Hur tolkar du den här grafen?

En kvalitativ studie om hur elever tolkar linjära grafer

Philip Nilsson
Ämneslärarprogrammet med inriktning mot arbete i gymnasieskolan

Titel: Hur tolkar du den här grafen?
Författare: Philip Nilsson
Program och ämne: Ämneslärarprogrammet med inriktning mot matematik
Uppsats/Examensarbete: 15 hp
Kurs: LGMA2A
Nivå: Avancerad nivå
Termin/år: VT/2022
Handledare: Martin Hallnäs
Examinator: Johan Wästlund

Nyckelord: Linear graphs on highschool level. Conventions in reading graphs. Misconceptions on reading linear graphs. Mathematical Education.

Abstract

This study looks at what misconceptions students have when reading linear graphs. It also looks at what consequences mathematical conventions have on students' ability to read graphs. I will attempt to provide a tentative answer to these questions “How do students link linear graphs to algebra, and what misconceptions might students have regarding this?” Later we will take a look at what consequences these might have on students' ability to solve new problems and what we as teachers need to pay attention to concerning these problems.

The study was done through a survey which contained multiple questions. These were constructed using variation theory. Its aim was to investigate which aspects of the graphs, when varied, affected the students ability to interpret a graph.

The study finds that students often follow conventions often used when dealing with grafs. These when revoked leads to many misinterpretations and confusion amongst the students. A recommended action for us teachers to work towards a better understanding of graphs is then both proposed and discussed.

Förord

Jag vill först och främst tacka min handledare Martin Hallnäs som gett mig goda råd och tydliga direktiv som lätt mig på rätt väg i arbetet. Jag vill också tacka Alexander Cole och Adam Sundqvist som vid sidan om har diskuterat hur det gått att skriva och genomföra detta arbete. Till sist vill jag även tacka alla elever, lärare och rektorer som har både deltagit och hjälpt till med att göra denna studien möjlig. Slutligen vill jag också tacka Phoenix Björkdahl, Lisa Rugenstein och Johan Wästlund som alla bidrog med konstruktiv kritik på arbetet.

Innehållsförteckning

Figurförteckning

1 Inledning

Att rita grafen till en funktion är ett sätt att visualisera linjära funktioner. I många delar av matematiken kan det nästan kännas som ett krav att kunna bearbeta matematik grafiskt för att förstå sig på området. Däremot så löser inte alla elever matematik grafiskt och detta kan ge konsekvenser för elevernas förståelse. Ett sätt att bearbeta grafiska lösningar är hur elever kopplar det till algebran.

Under min sista verksamhetsförlagda utbildning så märkte jag att elever löser ekvationssystem på många olika sätt. Mer specifikt undersökte jag ett specifikt ekvationssystem:

$$\begin{cases} 4x + 2y = 10 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$

De elever som löste ekvationssystemet grafiskt kom fram till att det fanns oändligt många lösningar. De som istället löste den algebraiskt kom ofta fram till $0 = 0$, detta vilket de tolkade som felaktigt och sade att den saknade lösningar. Det går här att se bristfällig förståelse för svaret $0 = 0$, däremot vad jag finner mer intressant är hur de elever som valt att lösa den grafiskt oftare löser ekvationssystemet rätt.

Jag är alltså intresserad av att ta reda på vad det är som elever uppfattar lätt att läsa av med grafer i relation till dess algebraiska ekvationer. Hur kopplar eleverna olika algebraiska uttryck till grafer och om det finns några missuppfattningar när de bearbetar grafer. I kursplanerna för matematik 1a, b och c så ingår grafer. Detta betyder att alla i gymnasiet kommer att ha arbetat med grafer. Huruvida alla har lärt sig att läsa av grafer är upp till bevis.

1.1 Syfte och frågeställning

Studiens syfte är som tidigare nämnts att undersöka vilka kopplingar elever gör mellan grafer och algebra samt om det finns några missuppfattningar bakom detta. Utifrån det så vill jag försöka besvara följande frågeställningar:

- Vad påverkar hur elever använder linjära grafer inom algebran?
- Hur påverkar matematiska konventioner elevers tolkningar av linjära grafer?

1.2 Avgränsning

Då det finns många aspekter av grafiska avläsningar så har jag att avgränsa mig till ekvationer och grafer som berör matematik 1 och 2. Detta då om det finns underliggande problem och/eller specifika kopplingar så tror jag de uppstår i alla delar av matematiken. För att så många elever som möjligt skulle kunna delta kändes det bra om enkätfrågorna låg på en nivå som alla gymnasieelever bör kunna förstå sig på. Detta då ifall uppgifter från senare matematikkurser använts så blir det svårt att analysera de elevsvar från elever på år ett. Ifall deras missuppfattningar kommer från faktiska missuppfattningar eller från att de gissar hur man löser uppgifter från senare kurser.

2 Bakgrund

Bakgrunden består av fem olika delkapitel som lägger grund för studien. Den första delen berör hur matematik kan representeras på olika sätt. Den andra delen berör grafens olika byggstenar, vad som utgör en graf samt vad som går att variera i en graf. Därefter går den tredje delen in på vad som står om grafer i styrdokumenten. Den fjärde delen går in på tidigare forskning och den sista delen berör digitala verktyg.

2.1 Matematiska representationer

När det kommer till att beskriva matematik så finns det ett flertal sätt att representera vad det är som man vill försöka förmedla. Vi behöver olika sätt att representera problem för att kunna urskilja olika situationer och vad som är det bästa sättet att tackla olika problem (Vergnaud, 1998). Swan, Turner & Yoon (2007) skriver:

> “When students work on modelling tasks, they express their thoughts in a variety of representations, such as words, diagrams, tables, spreadsheets, equations and graphs. Indeed, many "real world" mathematics problems begin with information provided in a variety of representations.” (s. 278)

Ing-marie et. al summerar detta som 5 olika sätt att representera matematiken (2011). Dessa fem olika representationer är:

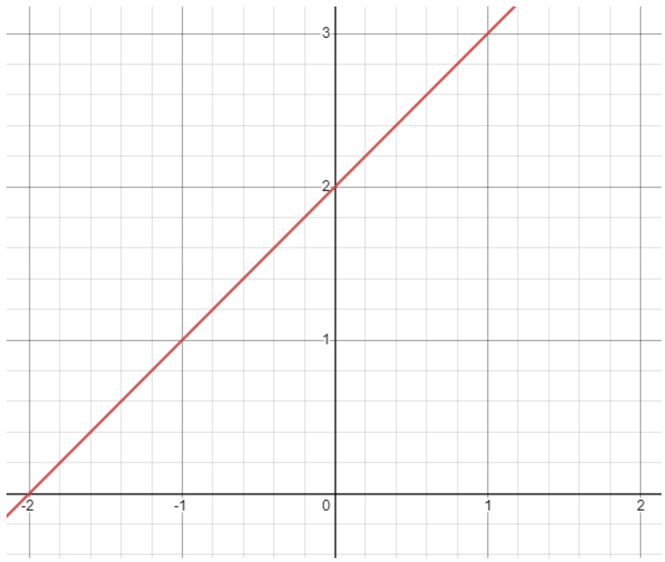
- **En fysisk representation:** Att beskriva en ekvation med fysiska termer såsom hur mycket socker som ska ner i en deg beroende på hur många portioner vi ska baka.
- **En verbal representation:** Att beskriva att en funktion “går” igenom y-axeln när y-värdet är 2. Att sätta ord på funktionen, såsom att berätta att y-värdet går att räkna ut bara genom att addera en viss siffra via talspråk.
- **En numerisk representation:** Det går att hålla ekvationer och funktioner till siffror. Med detta går det att representera en funktion t.ex. $y = x + 2$ i formen av en tabell såsom:

Tabell 1: En tabell som beskriver vilka x och y värden som löser ekvationen $y = x + 2$.

x	y
-2	0
-1	1
0	2
1	3

2	4

- **En bildlig representation:** Det går också att representera matematik med en bild eller en graf. För ekvationen $y = x + 2$ ser detta ut på följande vis:



Figur 1: Figuren visar grafen till ekvationen $y = x + 2$.

- **En symbolisk representation:** Den mer abstrakta representationen där vi ofta skriver att en linjär ekvation skrivs som $y = kx + m$ eller $f(x) = kx + m$, där k är proportionalitetskonstanten eller lutningen på grafen och m är y-värdet där den skär y-axeln.

Med dessa fem går det att angripa matematiken från flera synvinklar och gör det möjligt att kategorisera matematiska resonemang. Det kan möjligtvis gå att kategorisera in det i flera kategorier men för att göra det enkelt så kommer vi senare att analysera den bildliga representationen mer.

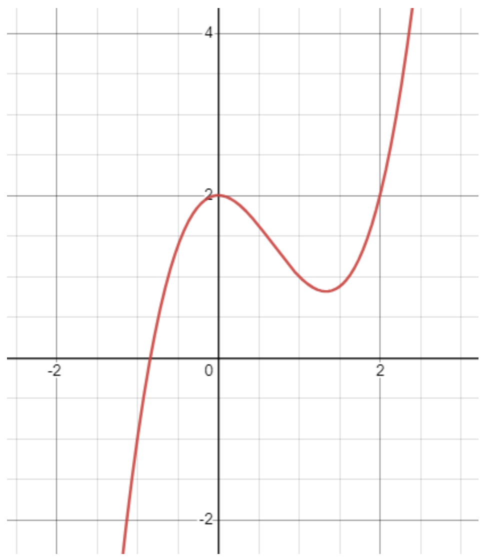
2.2 Grafens byggstenar

Det finns många sätt att ge sig in på grafer. Ett sätt är att se dem specifikt som kurvor, vad vi mer specifikt undersöker i detta arbete är vad som kallas för funktionskurvor. Kiselman & Mouwitz (2008) definierar detta som en plan kurva vilket bestäms av en funktion från en av koordinaterna. Vi undersöker här alltså funktioner såsom $y = kx + m$ där vi låter x-koordinaten variera vilket ger oss y-koordinaten. I läroboken analys i en variabel av Persson & Böiers (2010) beskrivs definitionen för funktionsgrafen:

"Med grafen av en funktion **f** eller funktionskurvan $y = f(x)$ menar man mängden av alla punkter i planet med koordinater av formen (x,f(x)) då x genomlöper definitionsmängden för x." (s.39)

Vi får här då en form av definition för grafen, att grafen är den representation eller bild vi får när vill målar upp alla punkter där (x,f(x)) är färglagda.

När en funktion ges för kurvan så går det sedan att anpassa hur grafen kommer att se ut. Ekvationen som beskriver kurvan är första steget, vilken skala vi sedan sätter på koordinataxlarna bestämmer hur själva grafen ser ut. Det går att skala in och ut på koordinataxlarna och det finns logaritmiska samt exponentiella skalor för koordinataxlarna. Grafen är den visuella representationen, i fallet med en kurva så hela bilden. Detta syns som bäst med ett exempel:



Figur 2: Figuren visar grafen till ekvationen $y = x^3 - 2x^2 + 2$.

Vi använder här i figuren "rimliga" siffror på koordinataxlarna för att få en avläsbar bild. Hade vi valt att representera bilden med en logaritmisk skala så får vi en helt annan bild som potentiellt är svårare att läsa av. Detta betyder att vi kan representera samma kurva på flera olika sätt om vi ändrar på koordinataxlarna. Vilka värden vi sätter på koordinataxlarna får därför en stor betydelse för hur vi avläser grafen. Vill vi undersöka stora värden såsom ett lands population så underlättar det att ha stora värden på koordinataxlarna. Det är inte att det finns två olika grafer för en kurva, det är snarare att en ekvation endast har en kurva medan det är dess representation (grafen) som vi kan variera utseendet på. En graf kan däremot beskriva andra beteenden såsom en linje som är dragen mellan punkter på ett koordinatsystem. En graf behöver inte heller nödvändigtvis vara en sammanhängande linje, ta $y = \frac{1}{x}$ som exempel, här representeras ekvationen av två linjer.

I olika situationer så kan det även vara bra att använda sig av andra skalor på koordinataxlarna. Exempelvis när y-värdet varierar väldigt mycket så kan en exponentiell skala användas. Detta gör det viktigt för elever att kunna särskilja i vilka fall det är bäst att applicera vilken typ av skala på en graf. I en graf beskriver vi ofta positiv riktning i x och y led till att vara åt höger för x samt uppåt för y. Vi är ofta också väldigt tydliga med vilken axel som är vilken. Exempelvis att y varierar när vi "går" upp eller ner i ett koordinatsystem. När x varierar så "går" vi höger eller vänster. En elev som arbetar med något varierbart såsom grafer underlättar det om vissa delar är konsekventa, att kunna luta sig tillbaka på (Vergnaud, 1998). Att vara konsekvent med vilket håll som är positivt gör det lättare att avläsa grafer i dess allmänhet men det betyder inte att det alltid behöver vara så. Delarna av grafer som vi tar för givet stannar inte bara här, några andra delar av grafer som vi är väldigt konsekventa med men som inte behöver vara en självklarhet är att skalan på en graf inte ändras. Med att skalan inte ändras så menas det att skalan på koordinataxlarna på en **linjär graf** inte ändras. Exempelvis kan en graf ha en icke regelbunden skala i x-led. Ett exempel på detta är att ha värderna 1, 2, 3 och 5 ligga på x-axeln med samma avstånd från varandra.

Utifrån detta så är de viktiga delarna av grafer som kommer att återkomma i studien de följande:

- Den symboliska representationen av grafen såsom dess funktion
- Koordinataxlarna
  - Skalan på koordinataxlarna
  - Vilken riktning som är positiv på koordinataxlarna

2.2.1 Den symboliska representationen

Denna studie kommer senare att mer specifikt undersöka funktionskurvor. Det är viktigt att ha ett grepp om att de grafer vi undersöker har funktioner som motsvarar dem. På samma sätt som vi i 2.1 beskriver hur matematik kan representeras på olika sätt så är funktionera till kurvorna två olika representationer för samma sak. Det går här att variera utseendet på funktionerna. Funktionerna $y = 2x - 3$ och $y = -3 + 2x$ får exakt samma graf, däremot har vi i den ena funktionen skrivit ner 2x före -3 och tvärtom i den andra. Detta kan få en effekt på hur vissa elever avläser ekvationen, detta vilket i sin tur kan få konsekvenser på hur de väljer att representera detta grafiskt.

2.2.2 Kontext

Inom matematiken använder vi oss av många konventioner. Dessa gör det lättare för oss att analysera olika uppgifter och problem. En sådan konvention är att y-axeln är den vertikala axeln på en graf och x-axeln den horisontella axeln. En annan konvention är att positiv riktning är uppåt samt åt höger. Vi använder sådana konventioner för att det ska bli lättare att läsa av en graf. Hade vi ändrat på den positiva riktningen så hade det potentiellt ställt till det för många. Vid variation blir det då en till aspekt av grafen som vi behöver analysera varje gång vi undersöker en graf.

Kontext lägger grunden för hur vi använder dessa konventioner. Det är inte en definition att vi alltid använder samma riktningar för att beskriva den positiva riktningen på en graf. Om tillräckligt med kontext ges så kan vi förvänta oss att en konvention kan brytas. Exempelvis på en graf kan vi beskriva förlusterna som ett företag gjort under varje månad. Då går det att beskriva y-axelns höjd som negativ (förlust kr). Lika väl går det att beskriva den med positiva storlekar (förlust -kr). I detta fall lägger kontexten grund för hur vi använder dessa konventioner. Det är då viktigt att ha det klargjort att en konvention inte är detsamma som en definition.

2.3 Grafer i styrdokumenten

Enligt styrdokumenten ska alla elever som läser matematik stöta på grafer av något slag. Hur detta framgår mellan kurserna beskrivs på lite olika sätt. Mer specifikt så kommer alla elever ha fått gå igenom grafer på ett eller annat sätt, däremot enligt det centrala innehållet för matematik 1a så ska eleven fått lära sig om:

- Begreppet funktion. Representationer av funktioner i form av ord, funktionsuttryck, tabeller och **grafer**. Digitala metoder för att skapa **funktionsgrafer**.
- Metoder för att bestämma funktionsvärden. **Grafiska metoder** för att lösa ekvationer av typen f(x) = a.
- **Metoder** för att lösa linjära ekvationer. (Skolverket, 2011)

Enligt det centrala innehållet för matematik 1b och 1c så ska eleven fått lära sig om:

- Begreppen **funktion**, definitionsmängd och värdemängd. Representationer av funktioner i form av ord, funktionsuttryck, tabeller och **grafer**. *Digitala metoder för att skapa funktionsgrafer*.
- Metoder för att bestämma funktionsvärden. Digitala och **grafiska** metoder för att lösa ekvationer av typen f(x) = a.
- **Metoder** för att lösa linjära ekvationer.
- Användning av digitala verktyg för att effektivisera beräkningar och *komplettera* metoder, till exempel vid ekvationslösning. (Skolverket, 2011)

När det kommer till matematik 2 så nämns aldrig grafer specifikt i det centrala innehållet för varken matematik 2a, 2b eller 2c. Det nämns ofta hur olika metoder ska användas för att kunna lösa t.ex. andragradsfunktioner och linjära ekvationssystem. Några delar som berör grafer vilket också är gemensamma för alla matematik 2 kurser utifrån det centrala innehållet är:

- Begreppet linjärt ekvationssystem. ***Metoder*** *för att lösa* linjära ekvationssystem.
- Begreppet andragradsfunktion och *egenskaper hos* andragradsfunktioner, inklusive symmetrilinje, extrempunkt och nollställen.
- *Metoder för att lösa* andragradsekvationer.
- Användning av digitala verktyg för att effektivisera beräkningar och ***komplettera*** *metoder*, till exempel vid ekvationslösning. (Skolverket, 2011)

Utöver detta så innehåller även det centrala innehållet för matematik 2b och 2c följande del som vidrör grafer:

- Begreppet logaritm. Motivering och hantering av räkneregler för logaritmer. Metoder för att lösa exponentialekvationer. (Skolverket, 2011)

Dessa delar av matematiken är områden som ofta utifrån erfarenhet kompletteras av användning av grafer, speciellt vid motivering av symmetrilinje, extrempunkter och nollställen.

I det centrala innehållet för matematik 3b och 3c så nämns grafer två gånger, det står där följande:

- Begreppet gränsvärde. Begreppen sekant, tangent, förändringshastighet, ändringskvot och derivata för en funktion. **Grafiska** och digitala *metoder* för att derivera funktioner. Villkor för deriverbarhet.
- **Grafiska** och digitala *metoder* för att bestämma integraler. (Skolverket, 2011)

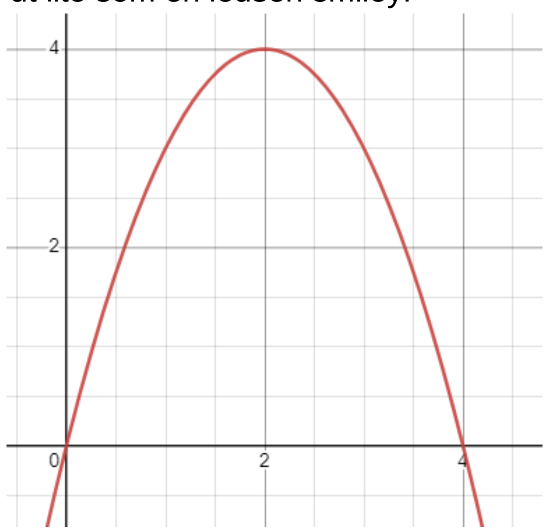
I det centrala innehållet för matematik 4 nämns grafer explicit en gång, däremot så nämner det exakt samma sak som stod i matematik 3b och 3c om grafiska metoder för att bestämma integraler.

Det står inget om grafer i det centrala innehållet för matematik 5. Det står däremot att elever som läser matematik specialisering ska fått gå igenom grafteori.

2.4 Tidigare forskning

Ett flertal individer har också frågat sig vad som ligger bakom en individs tolkning av grafer och vad det säger oss. När något abstrakt, exempelvis en matematisk funktion läggs upp utifrån ett annat perspektiv underlättar det vid både inlärning och examination (Beckman, Thompson & Senk, 1999). Om vi låter eleverna visualisera funktionen med en graf eller jämföra det med en realistisk situation så kan det fungera som ett stöd. Att handskas med samma problem utifrån olika perspektiv verkar lägga en bättre grund för elevers lycka inom matematiken (Lerman, 2001). Det verkar som att om elever har förmågan och/eller tillgången till grafer så bör det underlätta vid deras inlärning.

Elever utgår ofta från att grafer, på något sätt ska efterlikna situationerna som de representerar. Confrey och Maloney (2007) undersökte hur individer avläste ett flertal grafer och fann att många antaganden görs så fort grafen introduceras. Många förväntar att en graf ska efterlikna situationen som den representerar (Arzarello, Pezzi & Robutti, 2007). Exempelvis hur individer kan förvänta sig att grafen på hastigheten för en boll som kastas rakt upp borde se ut lite som en ledsen smiley:



Figur 3: Figuren visar grafen till ekvationen $y = -x(x - 4)$.

I själva verket är grafen endast en linjärt avtagande funktion. Det finns alltså en missuppfattning där många antar hur grafen bör se ut innan de sett den. Detta kan få konsekvenser för hur de representerar matematiken grafiskt.

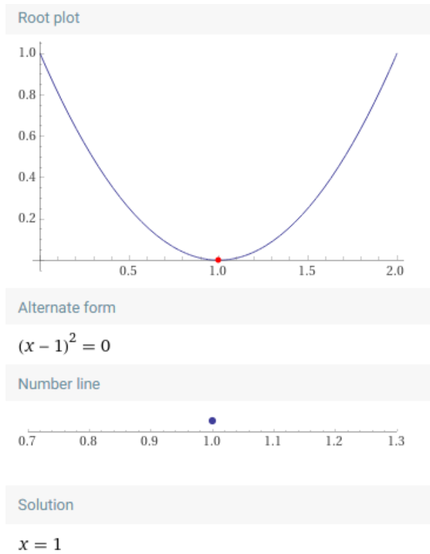
En problematik som uppstår bland elevers representationer av grafer kommer när de stöter på någonting nytt. Olika lösningsformers relevans förtydligas för eleven när den bemöter uppgifter där de tidigare fått instruktioner om hur de ska lösa dem (Jablonka, 2007). När de sedans bemöter en variation som de tidigare utgått från inte kunnat variera kan det bilda en problematik för eleven. Ett exempel är när eleven får en graf som saknar markeringar på x och y axlarna. Inom matematiken för att göra någonting tydligare så underlättar det att ge kontext på varför vi introducerar någonting nytt (Greer & Verschaffel, 2007). Att ge en kontext för varför vilken axel som är x eller y axeln kan kännas onödigt när det tidigare i matematiken utgått från att axlarna inte kan variera. Iallafall inte mer än att de kan ha andra skalor. Att plötsligt utveckla ett tidigare inlärt område kan vara skrämmande (Lo, 2012). När vi plötsligt låter någonting konstant variera så bildar det lätt en oro, på samma sätt som för många variationer i räknandet bildar oro.

Det är alltså viktigt att tidigt vara säker med vad som bör få variera inom matematikundervisningen. Detta så att eleven inte blir överväldigad av nya matematiska koncept. När vi väljer att presentera vissa matematiska koncept eller variationer är också viktigt att undersökta. Lägger vi vissa kunskaper för tidigt så kan det skrämma elever, däremot om vi lägger kunskaper för sent så kan det krocka med tidigare inlärda kunskaper. I detta fall kan det innebära att förtydliga att positiv riktning på en graf inte alltid är åt samma håll i alla situationer. Däremot för att göra det enkelt så bör vi vara noggranna och alltid undersöka koordinataxlarna vid avläsningar.

2.5 Digitala verktyg

Grafer i dagens läge är ofta förknippat med digitala verktyg eller grafritande miniräknare. Detta då de underlättar och i många fall även sparar tid för när vi vill se hur kurvan till en funktion ser ut. Att använda sig av en dator eller liknande verktyg kan, om gjort rätt, bidra till ett bättre lärande (Grönlund, 2014). Detta kräver däremot att det används i ett stödjande syfte (Grönlund, 2014). Om datorn eller grafritaren överanvänds så finns det en risk att eleven blir för van vid att använda sig av digitala verktyg. Detta som sedan får problematik för vilka representationer inom matematiken som eleven känner sig trygg inom.

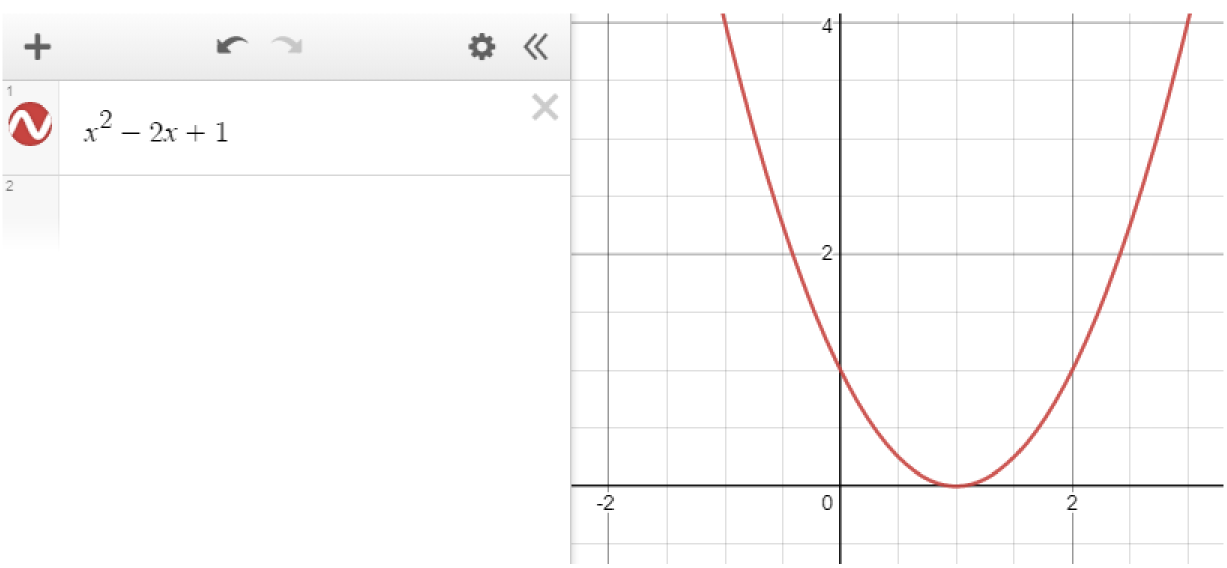
När elever räknar matematik så som nämnts tidigare arbetar vi utifrån olika representationer av matematik. Inom de digitala verktygen så blir ofta den bildliga representationen överrepresenterad. Detta då de andra representationerna av matematiken ofta framgår som ett facit. Ta wolframalpha som ett exempel, en hemsida som går att använda för att lösa många olika typer av matematiska uppgifter. På hemsidan, om vi skriver in en andragradsekvation, exempelvis $x^2 - 2x + 1 = 0$ så får vi tillbaka ett svar:



Figur 4: Den information vi får om vi skriver in $x^2 - 2x + 1 = 0$ i wolframalpha.

Vi får här en bildlig representation av funktionen $y = x^2 - 2x + 1$ men också lösningen på vad x blir utan några steg. Skulle vi vilja ta reda på hur man kommer fram till det så behöver man betala. Så det går att argumentera både för och emot användningen av sådana hemsidor, de är bra att ha vid sidan om. Däremot en överanvändning av hemsidan är lika farligt som att alltid verifiera med facit efter varje uppgift. Det blir lätt att luta sig tillbaka på det och inte utmana sig själv.

Det finns andra hemsidor som inte specifikt löser uppgifter åt elever utan istället fungerar som grafritare. Två exempel på dessa är desmos och geogebra. Detta skulle på desmos för samma exempel som tidigare se ut som följande:



Figur 5: Den information vi får om vi skriver in $x^2 - 2x + 1$ i desmos.

Vi får här istället bara en graf. Detta kan underlätta för elever som vill få en till synvinkel på uppgifter som de arbetar med. Huruvida den fakta de får underlättar i deras räknande beror på hur väl de läser av grafen. Det går på dessa hemsidor att också skriva $x^2 - 2x + 1 = 0$. Vad de får då istället för att $x = 1$ blir då en singulär linje, eller grafen för ekvationen $x = 1$. De får här alltså samma svar fast representerat bildligt. Det finns en utmaning i att använda digitala verktyg som limiterar svarsalternativen till sättet som de representerar matematiken. Om eleven missar vad denna linje representerar så säger inte “lösningen” så mycket, däremot kräver det en förståelse för den visuella representationen som inte framgår i wolframalphas svar.

3 Variationsteori

För att analysera den data som erhölls under studien så kommer det teoretiska ramverket variationsteori att användas. Detta kommer sedan att användas i diskussionen. Variationsteori är en lärandeteori som utgår från att man lär sig när någonting sätts i kontrast till något annat. När ett begrepp eller en variabel inom ett område låts variera, då kan vi lära oss.

Varför just detta teoretiska har valts ut är då det behandlar hur kunskap ses som en variation. I denna studie så efterfrågar vi för det mesta hur elever kopplar en bildlig representation gentemot en symbolisk. Vad vi väljer att variera i representationerna lägger grund för hur vi ser och läser av de olika representationerna. Det kändes därför lämpligt att använda sig av ett teoretiskt ramverk som berör just variationer.

3.1 Objekt av lärande

När vi som lärare vill förmedla något så har vi då ett matematiskt objekt som vi förhoppningsvis kan lära ut till eleverna. Ett objekt av lärande är "vad" det är vi vill lära ut, detta skulle kunna vara att när vi ändrar m-värdet i $y = kx + m$ så förskjuts grafen upp eller ner (Lo, 2012). För att en undervisning ska vara givande bör objektet vara väldefinierat men också inte vara allt för komplext (Lo, 2012). Lo menar att för att kunna lära ut någonting, såsom grafer så behöver eleverna kunna greppa vad det är som kommer läras ut. Samtidigt bör då inte för många aspekter inom lärandet variera.

Objekt av lärande är lite av en sammanfattning på vad eleven kommer lära sig under ett moment eller en lektion. I kontrast till lärandeobjektiv vilket är de saker som eleven förväntas ha lärt sig mot slutet av sitt lärande (Lo, 2012). Objekt av lärande försöker konkretisera vad eleverna tar in i nuet till skillnad från lärandeobjektiven som istället är vad eleverna förväntas uppnå. Detta för att ge tydligare direktiv och på ett sätt underlätta för elevernas lärande genom att inte ställa krav på vart eleverna ska vara på väg. Istället visar objekt av lärande vad vi arbetar med nu och då kan vi som lärare fokusera på hur vi angreppar en lektion, i kontrast till hur vi lär ut allt som står i kunskapskraven. Allt detta görs för att få mer meningsfulla lärandemoment så att eleverna tar in informationen på ett mera naturligt sätt.

3.2 Kritiska Aspekter

När vi lär oss någonting nytt så har det säkert krävt att vi förstått oss på tidigare kunskaper som lägger grunden för nya kunskaper. Dessa grundantaganden eller grundkunskaper kallar vi för kritiska aspekter (Lo, 2012). Detta är vad vi tillåter variera i en situation. Inom variationsteorin så utgår vi ifrån att vi lär oss någonting när vi låter det variera (Lo, 2012). Det är svårt att lära en 4 åring att ett rep är 60cm långt om vi inte också visar det ett annat rep som är längre eller kortare. Detta så att 4-åringen får se att längden motsvarar hur långt ett rep är. I detta fall var då längden en kritisk aspekt.

Att kunna differentiera de kritiska aspekterna bakom ett område kan starkt underlätta när vi vill förtydliga vad en elev kan behöva arbeta på (Lo, 2012). Det är därför viktigt att vara tydlig med vad vi tillåter variera inom ett område. Tillåter vi för många aspekter att variera så kan det bli svårt för eleverna att förstå vart deras fokus borde ligga på. Kritiska aspekter används därför som ett analysverktyg. För att kunna välja vad som är lämpligt att variera men också att analysera vart fokusen inom ett objekt av lärande bör ligga på.

3.3 Variationsmönster

Variationsmönster menar att visa att det finns kopplingar mellan hur variationer i lärandeaspekter kan påverka kvaliteten på lärandet (Lo, 2012). Lo menar också att det blir ingen signifikant skillnad i lärandet om vi inte varierar två eller mer aspekter i lärandet. Dagens skola är djupt förankrad i att visa upp likheter mellan uppgifter. Lo beskriver hur det potentiellt hade kunnat främja lärandet om fler variationer tilläts. Variationsmönsterna är då vilka mönster som går att finna när vi ändrar på två olika aspekter samtidigt, detta skulle kunna vara som att ändra både k och m värdet på en linjär ekvation samtidigt.

Däremot går variationsmönster ett steg längre och analyserar även situationer där endast en variabel varierar. Detta för att enligt Lo (2012) så lär vi oss enbart nya saker när de sätts i kontrast. Detta görs genom att jämföra två situationer där en variabel har låtits variera. Detta görs då, som i exemplet med repet i 3.2, vi lär oss vad längd är när två rep med olika längd sätts i kontrast med varandra. Det är variationen vi ser som vi sedan kallar för längd. Dessa mönster för variation går att analysera när en, två eller fler variabler låts variera samt vilken information som vi får ut från sådana situationer. I denna studie har vi försökt limitera oss till situationer där enbart en eller max två aspekter låts variera per enkätfråga.

4 Metod

I detta kapitel kommer vi beskriva studiens urval, genomförande och om några forskningsetiska principer som studien utgick ifrån.

4.1 Datainslamlingsmetod

Först och främst så kom studien att formas utifrån ett kvantitativt synsätt. Frågeställningen som fick mig att bli intresserad av området teoretiskt rådde för en minoritet. På grund av detta valdes det att hålla studien kvantitativ. Då ett par intervjuer kunde bli missvisande ifall ingen visade upp några missuppfattningar som jag märkt av ute på min praktik. Kvantitativa studier är bra för att kunna märka av mönster i en större population och generaliserar med en relativ säkerhet över större populationer (Patel & Davidson, 2019). Att forska om någonting som kan framgå för en minoritet kan det då vara preferabelt att utföra en kvantitativ studie och inte en kvalitativ.

På grund av tidsbrist för vissa utav klasserna så blev enkäten som skickades ut en aningen kortare än förväntats. Det slutade med att 7 frågor kom att användas. De första två frågorna berör mer allmän information, vilket program eleverna går på. Den andra frågar vilka matematikkurser som individen har läst. Detta för att få en större inblick i hur program och matematikkunskaper påverkar elevernas grafläsande.

Själva frågorna som berörde frågeställningarna kom sedan att formas utefter variation. Alla undersöker hur elever avläser grafer på något sätt, vad som skiljer frågorna åt är vad som valts att variera i varje situation. Detta för att underlätta vid analysen när vi kommer att utgå från variationsteori. Detta valdes för att lättare kunna avläsa resultatet i förhållande till variationsteori, se avsnitt 3. I svarsalternativen så fanns det då förskrivna svar som de fick välja mellan. De kunde också skriva in egna svar om de ville svara något helt annat eller komplettera med någonting som inte stod med. Detta så inga andra tankar eller missuppfattningar skulle missas. De kunde då välja mer än ett svar vilket informerades till dem samt att det sen kom att bidra till analysen. Allt detta genomfördes via google forms.

4.1.1 Frågorna

Fråga 1 berör hur väl eleverna läser av en linjär graf och kopplar den till algebran. Här undersöks det hur väl eleverna kopplar en representation av matematiken till en annan. Från en visuell/grafisk till en symbolisk/algebraisk representation.

Fråga 2 undersöker elevernas analys av koordinataxlarna och hur stor påverkan det får på deras avläsning. Här undersöks det hur variationen av koordinataxlarna, någonting som vanligtvis inte varierar på detta sätt får för konsekvenser. Dels för att se vilka missuppfattningar eleverna kan ha från de konventioner de är vana vid inom matematiken.

Fråga 3 undersöker likt uppgift 1 hur eleverna kopplar en representation av matematiken till en annan. Här har vi en verbal beskrivning av en situation som sedan får en grafisk representerat svar. Här är däremot svaren skrivna sådant de själva är en verbal representation av vad som inträffar i grafen. Så vi testar här djupare hur väl eleverna kopplar och hoppar mellan matematiska representationer.

Fråga 4 undersöker mer specifikt om eleverna kan använda en graf för att lösa en ekvation utan att räkna ut det med en formel. Vi undersöker om det finns en missuppfattning för ifall en graf inte kan användas för att lösa ekvationer.

Fråga 5 undersöker hur eleverna ser på en ändring i den symboliska representationen korrelerar till en ändring i den grafiska. Ifall eleven har missuppfattningar för en ändring i m-värdet. Vi undersöker även om eleverna stannar och reflekterar att i just detta fall $k = 1$ så ser det ut som grafen förskjuts höger eller vänster likt väl som det vanligtvis går att se att den förskjuts upp eller ner.

4.2 Urval

Studien är genomförd på tre gymnasieskolor, en i Borås, en i Göteborg och en i Jönköping. Studien omfattade elever från teknik och natur programmen med en spridning på åldrar. Allra flest som deltog är elever som går år ett på gymnasiet. Att en majoritet av elever som går år ett valdes var då studien till stor del berör grafers funktioner inom matematik 1 och 2. Det kändes därför lämpligt att efterfråga flera klasser som går år ett. Eleverna blev då tillfrågade under en lektion om de ville besvara en kort enkät, de fick sedan lite mer information för ifall de ville delta vilket vi kommer till i kapitel 4.4. I slutändan så svarade 116 elever på enkäten ifrån 11 olika klasser. Tyvärr är bortfallet av elever som inte ville svara på enkäten okänt då jag inte personligen hade kontakt med lärare på en av skolorna utan istället gick enkäten till lärarna där genom en rektor. En problematik som framgår av de program som svarat på enkäten är att alla enbart läser c-spåret av matematikkurserna, detta kan få påverkan för svaret då det blir svårt att generalisera för de som läst de andra spåren.

4.3 Genomförande

Informationen som eleverna fick delades ut i mail till lärarna i förväg. Att eleverna under lösandet inte fick använda grafritare samt att enkäten skulle ta cirka 10 minuter. Eleverna fick för det mesta genomföra enkäten under deras matematiklektioner. Detta med ett undantag för några klasser som fick tidsbrist och genomförde enkäten under en demokrati tid. Efter att enkäterna skickades ut så föll elevsvar in under loppet av tre veckor.

4.4 Forskningsetiska principer

För att se en utveckling hos oss individer men också samhället i sin helhet så är det viktigt med forskning. Detta kräver däremot att forskningen är av en hög kvalitet så att vi kan förbättra vårt samhälle. För att få en hög kvalitet så finns det principer som bör efterföljas. Dessa kallar vi för forskningskravet. Det handlar om att metoder alltid ska förbättras och att tillgängliga kunskaper ska fördjupas (Vetenskapsrådet, 2002). Däremot så kan det komma i kontrast med något som vi kallar för individskyddskravet. Detta är ett krav som utgår ifrån att individer som tar del av en studie eller forskning inte ska komma till skada. För att göra detta så finns det fyra principer som denna studie har följt, informationskravet, samtyckeskravet, konfidentialitetskravet och nyttjandekravet.

4.4.1 Informationskravet

Deltagaren i studien ska få tillgång till min information om vem jag är samt vilken institution forskaren tillhör. Detta för att underlätta vid att söka kontakt med den ansvarige forskaren. Studien ska även vara väldigt tydlig med att deltagande är frivilligt. I sin helhet så ska studien informera deltagaren om allt som kan påverka deras villighet att delta (Vetenskapsrådet, 2002). Detta gjordes genom att dels skriva i informationen på enkäten att den är frivillig samt så informerades lärarna om att eleverna själva skulle få välja om de ville delta eller inte.

4.4.2 Samtyckeskravet

Det finns utifrån detta krav tre accepterade regler som vi bör följa. Reglerna i sin helhet går att summera i att eleven själv ska få välja om de vill delta i studien eller inte utan att få några negativa konsekvenser (Vetenskapsrådet, 2002). Om en deltagare plötsligt inte längre vill vara med så har den rätten till att backa ur. De ska då inte uppleva någon påverkan som får dem att fortsätta studien. På samma sätt här gjorde detta genom att informera lärarna om att de var en frivillig enkät och ville de inte vara med så fick de backa ur när de än ville.

4.4.3 Konfidentialitetskravet

Här behöver vi som forskar utgå från att all information som används är konfidentiell (Vetenskapsrådet, 2002). Vad detta innebär är att eleverna kommer att vara anonyma under studien samt ingen av deras information kommer att lämnas ut. Den information som samlas in ska sedan lagras på ett sådant sätt att enskilda människor inte kan pekas ut (Vetenskapsrådet, 2002). Detta stod med i studien under titeln samt informerades till eleverna innan de började enkäterna.

4.4.4 Nyttjandekravet

Det ska vara tydligt att alla uppgifter och information som samlas in kommer användas enbart för forskning och inget annat (Vetenskapsrådet, 2002). Detta inkluderar att använda informationen kommersiellt eller för att påverka enskilda deltagare. Återigen så gjordes detta genom att det stod med i beskrivningen för enkäten samt informerades i förhand till eleverna.

4.5 Trovärdighet

För att få en hög trovärdighet så behöver vi ha en hög reliabilitet men också en hög validitet (Klapp, 2015). I detta kapitel så kommer vi diskutera studiens reliabilitet och validitet samt vad som gjort för att öka dessa.

4.5.1 Validitet

Validitet innebär kortfattat att rätt sak mäts i förhållande till vad vi undersöker (Klapp, 2015). I detta fall så berör det att vi faktiskt undersökt faktorer och synsätt som elever har på just grafer. Det är här då viktigt att utforma frågor som tydligt mäter vad det är vi vill mäta. I valet av enkätfrågor så lades mycket tid på att välja ut specifika frågor och förskriva svar sådant att det reflekterar frågeställningarna. Detta gjordes specifikt så att den information som samlades in skulle mäta det som efterfrågades. Bryman & Nilsson (2018) delar upp validitet i fyra olika faktorer; mätningsvaliditet, intern validitet, extern validitet och ekologisk validitet.

Mätningsvaliditet handlar om hur väl studien är anpassad för de frågor som berör undersökningen. I denna studie är frågorna kopplade till aspekter som berör frågeställningarna.

Intern validitet berör orsakssamband inom studien. Ifall de samband som vi funnit i studien verkligen är samband och inte bara slumpmässiga resultat. I denna studie så undersöker vi inte samband explicit utan vi utför en analytisk reflektion utifrån de resultat vi får ut.

Extern validitet gäller ifall studiens resultat är generaliserbart över en större population än den som ingick i studien. Mängden deltagare blev relativt många på 116 samt att enbart elever som läst c-spåret av matematiken deltog. Studien går däremot lätt att skala upp och låta fler elever från andra spår delta.

Ekologisk validitet beskrivs som hur väl studiens resultat representerar det resultat vi fått upp om vi mätte "riktiga" situationer. För att öka den ekologiska validiteten så är det bättre att utföra studien i en naturlig miljö och inte i ett laboratorium (Bryman & Nilsson, 2018). I detta fall utfördes enkäterna under elevernas matematiklektioner vilket ökar den ekologiska validiteten.

4.5.2 Reliabilitet

Reliabilitet enligt Bryman & Nilsson (2018) handlar om en studies tillförlitlighet och replikerbarhet. Att om studien skulle göras om så bör man få liknande resultat. Bryman & Nilsson (2018) delar in reliabilitet i tre faktorer; Stabilitet, intern reliabilitet och interbedömarreliabilitet.

Stabilitet handlar om hur väl det nuvarande resultatet skulle korrelera med om vi genomförde samma studie igen, helst på samma grupp elever. Detta kallas för ett test-retest och berör kort och gått studiens repeterbarhet. Denna studie genomfördes endast en gång vilket gör det svårt att argumentera för studiens stabilitet.

Intern reliabilitet eller intern konsistens avser hur väl frågorna i studien relaterar till varandra. Detta för att finna en korrelation i frågornas olika svar. Frågorna är relaterade till varandra då de testar olika aspekter av samma problematik så finns det en intern konsistens.

Den sista faktorn, interbedömarreliabilitet handlar om ifall två olika individer skulle bedöma resultatet, ifall vi skulle komma fram till samma slutsatser. I och med hur elevernas missuppfattningar går att tolka och kategorisera så går det att bedöma olika. Däremot i form med att de fanns för givna svar i enkäten så kan det ge en ökad interbedömarreliabilitet.

4.6 Analys

Enkätsvarens analys började med att de laddades ner till en excel-fil. I excel så, för att göra det lättare att läsa av så förkortades svarsalternativ ner till “Svar: a” eller “Svar: b” etc. De extra svar som eleverna skrev in kategoriseras utifrån om de efterliknade några av de tidigare svaren in i dessa svarsalternativ. Därefter rangordnas elevsvaren in utefter hur många matematikkurser de läst. Elevsvaren delades sedan in i ett par kategorier. Dessa kategorier var nästan desamma för alla uppgifterna. För uppgift 1, 2 och 5 fanns kategorierna; Rätt, Kontextuellt rätt, Vet ej och Fel. Skillnaden mellan kontextuellt rätt och rätt utgick från vad eleverna hade fått rätt för om de svarade i skolan. Vad som hade varit rätt om de konventioner som de är vana vid gällde. Rätt innebar då att de svarat både de kontextuellt rätta svaren men också de andra “icke” kontextuellt rätta svaren som också fanns med i uppgiften. De fel som eleverna gjort, såsom att tro att en ändring i m-värdet påverkar lutningen eller liknande kategoriseras in i fel. På uppgift 3 och 4 kategoriserades svaren istället in i; Rätt, Missuppfattningar, Vet ej och Fel. Här placerades elevsvar som uppvisar missuppfattningar för hur grafer fungerar. Rätt motsvarade de elever som svarat korrekt.

5 Resultat

I detta kapitel så kommer enkätsvaren att redovisas uppdelat fråga för fråga med kategorier för vilka matematikkurser eleverna har läst. Därefter presenteras olika missuppfattningar som framgått i varje uppgift.

5.1 Enkätresultat

I följande tabeller så presenteras hur alla som läst lika många matematikkurser svarat på varje uppgift. Hur eleverna har svarat kategoriseras i 5 olika kategorier. Rätt motsvarar att en elev markerat alla svarsalternativ som är rätt. **Kontextuellt rätt** motsvarar vad som *hade varit rätt om eleven vanligtvis svarade i skolan*. Om **konventionerna** som eleven är vana vid hade gällt. Detta kan vara något enkelt som för uppgift 2 innebär att svara med de ekvationer som utgår med att positiv riktning är upp och åt höger på grafen. Detta vilket då utesluter de andra ekvationerna som också hade varit rätt som inte följer de matematiska normer som eleverna är vana vid.

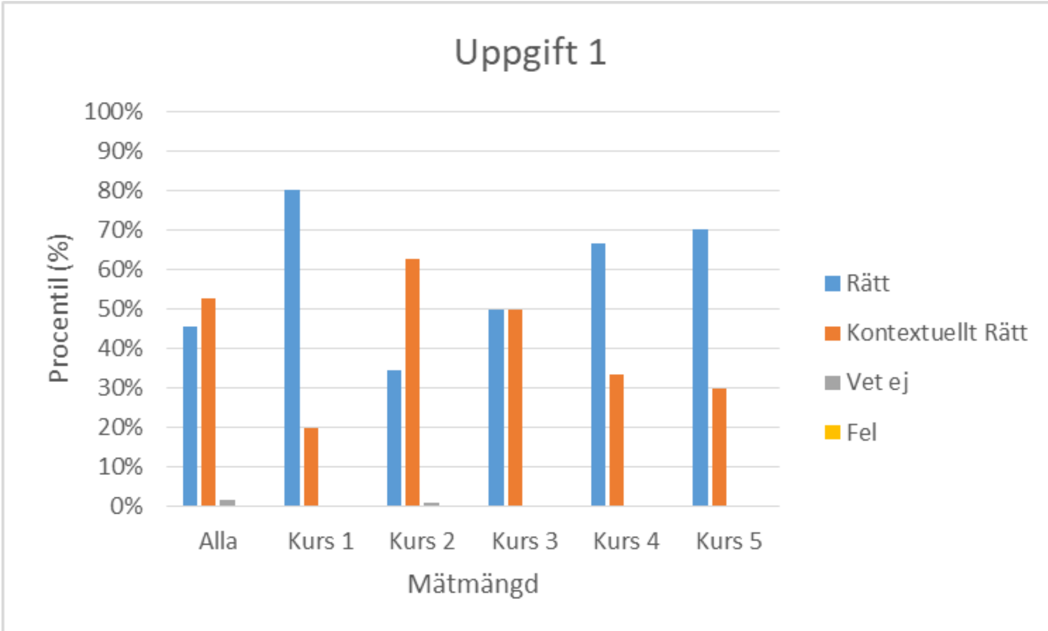
Vet ej beskriver exakt vad de heter, mängden som svarat “Vet ej”. Fel motsvarar elever som uppvisar felaktig förståelse som antingen inte förväntats eller delvis korrekta svarsalternativ blandat med delvis inkorrekta svarsalternativ. Nedan indelas dessa enkätsvar i diagram. I diagrammen på längden är enkätsvaren indelade i 6 grupper utefter vilken deras “högsta” matematikkurs eleven har läst. Undantagsvis är gruppen “Alla” vilket är alla enkätsvaren. Höjden i diagrammet motsvarar hur många procent av gruppen som svarat ett visst svar.

5.2 Uppgiftsanalys

I detta delkapitel så kommer vi att kortfattat analysera vanliga missuppfattningar eller fel som framgått utifrån elevsvaren.

5.2.1 Uppgift 1

Uppgift 1 fick eleverna en linjär graf, mer specifikt grafen till ekvationen $y = 5x - 3$. De fick välja mellan $5x + 3$, $5x - 3$, $-3 + 5x$, -$5x + 3$ och $-5x - 3$. Om de valde endast $5x - 3$ så tolkades detta som “kontextuellt rätt” medans om de valde både $5x - 3$ och $-3 + 5x$ så tolkades det som “rätt”.

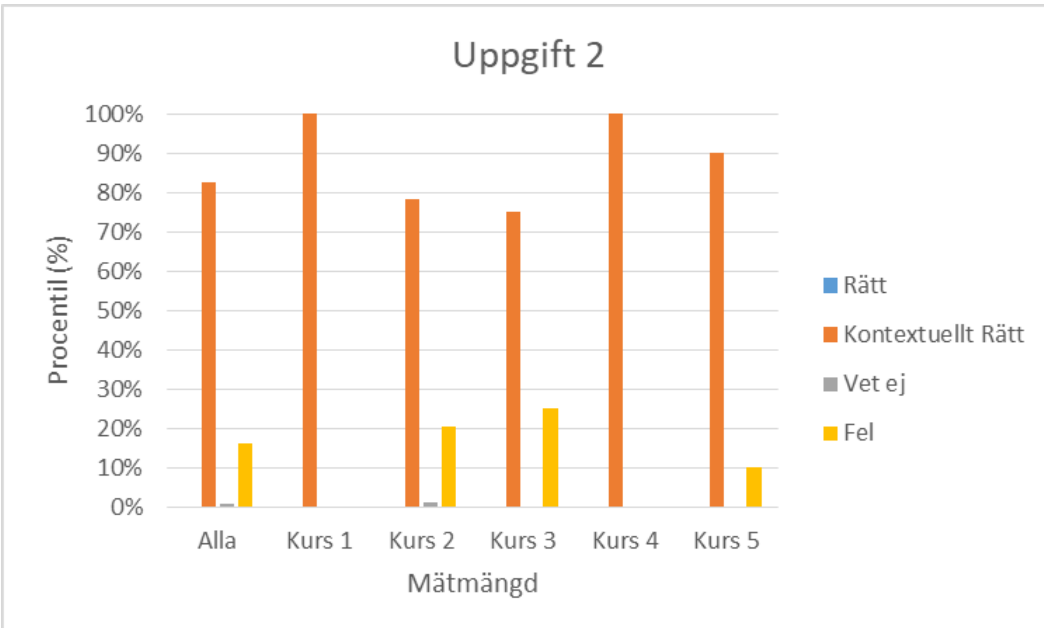


Figur 6: Enkätresultat för uppgift 1.

I uppgiften här så var två svar rätt, $5x - 3$ och $-3 + 5x$. Vad som visade sig vara relativt vanligt var att eleverna valde ett av alternativen för att sedan gå vidare. Cirka 45.7 % av eleverna svarade båda svaren. Det var här då många som svarade endast ett av svaren men mer specifikt så svarade 44.5 % att $5x - 3$ var rätt. I kontrast med att endast 7.8 % svarade $-3 + 5x$. Många elever kan helt enkelt missat att det funnits 2 svar men många fler valde att svara med svaret som är skrivit på formen $y = kx + m$.

5.2.2 Uppgift 2

I uppgift två fick eleverna en graf som saknade siffror på koordinataxlarna. Här så tolkades svaren $2 - x$ och/eller $1 - x$ som “kontextuellt rätt” om eleven svarade med en eller båda av dessa svaren. Om eleven istället svarade med olika svar där “k-värdet” kunde vara positivt i ett svar och negativ i ett annat så räknades detta som rätt. Om eleverna svarade “Ingen utav dem” eller “x” så tolkades detta som fel.



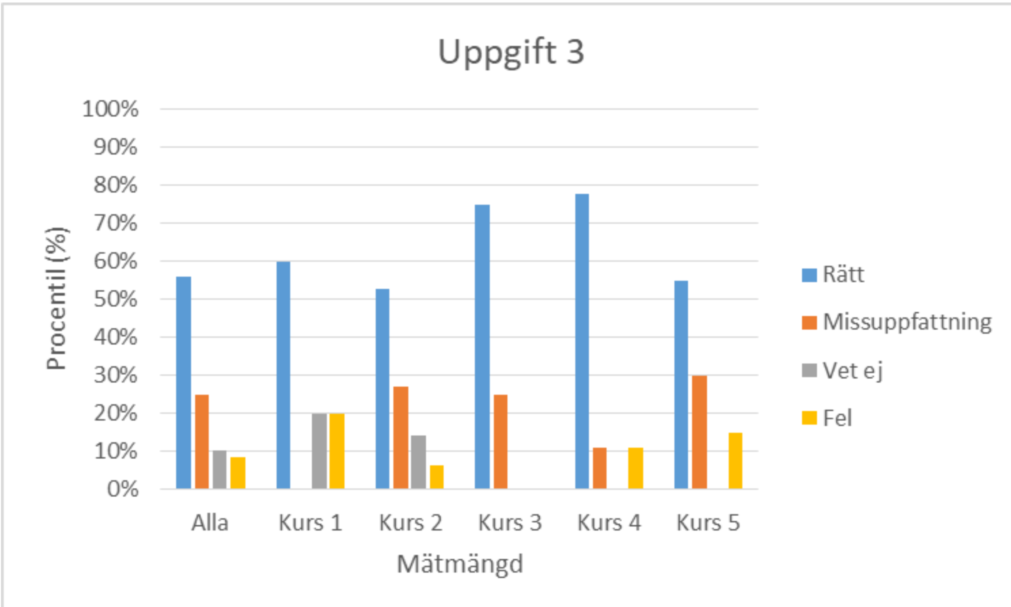
Figur 7: Enkätresultat för uppgift 2.

I uppgift 2 så saknas siffror på koordinataxlarna. Detta ledde 79.3 % av eleverna att svara med att, om skrivet utifrån $y = kx + m$ så borde k vara negativt och m vara positivt vilket efterliknar vanliga grafer. Endast 3.4 % svarade det motsatta, att k bör vara positivt och m negativt. Ingen svarade att det kunde vara både alternativen. Alltså antingen att k-värdet är negativt och m-värdet positivt eller motsatsen. 2 elever valde till och med att skriva med ett eget svar i form av $y = 4 - x$. Detta kan byggas upp av en missuppfattning om att linjerna som syns i grafen ska indikera specifika heltal.

Hela 16.4 % av elevsvaren beskrev att ingen av de givna ekvationerna matchade med grafen. Detta vilket bygger på en missuppfattning av att utan koordinatsiffor så saknar vi tillräckligt med information.

5.2.3 Uppgift 3

I uppgift 3 så fick eleverna en bild som innehöll två grafer. De frågades här vad som hade hänt om de “adderade” de två graferna i bilden till en graf. Här tolkades svaret “de bildar en graf som är förskjuten uppåt” som rätt. “Man kan inte addera två grafer” tolkades som missuppfattning. “De bildar en brantare graf” och “de bildar en graf som är förskjuten nedåt” tolkades som fel.

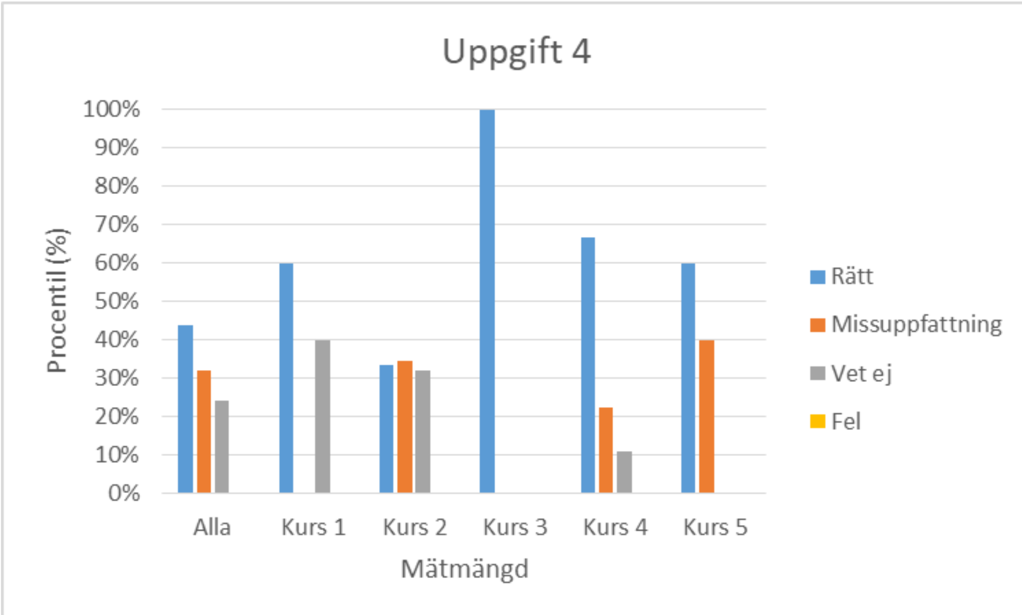


Figur 8: Enkätresultat för uppgift 3.

Här svarade 56 % att den nya grafen kommer vara som den blå grafen fast förskjuten uppåt med 2 längdenheter. 25 % av eleverna svarade att man inte kan “addera två grafer”. Detta tyder på missuppfattningen att den verbala representationen av situationen inte skulle gå att applicera grafiskt.

5.2.4 Uppgift 4

I uppgift 4 erhöll eleverna grafen till ett tredjegradspolynom. De blev frågade om de kan lösa ekvationen $x^3 + 4x^2 - 11x - 30 = 3$ om de endast hade grafen. Här tolkades “Ja” som rätt, “Man kan få ut några utav lösningarna men inte alla” som en missuppfattning samt “Nej” som fel.



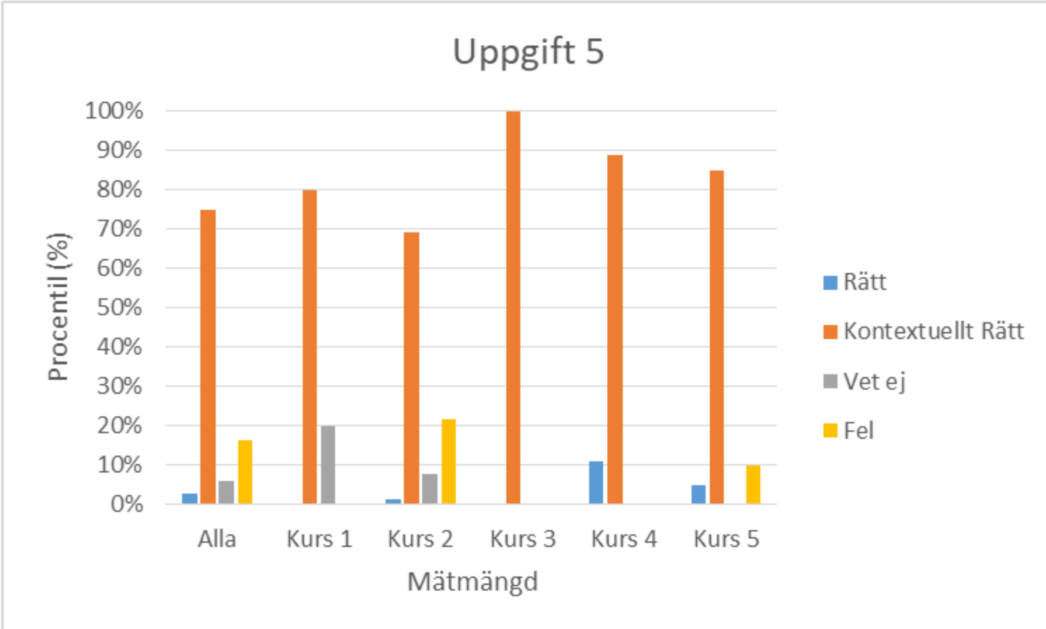
Figur 9: Enkätresultat för uppgift 4.

Här kunde vi se att 44 % av elevsvaren svarade att det gick att läsa av svaren på ekvationen bara genom att "kolla" på grafen. Två av eleverna svarade explicit att de inte kunde lösa ekvationen då de saknade en formel för tredjegradsekvationer. Här finner vi då en missuppfattning om att vi inte kan lösa ekvationen utan en formel. Att det inte skulle gå att lösa ekvationen genom att avläsa grafen.

Ett större antal svarade att de inte kan lösa ekvationen, även när de hade grafen. Dessa 19 % kan uppvisa en missuppfattning om att den visuella representationen inte kan besvara den symboliska representationen. Detta besvarar inte alla situationerna däremot. Ett flertal elever (9.5 %) svarade att några men inte alla av lösningarna gick att få från grafen.

5.2.5 Uppgift 5

I uppgift fem fick de en graf till ekvationen $y = x + a$ och blev tillfrågade vad som händer med grafen om värdet på a ändrades. Om eleven endast svarade "grafen förskjuts upp eller ner" eller "grafen förskjuts höger eller vänster" som *kontextuellt rätt*. Svarade de båda dessa svaren så tolkades det som Rätt. Om de svarat att grafens lutning ändrats så tolkades detta som fel.



Figur 10: Enkätresultat för uppgift 5.

15.6 % av eleverna svarade att om de ändrar på a så ändras lutningen. Hela 73.3 % av eleverna svarade att grafen förskjuts antingen upp eller ner vilket den vanligtvis gör. Detta tyder på en bra förståelse för att om de ändrar a så ändrar de m-värdet för grafen. Endast 4.3 % av eleverna märkte av att i detta fall, när k-värdet är ett så går det också att se att grafen förskjuts höger eller vänster.

6 Diskussion

I följande kapitel så kommer vi att diskutera studiens metod och resultat. Därefter så kommer frågeställningarna besvaras utifrån enkätresultaten. Till sist så kommer didaktiska implikationer av resultaten samt förslag på framtida forskning.

6.1 Metoddiskussion

Jag valde att utföra en kvantitativ studie då frågeställningarna till en början förväntades utgå från en minoritet av eleverna. Hade jag fått mer tid så hade troligtvis fler enkäter men också några intervjuer kunnat genomföras vilket hade kompletterat de kvantitativa resultaten.

Till en början så visade det sig svårt att hitta klasser som hade tid för en längre enkät under lektionstid, detta gjorde så att enkäten blev kortare än önskat. Hade mera tid funnits så hade ett flertal frågor lagts till på enkäten för att kunna analysera ytterligare aspekter. Till slut deltog 116 elever vilket är ett relativt stor antal deltagare. Däremot läser alla c-spåret av matematiken. En generaliserbarhet över de som läser de andra spåren blir svår att åstadkomma utifrån detta. För en sådan generaliserbarhet så hade klasser som läser just dessa spår kunnat genomföra enkäten vilket inte kunde hittas.

Studien genomfördes i 11 olika klasser på 3 olika skolor. Detta minskar risken att specifika skolors lärarteman påverkat studiens resultat. Detta gjordes för att öka reliabiliteten på resultatet. Om något kunde ändras så hade studier genomförts på andra program än endast natur och teknik för att få en högre generaliserbarhet. Studien fick delvis med elever från alla fem matematikkurserna. Däremot så var det en stor majoritet som läste matematik 2 vilket efterfrågades.

6.2 Resultatdiskussion

Följande delkapitel kommer att diskutera de resultat som erhölls av studien. Resultaten kommer diskuteras utifrån tre olika teman som framgick av resultaten. Först hur elevers hopp mellan olika matematiska representationer påverkar deras enkätsvar. Därefter diskuteras hur matematisk kontext och elevers vanor kan ha fått för konsekvenser.

6.2.1 Hopp mellan matematiska representationer

I uppgift 1 och 4 undersöktes det hur elever *tolkar hopp från en symbolisk till en grafisk representation*. Det framgick då i uppgift 1 att många elever visade förståelse för hur man avläser en linjär graf. Detta för att sedan beskriva den korrekt med dess symboliska representation. Vissa elever missade att det fanns två olika svar som båda var korrekta. Detta kan bero delvis på att svaret som stod på formen $y = kx + m$ låg före $y = m + kx$. Ett flertal elever kan då ha klickat i ett rätt svar och sedan hoppat vidare till nästa fråga. Däremot framgick det inga specifika missuppfattningar eller svårigheter i uppgift 1.

I uppgift 4 där eleverna istället arbetar med en symbolisk representation av en graf så framgick det andra resultat. Fler elever visade upp svårigheter för att lösa ekvationen även när en graf fanns tillgänglig. Detta kan tyda på att eleverna finner det svårt när de ska arbeta med symboliska representationer till grafer. I kontrast till hur de oftare löste det när vi hade en motsatt situation i uppgift 1. Detta tyder på att elever verkar ha lättare för algebran.

En underliggande problematik kan vara att ett flertal elever har blivit skrämda då ekvationen i uppgift 4 var ett polynom av grad 3. Detta kan ha fått en effekt på hur många elever som uppvisat svårigheter med att avläsa grafen. Däremot är mängden som uppvisat en missuppfattning i uppgift 4 betydligt större än i uppgift 1. I uppgift 1 så var det ingen som uppvisade någon missuppfattning för avläsandet av grafen bortsett från de som svarat vet ej. Jämförelsevis var det hela 31.9 % som uppvisade missuppfattningar eller liknande svårigheter för uppgift 4. Det tyder på en bakomliggande problematik för hur elever hoppar mellan olika matematiska representationer. Hur vanligt det är att hoppa från en ekvation till en graf gentemot från en graf till en ekvation kan ligga bakom detta. Detta beskriver Jablonka (2007) när elever som arbetat med något flera gånger har en ökad förståelse för olika lösningsformer. I detta fall så är hoppet från graf till symboler vanligare än symboler till grafer.

I uppgift 3 undersöktes det hur elever *tolkar hopp från en verbal till en grafisk representation*. Här frångår vi den symboliska representationen som eleverna har en större vana vid. Detta visade att många elever hade en missuppfattning om att det inte går att addera två grafer. Då 25 % svarade att det inte går att addera två grafer. Flera elever uppvisade också en svårighet för vad som faktiskt ändras om vi adderar med två. Då 2.6 % svarade att lutningen kommer ändras. Här varierar vi en annan aspekt än vad eleverna är vana vid. Fler elever gör misstag eller har missuppfattningar på relativt lätta uppgifter när de blir utsatta för variationer de inte är vana vid.

6.2.2 Kontext och konventioner

I uppgift 2 testade vi hur eleverna *läser av en graf som uppvisar en variation som eleverna inte mött tidigare*. Vi undersöker hur konventionerna som eleverna är vana vid får för konsekvenser i deras svar. Nästintill alla svarade att positiv riktning på grafen är uppåt samt åt höger. Ett fåtal svarade annorlunda men då de inte svarade med de konventionellt "korrekta" svaren så antar jag att det kan bero på att de avläst grafen fel. Ingen av eleverna svarade med att alla svaren förutom "x" är rätt. Det syns här att eleverna ofta väljer en riktning till att vara positiv för att underlätta sitt egna räknande. Detta görs ännu tydligare då de som svarat med att t.ex. uppåt på y-axlen är negativt ofta svarat med mer än ett svar som skulle kunna stämma med detta.

Eleverna själva använder dessa konventioner och bortser från att ingen konkret information ges i uppgiften. Det blir då svårt att kontextuellt säga vilken riktning som är rätt. De har inte fått stöta på att siffrorna på koordinataxlarna är en kritisk aspekt i en grafs avläsning. Detta kan lägga grunden för elevernas ovillighet till att svara med olika val av positiva riktning på grafen.

Av elevsvaren var det 16.4 % som svarade att ingen av de givna svaren skulle stämma in på grafen. Här har eleverna istället för att välja egna positiva riktningar inte använt sig av konventioner. De har troligen istället stött på en förvirring av att de inte förstår sig på vad denna kritiska aspekt får för konsekvenser. De har inte tidigare fått någon kontext för hur dess variation påverkar en grafs avläsning. En missuppfattning av att ingen graf då kan motsvara detta har då framgått. Som Lo (2012) skrev om att det är skrämmande att plötsligt variera en tidigare icke-varierbar aspekt. Vi ser här att detta har fått konsekvenser för de elever som inte använt sig av de konventioner de är vana vid.

3 elever valde att lägga till ett svar, att $y = 4 - x$ är en ekvation för grafen. Detta kan ha att göra med att rutnätet fått eleverna att tro att varje linje indikerar en ökning med ett. Då grafen skär "y-axel" i detta fall vid den fjärde linjen så har de då troligen utgått från att m-värdet måste vara 4.

I uppgift 5 testades vad som händer när en av elevernas *konventioner ifrågasätts*. Eleverna är vana vid att arbeta med ekvationer och grafer på formen $y = kx + m$. De är då också vana vid att ändrar vi m-värdet så förskjuter det grafen upp eller ner. 73.3 % av eleverna svarade att grafen kommer förskjutas upp eller ner. Det går däremot också att se på det som att grafen förskjuts höger eller vänster. Detta vilket har en mindre koppling till symboliska representationen som de är vana vid. Därför förväntades det vara mindre som svarat att den förskjuts höger eller vänster. 1.7 % av eleverna svarade att grafen förskjuts endast höger eller vänster. 2.6 % svarade att det går att antingen se grafen som att den förskjuts upp och ner eller höger och vänster. Det visar sig att eleverna, när de har fått en tydlig kontext för att m-värdets påverkan på en linjär grafs "höjd" föredrar att svara vad de är vana vid. Eleverna verkar därför lite ovilliga att utgå från ett svar som skiljer sig från vad de kontextuellt sätt är vana vid.

6.2.3 Elevers vanor

Något som framgår i enkätsvaren är elevernas villighet att följa resonemang de är vana vid. Detta kan exempelvis i fråga 1 vara att svara på formen $y = kx + m$ eller som i fråga 5 där en stor majoritet svarar att en ändring av m-värdet ser ut som en förskjutning i höjd. Mycket av detta tror jag dels har att göra med som Jablonka (2007) menar om en ökad erfarenhet ofta motsvarar en ökad förståelse. Detta samtidigt som när elever bemöter okända aspekter så finns det en risk att skrämma eleverna (Lo, 2012). I detta fall handlar det däremot om att eleverna ofta lutar sig på deras förståelse för den symboliska eller algebraiska representation av matematiken som de är vana vid. Detta syns som tydligast i just fråga 5 där det är relativt lätt att avläsa i formen $y = kx + m$ att en ändring av m motsvarar en ökad/minskad “höjd” på en motsvarande graf.

Detsamma går däremot troligtvis inte att säga om deras erfarenheter med de andra representationerna. Det syns tydligast i uppgift 3 där det är långt fler som uppvisar en missförståelse för hur en verbal representation motsvarar den grafiska representationen. Från erfarenhet så har inte eleverna lika stora vanor med att arbeta med verbala beskrivningar av grafer, de arbetar ofta med ekvationer eller funktioner vid graf avläsning. I detta fall ledde detta till att många missförstod att man inte kan addera två grafer.

6.3 Svar på frågeställningar

I detta delkapitel så kommer frågeställningarna besvaras utifrån de resultat som erhölls i studien. Det kommer även diskuteras vad jag som lärare kommer behöva tänka på för att minimera missuppfattningar och problematik som berör frågeställningarna.

6.3.1 Vad påverkar hur elever använder linjära grafer inom algebran

Utifrån studiens resultat så visade det sig att många elever har lätt att läsa av grafer för att sedan beskriva dem algebraiskt. Det fanns däremot en missuppfattning när grafen kom att representeras med en annan matematisk representation än vad eleverna var vana vid. Kontext och variationer i aspekter som vanligtvis inte varierar visade en större förvirring för hur eleverna skulle ta sig an vissa grafer. Generellt sätt så var det svårare för eleverna att koppla algebran till dess graf. Detta då de troligtvis har en större vana för att gå från graf till algebra och inte tvärtom.

Här är det alltså viktigt att vi som lärare tar i akt hur vi representerar olika matematiska uppgifter. Lär vi eleverna arbeta med algebra och grafer så spelar det roll i vilken matematisk representation som eleverna börjar bearbeta problemen.

6.3.2 Hur påverkar matematiska konventioner elevers tolkningar av grafer

Denna studie visade att många av eleverna dels har svårt att frångå mönster som de är vana vid. När en konvention inte riktigt gäller så följer många av eleverna dessa av vana. Detta får som effekt att eleverna missar vissa lösningar. I min studie blev det väldigt tydligt att många elever passivt väljer att följa vanliga konventioner. De elever som märkte av en variation och valde att inte följa konventionerna uppvisade fler missuppfattningar. Exempelvis missuppfattningen om när det saknas siffror på koordinataxlarna till en graf så finns det ingen ekvation till grafen.

Vad vi som lärare kan göra för att förbereda eleverna behöver inte kräva mer en ett par tillfällen. Tillfällen där eleverna kan få arbeta med en situation där t.ex. siffrorna på koordinataxlarna saknas eller där den positiva axeln på en graf är till vänster istället för höger. Detta kan potentiellt minska elevernas förvirringar vid nya situationer och kanske också få dem lite mera kritiska till andra konventioner inom matematiken.

6.4 Didaktiska konsekvenser

Under mina matematikstudier så inser jag hur viktiga graferna har varit för att jag ska förstå mig på matematiken. Inte enbart för att lösa olika uppgifter utan även för att utöka min förståelse. Att få ett annat perspektiv på problemen jag löser i matematikböckerna. Om vi tittar i matematikböckerna i gymnasiet så finns det många uppgifter där eleverna ges en graf och sedan ska de beskriva vilken funktion som den motsvarar. Det ges också en hel del uppgifter, speciellt i matematik 1 där eleverna bes måla den linjära grafen till ett förstagradspolynom. Dessa “måla grafen” uppgifter blir färre ju högre upp i matematikkurserna vi kommer. Detta utifrån mina egna erfarenheter med matematik 5000 böckerna. Det är också väldigt vanligt att höra eleverna säga; *Jag skippade “måla grafen” uppgifterna för de verkade som det bara tog en massa tid*. Elevernas självkänsla med grafer verkar påverka huruvida de är villiga att faktiskt öva på grafer. Här kan även jag känna igen mig lite då jag själv i gymnasiet brukade skippa de uppgifter där man skulle måla en graf. Som lärare kan det då vara viktigt att förtydliga relevansen av att måla grafer. Som nämndes tidigare, visa ett exempel där något helt nytt varieras på en graf. Detta för att kanske få eleverna lite intresserade om att måla en graf som inte följer konventioner.

Det kan däremot vara skadligt att uppvisa för mycket variation i graferna. Inte alla elever har koll på grafuppgifter. Att sedan introducera en nästan irrelevant variation i graf uppgifterna kan bli skrämmande för dem som har svårt med grafer som det är. Här kan det istället vara viktigt att utforma matematikböcker eller uppgifter generellt så att eleverna blir uppmuntrade att “kolla upp” grafer. Skolan som nuförtiden håller på att digitaliseras kan vara ett bidragande stöd för elever. Att helt enkelt be eleverna att skriva in en ekvation i desmos eller geogebra kan få dem att börja undersöka matematiken grafiskt oftare. Då det är väldigt manuellt att arbeta grafiskt på papper. Detta vilket kan vara en av anledningarna till att många skippar att måla grafer.

De flesta elever tror jag känner sig nöjda med att följa konventioner. Det inte bara underlättar när elever ska lära sig något nytt. Det gör så att många uppgifter går att lösa snabbare då vi exempelvis inte behöver definiera de positiva axlarna varje gång vi räknar. Skulle vi introducera att alla konventioner inom matematiken ska kritiseras in i matematikämnet så tror jag det skulle skrämma många elever. Det hade troligtvis lett till färre förvirringar på enkätfrågorna. Däremot tror jag inte det hade fått en bra påverkan på elevernas generella förståelse. När för många aspekter av grafer tillåts variera så kan det bli svårt att ha koll på vad som påverkar vad.

Att vara kritisk som grund är nyttigt för eleverna men det bör inte gå för långt. Att ta upp ett par exempel på uppgifter som inte följer konventioner kan vara bra. Men att göra om undervisningen så att en lektions *objekt av lärande* läggs på arbete med "konventionsbrytare" kan bli för mycket.

6.5 Framtida forskning

Jag tror det skulle vara väldigt givande om en *learning study* hade gjorts på konventioner som är vanliga vid linjära grafer. Om eleverna får en enkät där konventioner frångås för att sedan få en genomgång där konventionerna "bryts". Man spelar då också in lektionerna för att analysera vad som gått bra och vad som gått dåligt. Sedan genomför eleverna en liknande enkät och så jämförs svaren. Att undersöka vad som hade hänt om vi introducerade konventions brytande uppgifter på tavlan. Vad för innebörd det får på elevernas hantering av linjära graf uppgifter.

Till detta tror jag det hade varit bra om en större kvalitativ studie skulle kunna genomföras där eleverna blir frågade vilka aspekter de tänker på när de ser en graf. Att notera inte bara vad eleverna säger men också i vilken ordning som de tar upp aspekterna. Jag tror att finna vilka tankemönster som eleverna är vana vid att följa när de arbetar med grafer är viktigt. Att sedan analysera och problematisera dessa tankemönster kan vara nyckeln till att minska problematiken. Däremot bör det då också undersökas hur dessa variationer i uppgifterna påverkar elevernas självkänsla. Om de finner det ologiskt eller till och med läskigt att upptäcka en tidigare okänd aspekt av grafer. Genomförs detta så tror jag vi som lärare kan bygga vidare på vår undervisning så eleverna blir mer kritiska till ämnet. Detta utan att få elever att finna matematik svårare än vad de redan tycker att det är.

Referenslista

Arzarello, F., Pezzi, G., & Robutti, O. (n.d.). Modelling Body Motion: An Approach to Functions Using Measuring Instruments. In Modelling and Applications in Mathematics Education (Vol. 10, New ICMI Study Series, pp. 129-136). Boston, MA: Springer US.

Beckmann, C., Thompson, D., & Senk, S. (1999). Assessing Students' Understanding of Functions in a Graphing Calculator Environment. School Science and Mathematics, 99(8), 451-456.

Bryman, A., & Nilsson, B. (2018). Samhällsvetenskapliga metoder (Tredje upplagan ed.).

Confrey, J., & Maloney, A. (n.d.). A Theory of Mathematical Modelling in Technological Settings. In Modelling and Applications in Mathematics Education (New ICMI Study Series, pp. 57-68). Boston, MA: Springer US.

Greer, B., Verschaffel (n.d.). Modelling compentencies - overview. In Modelling and Applications in Mathematics Education (Vol. 10, New ICMI Study Series, pp. 219-224). Boston, MA: Springer US.

Grönlund, Å. (2014). Att förändra skolan med teknik: Bortom “en dator per elev” Hämtad 2022-05-05 från https://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:706366/FULLTEXT01.pdf

Ing-Marie, G. (2011). Matematiska uttrycksformer och representationer Göteborg: Nationellt centrum för matematikundervisning (NCM), Göteborgs universitet.

Jablonka, E. (n.d.). The Relevance of Modelling and Applications: Relevant to Whom and for What Purpose? In Modelling and Applications in Mathematics Education (Vol. 10, New ICMI Study Series, pp. 193-200). Boston, MA: Springer US.

Kiselman, C., & Mouwitz, L. (2008). Matematiktermer för skolan.

Klapp, A. (2015). Bedömning, betyg och lärande. Studentlitteratur. Billagor

Lerman, S. (2001). A Review of Research Perspectives on Mathematics Teacher Education. In Making sense of mathematics teacher education. Dordrecht: Kluwer Academic.

Lo, M. (2012). Variation theory and the improvement of teaching and learning (Gothenburg studies in educational sciences, 323).

Patel, R., & Davidson, B. (2019). Forskningsmetodikens grunder : Att planera, genomföra och rapportera en undersökning (Femte upplagan ed.).

Persson, A., & Böiers, L. (2010). Analys i en variabel (3., [rev.] uppl. ed.).

Skolverket (2011) *Läroplan för gymnasieskolan*. Tillgänglig: https://www.skolverket.se/undervisning/gymnasieskolan/laroplan-program-och-amnen-i-gymnasieskolan/gymnasieprogrammen/amne?url=1530314731%2Fsyllabuscw%2Fjsp%2Fsubject.htm%3FsubjectCode%3DMAT%26tos%3Dgy&sv.url=12.5dfee44715d35a5cdfa92a3

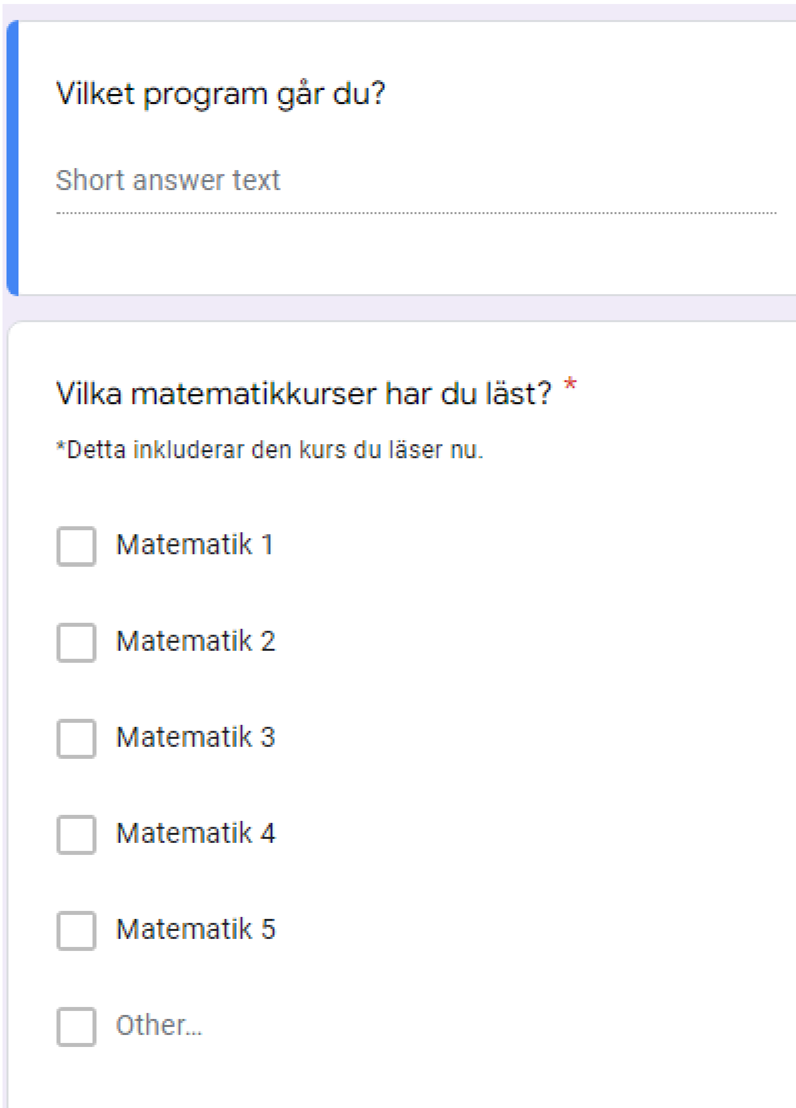
Swan, M., Turner, R., Yoon, C., & Muller, E. (n.d.). The Roles of Modelling in Learning Mathematics. In Modelling and Applications in Mathematics Education (Vol. 10, New ICMI Study Series, pp. 275-284). Boston, MA: Springer US.

Vergnaud, G. (1998). A comprehensive theory of representation for mathematics education. The Journal of Mathematical Behavior, 17(2), 167-181.

Vetenskapsrådet. (2002) Forskningsetiska principer inom humanistisk-samhällsvetenskaplig forskning. Stockholm: Elanders Gotab.

Bilagor

Enkätfrågorna:



Vilket program går du?

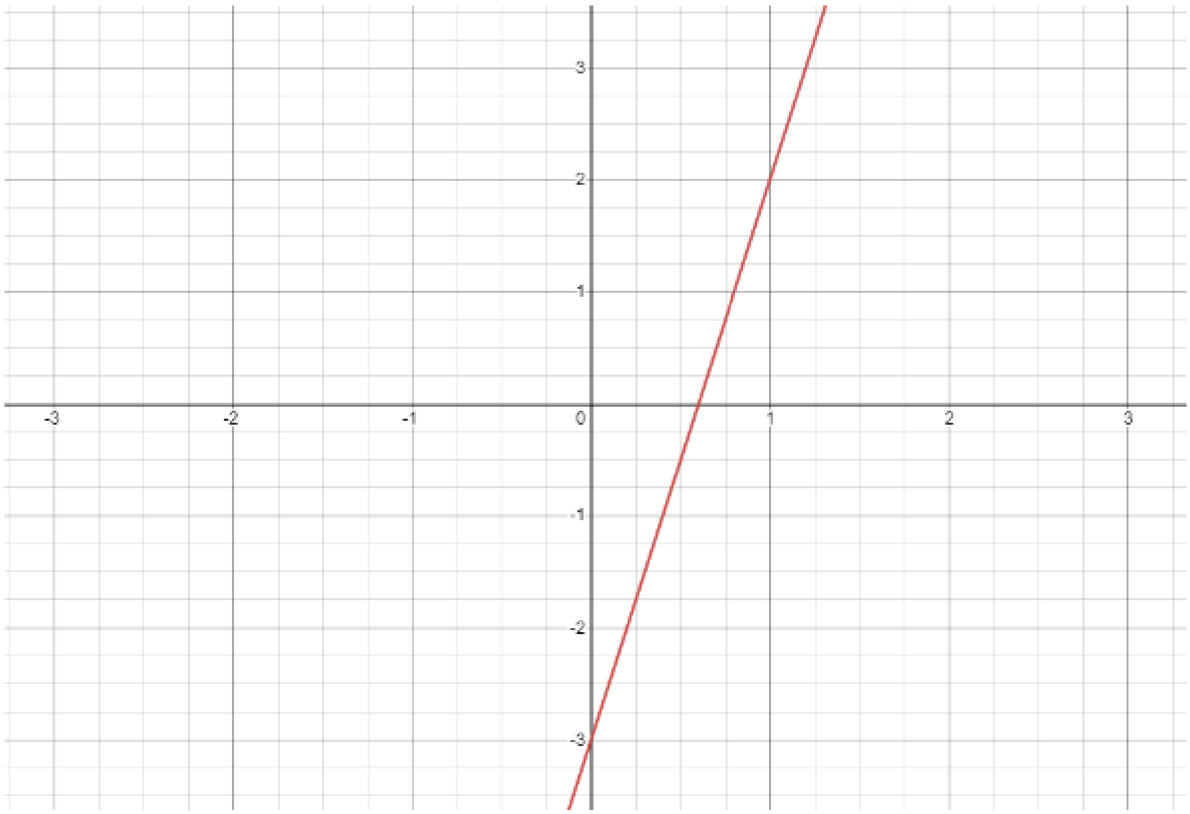
Short answer text

Vilka matematikkurser har du läst? *

*Detta inkluderar den kurs du läser nu.

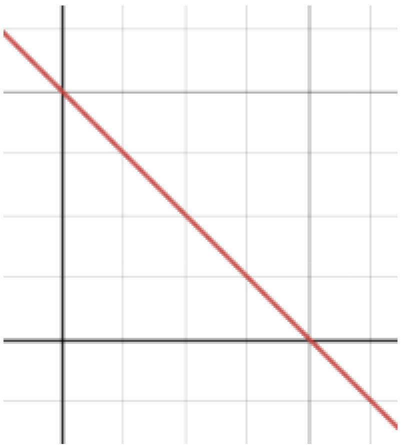
- [ ] Matematik 1
- [ ] Matematik 2
- [ ] Matematik 3
- [ ] Matematik 4
- [ ] Matematik 5
- [ ] Other...

1) Nedan ser du en graf, vilken eller vilka ekvationer motsvarar grafen? *



- [ ] 5x+3
- [ ] 5x-3
- [ ] -3+5x
- [ ] -5x+3
- [ ] -5x-3
- [ ] Vet ej

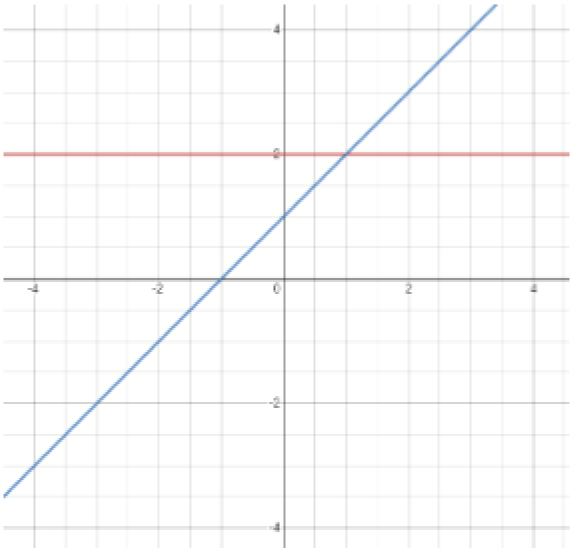
2) Vilken eller vilka utav ekvationerna nedan kan motsvara grafen. Lägg märke till att koordinataxlarna saknar siffror.



- [ ] 1-x
- [ ] 2-x
- [ ] 2+x
- [ ] 1+x
- [ ] x
- [ ] Ingen utav dem
- [ ] Vet ej
- [ ] Other...

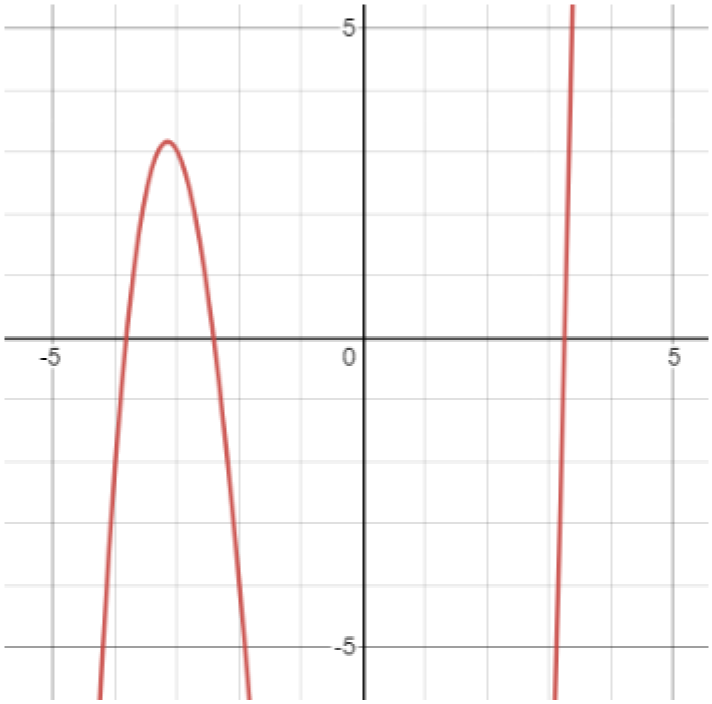
3) Nedan ser du två grafer (den röda och den blå linjen), vad händer om du adderar ihop båda graferna?

*Den blåa grafen är den linje som lutar medans den röda grafen är den linje som är rak och skär y-axeln när y=2.



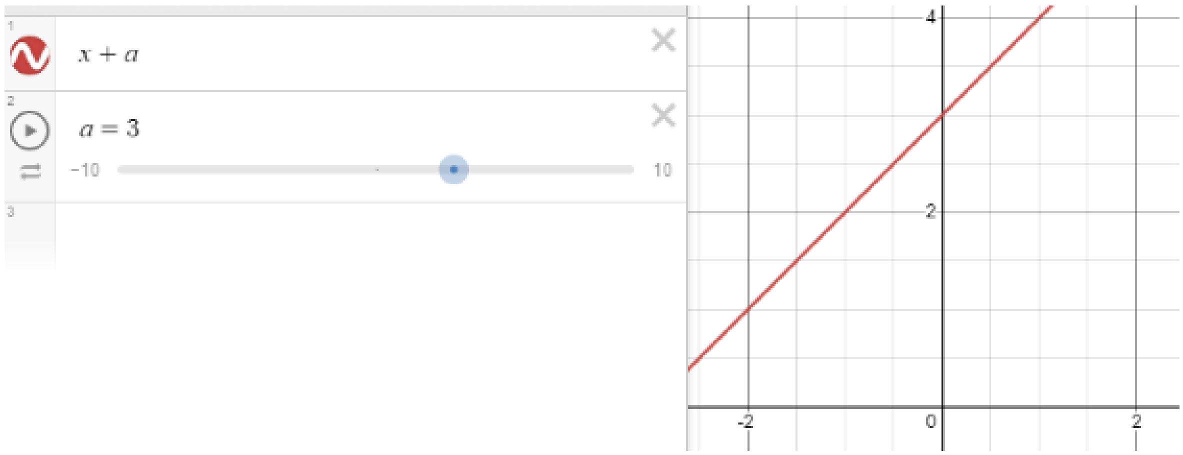
- [ ] De bildar en ny graf som är "brantare" än den blå
- [ ] De bildar en ny graf som är förskjuten uppåt
- [ ] De bildar en ny graf som är förskjuten nedåt
- [ ] Man kan inte addera två grafer med varandra
- [ ] Vet ej
- [ ] Other...

4) Nedan ser du grafen till ekvationen x^3+4x^2-11x-30, kan du då lösa ekvationen x^3+4x^2-11x-30=3?



- Ja
- Man kan få ut några utav lösningarna men inte alla
- Nej
- Vet ej
- Other...

5) Nedan ser vi grafen till ekvationen x+a, där a=3, vad händer med grafen om jag ändrar på a? *



- [ ] Lutningen på grafen ändras
- [ ] Grafen förskjuts upp eller ner
- [ ] Grafen förskjuts höger eller vänster
- [ ] Ingenting
- [ ] Vet ej
- [ ] Other...

Resultat i tabellfrom:

Tabell 2: Enkätresultat för uppgift 1.

	Uppgift 1			
Kurs	Rätt	Kontextuellt Rätt	Vet ej	Fel
1	4 (80%)	1 (20%)	0 (0%)	0 (0%)
2	27 (35%)	49 (62%)	2 (3%)	0 (0%)
3	2 (50%)	2 (50%)	0 (0%)	0 (0%)
4	6 (67%)	3 (33%)	0 (0%)	0 (0%)

5	14 (70%)	6 (30%)	0 (0%)	0 (0%)

Tabell 3: Enkätresultat för uppgift 2.

	Uppgift 2			
Kurs	Rätt	Kontextuellt Rätt	Vet ej	Fel
1	0 (0%)	5 (100%)	0 (0%)	0 (0%)
2	0 (0%)	61 (78%)	1 (1%)	16 (21%)
3	0 (0%)	3 (75%)	0 (0%)	1 (25%)
4	0 (0%)	9 (100%)	0 (0%)	0 (0%)
5	0 (0%)	18 (90%)	0 (0%)	2 (10%)

Tabell 4: Enkätresultat för uppgift 3. Här mäter vi missuppfattningar istället för kontextuella rätt kontra helt korrekta svar.

	Uppgift 3			
Kurs	Rätt	Missuppfattning	Vet ej	Annat fel
1	3 (60%)	0 (0%)	1 (20%)	1 (20%)
2	41 (53%)	21 (27%)	11 (14%)	5 (6%)
3	3 (75%)	1 (25%)	0 (0%)	0 (0%)
4	7 (78%)	1 (11%)	0 (0%)	1 (11%)
5	11 (55%)	6 (30%)	0 (0%)	3 (15%)

Tabell 5: Enkätresultat för uppgift 4.

	Uppgift 4			
Kurs	Rätt	Missuppfattning	Vet ej	Annat fel
1	3 (60%)	0 (0%)	2 (40%)	0 (0%)
2	26 (33%)	27 (34%)	25 (32%)	0 (0%)
3	4 (100%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)

4	6 (67%)	2 (22%)	1 (11%)	0 (0%)
5	12 (60%)	8 (40%)	0 (0%)	0 (0%)

Tabell 6: Enkätresultat för uppgift 5.

	Uppgift 5			
Kurs	Rätt	Kontextuellt Rätt	Vet ej	Fel
1	0 (0%)	4 (80%)	1 (20%)	0 (0%)
2	1 (1%)	54 (69%)	6 (8%)	17 (22%)
3	0 (0%)	4 (100%)	0 (0%)	0 (0%)
4	1 (11%)	8 (89%)	0 (0%)	0 (0%)
5	1 (5%)	17 (85%)	0 (0%)	2 (10%)