia sällan inkluderas och ges lite utrymme i undervisningen tros elevernas bild av den matematiska utvecklingen bli översiktlig och fragmenterad. Detta talar för ett fokus på det historiska *arvet* (Grattan-Guinness, 2004a, s. 4). Enligt informanterna lyfts dock matematiska tillämpningar inom och utanför matematiken i undervisningen. Denna aspekt har i stället stark koppling till begreppet *historia* (Grattan-Guinness, 2004a, s. 1). Min uppfattning är att både historiska och arvmässiga aspekter präglar de historiska inslagen i undervisningen, trots att historia sällan letar sig in i klassrummet. Särskiljandet mellan dessa två begrepp hade eventuellt varit enklare att göra med hjälp av djupare intervjuer eller observationsstudier. På så vis hade man kunnat peka på vilket av dem som dominerar. Med hjälp av Grattan-Guinness två begrepp kan jag nu förstå vikten av att fokusera på både historia och arv, att de båda har sina för- och nackdelar. Jag har också insett att en tidspressad undervisningen inte enbart måste präglas av arv, för bevisligen går det även lyfta historiska aspekter med lite tid i förfogande.

Ett annat exempel på en svår gränsdragning var när begreppet *verktyg* användes i analysen. Det visade sig vara svårt att avgöra vilka verktyg som kunde kategoriseras som motiverande aspekter och vilka som snarare var kognitiva hjälpmedel. Kategoriseringen av olika uttalanden gjordes efter mina förkunskaper och uppfattningar, och präglas till viss grad av min subjektivitet. Läsaren kan själv studera denna kategorisering i figur 4.



Figur 4 – Uttalanden kategoriserade som motiverande aspekter och kognitiva hjälpmedel. Figuren är en del av den mind map som skapades för att analysera intervjuerna.

Trots svåra gränsdragningar var Jankvists *mål* och *verktyg* bra redskap för mig när rådatan kodades och analyserades. De gjorde lärarnas syften och mål med undervisningen enklare att gruppera och kategorisera, och visade sig gå hand i hand med ämnesplanens formuleringar. Jag kommer i framtiden att använda begreppen för att reflektera kring min undervisning och möjliga arbetssätt. Enligt mig har begreppen hög relevans för matematikundervisning över lag, och inte enbart när matematikhistoria står på schemat.

Särskilt svårt var det dock att använda teorin om didaktisk transposition. Det tros finnas flera anledningar till detta. Den första är att teorins första box och första steg hade tämligen vag koppling till studien, eftersom lärare inte kan påverka ämnesplanens innehåll. Hade informanterna utgjorts av anställda på Skolverket eller läroboksförfattare hade box 1 och steg 1 varit mer relevanta för studien. En annan anledning till att teorin användes mindre än tänkt har med bedömningen att göra. Då matematikhistoria sällan inkluderades i lärarnas bedömning var det svårt att förhålla sig till teorins tredje steg och fjärde box. Om studien baserats på intervjuer av elever eller konstruktörer av nationella prov i stället för lärare hade denna del av transpositionen kunnat ges större utrymme än nu.

Trots att teorin om didaktisk transposition var svårare att använda än jag först trodde, har den gjort att jag nu ser min roll som lärare på ett mer nyanserat sätt. Lärare ansvarar fullt ut för den omvandling som sker i teorins andra steg, men kan även påverka omvandlingarna i steg 1 och steg 3. Inom vissa områden, som exempelvis matematikhistoria, är läraren det enda som står mellan vetenskapen och eleverna, och tvingas därför ansvara för hela transpositionen. Andra områden beskrivs mer detaljerat i ämnesplanen, vilket gör att en mindre del av transpositionen måste tas i beaktande. Omvandlingarna tillsammans med begreppen historia, arv, verktyg och mål kommer förhoppningsvis göra min framtida undervisning mer genomtänkt.

6.2.2 Urval

Endast gymnasielärare i matematik utgjorde denna studies urval. Samma studie hade kunnat utföras med hjälp av grundskolelärare eller universitetslärare i matematik, eller med en blandning av gymnasie-, grundskole- och universitetslärare. Då jag utbildar mig till just gymnasielärare hade jag störst intresse av att intervjua just denna grupp. Mitt sökande efter gymnasielärare startade via Facebookgruppen ”Matematikundervisning”. Önskan var att få stort napp i denna grupp, för att få en så stor geografisk spridning bland informanterna som möjligt. Detta visade sig vara svårare än väntat, då inlägg lätt begravs bland andra inlägg och studien genomfördes samtidigt som lärare förberedde sig för nationella prov. Trots detta hittades informanter från sammanlagt tre olika kommuner, vilket innebar någorlunda geografisk spridning. För spridningens skull hade det även varit önskvärt om studien grundades i fler än sex intervjuer, men detta var inte möjligt inom studiens tidsram. Då hade intervjuerna tvingats vara kortare, något som inte hade varit gynnsamt för analysen.

Hälften av studiens informanter var främlingar, medan jag i viss mån kände den andra hälften. Denna relation kan ha påverkat intervjuerna både positivt och negativt. Bekanta personer har i regel lättare för att öppna upp sig, vilket är positivt. Relationen kan dock också göra samtalet mindre professionellt. Jag märkte att vissa bekanta informanter lättare gick ifrån frågorna i intervjuguiden, och att jag som intervjuare då hade svårare att styra tillbaka samtalet i den tänkta riktningen.

6.2.3 Intervjuer

Intervjuns semistrukturerade form sattes på prov under testintervjun. I denna studie användes en inläst kurskamrat för att utföra testintervjun, men det hade inte skadat att utföra testintervjun

på en verksam matematiklärare. Att välja en semistrukturerad intervjuform visade sig vara ett bra val. Intervjuguidens utformning ledde till att studiens alla frågeställningar kunde besvaras, men gav även ytterligare information som kunde lyftas i resultatdiskussionen. Detta gjorde enligt mig studien ännu mer intressant. Fler intressanta aspekter hade antagligen lyfts om intervjuerna varit längre, och om lärarna tagit med sig matematikhistoriskt material som de brukar använda i sin undervisning. Ännu en gång var tidsramen och arbetsbördan en bromsande faktor. Om intervjuerna varit längre hade de behövt vara färre, vilket hade påverkat urvalets spridning.

Intervjuerna i denna studie utfördes via Zoom. Valet gjorde att intervjuerna var enklare för informanterna att klämma in i sitt schema och att samtalen smidigt kunde spelas in. En nackdel med att göra intervjuerna på distans är att mötena kan kännas mindre personliga och eventuellt mer stela. Att fika tillsammans under en intervju tros inte skada kvaliteten på samtalet, snarare tvärt om.

6.2.4 Arbete med rådata

De inspelade samtalen transkriberades utan hjälp av transkriberingsprogram. Under transkriberingen gjorde jag valet att utesluta halvt påbörjade meningar, utfyllnadsord och i viss mån översätta talspråk till ett mer grammatiskt korrekt språk. Detta gjorde det enklare för mig att välja ut citat till resultat och diskussion. Jag var noggrann med att inte förändra innebörden av informanternas uttalanden när dessa anpassningar gjordes.

Att transkribera en intervju på 20 minuter tog upp till 2 timmar, vilket är ganska lång tid. Antagligen hade jag sparat tid genom att använda ett transkriberingsprogram, men en fördel med att transkribera manuellt var att jag snabbt bekantade mig med rådatan. Jag resonerar därför att jag genom att transkribera manuellt sparade in tid i kodningsprocessen.

Trots att kodningen var mycket mekanisk fanns det oundvikligen en subjektivitet i processen. Oftast hade informanternas uttalanden en ordagrann koppling till koderna som valts, men det fanns också tillfällen då kopplingen var vagare och tillfällen då citat kunde kopplas till flera koder. Det var då nödvändigt att läsa hela stycken och ”mellan raderna” för att avgöra det exakta sammanhanget och vilken kod som bäst beskrev uttalandet. Det är inte otänkbart att jag i denna del av processen tillskrev uttalanden koder med osäker eller tvetydig koppling. Jag märkte under kodningsprocessen att jag lärde mig under arbetets gång. Av denna anledning gick jag igenom de transkriberade intervjuerna flera gånger för att säkerställa att kodningen utfördes på ett konsekvent sätt.

Det var viktigt att ha denna subjektivitet i åtanke även när datan skulle analyseras. Jag var väl medveten om mina förkunskaper och hypoteser, och gjorde mitt yttersta för att inte låta dessa påverka studiens resultat. Hur objektiv jag lyckades förhålla mig under studiens gång är svårt att säga utan att åter igen bli alltför subjektiv.

6.3 Didaktiska konsekvenser

Genomförandet av denna studie har fått mig att inse hur svårt det kan vara att inkludera matematikhistoria i undervisningen. Jag är nu högst medveten om de begränsningar som påverkar undervisningen, men jag har också fått insikt i inkluderingens fördelar. I min framtida yrkesutövning kommer jag arbeta med att inkludera matematikhistoria på ett så meningsfullt sätt som möjligt. Jag kommer delvis att använda anekdoter och berättandeformen för att inspirera eleverna och poängtera matematikens storhet. Ytterligare ett arbetssätt som jag kommer försöka använda mig av är problemlösningssuppgifter med kulturhistorisk anknytning. Med hjälp av detta arbetssätt aktiveras eleverna och formuleringen i det centrala innehållet uppfylls i hög grad. Att använda historiska problem när problemlösningssförmågan ska övas upp gör att man som lärare slår flera flugor i en smäll. Eleverna tränar på att lösa problem, historien får en naturlig plats i det matematiska innehållet och tidsbristen i undervisningen blir inte ett problem. Den enda nackdelen tycks vara att jag som lärare tvingas lägga tid på att hitta historiska problem att spara i min problembank. För att underlätta sökandet efter historiska problem lämnas läsaren med ett antal litteraturtips.

6.3.1 Litteraturtips

Bengt Ulin – *Problemlösning i symbios med matematikhistoria* (artikel från 2002).

I artikeln lyfter författaren fördelarna med att inkludera matematikhistoria med hjälp av problemlösning. Han ger också exempel på historiska problem som passar den gymnasiala matematikundervisningen.

Henrik Lindberg – *Matematikens historia i gymnasimatematiken: en undersökning om matematikhistorians varande eller icke varande i skolmatematiken* (examensarbete från 2014). Den före detta lärarstudenten tipsar i detta examensarbete om möjliga undervisningssätt. I kapitel 2.3 ”Hur kan matematikhistoria inkluderas i undervisningen?” hittas bland annat exempel på matematiska problem.

Stig Olsson och Ramon Cavaller – *Matematiska nedslag i historien: En matematikantologi med historia, berättelser, skrönor, förklaringar, bevis, tankenötter, problem från forntid till nutid och mycket annat från matematikens värld* (bok från 1999).

Denna bok nämndes av en av informanterna i denna studie. Här hittas såväl anekdoter som tankenötter och problem.

Reinhard Laubenbacher och David Pengelley – *Mathematical Expeditions: Chronicles by the Explorers* (bok från 1999).

I denna bok får läsaren följa upptäcktsresande matematiker och deras arbete. Den matematiska evolutionen presenteras med hjälp av bland annat originalkällor och kompletterande övningar.

Lucio Russo – *The Forgotten Revolution: How Science Was Born in 300 BC and Why It Had to Be Reborn* (bok från 2004).

Boken fokuserar på den vetenskapliga metodens födelse och utveckling i antikens Grekland. Trots att matematiska problem inte står i centrum kan boken vara en god inspirationskälla.

Glen Van Brummelen – *Heavenly Mathematics: The Forgotten Art of Spherical Trigonometry* (bok från 2013).

Denna bok belyser den sfäriska trigonometrins utveckling, men innehåller även historiska övningar som kan vara lämpliga på gymnasial nivå.

Victor J. Katz – *A History of Mathematics* (bok från 2017).

En bok som innehåller såväl inspiration till lektionsupplägg som övningsuppgifter. Nivån på matematiken är lite högre i denna bok. Den kan därför vara användbar i gymnasieskolans högre matematikkurser och för särskilt intresserade elever.

Steven G. Krantz – *An Episodic History of Mathematics: Mathematical Culture Through Problem Solving* (bok från 2010).

Även denna bok riktar sig mot högre matematikkurser och elever med särskilt intresse för matematik.

6.4 Framtida forskning

Först och främst bör det poängteras hur pass lite svensk forskning det finns om historiens inkludering i matematikundervisningen. Fler svenska studier på temat hade kunnat ge en bättre förståelse för styrdokumentens utformning och dess konsekvenser för elevernas lärande. För att resultaten ska vara tillförlitliga bör antalet intervjuer öka. Det hade även kunnat vara meningsfullt med längre, mer djupgående intervjuer som fokuserade på detaljerna kring lärarnas arbetsätt.

Den önskvärda svenska forskningen kan likt denna studie riktas mot gymnasieskolan, men det är även eftersträvansvärt att undersöka grundskolans och universitetets inkludering av matematikhistoria. För att få en så bred bild som möjligt av inkluderingen bör urvalet vidgas. Det skulle exempelvis vara intressant att höra hur ansvariga på Skolverket resonerat när styrdokumentet formulerats och reviderats. Med styrdokumentet i åtanke skulle det även kunna vara givande att intervjua de som ansvarar för de nationella provens konstruktion, och undersöka hur de förhåller sig till rådande styrdokument. I framtida forskning bör uppmärksamhet också riktas mot läroboksförfattare, för att belysa deras tankar kring den historiska inkluderingen. Sist men inte minst bör även vikten av att intervjua elever poängteras. Då kunskaper om matematikhistoria sällan bedöms skulle det vara intressant att fråga elever hur de påverkas av en matematikhistorisk inkludering.

Utöver framtida intervjustudier skulle andra typer av studier berika kunskapen om matematikhistorisk inkludering i undervisningen. För att få svar på hur vanlig inkluderingen är skulle det krävas att kvantitativa studier genomfördes med hjälp av exempelvis enkäter. Om intresse i stället riktas mot lärarens praktik och konkreta exempel skulle observationsstudier kunna vara en tillgång.

Referenslista

- Bosch, M. & Gascón, J. (2006). Twenty-Five Years of the Didactic Transposition. *ICMI Bulletin*, 85, 51–65.
https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/226929/mod_folder/content/0/BoschGascon%202006.pdf?forcedownload=1
- Brummelen, G. (2013). *Heavenly Mathematics: The Forgotten Art of Spherical Trigonometry*. Princeton University Press.
- Chevallard, Y. (1989). *On didactic transposition theory: Some introductory notes*. International symposium on selected domains of research and development in mathematics education, Bratislava, Slovakien.
http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/On_Didactic_Transposition_Theory.pdf
- Chevallard, Y. & Bosch, M. (2014). Didactic Transposition in Mathematics Education. I S. Lerman (Red.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (s. 170-174). Springer Reference.
- Dalen, M. (2015). *Intervju som metod*. Gleerups.
- Fried, M. N. (2001). Can Mathematics Education and History of Mathematics Coexist?. *Science & Education*, 10(4), 391–408. <https://doi.org/10.1023/A:1011205014608>
- Fried, M. N. (2014). History of Mathematics in Mathematics Education. I M. Matthews (Red.), *International Handbook of Research in History, Philosophy and Science Teaching*. (s. 669–705). Springer.
- Gericke, N. (2017). Didaktiska omvandlingsprocesser (Modul: Modeller och representationer). Skolverket. https://larportalen.skolverket.se/LarportalenAPI/api-v2/document/path/larportalen/material/inriktningar/2-natur/Gymnasieskola/507-Modeller-och-representationer/del_02/Material/Flik/Del_02_MomentA/Artiklar/MGy_02A_01_DidaktiskaOmvandlingsprocesser.docx
- Grattan-Guinness, I. (2004a). History or Heritage? An Important Distinction in Mathematics and for Mathematics Education. *The American Mathematical Monthly*, 111(1), 1–12. <https://doi.org/10.1080/00029890.2004.11920041>
- Grattan-Guinness, I. (2004b). The mathematics of the past: distinguishing its history from our heritage. *Historia Mathematica*, 31(2), 163–185. [https://doi.org/10.1016/S0315-0860\(03\)00032-6](https://doi.org/10.1016/S0315-0860(03)00032-6)
- Gulikers, I., & Blom, K. (2001). 'A historical angle', a survey of recent literature on the use and value of history in geometrical education. *Educational Studies in Mathematics*, 47(2), 223–258. <https://doi.org/10.1023/A:1014539212782>
- Jacobsson, K. & Skansholm, A. (2019). *Handbok i uppsatsskrivande - för utbildningsvetenskap*. Studentlitteratur.

- Jankvist, U. T. (2009). A categorization of the “whys” and “hows” of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 71(3), 235–261. <http://doi.org/10.1007/s10649-008-9174-9>
- Katz, V. J. (2017). *A History of Mathematics* (3 uppl.). Pearson Modern Classic.
- Krantz, S. G. (2010). *An Episodic History of Mathematics: Mathematical Culture Through Problem Solving*. Washington, DC: Mathematical Association of America.
- Laubenbacher, R., & Pengelley, D. (1999). *Mathematical Expeditions: Chronicles by the Explorers*. Springer.
- Lim, S., & Chapman, E. (2015). Effects of using history as a tool to teach mathematics on students’ attitudes, anxiety, motivation and achievement in grade 11 classrooms. *Educational Studies in Mathematics*, 90(2), 189–212. <http://doi.org/10.1007/s10649-015-9620-4>
- Lindberg, H. (2014). Matematikens historia i gymnasiematematiken: en undersökning om matematikhistorians varande eller icke varande i skolmatematiken [Examensarbete, Kungliga Tekniska Högskolan]. Digitala Vetenskapliga Arkivet. <https://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:747646/FULLTEXT01.pdf>
- Lit, C. K., Siu, M. K., & Wong, N. Y. (2001). The Use of History in the Teaching of Mathematics: Theory, Practice, and Evaluation of Effectiveness. *Education Journal*, 29(1), 17–29. https://hkumath.hku.hk/~mks/LitWongSiu_HistMathEduc_2001.pdf
- Läroplan för gymnasieskolan*. (2011). Skolverket. <https://www.skolverket.se/undervisning/gymnasieskolan/laroplan-program-och-amnen-i-gymnasieskolan/laroplan-gy11-for-gymnasieskolan>
- Matematik* [ämnesplan]. 2010. Skolverket. <https://www.skolverket.se/undervisning/gymnasieskolan/laroplan-program-och-amnen-i-gymnasieskolan/gymnasieprogrammen/amne?url=1530314731%2Fsyllabuscw%2Fjsp%2Fsubject.htm%3FsubjectCode%3DMAT%26courseCode%3DMATMAT04%26lang%3Dsv%26tos%3Dgy%26p%3Dp&sv.url=12>.
- Olsson, S., & Cavaller, R. (1999). *Matematiska nedslag i historien: En matematikantologi med historia, berättelser, skrönor, förklaringar, bevis, tankenötter, problem från forntid till nutid och mycket annat från matematikens värld*. Ekelund.
- Russo, L. (2004). *The Forgotten Revolution: How Science Was Born in 300 BC and Why It Had to Be Reborn*. Springer.
- Schorcht, S. (2019). I spy with my little eye – Teachers’ linkages about historical snippets in textbooks. *CERME11* (s. 2170–2171). <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02421942/document>
- SFS 2010:800. *Skollag*. https://www.riksdagen.se/sv/dokument-lagar/dokument/svensk-forfattningssamling/skollag-2010800_sfs-2010-800

Siu, M. K. (2007). No, I don't use history of mathematics in my class. Why? I F. Furinghetti, S. Kaijser & C. Tzanakis (Red.), *Proceedings HPM2004 & ESU4* (Revised edition), (s. 268–277). Uppsala: Uppsala Universitet.

SKOLFS 2020:94. *Förordning om ändring i förordningen (SKOLFS 2010:261) om ämnesplaner för de gymnasiegemensamma ämnena.*
https://www.skolverket.se/sitevision/proxy/regler-och-ansvar/sok-forordningar-och-foreskrifter-skolfs/svid12_6bfaca41169863e6a6595a/2062829119/api/v1/download/andningsforfattning/2020:94

Skolverket. (2021). *Kommentarmaterial till ämnesplanen i matematik.*
<https://www.skolverket.se/publikationsserier/kommentarmaterial/2021/kommentarmaterial-till-amnesplanen-i-matematik>

Skolverket. (2022, 28 februari). *Så använder du läroplanen, examensmålen och ämnesplanerna.* <https://www.skolverket.se/undervisning/gymnasieskolan/laroplan-program-och-amnen-i-gymnasieskolan/sa-anvander-du-laroplanen-examensmalen-och-amnesplanerna>

Smestad, B. (2007). History of mathematics in the TIMSS 1999 video study. I F. Furinghetti, S. Kaijser & C. Tzanakis (Red.), *Proceedings HPM2004 & ESU4* (Revised edition), (s. 278–283). Uppsala: Uppsala Universitet.

Smestad, B., Jankvist, U. T. & Clark, K. (2014). Teachers' mathematical knowledge for teaching in relation to the inclusion of history of mathematics in teaching. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 19(3-4), 169–183. http://ncm.gu.se/wp-content/uploads/2020/06/19_3-4_169184_smestad.pdf

Ulin, B. (2002). Problemlösning I symbios med matematikhistoria. *Nämnamnaren*, 3, 41–46. http://ncm.gu.se/pdf/namnaren/4146_02_3.pdf

Vetenskapsrådet. (2002). *Forskningsetiska principer - inom humanistisk-samhällsvetenskaplig forskning.*
<https://www.vr.se/download/18.68c009f71769c7698a41df/1610103120390/Forsknings-etiska-principer-VR-2002.pdf>

Bilagor

Bilaga 1 – Facebook-inlägg

Matematikhistoria

Hur inkluderar du historia i din undervisning?

Jag skriver just nu mitt sista examensarbete på Göteborgs Universitet. Mitt mål är att utföra en kvalitativ studie där gymnasielärare intervjuas. Skulle du kunna tänka dig att medverka i en intervju för att hjälpa mig analysera inkluderingen av matematikhistoria i undervisningen? Intervjun kommer vara i ca 30min via zoom. Hör hemskt gärna av dig!

Varma hälsningar, Linn.

Bilaga 2 – Missivbrev

Hej!

Mitt namn är Linn Appelkvist, och just nu skriver jag mitt sista examensarbete i matematikdidaktik på ämneslärarprogrammet vid Göteborgs Universitet.

I mitt examensarbete vill jag undersöka hur matematiklärare på gymnasiet använder matematikhistoria i sin undervisning. Studien kommer vara kvalitativ och utgöras av halvtimmeslånga intervjuer med matematiklärare. För att få ett så brett underlag som möjligt till min analys strävar jag mot att intervjua matematiklärare som undervisar de olika spåren i matematik (a, b och c) och är verksamma i olika kommuner i Sverige.

Frågan jag nu vill ställa dig är om du kan tänka dig att bli intervjuad? Under intervjun kommer vi bland annat prata om skrivningarna i styrdokumentet, hur du inkluderar matematikhistoria i din undervisning och varför du väljer att göra just så. Mitt mål är att intervjuerna ska hållas via Zoom under v. 16 och v. 17. Jag hoppas vi kan hitta en tid som passar dig då.

Intervjun kommer att spelas in så att jag har möjlighet att transkribera vårt samtal. Jag är den enda som kommer ha tillgång till ljudfilen, och den kommer raderas när arbetet är färdigt. I enighet med forskningsetiska principer kommer du att förbli anonym. Exempelvis kommer informanterna att få benämningar som "Person 1, Skola A". Du har rätt till att medverka på dina villkor och avbryta din medverkan när du vill. Informationen kommer enbart att användas för att skriva detta examensarbete, och inget annat.

Allt gott! / Linn

Bilaga 3 – Intervjuguide

Inledande presentation av mig och information om studien (ca 2 min)

Mitt namn är Linn Appelkvist och jag skriver just nu mitt sista examensarbete på Göteborgs Universitet. Under mitt första examensarbete för 1,5 år sedan gjorde jag en forskningsöversikt på temat matematikhistoria. Jag upptäckte då att det inte fanns mycket svensk forskning på området. Med hjälp av denna kvalitativa forskningsstudie vill jag därför undersöka matematikhistoriens inkludering i den svenska gymnasieskolan.

Innan intervjun börjar vill jag förtydliga att samtalet spelas in för att jag ska kunna transkribera samtalet. Jag är den enda som kommer att ha tillgång till inspelningen, och den kommer raderas när examensarbetet blivit bedömt. I transkriberingen kommer du och skolan du arbetar på att anonymiseras. Du har rätt till att besvara frågorna jag ställer i den utsträckning du är bekväm med. Vill du inte besvara en fråga hoppar vi över den. Du har rätt att avbryta din medverkan när du vill, och stryka din medverkan i studien helt om så önskas. När mitt examensarbete är färdigskrivet delar jag gärna med mig av den. Jag skickar den alltså till dig så att du får möjlighet att ta del av resultatet.

Känns detta okej så kör vi i gång med intervjufrågorna!

Uppvärmning, lära känna (ca 2 min)

1. Hur länge har du arbetat som matematiklärare?
När tog du din ämneslärarexamen?
2. Vilka matematikkurser har du undervisat i under dessa år?
3. Var arbetar du just nu?
Hur länge har du arbetat där?
4. Vilka kurser undervisar du i just nu?
Vilket/vilka program går eleverna du undervisar?

Huvudfrågor, med koppling till frågeställningarna och syftet (ca 15 min)

1. **Den första frågan handlar om matematikhistoriens omfattning i din undervisning.**
Hur mycket matematikhistoria inkluderar du i din undervisning?
Hur ofta?
Hur stor del av lektionstiden?
Gör du olika i olika kurser?
2. **Nu går vi vidare till matematikhistoriens syfte och mål.**
Vad är ditt mål med att väva in matematikhistoria i undervisningen?
Vad vill du att eleverna lär sig?
Baseras dessa mål på formuleringarna i ämnesplanen?

Formulerar du egna mål?

Har du samma mål i alla de kurser du undervisar i?

3. Nu vill jag att du funderar på matematikkursernas olika områden/kapitel i boken.

Hur väljer du vilka områden som passar matematikhistoria bäst?

Boken?

Egna kunskaper?

Ytterligare research?

Inom vilka områden inkluderar du matematikhistoria?

Väljer du olika områden beroende på kurs och elevgrupp?

4. Nu kommer vi till frågorna som välkomnar konkreta exempel från din undervisning.

Hur går det till när du inkluderar matematikhistoria i undervisningen?

Vad gör du?

Vad gör eleverna?

Hur väljs arbetssättet, informationen och uppgifterna?

Vad inspirerar dina val?

Var hittar du information?

Omarbetas materialet för att passa elevgruppen och matematikkursen i fråga?

5. Avslutningsvis vill jag koppla tillbaka till dina och styrdokumentens mål.

Vad tror du eleverna lär sig med hjälp av matematikhistoria?

Testas det matematikhistoriska innehållet på något sätt?

Uppfylls målet du berättade om innan?

Hur vet du om det uppfylls eller inte?

Avslutande fråga

1. Innan vi säger hej då vill jag ge dig möjlighet att lägga till information.

Finns det något på temat som vi inte pratat om som du vill lägga till?

Vill du utveckla något vi pratat om?

Bilaga 4 – Mall för kodning

Erfarenhet: längd, kurser och spår

Box 1 - Kunskap som forskningsprodukt från vetenskapen
Fakta. Detta har hänt. Så här ser historien ut.

Steg 1 - Urval till styrdokument och läroböcker

Box 2 - Kunskap som ska undervisas
Det som styrdokumenterna innehåller, riktlinjer. Dock öppet för tolkning.
Det som läroböckerna innehåller, inspiration.
Innehållet kan även baseras på utbildning, kollegor, forskning mm.

Steg 2 - Innehållet i box 2 omarbetas för att passa elevernas förkunskaper

Box 3 - Kunskap som undervisas
Det som faktiskt händer under lektionen

Steg 3 - Elevernas tolkning och uppfattning av vad som hänt under lektionen.

Box 4 - Kunskap som eleverna lär sig
Vad eleverna får ut när matematikhistoria inkluderas i undervisningen.

Historia

Vad hände och vad hände inte? Varför hände det, varför hände det inte?
Bred bild och generell förståelse för begreppet och dess utveckling
Positiva och negativa influenser under utvecklingen
Likheter och skillnader mellan begreppet samt tidigare och senare begrepp
Blickar framåt och bakåt för kronologins skull
Tillämpningar och påverkan inom och utanför matematiken
Matematikernas egna tankar och förhoppningar

Arv

Hur kom vi hit?
Ger en smalare bild av begreppets utveckling
Positiva influenser under utvecklingen
Likheter mellan begreppet samt tidigare och senare begrepp
Översiktlig kronologi

Mål

Förstå matematikens utveckling och evolution (specifik matematik eller matematik generellt)
Olika kulturer har påverkat matematiken, matematik har påverkat olika kulturer

Verktyg

Motivation - mindre skrämmande och mer human (misslyckanden, oförståelse, tar tid)
Kognitivt hjälpmedel - matematiken ur nytt perspektiv, matematiken ur elevernas perspektiv

Bilaga 5 – Mind map för analys

