Strukturer och värderingar av bevis

Hur elevers geometriska bevis ser ut samt hur lärare och elever värderar dem

Phoenix Björkdahl
Ämneslärarprogrammet med inriktning mot gymnasieskolan – Matematik, kemi

Uppsats/Examensarbete: 15 hp
Kurs: LGMA2A
Nivå: Avancerad nivå
Termin/år: VT2022
Handledare: Johan Wästlund
Examinator: Laura Fainsilber

Nyckelord: Geometri, bevis, argumentation, Toulmin, van Hiele, syfte med bevis, lärares värderingar, matematik 2.

Key words: Geometry, proofs, argumentation, Toulmin, van Hiele, function of proofs, purpose of proof, teachers' values

Abstract

The main purpose of this study was to investigate the structure of Swedish students' mathematical argumentation and what values teacher show when ranking student solutions. This qualitative study used a clinical, task-based interview (N = 4). With the aid of Toulmin's model the study observed that students verbal and written argumentative structure can differ on one major point: *students can consistently omit written motivations that lack an effective symbolic language*. In other words, students verbal argumentation may contain a motivation for every single step while the written variant exclude a specific type of warrant. Furthermore, the study also determines what type of warrants find convincing. Other parts of Toulmins model are discussed as well. A second part of the study gathered data from teachers (N=48) using a questionnaire to capture if teachers omit similar reasonings from their own solutions when they present solutions to the classroom. Student solutions from the first phase was presented to the teachers who then ranked them and reflected on their evaluation. A hypothetical model was created from the data do describe how the values of a teacher can alter their rankings of a student solution. The significance of the study is primarily as a generative study, creating testable hypotheses, models, and statements. Further inquiry is required in determining the portion of students who perform better verbally, as well as if the classroom environment can be modified to alter students' presentations. Mainly, would a strict protocol of always including warrants in teachers' written presentations affect the students' written solutions? Furthermore, additional research would be needed in determining what kind of argumentation is deemed acceptable in the Swedish Upper Secondary School.

Förord

Jag vill tacka min handledare och samtliga deltagare, både i pilot- och den egentliga studien. Jag kan säga att detta arbete väckt mitt intresse för att, förhoppningsvis, forska vidare inom matematisk argumentation och bevisföring i framtiden. Det kvarstår många frågor som har väckts i denna begränsade studie.

Efter många år tar detta kapitel slut och ett nytt börjar.

Ett speciellt tack till Philip Nilsson; jag kommer alltid värna och minnas de ord du delade med dig av den 3 juni 2022 tills den dag mitt sinne lämnar denna värld. メリークリスマス.

Slutligen, ett speciellt tack till Tobias Emanuelsson; jag hade inte haft ett sinne att tala om utan honom.

Det finns ingen kungsväg till geometrin.
- Euklides

Innehållsförteckning

Figurförteckning

.

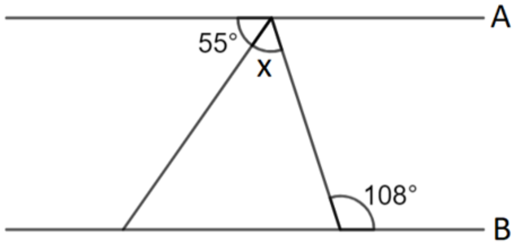
1. Inledning

Det är en solig om ändå något kall dag på min sista VFU. Ämnet för dagen är satser och bevis inom en matematik 2b kurs. Lektionen innan hade jag utfört en diagnos vars syfte var tvåfaldigt:

1. Att undersöka i vilken grad elever bemästrat implikation och ekvivalens.
2. Att undersöka hur väl elever motiverar sig inom uppgifter där de ska ”visa” någonting.

Geometri och logik har tidigare varit en del av matematik 1b men har med den ändrade ämnesplanen flyttats till matematik 2b (och räta linjen samt funktioner har flyttats ner till matematik 1b). Därmed så bör klassen ha påträffat och behandlat innehållet tidigare. En av frågorna på diagnosen var följande:

2. I figuren är linjerna A och B parallella. Visa att vinkeln x är 53 grader.



Figur 1. Diagnosuppgiften som gavs till eleverna.

Jag önskar här påpeka att jag inte enbart är ute efter att elever är medvetna om en viss egenskap hos parallella linjer samt alternat- och likbelägna vinklar. Jag är egentligen ute efter hur de (be)visar att vinkeln är 53 grader. Alltså, jag önskade fånga strukturen i elevernas argumentation. Resultatet av diagnosen var, minst sagt, intressant. De vanligaste svaren (95%, 61 av 64 elever) var på en av dessa två former:

$$180 - 108 = 72$$
$$55 + x + 72 = 180$$
$$x = 180 - 127 = 53$$

Eller:

$$x + 55 = 108$$
$$x = 108 - 55$$
$$x = 53$$

Det verkar som att eleverna troligen använt alternatvinklar. Ändå var det endast tre elever som specifikt nämnde något om detta samband. Det verkade som eleverna antog att läraren skulle förstå att de använt sambandet implicit. Genom geometrin med tvåorna har jag (och min LLU) försökt påpeka vikten av att redovisa sina argument. Mitt mål med lektionen blev därmed att vidare poängtera denna, för mig, viktiga aspekt av geometrin. Under introduktionen av lektionen satte jag därmed upp målet att vi i klassen skulle bli tydligare med att skriva ner vad vi tänker samt våra motiveringar. Kort efter introduktionen kom jag däremot in i en diskussion med en elev. Hen önskade föra fram sina tankar kring i vilken grad en behöver redovisa sina argument. Eleven upplevde att det kändes onödigt att behöva rita eller skriva ner allt den tänker. Jag förde fram åsikten[1] att geometri har ett högre krav på kommunikation och motivering av de lösningar vi ger. Exempelvis hade vi gärna sett mer ritningar i fråga 2 eller direkta hänvisningar till egenskaper hos parallella linjer. Eleven svarade följaktligen:

> “Något sånt har jag aldrig behövt göra och jag har alltid haft högsta betyget i matte. Min förra lärare sa att man bara skulle skriva ner sina beräkningar och inte skriva eller rita för mycket.”

Eleven fortsatte senare sitt resonemang på följande vis:

> “Alltså, vad är den praktiska användningen för det här? Det funkar ju ändå, liksom? Vad är poängen med att göra det? Ni fattar vad vi gjort ändå.”

Eleven avslutade med följande:

> “Ska vi alltid behöva skriva allt? Var går gränsen liksom? Gäller det allt inom matten?”

Efter en lite djupare diskussion med eleven angående hur hen löst uppgiften framkom det att hen ansåg att dessa motiveringar enbart tagits **muntligt** tidigare. Som sagt: läraren förstår hur eleven tänkt ändå.

Elevens ord hade en ganska betydlig effekt. För min del så ser jag bevis som en absolut nödvändighet inom matematiken, även om jag måste vara finkänslig för hur de ska introduceras. Jag ser bevis, eller argumentation överlag, som ett av de huvudsakliga syftena för att inkludera matematik i allmänbildningen. Här verkar det, för mig, som om eleven inte ser behovet av ett bevis eller tolkar frågan annorlunda än jag gör. Hen anser mycket väl att hen ”*visat”* vad hen kan. Jag som lärare kan implicera resten av elevens kunskap från det som presenterats. Eleven såg en mer utförlig presentation som icke nödvändig och tolkade det mer formella resonemanget som överflödigt (för att visa samma sak i praktiken). Strukturellt sett upplevde jag att det fanns en skillnad mellan elevens muntliga och dess skriftliga argumentation. Likaväl fann jag även ett stort intresse i att eleven upplevt att lärare, fram tills nu, har värdesatt andra saker. Ett skifte i denna bedömning verkar vara nästintill ett brytande av ett didaktiskt kontrakt (jmf. Brousseau 1997). Härledes väcktes mitt intresse för att studera följande frågeställningar:

Vilken struktur har elevers verbala och skriftliga bevis? Hur ser dessa ut gentemot varandra?

Vad anser elever vara ett bevis och vilka motiveringar använder de vid bevisföring?

Vad värdesätter lärare i ett elevs bevis?

[1] Kanske till och med traditionen.

1.1 Syfte och frågeställning samt studiens disposition

Studien består av tre större delstudier som binds samman till en enda. De tre frågeställningar som studeras är följande:

I. Vilken struktur har elevers verbala och skriftliga bevis? Hur ser dessa ut gentemot varandra?

II. Vad anser elever vara ett bevis?
   - Hur argumenterar elever när de tar sig an uppgifter om bevis av standardkaraktär? Vad för specifikt innehåll finns det i elevernas innehåll?
   - Tycker elever det finns något syfte med att lära sig om bevis?

III. Vad värdesätter lärare i ett geometriskt bevis?
   - Vad för värderingar syns när lärare bedömer elevers ansatser?
   - Vad för delar i ett bevis tar lärare muntligt på tavlan?

Vissa av studiens kapitel har dessa romerska siffror i sin titel. Detta markerar vilken frågeställning avsnittet hanterar. Avsnitt som saknar siffra är däremot relevanta för hela arbetet.

1.2 Studiens begränsningar

Avgränsningar har gjorts till att enbart hantera bevis inom geometri. Detta innebär att studien **inte** kommer inkludera något begrepp som ligger bortom matematik 2b: såsom motsägelsebevis[2] och induktionsbevis. Det existerar redan svenska studier som har observerat hur ”väl” elever resonerar och utför bevis. Denna studie kommer INTE försöka analysera hur ”väl” elever löser en viss uppgift utan enbart ”hur” de gör det. Strukturen och dess innehåll är fokus, inte om de är logiskt valida eller ej. Studien hade troligen även kunnat försöka fånga vad det är som lärare anser vara ett bevis. Detta kan implicit härledas från de värderingar som kommer fram i lärarnas svar. Denna frågeställning förtjänar emellertid en helt egen studie, se exempelvis Varghese (2009), eller Knuth (1999, 2002a, 2002b). Alltså, lärarnas definition av bevis kommer inte tas upp i denna studie.

Det finns även ett val att göra angående huruvida lärare ska reflektera summativt eller inte. Vissa studier har tidigare låtit läraren sätta betyg på hur väl en elev har löst en uppgift (Knuth 2002a, Meyer & Schnell 2020). En liknande metodik är emellertid svår att använda i en svensk kontext. En lärare sätter normalt sett inte betyg på enstaka uppgifter. För övrigt kan summativa bedömningar konsekvent utgå ifrån bedömningsmallar. Eftersom denna studie önskar fånga vad lärare personligen ser som viktiga aspekter i en elevs lösning så verkar det inte aktuellt att dela ut en sådan bedömningsmall. I sådana fall skulle forskningsfrågan skiftas till ”hur tolkar lärare bedömningsmallar inom geometrisk bevisföring”. Därmed kommer studien fokusera på lärarens eget tyckande, där lärare enbart ska rangordna svaren och beskriva varför de gjort de val de gjort. Lärare kommer inte explicit begäras att sätta betyg eller utgå från summativa principer[3].

[2] Visserligen finns det en hel del geometriska motsägelsebevis. Se exempelvis Euklides Element Bok 3 (satser om cirklar) för att se flertalet tillämpningar av geometriska motsägelsebevis.

[3] Exempelvis kommer inte följande fråga ställas: har elevens lösning uppnått kraven i kunskapskraven?

2. Bakgrund

I denna bakgrund kommer en definition av bevis ges. Bakgrunden kommer även beskriva tidigare forskning inom elevers syn på bevis samt hur bevis beskrivs i ämnesplanen i Sverige.

2.1 Vad är ett bevis? (I, II)

Vad är ett bevis? Genom litteraturen existerar det flertalet definitioner med olika utgångspunkter (Manin 1977, Balacheff 1987; Hersh 1993, s.391; Davis & Hersh 1981; Volmink 1990). Även om det hade varit möjligt att rada upp dessa så är det inte relevant för detta arbete. Syftet med den andra frågeställningen är inte att förstå vad matematiker eller forskare anser vara ett bevis; det är vad *elever anser* vara ett bevis. Utöver det så kan även matematiker själva delvist ha svårt med att komma överens om vad som ska räknas som ett bevis eller inte i praktiken (Inglis m.fl. 2013). En definition av bevis måste alltså vara inklusiv nog för att inkludera elevers definitioner av bevis samt hur de arbetar med det i praktiken. För att lyckas med detta utgår denna studie från Harel & Sowders (1998) begrepp ”bevisschema”:

> En persons bevisschema består av det som ska fastställas och det som är övertygande för den personen[4].
>
> (Harel & Sowder 1998, s. 244)

Definitionen inkluderar inte någon form av formell validitet utan utgår istället från vad som än är ”övertygande för den personen”. Om en elev anser att mätningar räcker för att bevisa ett påstående, då är den motiveringen ett ”bevis”. Att bevisa är därmed en process där elever försöker övertyga sig själva (eller andra) om ett givet påståendets giltighet (eller brist därav). Studien ska fånga vad dessa motiveringar är samt analysera strukturen hos argumenten.

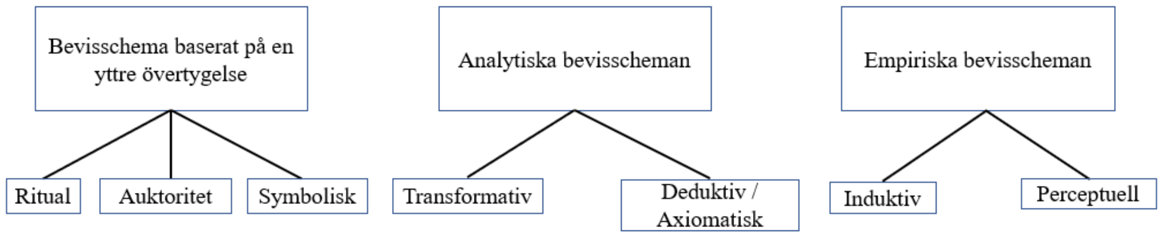
2.1.1 Tidigare forskning om elever syn på bevis (II)

Det är inte alltför ovanligt att studier fokuserar på hur väl elever klarar av vissa uppgifter samt vad för svårigheter elever upplever inom geometri (se bilaga 3). Det verkar däremot inte vara lika vanligt med studier som studerar vad som ens övertygar elever alls. Det finns en viss mängd relevanta artiklar på detta område. Samtliga av dessa är utförda utomlands och majoriteten är skrivna innan 2000-talet. Datan kan vara både utdaterad samt opålitlig i en svensk kontext.

Med detta i åtanke så beskriver litteraturen i stora drag tre stora kategorier av bevisscheman hos elever: *bevisscheman baserade på yttre övertygelser, empiriska bevisscheman* samt *analytiska bevisscheman* (Chazan 1989 & 1993; Harel & Sowder 1998 & 2007). Harel och Sowder (1998, 2007) studerar en liknande frågeställning som denna studie där de försöker kategorisera vilken typ av motiveringar eller bevisscheman som elever förlitar sig på inom bevisföring. Under en termin har forskarna samlat in data via kliniska intervjuer, fältobservationer, läxor och inlämningsmaterial samt test i syftet att upptäcka elevers bevisscheman. Det är nämnvärt att alla dessa experiment utfördes och lärdes ut av Harel personligen. Resultatet av deras studie mynnar ut i en modell som beskriver de olika typer av

[4] Original: A person’s proof scheme consists of what constitutes ascertaining and persuading for that person.

bevisscheman (samt vissa delkategorier) som de iakttagit under terminens gång. Nedan följer en modifierad version av Harel & Sowders resultat:



Figur 2. I bilden ovan beskrivs de tre bevisscheman som observerats hos elever. Dessa kan i sin tur delas in i delkategorier (och vissa av dem i sin tur i ytterligare kategorier). Figuren ovan är anpassad från Harel & Sowder (1998, s. 245) och har förenklats samt modifierats utifrån resultat från andra studier.

Bevisschema baserat på en yttre övertygelse

Den första kategorin skulle utgå från bevisscheman vars validitet accepteras av eleven på grund av en yttre "auktoritet" eller "övertygelse". Mer konkret så önskade Harel & Sowder (1998) beskriva ett fenomen där elever accepterar argument och bevis med grund i antingen rådande klassrumsnormer eller brist på reflektion kring symbolers innebörd. Ett bevisschema som är *rituellt* accepterar bevis utan en tillämpning av en rationell process eller utvärdering av beviset. Ett bevis är ett bevis för det ser ut som ett bevis[5]. Martin & Harel (1989) samt Vinner (1983) kunde ge belägg för att elever kan uppvisa denna typ av bevisschema när de accepterar ett korrekt bevis utan att förkasta ett felaktigt bevis för samma påstående[6]. Ett bevisschema baserat på *auktoritet* eller *auktoritativa* bevisscheman definieras av Harel & Sowder (1998, 2007) som de fall där elever accepterar argument på grund av *vem*[7] som presenterar argumentet snarare än *vad* det är som presenteras. Slutligen, beskrivs det *symboliska* bevisschemat. I detta schema kan elever lösa problem med symboliska manipulationer men saknar en förståelse för innebörden av lösningen och dess steg. Ett exempel skulle vara att en elev inte problematiserar om en positiv eller negativ rot ska vara med i en lösning beroende på problemformuleringen.

Empiriska bevis

Vissa bevis utgår från fysikaliska grunder, dvs. det som kan upplevas och ses. I denna kategori finns det två teman. Det *perceptuella (visuella)* bevisschemat utgår från det som en kan se och uppleva via ens andra sinnen. Att en triangel är likformig med en annan triangel stämmer för att vi kan *se att de är likformiga.* Det är den specifika bilden som lägger grunden för vårt argument. Det *induktiva* bevisschemat baseras istället på ett fåtal till en större mängd exempel för att belägga sanningshalten i ett påstående (Fawcett 1938; Balacheff 1988, Martin & Harel, 1989; Chazan 1993; Coe & Ruthven 1994; Harel & Sowder 1998 & 2017; Hoyles & Küchemann 2002). Graden som krävs för att övertyga en person varierar. Vissa utgår från en doktrin av "*naiv empirism*" (Balacheff 1988, s.218) där enbart ett enda eller ett fåtal exempel räcker för att övertyga eleven. Andra elever kräver att en först hanterar alla olika "typer" av ett givet "objekt" innan ett påstående accepteras. Exempelvis beskrev Chazan (1993) att elever kunde motsätta sig giltigheten i ett *induktivt bevis* baserat på att inte alla fall av trianglar hade hanterats[8]. I samma arbete kunde andra studenter helt och hållet motsätta sig induktiva bevis som bevis. Litteraturen beskriver oberoende av detta att elever mycket väl kan acceptera sådana motiveringar som "bevis" för ett givet påstående. Empiriska bevis kan vara

[5] Såsom elever har sett dem tidigare.

[6] Hos lärarstudenter inom grundskolan (N = 101) i USA. På en skala 1 – 4 (där 1 är lägst acceptans och 4 är högsta möjliga acceptans) så värderade 52% av lärarstudenterna det falska beviset med hög acceptans (3 – 4).

[7] Till exempel en lärare eller lärobok.

[8] Exempelvis olika typer av trianglar: rätvinkliga, likbenta, liksidiga, trubbiga och spetsiga.

mer eller mindre intentionsfyllda hos elever. Vissa elever verkar välja exempel på måfå för att sedan välja data som är lämplig medan andra riktar in sina exempel på relevanta förslag (Hoyles & Küchemann 2002, s.207-208). Med detta avslut kommer vi härledes in på den sista kategorin:

Analytiska bevis

Till slut beskriver litteraturen ett ”*analytiskt”* bevisschema. Med Harel och Sowders ord så är det analytiska bevisschemat ett schema där påståenden bekräftas via logiska samband (1998, s.258). Det bör emellertid påpekas att detta inkluderar mer än vad som klassiskt sett räknas in i deduktioner. Den första delkategorin skulle vara det *transformativa* bevisschemat[9]: elever utför operationer på geometriska objekt och bestämmer samt förutsäger resultatet av operationen. Förslagsvis kan en elev rita nya parallella linjer och translatera vinklar från ett ställe till ett annat. Det kan även handla om rotation och förstorning av trianglar i en figur för att upptäcka likformighet. Det kan även vara ännu mer dynamiskt än detta, exempelvis att elever kan visualisera hur randvinkeln på en cirkel alltid förblir densamma[10]. Det *deduktiva* eller *axiomatiska* temat utgår strikt från egenskaper hos geometriska objekt, eller satser, samt logiska deduktioner (såsom implikationer, ekvivalenser och kontrapositioner) för att dra slutsatser. Harel och Sowder (1998, s.273) nyanserar inte denna kategori utan går direkt på ett ”axiomatiskt” bevisschema, där elever innehar en förståelse för nödvändigheten och innebörden av ”axiom”. Dessa elever fokuserar på hur, och vilka logiska slutsatser som kan dras samt validiteten i beviset. Andra författare väljer däremot att nyansera detta tema en aning mer. Balacheff (1988), van Dormolen (1977) samt Coe & Ruthven (1994) beskrev i sina studier en nivåindelning för hur elever utför bevis, en typ av ”svag deduktion” respektive ”stark deduktion” (Coe & Ruthven 1994, s.44). Jag anser att Harel och Sowders (1988) indelning är en aning för hård och tar inte i åtanke elever som är kapabla till att utföra logiska deduktioner men som inte nödvändigtvis har förstått innebörden av axiom. Eftersom andra författare sedan delar in bevis i enbart två delar, *empiriska* och *deduktiva* bevis (Chazan 1993, s. 359), samt väljer att vidare differentiera i vilken grad en elev kan utföra deduktiva bevis finner jag det därmed nödvändigt att också utföra en sådan indelning. Framöver kommer denna kategori kallas ”*deduktiv”*. Ifall en elev når ”högre” eller uttrycker tankar kring axiom, så kommer studien kalla dessa bevisscheman och motiveringar ”axiomatiska”.

2.1.2 Hur definierar elever bevis? (II)

Det har utförts ett antal studier tidigare som har försökt fånga elevers[11] uttryckliga definitioner av ett bevis (Reid 2002; Varghese 2009; Köğce, Aydın, Yıldız 2010). Den sista studien samlade in material från 125 elever från tidig gymnasieålder[12] med hjälp av en enkät. Forskarna identifierade och redovisade följande koder:

[9] Det bör nämnas att Harel och Sowder (1998, 2007) beskriver många fler delkategorier till det transformativa temat. Främst utifrån hur ”internaliserad” transformationen är och vilket språk som används. Det kändes dock inte aktuellt att gå igenom alla dessa fall för denna studie, givet att den inte samlar in en tillräckligt stor mängd data för att identifiera alla dessa delkategorier.

[10] Så länge mittpunktsvinkeln står på samma båge när en flyttar på randvinkeln.

[11] Med en mycket bred tolkning. Detta inkluderar även lärarstudenter.

[12] 10th grade.

Tabell 1. En tabell anpassad från Köğce, Aydın och Yıldız undersökning (2010, s.2546) som beskriver studenternas definitioner av ett bevis.

Kod	F	%	Studentsvar
Visar korrektheten av ett resultat	21	16,8	En metod som används i matematik för att visa sanningsfullheten i de tillämpade operationerna.
Visar hur matematiska operationer utförs i detalj	21	16,8	Visar på vilket sätt operationerna har utförts på djupet.
Visar resultatet numeriskt	24	19,2	Använder numeriska data för att bevisa någonting.
Visar korrektheten i ett påstående, en formel eller sats	25	20,0	Bevisar validiteten av några regler som har accepteras i matematiken. Med andra ord, bevisa att påståendet är sant.
Ger en logisk förklarning	3	2,4	Att utvärdera ett uttryck med logik istället för med regler.
Visar resultatet på flera olika sätt	4	3,2	Hitta resultatet genom att använda olika men.
Visar att en ekvation stämmer för alla möjliga värden	1	0,8	Visa att ett fall uppfyller en regel för alla tal.
Representerar ett givet uttryck matematiskt	12	9,6	Att upptäcka konstruktionen av ett uttryck via matematiska koncept.
Hittar det okända, givet de kända	5	4,0	Att generera en formel baserat på andra formler och information.
Inget svar	9	7,2	

Det verkar inte vara alltför vanligt att studier fokuserar på att undersöka elevernas egna definitioner av ett bevis. Reid (2005) framhäver och problematiserar detta utifrån principen att forskare inom matematikdidaktik förutsätter att elevernas tolkningar av vad ett bevis är överensstämmer med forskarens samt lärarnas tolkningar. Däremot har Harel & Sowder (1998) samt Chazan (1989, 1993) redan belagt att elever kan acceptera bevis med väldigt många olika typer av motiveringar, även empiriska. Det är även relevant att elever kan välja att använda empiriska bevis trots att de inte kategoriserar dem som egentliga bevis (Healy & Hoyles 2000, s.409 – 413). Därmed är det relevant att **fråga** elever specifikt om **vad** de själva anser vara ett bevis i slutändan.

2.1.3 Vad anser elever vara syftet med bevis? (II)

Den sista aspekten som önskas undersökas hos elevernas koncept av bevis är vilken värdering och syfte elever finner hos bevis. Detta område är en aning mer utforskat än den tidigare frågeställningen. Bevisens syfte är inte alltid särat från dess definition, däremot så finns det en viss nyansering jämfört med det tidigare avsnittet. Med stöd av flera källor (Fawcett 1938; Bell 1976; Hanna 1989, 1990, 2000; de Villiers 1990; Hersh 1993; Coe & Ruthven 1994; Hanna & Jahnke, 1996; Weber 2002, 2003; Reid 2005; Varghese 2009; Köğce, Aydın, Yıldız 2010) så kan följande punkter ställas upp:

- **Bevis är en verifikation**: syftet med ett bevis är att visa att ett påstående eller resultat är korrekt.
- **Bevis är en förklarning**: syftet med beviset är att ge oss kunskap om varför ett påstående är sant.
- **Bevis är en systematisering**: syftet med ett bevis är att placera ett påstående i ett deduktivt system av axiom och definitioner.
- **Bevis är en härledning[13]:** syftet med ett bevis är ett system av ekvationer / samband som används för att härleda andra ekvationer / samband.

[13] På engelska: Derivation eller ”to derive”.

- **Bevis är ett rättfärdigande:** syftet med ett bevis är att det ”rättfärdigar” eller ger evidens[14] för att ett påstående är sant.
- **Bevis är en upptäckt:** syftet med bevis är att upptäcka eller skapa nya resultat.
- **Bevis är en utforskning:** syftet med ett bevis är att förstå innebörden av ett begrepp eller se konsekvenserna av ett antagande.
- **Bevis är en kommunikation:** syftet med bevis är att på ett effektivt sätt förmedla matematisk kunskap.
- **Bevis är en konstruktion:** syftet med ett bevis är att skapa en empirisk teori.
- **Bevis är en införlivning:** syftet med ett bevis kan vara att införliva ett resultat i en ny tolkningsram.
- **Bevis gör lärandet permanent:** syftet med bevis är att ge en djupare förståelse för ämnet och permanentera lärandet.
- **Bevis gör matematiken meningsfull:** syftet med bevis är att skapa mening hos matematiken. Att enbart memorera formler skapar inget syfte alls bakom matematiken, eftersom de enbart existerar utan något bakomliggande syfte.

Hanna (1990, 2000) framhäver i sina resultat att syftet med bevis beror på sammanhanget; i vissa situationer ska bevis tjäna syftet att verifiera påståenden medan i andra fall ska det enbart rättfärdiga påståendet[15]. Hanna anser även att inom skolmatematiken är det främsta syftet för lärare att använda bevis är för att förklara *varför* något är sant. Bevisens syfte är, enligt Hanna, i denna kontext främst att tjäna som en förklarning[16]. Givet denna omfattande lista, så kan en dra slutsatsen att bevisens syfte verkar vara mångfacetterad och beroende på vilken kontext en arbetar i.

2.2 Bevisens roll i ämnesplanen

I detta avsnitt kommer bevisens roll i ämnesplanen beskrivas samt problematiseras. I gymnasiets matematik har den större delen av geometrin samlats i den andra kursen, matematik 2. Under punkten ”*logik och geometri*” behandlas tre punkter (Skolverket 2021a):

- Begreppen implikation och ekvivalens.
- Begreppen definition, sats och bevis.
- Användning och motivering av grundläggande klassiska satser i geometri om vinklar och likformighet samt Pythagoras sats, inklusive exempel som omfattar beräkningar i koordinatsystem.

Det är även relevant att nämna punkter ur *problemlösning, verktyg och tillämpningar:*

- Tillämpning och formulering av matematiska modeller i realistiska situationer. Utvärdering av matematiska modellers egenskaper och begränsningar.
- Matematiska problem med anknytning till matematikens kulturhistoria.

Geometrin är, onekligen, ett av de områden som är äldst inom den formella matematiken. Den består av en ganska rik kulturhistoria. Likaväl kan geometri tillämpas i realistiska situationer,

[14] Jag använder här ordet ”evidens” i en mer engelsk mening. Att ge ”evidens” är inte samma sak som att bevisa; evidens är mer i linje med empiriska bevis snarare än deduktiva.
[15] Alltså ge evidens för. En motivering som gör ett påstående ”rimligt”.
[16] Detta speglas i Köğce och kollegors studie (2010) där ca. 30% av eleverna (N_{total} = 125) rapporterade att bevisens syfte är att förklara någonting

såsom att bestämma höjden på byggnader eller Jordens storlek. Det är emellertid mer intressant att fokusera på vilken roll bevis ska ha inom geometrin . *Begreppen* definition, sats och bevis nämns explicit i kombination med att undervisningen ska innehålla *motivering* av grundläggande klassiska satser om vinklar och likformighet. Det är relevant att försöka förstå vad dessa punkter försöker fånga in. Främst finner en svaret i kommentarmaterialet till ämnesplanen:

> I matematik 2b och 2c ingår användning och motivering av grundläggande klassiska satser i geometri om vinklar och likformighet samt Pythagoras sats, inklusive exempel som omfattar beräkningar i koordinatsystem. Avsikten med detta innehåll är **inte** att eleverna ska behärska vissa givna satser, med undantag för Pythagoras sats som nämns explicit, utan snarare att de ska kunna ta till sig och använda (enklare) geometriska satser.
>
> (Skolverket 2021b, s.23-24)

Se att intentionen inte är att eleverna ska ”behärska” satserna, utan elever ska ”ta till sig” och ”använda” dem. Vilka satser som ska behandlas är inte väldefinierat utöver Pythagoras sats. Följande står skrivet i kommentarmaterialet:

> Utöver Pythagoras sats föreskriver ämnesplanen inte vilka satser som ska tas upp. Några tänkbara exempel är satser om grundläggande likformighet, yttervinkelsatsen, randvinkelsatsen, vinkelsumma i månghörningar, transversalsatsen, topptriangelsatsen, bisektrissatsen, kordasatsen, satser om vinkelräta linjer och kongruenssatser för trianglar.
>
> (Skolverket 2021b, s.24)

Detta avslutas med ett förtydligande angående bevisens roll inom undervisningen:

> Att motivering av satser nämns i det centrala innehållet innebär att eleverna kan förväntas motivera satsers giltighet, men inte nödvändigtvis genomföra formella bevis. (Se även kommentarer till kunskapskraven som rör att föra resonemang.)
>
> (Skolverket 2021b, s.24)

Med motivering verkar det därmed som att Skolverket utgår från induktiva, eller möjligen, empiriska bevis. Formella bevis *kan* inkluderas men behöver inte *nödvändigtvis* ingå. Det är upp till läraren att göra denna bedömning. Se följande citat:

> I många av ämnets kurser används frasen motivering och hantering av (vanligtvis) metoder. Det markerar att inte bara utförande av metoder ska ingå i undervisningen, utan också motivering av varför metoderna är giltiga. Hur formellt metoder motiveras avgörs av läraren – i vissa fall är det rimligt att genomföra härledningar eller bevis, medan det i andra fall inte ens är möjligt att göra formella härledningar inom ramen för matematik på gymnasial nivå. I några fall används frasen bevis av, vilket då signalerar att just formella bevis krävs.
>
> (Skolverket 2021b, s.13)

Det är alltså upp till läraren att besluta om i vilken grad (om någon alls) som deduktiva bevis ingår i undervisningen inom matematik 2. För att få en fullständig bild är det relevant att studera kunskapskraven. Fram till och med matematik 2 **existerar det inte** något explicit krav som nämner bevis eller bevisföring. Bevisföring läggs emellertid till i matematik 3 kursen (för både b- och c-kursen). Detta krav läggs enbart till för betyget C och högre. (Skolverket 2021a).

- Eleven för **relativt väl** underbyggda matematiska resonemang, genomför **enkla bevis** och följer **relativt avancerade** matematiska resonemang.

För A gäller det att:

- Eleven för **väl underbyggda** matematiska resonemang, **genomför bevis** och **följer avancerade** matematiska resonemang.

Detta mönster kvarstår för de resterande kurserna inom matematik 4, 5 samt specialisering. Kommentarmaterialet till ämnesplanen beskriver detta tillägg under ”förmågan att föra och följa matematiska resonemang”. Varför det ser ut som det gör framgår inte, utan det enda som statueras är följande:

> I matematik 3-kurserna och senare tillkommer krav på att eleven genomför enkla bevis/bevis för betygen C och A. Bevisföring, härledning och troliggörande är en del av matematiskt resonerande, och kan följaktligen vara en del av sådant som bedöms redan i matematik 1- och 2-kurserna – men är en nödvändig del av bedömningen för matematik 3 och senare.
>
> (Skolverket 2021b, s. 30)

Det verkar därmed som att bevis inte har en alltför framträdande roll inom den svenska ämnesplanen. Snarare verkar intentionen inom matematik 2 vara att läraren själv ska bedöma hur formellt kursen ska vara. Givet formuleringarna ovan så verkar det inte helt självklart att deduktiva bevis har en plats i svenska skolans undervisning. Hemmi, Lepik & Viholainen (2013) går ett steg längre där de anser att den svenska ämnesplanen inte är optimalt utformad för geometri och bevisföring:

> There are no statements about classifying objects or drawing conclusions, investigation or observing regularities; nothing about logical aspects, exactness or the development of mathematical objects either. Consequently, there is a gap between the compulsory school curriculum and the upper secondary school curriculum concerning the development of skills needed for understanding and practicing proof and proving.
>
> (Hemmi, Lepik & Viholainen 2013, s.17)

Förvisso är denna forskning från 2013 och kan därmed anses utdaterad. Ämnesplanen och kursplanen i matematik har skrivits om. Däremot kan detta argument slås ner direkt för det som skede med geometri var att den flyttades från matematik 1 till matematik 2 och saker ströks från innehållet (symmetri)[17]. Detta syns främst när en jämför tabell 9-12 från Hemmis och kollegornas verk med den nuvarande kurs- och ämnesplanen. De är fortfarande snarlika varandra. Som mest har några ord ändras samt så har vissa begrepp uteslutits.

[17] Förvisso dyker detta upp i tidigare i grundskolan tillsammans med likformighet.

3. Teoretisk ramverk

I detta avsnitt kommer två teoretiska ramverk behandlas. Syftet med dessa ramverk är att lägga grunden för ett analysverktyg samt att definiera och välja ut lämpliga, tillförlitliga uppgifter för metoden. Dessa teorier används med andra ord för att skapa en metod som mäter det som önskas mäta, som skapar situationer där en kan fånga vad elever anser vara ett bevis samt hur deras bevisscheman ser ut.

3.1 Problem med att fånga elevers bevisschema (I, II)

Målet med studien är att fånga och analysera de resonemang som elever använder vid bevisföring samt genom detta förstå vad dessa individer anser vara ett bevis. På grund av att fokus enbart är det som respondenterna anser vara ett bevis så är det egentligen strukturen och innehållet i sig som är av intresse, snarare än huruvida varje slutledning är logisk valid eller ej. Med utgångspunkt ur bakgrunden så finns det tre problem som behöver hanteras i studien:

1. Respondenternas tolkning av ”bevis” är mer öppen än ”deduktiva bevis”[18].
2. Respondenterna ser eller skapar deduktiva bevis men tolkar inte dessa som ”deduktiva bevis”.[19]
3. Respondenternas bevisföring eller tolkning utelämnar viktiga detaljer.

Den första punkten relaterar till hur individer tolkar bevis i en mer öppen tolkning än formell matematik. Exempelvis kan elever acceptera enstaka fall som bevis, eller tolka en mängd specialfall som bevis för ett påstående (induktiva bevis). Den andra punkten angår huruvida respondenter tolkar deduktiva bevis som enbart ett annat specifikt exempel. Chazan (1993, s.371-372) beskrev förslagsvis hur vissa elever anser att deduktiva bevis enbart behandlar enstaka diagram och fall alternativt att de inte garanterar att motexempel fortfarande existerar. Respondenter kan till och med beskriva och utföra deduktiva bevis men trots det inte ge en större tilltro till dess validitet och riktighet. Ett analysverktyg som önskar fånga vad elever anser övertygande måste därmed vara öppen för dessa fall. Slutligen, så måste studien även kunna hantera den problematik som uppstår med att respondenters resonemang utelämnar viktiga detaljer, såsom direkta referenser till egenskaper hos parallella linjer. För att hantera dessa tre problem krävdes ett analytiskt verktyg som inte fokuserar på att utvärdera elevernas korrekthet utan enbart belysa strukturen och dess delar.

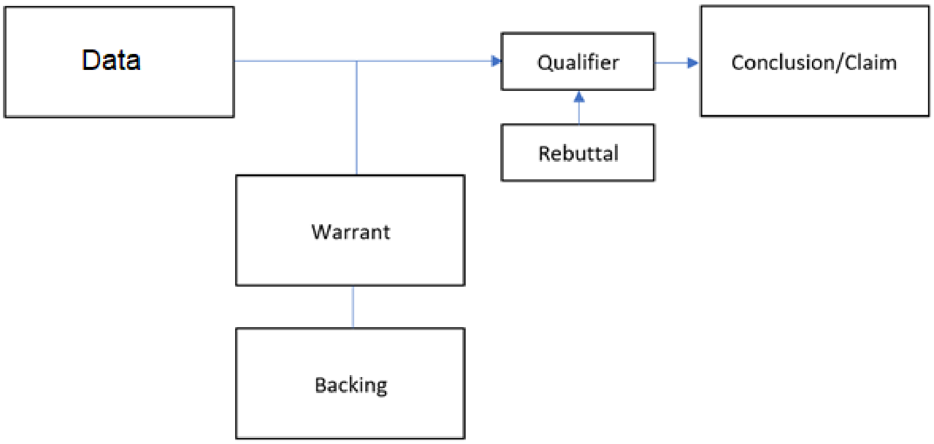
3.1.1 Och dess lösning: Toulmins modell för argumentation (I, II)

Stephen Toulmin är en brittisk filosof som intresserade sig för de element i ett argument som är oberoende av vilket fält en arbetar med. Som utgångspunkt tog Toulmin stöd av juridik och rättsvetenskap. Logik kan sägas vara, med Toulmins ord, en generaliserad form av juridik (Toulmin 2003, s.7). Argument kan ses som olika rättsfall där syftet är att bestämma en tolkning av de lagar som finns (inferensmönster), huruvida de kan tillämpas eller ej, samt hur dessa tillämpas. Ursprungligen var verket enbart ämnat att analysera resonemang inom rättsvetenskap, ändå så kom den över tid att anpassas till andra områden. Toulmin önskade en mer öppen och differentierad analys av argument jämfört med de ansatser som önskade tillämpa en matematisk analys med bas i Euklides eller geometri (Toulmin 1958, s.95). Denna modell kom senare att vidareutvecklades av bland annat Brockriede och Ehninger

[18] Snarare ser vissa elever bevis som helt identiskt med ”evidens” (se engelska).
[19] Alltså, de är inte generella. Detta kan även kopplas till förra punkten. Ifall bevis tolkas som synonymt med evidens så särskiljs inte dessa olika typer av bevis från varandra.

(1963) för att introduceras till retoriken överlag, och senare, flera andra fält (Hitchcock 2005; Verheij, 2005; Loui 2006; Prakken 2005; Fox & Modgil 2006; Fox, Glasspool & Mogdil 2006; Fox m.fl. 2007; Eruduran & Marilar, 2007; Reed & Walton 2007). Sammanfattningsvis kan en säga att Toulmins verk handlade om att skapa en mer praktisk och tillämpbar logik som kunde analysera en större mängd argument än rent filosofiska. Toulmin (2003, s.89) ifrågasätter tillämpbarheten av formell logik, hela vägen tillbaka till Aristoteles; är den formella logiken tillräckligt öppen och utvecklad nog för att kunna hantera alla typer av argument som kan uppkomma? Toulmin anser att argumentation överlag **inte** kan översättas till en matematisk och logisk form utan att missrepresentera dess delar (Toulmin 2003, s.168).

Toulmin (2003, s.87-100) beskriver i flera steg en modell för hur ett argument kan byggas upp i en mer generell praxis och identifierar att sex generella delar :



Figur 3. Toulmins modell för argumentation. Modellen ämnar beskriva hur en enda del av ett argument kan byggas upp oberoende av vilket fält vi studerar. Toulmin själv kallade data "datum". Det är singularis av "data". Givet att "datum" har en helt annan innebörd på svenska så är det mer lämpligt att skriva ordet i pluralis.

Conclusion/Claim (C): det påstående som önskas (be)visas eller motiveras.

Data (D): Ett faktum eller grund (relevant evidens) som används för att stödja påståendet.

Warrant (W): En motivering som kopplar ihop faktan med tesen. Exempelvis inferensmönster, en lag, praktisk standard eller analogi.

Qualifier (Q): Ett modalt verb som beskriver graden av säkerhet som en person upplever kring sitt argument. Exempelvis begrepp som ”troligen”, det bör”, det ”borde vara så”, ”onekligen”, ”säkerligen”, ”nödvändigtvis”, ”det följer att”, ”det är”. Vissa uttryck ger intryck av att en individ tror mer eller mindre på sanningshalten i sitt argument och att den dragna slutsatsen stämmer.

Rebuttal / Reservation (R): Påståenden som påpekar begränsningar (eller motbevisar) det som ska visas. Kan vara hypotetiska (såvida det inte finns ett motexempel). Ett annat, mer matematiskt exempel kan vara att Pythagoras sats stämmer i en Euklidisk geometri[20]

Backing (B): Ett understöd, eller belägg, som rättfärdigar att motiveringen (W) är tillämpbar eller riktig (såsom empiriska data, allmänkunskap, vetenskaplig teori, satser, axiom, etc.). Exempelvis kan en via postulat dra slutsatsen att två räta vinklar är kongruenta[21]

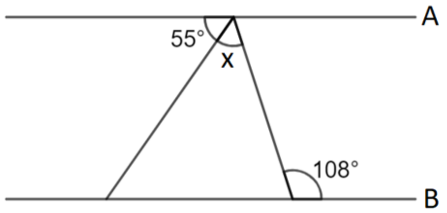
[20] Men inte nödvändigtvis i andra geometrier, såsom sfäriska, elliptiska och hyperboliska.
[21] Postulat 4: Alla räta vinklar är lika med varandra.

Toulmins modell löser de första två problemen, där elevers tolkningar av bevis är mer öppna är matematiken samt att elever inte ser deduktiva bevis som generella. Däremot, så kvarstår det tredje problemet. För att lösa detta kommer intervjuschemat utformas utefter Toulmins modell. Utöver det så har även Bromley inspirerat hur modellen kommer illustreras i resultatet (Bromley 1986, s.197-227). Det som kvarstår nu är att beskriva hur Toulmins modell kommer användas i analysen.

3.1.2 Hur ska argument analyseras? (I, II)

Låt oss först studera enklare argument utan delarna Q och R. Säg att vi studerar följande problem och tillhörande lösning:

2. I figuren är linjerna A och B parallella. Visa att vinkeln x är 53 grader.

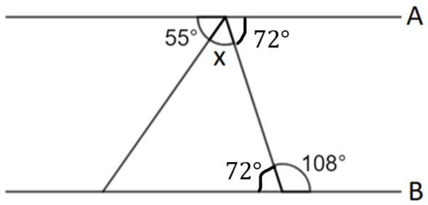


$$x = 108 - 55 = 53$$

Figur 4. En tänkt elevuppgift om parallella linjer.

Denna typ av lösning kommer i denna studie kallas ”**DC**”, dvs. en elev har gått från den givna datan och dragit den önskade slutsatsen, C. Det framgår emellertid inte helt och hållet hur detta steg motiveras[22]. Även Toulmin framhäver att motiveringar (W) kan vara implicita i argumentationer (s.92). Ifall en elev tagit flera steg av denna form, dvs. något i form av $D \rightarrow C_1 \rightarrow C_2 \rightarrow \ldots$, så hade även detta kodats som DC. Det bör nämnas att markeringar av storleken av sidor och vinklar också är ett argument på formen DC. Markeringen, av en vinkel och dess storlek är i sig en slutsats. En påstår ändå att vinkeln **är** den storleken när en ritar ut det inte **varför** vinkeln är den storleken. Låt oss studera detta:

2. I figuren är linjerna A och B parallella. Visa att vinkeln x är 53 grader.



180 – 108 = 72 (sidovinkel)
$55 + x + 72 = 180$
$x = 180 - 127 = 53$

Figur 5. Elevlösning med en tydligare redovisning som utelämnar en motivering.

Visserligen blir det lättare för läraren att ”gissa” sig till hur eleven har tänkt, men det existerar egentligen inte i någon mening någon länk som binder ihop den givna datan med varje slutsats som har gjorts. Härledes tolkas även dessa argument som på formen ”DC”.

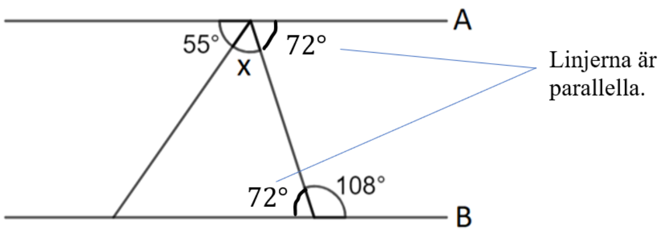
[22] Vi kan givetvis ”gissa” på att eleven nyttjat en motivering likt ”linjerna är parallella så alternatvinklarna är lika stora”. Detta framgår dock ej. Mer om detta senare.

Ett argument kan även vara på formen **DWC** (Toulmin 2003, s.91-92). Här skulle en elev försöka binda ihop varje steg i någon mening. En elevlösning med det tidigare exemplet hade exempelvis kunnat sett ut på följande vis:

$x + 55 = 108$ (linjerna är parallella och då är alternatvinklarna lika stora)
$x = 108 - 55 = 53$

Här beläggs argumentet med en mening som understödjer hur en ställer upp ekvationen från första början. Dessa motiveringar kan vara mer eller mindre explicita, och stundtals kan det vara svårt att tolka deras innebörd. Däremot kommer denna studie tolka vilken motivering som helst som en motivering, oberoende av dess validitet. Även om en elev helt enkelt ritar flera fall och testar varje fall så räknas detta som en form av motivering. För att exemplifiera hur DWC hade sett ut i flera steg studeras följande fall igen:

2. I figuren är linjerna A och B parallella. Visa att vinkeln x är 53 grader.



180 – 108 = 72 (sidovinkel)
$55 + x + 72 = 180$ ($en\ rak\ vinkel$)
$x\ =\ 180\ - 127$
$x\ =\ 53$

Figur 6. Elevlösning på formen DWC med flera steg.

Här skulle modellen alltså innehålla mer än ett steg av slutsatser. Givet att argumentet är relativt intakt så skulle det fortfarande kallas **DWC**. Om ett motiverande steg **saknas** från ett led till ett annat, så benämns argumentet **istället** som **DC**. Här skulle exempelvis argumentet blivit DC om ”linjerna är parallella” raderades. *Detta restriktiva val har gjorts för att öka interreliabiliteten hos olika bedömare*. Vissa bedömare skulle nog anse att motiveringen ”linjerna är parallella så alternatvinklarna är lika stora” är onödig eller trivial. Om en annan bedömare däremot anser att det är nödvändigt så skulle det finnas en risk att ett och samma argument kodas annorlunda av dessa två bedömare, vilket minskar reliabiliteten. Korrektheten är däremot inte relevant i kodningen. *Givet att en elev har gett någon motivering mellan ett steg och ett annat så räknas det som en motivering*. Stundtals kan det även vara av intresse att undersöka om motiveringen i sig (W) är tillämpbar, eller det stöd som finns för motiveringens riktighet. Om en elev skulle undersöka detta på **egen hand** så skulle detta benämnas i denna studie med **DBC**.

3.1.3 Det som döljs i modellen (II)

Det är inte helt ovanligt enligt Inglis och kollegor (2007, s.8) samt Toulmin (m.fl. 1984, 2003) att riktiga argument inte helt belyser vare sig backing (B) eller rebuttals (R). Därmed kan vissa argument vara svåra att analysera med verktyget när man är begränsad till att enbart ”gissa” sig till vad det är för stöd som respondenter utgår från. Inglis och kollegor hade följande att säga angående denna problematik[23]:

> When modelling arguments using Toulmin’s (1958) scheme it is often the case that certain parts of the argument (most commonly backings and rebuttals) are not

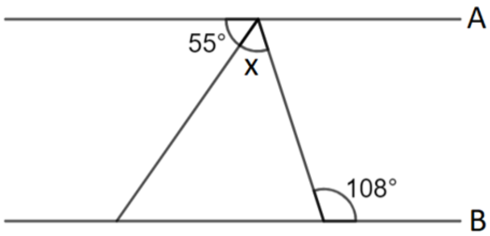
[23] Deras studie undersökte hur masters och doktorandstudenter inom matematik resonerade kring talteoretiska hypoteser.

explicitly verbalised by the arguer … we dealt with this issue by inferring the backings and rebuttals of participants' arguments where they were not explicitly verbalised. Consequently, the diagrams reported in the remainder of this paper **represent plausible models** which account for participants' behaviour and utterances …

(Inglis, Mejia-Ramos & Simpson 2007, s.8)

Det är relevant att diskutera tillvägagångssättet att sätta in ”möjliga modeller”. I studier som fokuserar på misstolkningar och misstag som begås av elever inom geometri så är utelämnande av viktiga steg relativt vanligt (Usiskin 1982, Kembitzky 2009, Ndlovu & Mji 2012, Özerem 2012, Chigonga 2016, Casanova et al 2021). Låt oss konkretisera detta med det exemplet från inledningen där eleven besvarade följande uppgift:

2. I figuren är linjerna A och B parallella. Visa att vinkeln x är 53 grader.



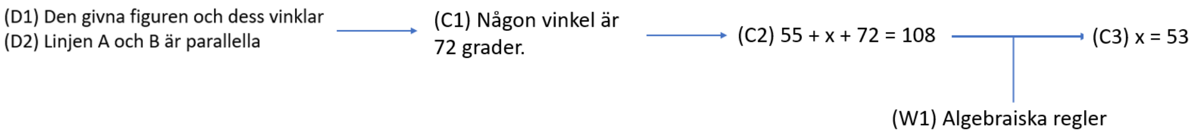
180 – 108 = 72

$$55 + x + 72 = 180$$

$$x = 180 - 127 = 53$$

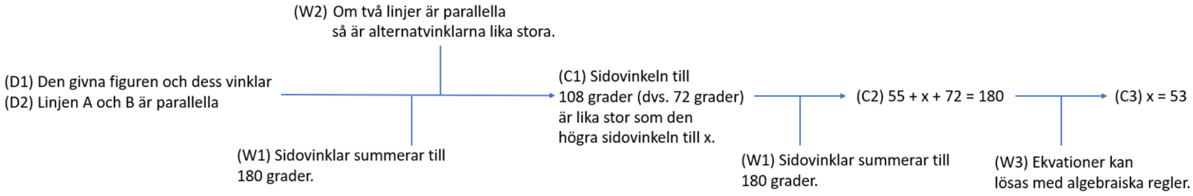
Figur 7. (Nedan) Elevlösning utan tydliga motiveringar.

Detta är lösningen i sin helhet. Det finns varken ritningar eller några motiveringar för de steg som görs. Med utgångspunkt ur Toulmins modell samt med inspiration från Bromley (1986) framställning av modellen så skulle en ansats kunna se ut så här:



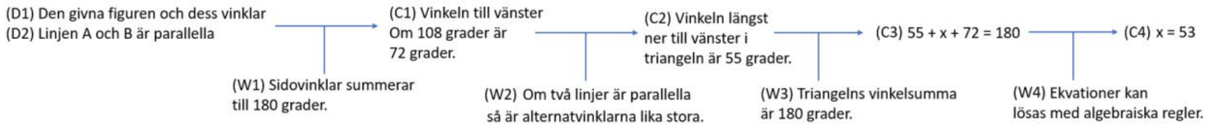
Figur 8. En tolkning av elevlösningen med Toulmins modell. Upplägg baserat på Bromley (1986).

Exemplet ovan är ett gott exempel på de problem som kan uppstå vid analys av matematisk argumentation (eller argumentation överlag). Främst att läsaren (eller läraren) måste ”gissa” sig till vad det är för stöd (W) som eleven nyttjat. Givet det som är skrivet så kan vi *gissa* på följande modell:



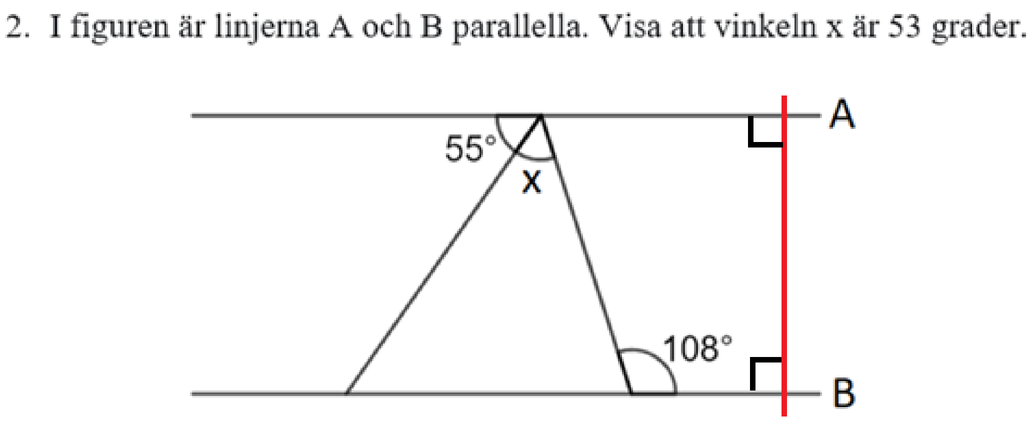
Figur 9. Elevlösning som utgår från alternatvinklar.

Detta är dessvärre inte den enda modellen eleven kan ha använt. Det är även möjligt att eleven istället utgått ifrån att bestämma vinklarna i triangeln. Dvs:



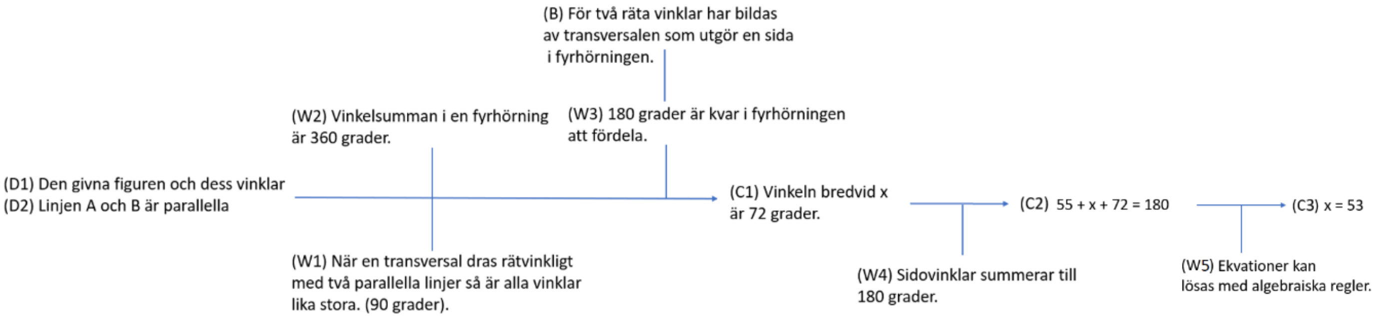
Figur 10. Elevlösning som bestämmer alla vinklar i triangeln.

Så vilken av dem stämmer? Svaret är INGEN av dem. Det visar sig efter att jag samtalat med eleven att INGEN av dessa två modeller var det som hen tänkt sig. Detta är resonemanget som hen använde:



Figur 11. Elevens egentliga lösning.

Med stöd av elevens verbala utsaga kunde följande modell skapas:



Figur 12. Toulmins modell för den föreslagna elevlösningen.

Det verkar finnas skäl till att tro att elevers verbala och inre utsagor kan markant skilja sig från den skriftliga. *Det verkar därmed nödvändigt att elever får möjlighet att både resonera verbalt och skriftligt för att fånga samtliga delar i en elevs argumentation enligt Toulmins modell.* Härledes tar jag en annan ståndpunkt än Inglis och kollegor (2007) som delvist fyllde i respondenternas argumentation. Det är nämnvärt att tidigare studier som använt Toulmins modell inom matematikdidaktik har utgått från en reducerad modell för att analysera elevers matematiska argumentation. Här används i sådana fall enbart D, W, B och C (Krummheuer 1995; Yackel 1997; Yackel 2001; Hoyles och Küchemann 2002). Utgångspunkten verkar främst vara att de andra delarna, Q och R, sällan dyker upp explicit i matematisk argumentation[24]. Den fulla modellen anses däremot ge mer information om hur mycket elever litar på deduktiva bevis. Därmed väljs den fulla modellen för att fånga detta.

3.1.4 Bevisscheman och Toulmins modell (II)

Harel och Sowder (1998, 2007) definierade bevisscheman på följande vis:

> En persons bevisschema består av det som ska fastställas och det som är övertygande för den personen[25].
>
> (Harel & Sowder 1998, s. 244)

I Toulmins modell verkar detta främst koppla till motiveringar (W och B), samt slutsatser (C). I denna studie kommer bevisscheman tolkas som vilken typ av motiveringar (W och B) som används av eleverna. Exempelvis skulle elever som motiverar sina slutsatser från det hen ser i sig kodas som att de använder visuella eller perceptuella motiveringar (Dvs. ett perceptuellt bevisschema). Toulmins schema låter oss vidare nyansera i vilket led som bevisschemat agerar på. Exempelvis så kan en motivering som utgår från en auktoritet placeras mer i (B) än i (W). Slutsatserna kommer vara mer eller mindre givna (eleven ska visa att), däremot så kan dessa kommas tolkas annorlunda av respondenterna.

3.1.5 Kritik och metodologisk reflektion kring Toulmins modell (I, II)

Toulmins modell har haft ett större inflytande inom flertalet fält såsom juridik (Bromley 1986), retorik (Hitchcock & Verheij 2006, Simosi 2003), ämnesdidaktik (Eruduran & Marilar, 2007), säkerhetsanalys (Spriggs 2012), medicin (Fox & Modgil 2006; Fox, Glasspool & Mogdil 2006; Fox m.fl. 2007), samt kommunikation, datavetenskap och AI (Prakken 2005; Hitchcock & Verheij 2006, Reed & Walton 2007). Trots detta är inte Toulmins modell utan kritik; Toulmin själv hävdar att hans verk har kallats en bok i ”anti-logik” (Toulmin 2003, s.viii[26]). Kritiken av Toulmins modell kan sammanfattas med följande punkter:

1. Modellen kan tillämpas på enkla argumentationer men inte komplex, vardaglig argumentation (Ball 1994).

2. Inte alla delar av modellen dyker upp i praktiska argumentationer (Goodwin & Goodwin 1987, Ball 1994).

3. Hur differentierar en forskare de olika kategorierna i praktiska situationer? Exempelvis, hur skiljer en mellan data och warrants i en komplex argumentation? Hur skiljer en mellan warrants och backing? (Freeman 1991; Freeman 2005).

De sista tre punkterna faller enligt mig under en och samma problematik: hur ska egentligen en given argumentation analyseras? Toulmin själv anser att det är möjligt att skilja dem med grund i att det finns en funktionell skillnad mellan (W) och (B) (Toulmin 1958 & 2003, s. 98). Svårigheter att skilja dem utgår främst från hur en uttrycker respektive del explicit. Simosi (2003) lyfter fram att vissa studier har löst detta genom att utgå från grammatiska definitioner

[24] I sådana fall är de på ganska strikta former, såsom: ”det följer nödvändigtvis att”, ”därmed”, ”det följer” eller ”det finns inga motexempel under dessa premisser”. Alltså, det finns ingen grad av osäkerhet i ens slutsatser. Ett deduktivt bevis garanterar att inga motexempel finns, så länge vissa axiom gäller.
[25] Original: A person’s proof scheme consists of what constitutes ascertaining and persuading for that person.
[26] I förordet för den uppdaterade versionen.

av ord för att kategorisera argumentationer enligt Toulmins modell (van Eemeren och kollegor, 1987). Syftet var främst att vidare förbättra interbedömarreliabiliteten och säkerställa ett reliabelt, stabilt resultat. Emellertid påpekar även Simosi[27] att modellen egentligen ska utgå från de funktionella aspekter som en viss del i ett argument tjänar, snarare än grammatiska. Simosi hävdar också att de studier som har rapporterat problem med att tillämpa Toulmins modell oftast har utgått från skriven text. Simosi skriver följande:

> In other words, these studies have often confined argumentation analysis to the *level of the text*, and to what has been explicitly presented in the context of the particular argument, **without being interested in eliciting parts of the argument which are left unsaid and not stated explicitly.**
>
> (Simosi 2003, s.187)

Ännu en gång framhävs alltså vikten att fånga det som inte nämnas av respondenterna. Utöver detta beskriver Simosi (2003, s.187–189) ett antal metodologiska förslag[28] som är lämpade för att bemöta tidigare kritik av Toulmins modell. Förslagen är följande:

1. Argumentets delar ska kategoriseras enligt dess funktion i argumentet, snarare än grammatiska definitioner.

2. Att acceptera att argumentation kan vara ”rörig”: analys kan ibland behöva gå utöver det som är explicit uttalat. Särskilt framhävs detta när en försöker fånga trossystem och gemensamma normer och kunskap.

3. Argumentet måste placeras i en större social kontext. Vissa normer och kulturer gör att två argument kan ytligt likna varandra men ändå skilja sig åt i sin mening.

Dessa punkter är av stort intresse. Givet att det existerar en möjlighet att elever mycket väl presenterar exakt samma skriftliga svar men har vida olika tolkningar av ”varför” de gäller. För att fånga dessa bakomliggande motiveringar är det därmed nödvändigt att elever **får möjlighet att uttrycka sin tro i någon grad** och **beskriva argumenten verbalt.**

3.2 Vad för färdigheter och kunskaper behövs för att kunna utföra deduktiva bevis? Van Hieles teori om (geometriskt) tänkande (II)

År 1955 presenterar paret van Hiele och Hiele-Geldof en gemensam teori för att förklara ett fenomen de observerat i sina klassrum under geometrilektionerna; att paret upplevde stora svårigheter med att förklara geometrin på en nivå som eleverna förstod. Paret upplevde att elever initialt, till deras besvikelse, uppvisade svårigheter med bevisföring inom geometrin oberoende av antalet förklarningar eller infallsvinkel. Vid något skede så verkar elever bit för bit tagit till sig ”någonting” så att de plötsligt kan ta till sig materialet. Med Van Hieles ord så uttryckte eleverna att ”det är inte så svårt men varför förklarade du det till oss på ett så svårt

[27] Och även Toulmin.
[28] Methodological considerations

sätt?[29]". Drivna av en viss frustration över huruvida de ens var bra lärare så utvecklade paret en teori för att förklara detta fenomen inom geometrin: *en nivåindelning för geometriskt tänkande*.

Teorin kan, i korta drag, sammanfattas som en variant av Piagets kognitiva teori, ifall Piaget fokuserade på geometri och var lite mer hoppfull om instruktionens påverkan. Mer konkret utgår van Hiele från en egen tolkning av gestaltpsykologi (van Hiele 1986, s.28). Huvuddraget i van Hieles teori var att nivåindela tänkandet inom geometrin beroende på VAD det är för objekt som eleven agerar på, dvs. vad är det som transformeras i någon mening. Van Hiele ser helheten av det innehåll som existerar i strukturen som en konsekvens av det språk och objekt. Dessa nivåer[30] [31] är följande (Freudenthal 1973; Wirszup 1976; Hoffer 1981; Hoffer 1982; van Hiele 1986, s.39-57 ; Burger & Shaughnessy 1986; Gutierrez & Jaime 1998; Vojkuvkova 2012):

1. Den visuella nivån
   Elever känner igen figurer från helheten och fokuserar främst på visuella intryck och ett icke-verbalt tänkande. Elever jämför föremål med vardagliga erfarenheter och utgår från ett enkelt språk och saknar koncept av egenskaper hos geometriska figurer. Exempelvis kan en elev på denna nivå känna igen bilder av en rektangel[32] men har ännu inte kategoriserat så mycket av figurens egenskaper.

2. Den beskrivande nivån (analys)
   På denna nivå kan en elev börja beskriva och analysera vilka egenskaper enklare figurer innehar. En rektangels motstående sidor är lika stora och dess diagonaler är troligen lika stora. Däremot så skiljer en elev ännu inte mellan rektanglar och kvadrater. I grunden är detta fortfarande en visuell nivå där figurers egenskaper härleds ur figuren i sig.

3. Den teoretiska nivån (abstraktion)[33]
   Enligt van Hiele själv (1986, s.53) är det vid denna nivå som Euklidisk geometri börjar utvecklas, där fokus ligger på logiska relationer mellan objekt. En elev på denna nivå förstår och använder definitioner. Därmed kan eleven även inse att en kvadrat är en rektangel. Utöver detta så förstår eleven innebörden av ett bevis men kan inte utföra ett sådant i den striktaste meningen. Bevisens roll och egenvärde är inte självklart för eleven.

---

[29] It isn't so difficult, but why did you explain it to us with so much difficulty? Detta översätts egentligen ordagrant till " Det är inte så svårt, men varför förklarade du det för oss med så mycket svårighet". Dock kan detta misstolkas som att det är läraren som hade svårt att förklara det, snarare än att eleverna upplevde det svårt.

[30] I den ursprungliga varianten existerade inte den visuella nivån. Det fanns alltså bara fyra nivåer, där den första börjar med vad som är nivå 2 här.

[31] Ibland läggs det även till en nivå 0 för "saknar perception av geometriska figurer överhuvudtaget". Van Hiele verkar inte heller vara emot idéen att det finns högre nivåer än nivå 5. Van Hiele anser dock att i skolans värld hanterar vi främst nivå 2, 3 och 4 och finner därmed inget mervärde i att diskutera högre nivåer än dessa. "If our pupils do not understand us, it is at these levels, not when we are speaking on the fifth or perhaps still higher levels" (van Hiele 1986, s.47).

[32] Med helt raka sidor, de får inte vara dåligt ritade (Van Hiele 1986).

[33] Kallas även "ordering", alltså nivån där kunskapen ordnas. Detta är särskilt förvirrande, givet att olika källor även ger samma namn till den fjärde nivån.

4. Den formella logiken (deduktion)
   Eleven förstår vikten och innebörden av deduktioner, satser och bevis. På denna nivå kan en elev utföra mer formella bevis och manipulera och skilja logiska satser. Exempelvis kan en elev utföra kontrapositioner eller skilja på en sats och dess omvändning. Här skulle en elev kunna bevisa att diagonalerna i en rektangel är lika stora.

5. Naturen hos den formella logiken (Rigorositet[34])
   Slutligen beskrivs en den sista nivån ”rigorositet”. Vid denna nivå är det naturen hos de logiska lagar och axiom som är fokus för analysen. Vad är det som antas för att ens komma till en slutsats och vilka primitiva objekt samt definitioner används för att bygga upp det deduktiva systemet? En elev på denna nivå skulle kunna problematisera samt generalisera vad en linje och parallellism ens innebär samt koppla ihop hur olika postulat implicerar vissa andra satser. Enligt samtliga författare är det ovanligt att elever når denna nivå på högstadiet eller gymnasiet.

Van Hiele postulerar och ställer upp följande egenskaper för sin modell (van Hiele-Geldof, 1957, van Hiele 1958-1959, Usiskin 1982, s. 4-6):

1. Nivåerna uppnås i en sekvens. En student kan inte ha en van Hiele nivå ”n” utan att först ha nått nivå n – 1.
2. Varje nivå av tänkande som var ”inre” i den föregående nivån blir ”yttre” i den nuvarande nivån.
3. Varje nivå har sin egen mängd av symboler och ett nätverk av relationer som kopplar ihop dessa symboler.
4. Två personer som resonerar på olika nivåer kan inte förstå varandra.

Paret van Hieles viktigaste poäng skulle enligt mig vara att utbildningen oftast introducerar geometri för sent och inte ger eleverna tillräckligt med tid för att bygga upp de första nivåerna. Att sedan röra sig snabbt vidare och kräva att elever ska befinna sig på nivå 3 (eller högre) där de ska förstå bevis[35] är därmed ett alltför stort gap för flera elever att ta. Enligt egenskap 3 och 4 så kan dessa elever helt enkelt inte ta det steget förrän de ”uppnått” en viss nivå av förståelse. Detta leder in oss på syftet med att inkludera van Hieles modell i arbetet.

3.2.1 Varför van Hiele? (II)

Litteraturen beskriver på flera ställen att elever upplever svårigheter med bevis (Senk 1985; Balacheff 1988; Bell 1976; Chazan 1993; Healy & Hoyles 2000; Weber 2003). Grundtanken är att det finns en risk att de elever som deltar i studien helt enkelt inte klarar av uppgifterna. Om så vore fallet så finns det en risk att det inte går att samla in material som kan analyseras utifrån Toulmins modell. För att behandla detta problem kommer studien välja uppgifter som är från nivå 1 upp till nivå 4. På detta vis bör argumentation kunna samlas in från varje elev. Även om eleverna inte klarar av att utföra deduktiva bevis som sammanfaller med standarduppgifter på nationella proven så bör de ändå klara av att argumentera på lägre nivåer. Motiveringar mellan olika nivåer kan också skilja sig åt. Detta syns i de begrepp och beskrivningar av beteenden som van Hiele observerat för varje nivå (se bilaga 2). Alltså, så utförs fortfarande argumentation men inte nödvändigtvis ett ”deduktivt bevis”. Detta kan

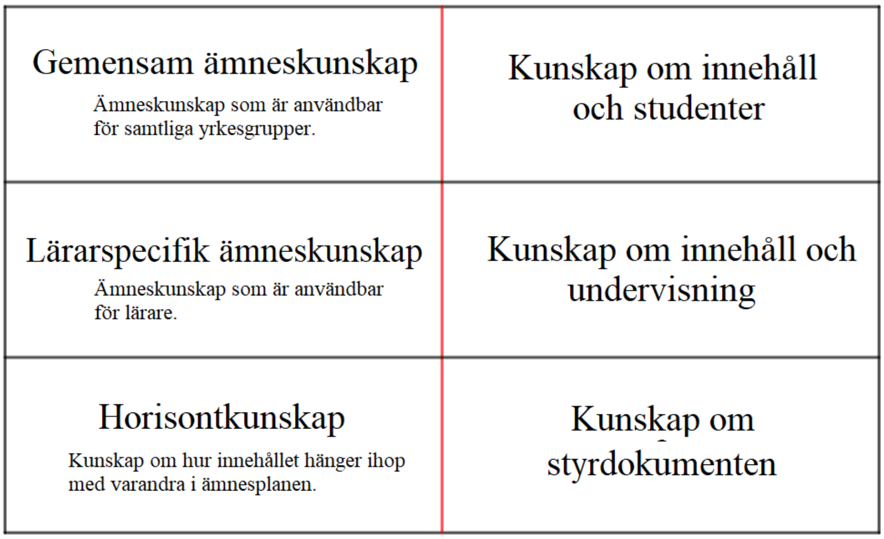
[34] Rigor.
[35] Eller inom geometrin i matematik 2: ”motiveringar”.

3.2.2 Kritik av Van Hieles modell (II)

Van Hiele (1986) själv lyfter fram vissa författare som har kritiserat hans modell. Även författare i mer moderna tider har framhävt vissa punkter av intresse. Kritiken riktar sig främst till hur elever ska kategoriseras enligt modellen (Usiskin 1982; Mayberry 1983; Burger & Shaughnessy 1986; Jones 2002; Clements 2004) samt att elever på högre nivåer än 3 inte går att skiljas på i hur väl de utför two-column proofs[36] (Usiskin 1982; Senk 1983). Givet att elever inte kommer kategoriseras enligt någon yttre modell i denna studie så är denna kritik inte relevant för arbetet. Det räcker att modellen hjälper studien välja ut lämpliga uppgifter.

3.3 MKT, En modell för matematisk kunskap för lärande (III)

En sista modell som är relevant att lyftas fram är ett verktyg för att organisera och tolka lärarens pedagogiska och matematiska kunskaper. Deborah Ball har, med flera kollegor, arbetat med att analysera vad för kunskaper och processer en lärare behöver och använder i praktiken (Ball & Wilson 1990; Ball & Bass 2000; Ball 2003; Ball, Thames & Phelps 2008). Modellen organiserar de kunskaper som en lärare kan använda för att lägga upp sin lärarpraxis. Sammanfattningsvis består lärarens kunskaper av två större delar, den ämnesmässiga (subject matter) samt den pedagogiska. Dessa i sin tur kan delas in i delkategorier, som fångar olika delar av respektive aspekt. Främst har denna modell använts för att välja ut lämpligt material till lärardelen. Alltså, de uppgifter som presenteras för läraren ska kunna fånga deras värderingar. För att göra detta bör uppgifterna innehålla delar som relaterar både till deras ämneskunskap men främst deras pedagogiska kunskaper. Det är genom överväganden gentemot dessa kategorier som en lärare förväntas uppvisa sina värderingar.



Figur 13. Mathematical Knowledge for Teaching Anpassad från Ball (2003)

4. Metod

I detta avsnitt kommer metoden beskrivas, först för eleverna, sedan för lärarna. Eleverna kommer ta del i en semi-strukturerad klinisk intervju medan lärare kommer besvara en enkät vars material har valts ut ur svaren från eleverna.

4.1 Urval av elever (I, II)

Urvalet är ett bekvämlighetsurval där en tagit kontakt med elever muntligt och skriftligt via olika medier. För att utöka urvalet nyttjades sedan ett snöbollsurval där redan utvalda personer letade upp ytterligare deltagare. Eleverna har alla läst geometri i matematik 2 men en av eleverna läst högre matematikkurser (Matematik 4).

[36] En typ av modell från USA ämnad att hjälpa med bevisföring. Se Larson och kollegor, 2001; Herbst 2002; Weiss, Herbst & Chen, 2009; samt Cirillo & Hummer 2012.

4.2 Metod för elevdelen (I, II)

För att besvara första frågeställningen utfördes en semi-strukturerad klinisk (uppgiftsbaserad) intervju där elever fick besvara fjorton frågor under 1,5 – 2h enskilt. Eleverna fick lösa uppgifter först skriftligt och sedan verbalt. Intervjuschemat är utformat utifrån Toulmins modell (se bilaga 9). Intervjun spelades in och analyserades sedan utifrån Toulmins modell samt Braun & Clarkes temaanalys. Sammanfattningsvis följde intervjun i stora drag följande schema:

- (D) Introducera uppgift
- Låt elever lösa uppgiften skriftligt på egen hand.
- (W) Be eleverna beskriva sin lösning verbalt.
- (W och B) Ställ följdfrågor.
- (Q) Fråga hur säkra elever är på sin lösning. (Skala 1-5)[37]. Om under fem, fråga varför.
- (R) Fråga om eleven kan tänka sig några motexempel. Återgå till att fråga om säkerhet.
- Starta om från början.

Intervjun är indelad i tre större faser:

Fas 1. Van Hiele test: Inledningsvist fick elever svara på sex frågor som valts ut med stöd av studier från Usiskin (1982), Senk (1983, 1985), samt Mbusi (2019).

Fas 2. Elevlösningar. Elever fick på egen hand först lösa uppgifter skriftligt och sedan resonera kring sina lösningar (sju frågor totalt).

Fas 3, Induktiv vs. deduktiva bevis: Elever skiljer ibland inte induktiva från deduktiva bevis eller ser deduktiva som bevis för enstaka fall (Williams 1979; Fishbein 1982; Balacheff 1988; Chazan 1989, 1993; Harel & Sowder 1998; Simpson 1995; Hefendehl-Hebeker 1995). Eleverna fick därmed utföra en uppgift som ämnade fånga denna aspekt.

Avslutning. Elevens egen definition.
Avslutningsvis fick elever resonera kring två frågor: deras tolkning av ett bevis och vad poängen med bevisföring är.

4.2.1 Konstruktion och urval av frågor (I, II)

För att få stöd med att välja bra uppgifter utgick studien från ett antal principer, beskrivna av Goldin (2000). Dessa principer har främst tillämpats för att skapa ett intervjuschema samt ett urval av uppgifter så att undersökningen kan **återskapas**. Det ställdes även upp visa önskemål som ämnade öka tillförlitligheten i resultatet för frågeställning II och III[38]. För en ingående analys av hur och vilka frågor som valdes, se bilaga 2, 3 samt 4.

[37] Inte säker – nästintill helt säker / helt säker.
[38] Vad för motiveringar som elever övertygas av samt vilka värderingar lärare uppvisar vid bedömning av elevlösningar.

4.3 Metod för lärardelen (III)

En digital enkät[39] användes för att samla in respons från Matematikundervisningsgruppen[40]. Innehållet i denna enkät var direkt beroende av det innehåll som samlades in från eleverna. För att göra ett val av vilken uppgift som skulle presenteras, samt vilka elever, så behövde först en analys göras av elevernas svar.

Enkäten består av två delar, en del där lärare får **rangordna** och **reflektera** kring elevlösningar till ett problem och sedan en del där lärare får reflektera kring vilka delar i ett argument som de hade inkluderat i en tavelpresentation (se bilaga 8). Fråga 12 (se bilaga 6) valdes ut som den uppgift som skulle presenteras. Valet gjordes baserat på att svaren till denna fråga uppvisade en stor variation, samt flera aspekter som skulle kunna fånga de värderingar som lärare använder när de bedömer elevlösningar. Elevlösning 1 och 2 saknade mer eller mindre motiveringar för vissa steg[41] medan elevlösning 3 är mer formell och skippar inga större steg. Däremot så har lösningen ett smärre ”fel” där eleven råka sätta in fel sidor i en uppställd formel och jämförde inverserna av det som var tänkt. Detta rättades inte till, givet att andra lärare möjligen har värderingar som bryr sig om sådana aspekter. Elevlösning 1 innehöll också en smärre otydlighet; en variabel definieras med en ekvation men pekar inte ut i figuren. Även om det hade varit möjligt att lägga till detta för att förtydliga lösningen så fick otydligheten istället vara kvar. Med bas i Balls modell för matematiskt tänkande så är syftet här att fånga om lärare värderar sådan tydlighet så högt att de sänker elevlösning 1.

Idéen med att rangordna och reflektera kring uppgifterna inspirerades av Meyer & Schnell (2020) samt Philips (2017). Meyer & Schnell lät lärare betygsätta elevlösningar i syftet att rangordna dem. Detta verkade emellertid inte aktuellt i en svensk kontext, givet att betyg sätts i slutet på en kurs med god grund för bedömning. För att ändå fånga hur lärare värderar lösningar annorlunda valdes istället en personlig skala där lärare får motivera sin rangordning. För att fånga lärare som utgår från kunskapskraven samt Nationella provet så inkluderades en direkt referens till uppgift 12:s inspiration (Np Ma2b, Ht15, uppgift 15). Lärare hade även möjligheten att sätta samma rank på flera lösningar. Dessa val innebär att en inte kan vara helt säker på hur lösningarna står sig mot kunskapskraven i sig enligt lärarna. På grund av begränsningar i tid (enkätens tid får inte överstiga 20 minuter) så kunde inga förtydligande frågor ställas.

4.4 Pilotstudier

Elever (I, II)

Intervjuschemat testades initialt på en elev som hade gott med på att intervjuats[42]. Denna elev fick sedan rapportera angående upplevd svårighet med frågorna på en skala 1 – 5 på varje fråga. Eleven fick även ge respons angående formuleringar och delge egna tolkningar av frågorna. Detta material användes sedan för att revidera frågorna i intervjuschemat. Främst ändrades formuleringarna i fas 2 på några frågor men även ordningen ändrades. Frågor som upplevdes svårare flyttades så att de kom senare i intervjun i enlighet med Goldins (2000) principer.

---

39 Google Form.

40 Med ca. 20 000 medlemmar.

41 Elevlösning 1 saknar en motivering för som kopplat ihop att trianglarna har samma vinklar gör att trianglarna är likformiga. Elevlösnign 2 saknar motivering helt och hållet och statuerar helt enkelt att trianglarna är likformiga. Elevlösning 1 och 2 kategoriseras som DC argument medan elevlösning 3 är DWC:

42 Denna elev inkluderas inte i resultatet.

Lärare (III)
En pilotstudie utfördes på 9 lärarstudenter och en verksam lärare. En av frågorna i enkäten frågade hur lång tid det tog för respondenterna att utföra enkäten. Den totala tiden låg mellan 5-20 minuter (medelvärde 10,6 minuter). Två av lärarstudenterna fick ge mer respons utöver de andra på enkätens utformning samt hur den upplevdes. Baserat på denna respons, samt de svar som samlades in från pilotstudien utformades en reviderad version av enkäten. Främst ändrades formuleringen på sista frågan samt så lades det till en tydligare inledning för att uppfylla forskningsetiska principer.

4.5 Forskningsetisk diskussion
I enlighet med informationskravet har samtliga deltagare informerats om studiens syfte, samt dess innehåll och att deltagandet är frivilligt. Detta gjordes skriftligt och muntligt under inledningen av intervjun (se bilaga 9). Samtliga elevers medtycke har spelats in under intervjun. På grund av att intervjuschemat uttryckligen innehåller delar som påpekar att eleverna inte ska värderas kvantitativt (det är inte ett prov), så kommer ingen data presenteras som värderar hur väl eleverna besvarade frågorna. Syftet med detta är att få respondenter villiga att uttrycka vilka tankar och motiveringar de än har, oberoende av om de är ”matematiskt korrekta”. Eleverna är helt anonymiserade, inga originallösningar presenteras utan alla är omskrivna med stöd av datorprogram. Den elev som hittades via snöbollsurvalet är anonymiserad i ytterligare en nivå där respondentens namn aldrig avslöjades för intervjuaren. Det verkar inte existera någon uppenbar ”etiskt känslig uppgift” i denna intervju. Visserligen kan material peka på vem eleven är, i form av specifika uttryck, matematisk notation, talspråk eller uttalanden. Dessa har raderats/modifierats ur transkriberingen och rådatan. För lärarnas del informerades lärarna om samtliga forskningsetiska krav i inledningen. Genom deltagande godkände de att deras svar fick användas i detta arbete (se bilaga 8). I inledningen av enkäten beskrivs inte **exakt** vad studiens frågeställningar är utan beskrivs som att en söker ”vad som är en bra lösning till ett givet problem och varför”. Egentligen, är syftet främst att undersöka ”varför” lärare tycker en lösning är bra, snarare än rangordningen i sig. Denna otydlighet anses inte ha varit av en för etisk skadlig karaktär. Främt var syftet att inte påverka hur elever besvarar frågorna.

4.6 Dataanalys av rådata
Elevernas respons har analyserats utifrån en interpretiv paradigm där en utfört en tematisk analys. En tematisk analys är ”en metod för att systematiskt identifiera, organisera och ge insikter i mönster (teman) i en datamängd” (Braun & Clarke 2012, s.57). Ett tema är, enligt Braun och Clarke (2006, s.86), något som ”fångar något viktigt om datan i relation till forskningsfrågan, och representerar en viss nivå av mönster eller mening i datamängden”. Braun och Clarke beskriver, i stora drag, följande faser i en tematisk analys:

Tabell 2. Faser i en tematisk analys (Braun & Clarke 2006, s.112). Egen översättning av materialet.

Fas	Beskrivning
1. Bekanta dig med datan	Transkribera data, , läs och läs igenom datan igen.
2. Generera initiala koder	Koda intressanta drag i datan på ett systematiskt sätt genom hela datamängden, sammanställ data som är relevant för varje kod.

3. Sök efter teman	Sammanställ koder till gemensamma potentiella teman, samla all data relevant för varje potentiellt tema.
4. Granska teman	Kolla om identifierade teman fungerar i relation till den kodade extraktet (level 1) och hela datamängden (level 2), vilket i sin tur genererar en tematisk ”karta” av analysen.
5. Definiera och namnge teman	En pågående analys för att förfina detaljerna hos varje tema, och vilken historia som hela datan berättar; generera tydliga definitioner och namn för varje tema.
6. Skapa studien	Den sista möjligheten för analys. Välj ut levande, övertygande exempel, en slutlig analys av dessa valda exempel, relatera tillbaka analysen till forskningsfrågorna och litteraturen, vilket i sin tur producerar en vetenskaplig studie.

Dessa faser ska inte ses som en linjär process, enligt Braun och Clarke (2006, s.92), utan snarare som en spiral eller ”rekursiv process där en rör sig fram och tillbaka genom faserna vid behov”. För att vidare organisera och bearbeta datan användes ett kvalitativt forskningsprogram, NVivo. Inledningsvist skapas först gemensamma teman inom elevernas egna bevisscheman och sedan sinsemellan elever. Med stöd av NVivo utfördes även en analys av kodningen för att jämföra likheter och skillnader mellan koderna. Detsamma gjordes för lärarna. En motivering har enbart inkluderats om **minst två** respondenter uttryckt liknande tankar (i båda delarna av studien). Strukturen i elevernas argument analyserades sedan med Toulmins modell såsom det är beskrivet i bakgrundsavsnittet. Detta utfördes på uppgift 1 – 13 men med fokus på uppgift 7 – 13 (se bilaga 5, 6 samt 7 för att se uppgifterna).

5. Resultat

5.1 Elever (I, II)

Totalt fyra elever har intervjuats[43]. Dessa elever kommer få ha följande namn: **Dio, Giorno, Lisa Lisa och Speedwagon**. Detta avsnitt kommer inleda med att redovisa resultaten kring strukturen i elevernas argument enligt Toulmins modell (frågeställning I), för att sedan gå in på innehållet i samtliga delar av Toulmins modell (frågeställning II). Delkapitlen är indelade så att kärnan i ett tema eller resultat presenteras först för att sedan exemplifieras med ett antal exempel.

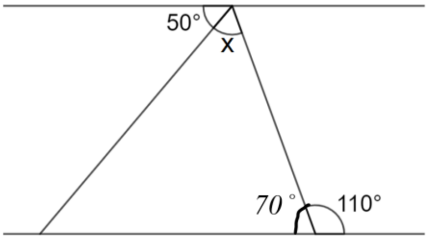
5.1.1 Vilken struktur har elevernas argument? Skriftligt mot verbalt. (I)

Strukturen hos elevers skriftliga argument kan skilja sig från deras verbala. Elevernas skriftliga argument följer, överlag, en DC-struktur medan samtliga deltagares verbala strukturer är DWC. Mer konkret visar studiens material att vissa studenter utelämnar motiveringar som **saknar ett effektivt symbolspråk.** Alternativt, att det hade tagit mycket text. Låt oss studera några fall av detta. De relevanta motiveringarna har markerats med *kursiv* text. Nedan följer ett avsnitt från Lisa Lisas motiveringar till uppgift 7.

[43] Fem med pilotstudien. Bortfall på 3 elever som inte hade tid att delta i studien.

Intervjuare: Linje A och B är parallella (Lisa Lisa: Ja), visa att den här vinkeln är 60 grader.

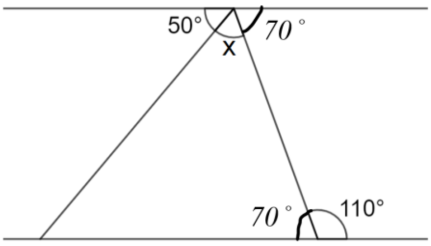
Lisa Lisa: Alltså, vi kan ju räkna ut den… (sidovinkeln till 110 grader). 180 minus 110.



180 – 110 = 70

Figur 14. Lisa Lisas första steg.

Lisa Lisa: Sen… … (paus fem sekunder). (Tar upp formelsamlingen). (Skriver in det som står nedan).



180 – 110 = 70

70 + 50 = 120

180 – 120 = 60

Figur 15. Lisa Lisas slutliga lösning.

Lisa Lisa: Sådär…

Intervjuare: Känner du dig klar?

Lisa Lisa: Ja.

Intervjuare: Även på, även för ett prov?

Lisa Lisa: Ja, jag tror det.

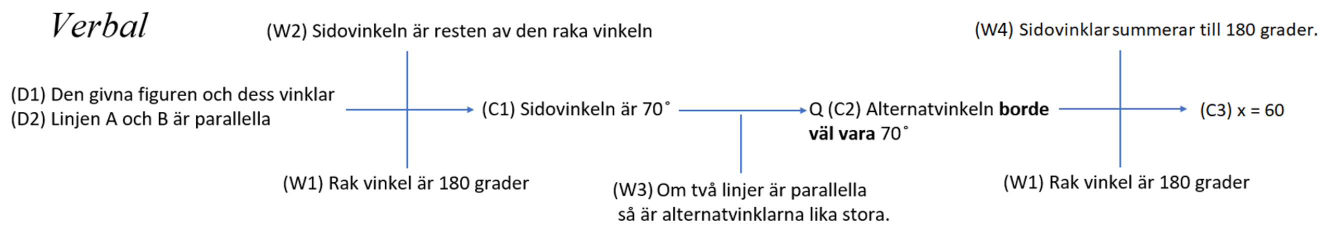
Intervjuare: Ok, hur tänkte du.

Lisa Lisa: Jooo… den vinkeln här är 70 grader för det är resten av 180 grader. Men nu vet jag… *för att de är parallella, så har vi ju dem här (pekar på alternatvinklarna), dem är lika stora*, så då **borde** väl den här också vara lika med 70.

Intervjuare: Yes...?

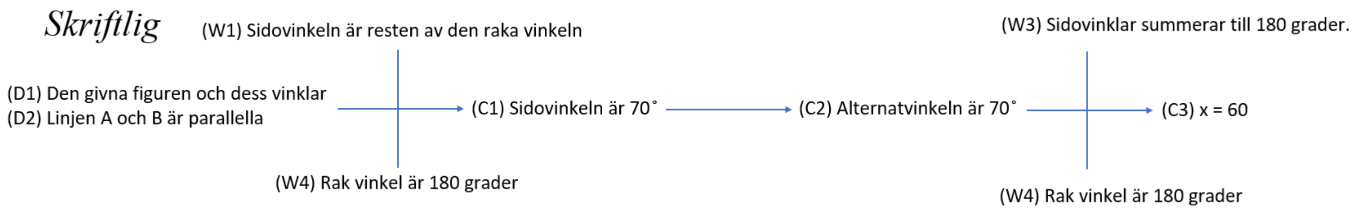
Lisa Lisa: De tillsammans är 180 grader… (pekar på alla tre vinklarna). Och 50 plus 70 är 120. Som innan så får vi då att x ges av 180 – 120, vilket är 60 grader. Så!

Uttryckt med Toulmins modell så uppstår det en mindre skillnad mellan de två argumenten, den verbala och den skriftliga.



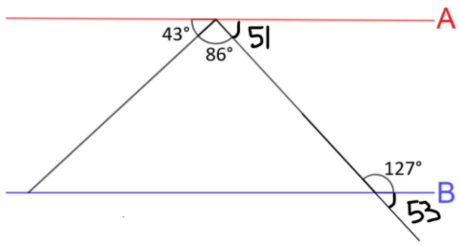
Figur 16. En analys av Lisa Lisas verbala argumentation med Toulmins modell.

Jämför detta med den skriftliga varianten:



Figur 17. En analys av Lisa Lisas skriftliga argumentation med Toulmins modell.

Se att ett steg utelämnades, motiveringen mellan C1 och C2. Uppmärksamma att denna motivering hade varit främst skriftlig och inte av ett symboliskt eller bildmässigt slag (dvs. såsom en ekvation eller beräkning). Detta mönster framgår även hos andra elever. Giorno presenterade följande bevis till uppgift 9:



180 – 43 – 86= 51
180 – 127 = 53

Figur 18. Giornos lösning av uppgift 9.

Giorno: Sådär, jag är nog klar.

Intervjuare: Känner du dig nöjd? Även för ett prov?

Giorno: Ja!

Intervjuare: dåså, err… förklara hur du tänkte?

Giorno: Så jag beräknar vinklarna för varje fall. Jag förlänger sidan här… Allt är ju ett halvt varv så… det är ju det här också (tar upp formelbladet): *om de är parallella, så ska de ge samma sak där. (pekar på alternatvinklarna 51 och 53 grader).*

Intervjuare: Nu har du dock att de inte gör det?

Giorno: Nej… där är det 53 och 51.

Intervjuare: Och det…?

Giorno: Betyder att de inte är parallella.

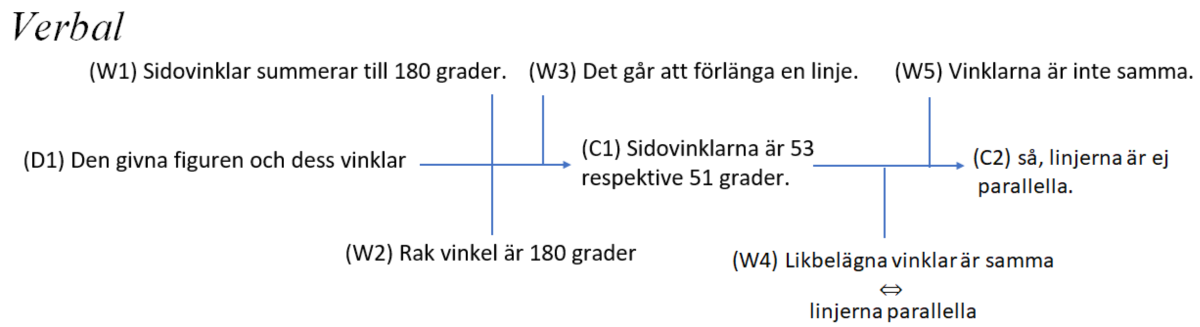
Intervjuare: Ok… men hur?

Giorno: Jag tänker att det funkar åt båda hållen. Alltså, *om vinklarna, alltså, de likbelägna vinklarna är samma så är de parallella och är linjerna parallella så är vinklarna samma.*

Intervjuare: Ah…

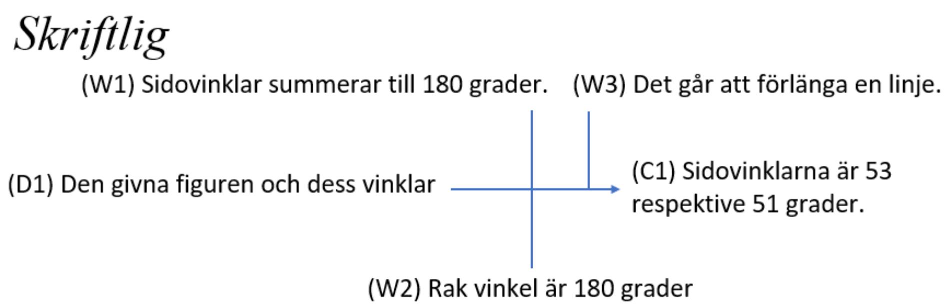
Giorno: Så, vinklarna är inte samma, så de är inte parallella.

Med Toulmins modell har följande analys gjorts:



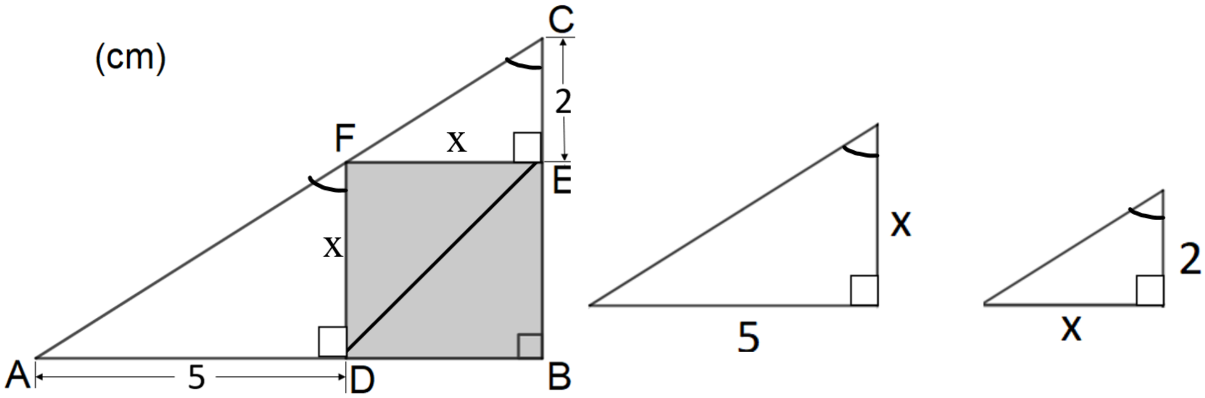
Figur 19. Den verbala modellen av Giornos lösning.

Jämför detta med den skriftliga kodningen:



Figur 20. Den skriftliga modellen av Giornos lösning.

Det verkar som den skriftliga motiveringen och slutsatsen helt enkelt uteblev. Observera ännu en gång att det var en motivering som saknade ett effektivt symbolspråk hos eleven som uteblev. Låt oss titta på ett sista exempel av ett DC schema hos Giorno, uppgift 12:



Figur 21. Giornos lösning av uppgift 12.

Intervjuare: Dåså, jo… hur tänkte du?

Giorno: Ja, sidorna här är båda x, *det är ju en kvadrat…* sen… Ja, det var från början inte tydligt vad jag skulle hitta. Testa rätvinkliga trianglar men... det gick inte. Det var inte tydligt hur jag skulle göra… men… likformighet, tänkte jag.

Intervjuare: Hur så? Är vi säkra ens på att de är likformiga?

Giorno: Ja, titta här (pekar på de två små trianglarna), jag tänkte att de har samma vinklar. De är båda rätvinkliga och denna vinkel (pekar på toppvinkeln) *är ju samma för de här två linjerna är parallella* (DF och BC). Men…

Intervjuare: Men..?

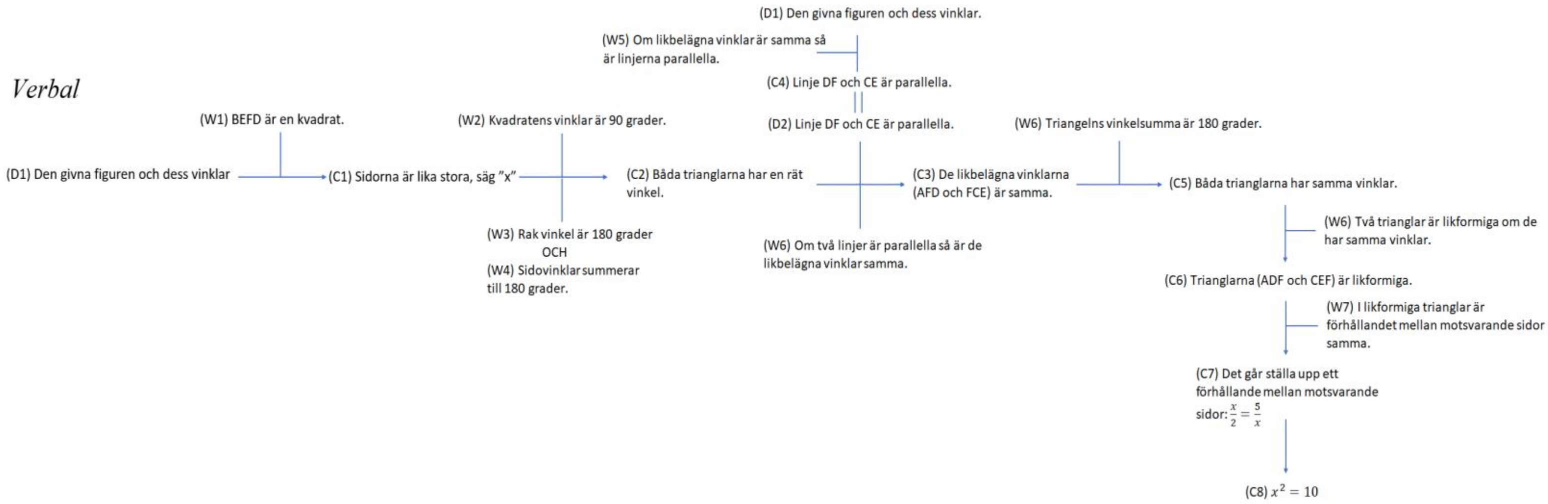
Giorno: Ja, det är just att de är parallella. De är ju parallella för att… *de räta vinklarna säger väl det*. De är ju samma. *Så om dessa vinklar (pekar på de likbelägna, räta vinklarna vid basen av triangeln) är samma så är linjerna parallella*, det är en kvadrat. Som vi gjorde tidigare, typ[44]. Sedan ställer man upp ett förhållande mellan motsvarande sidor och… de har ju samma förhållande när de är likformiga… ja, vi får då fram att x i kvadrat är 10.

Intervjuare: Hur kom du fram till att de har samma vinklar, igen?

Giorno: … jo. *Vi har visat att de har två vinklar gemensamt* så då är även den tredje samma. De blir 180 grader tillsammans.

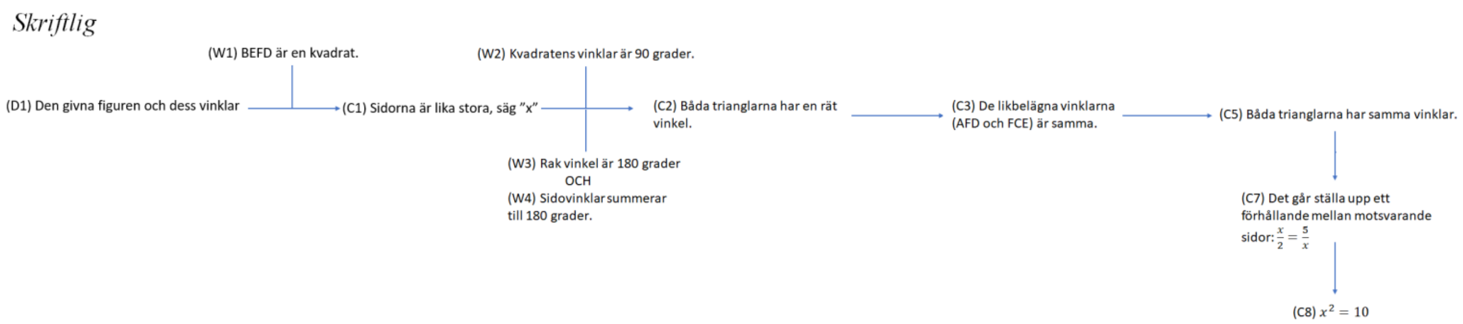
[44] Refererar till uppgift 9, frågan om huruvida två linjer är parallella eller ej. Se förra exemplet.

Slutligen, med Toulmins schema:



Figur 22. Toulmins modell på Giornos verbala lösning av uppgift 12.

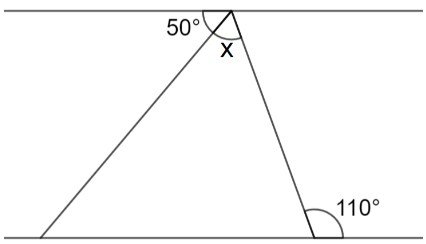
Se att eleven inflika med ett sidoargument angående huruvida linje DF och CE är parallella eller ej. Detta kan visserligen spegla att Giorno själv insåg att argumentet inte riktigt höll såsom han ursprungligen tänkt sig. I den skriftliga versionen reduceras bevisschemat till:



Figur 23. Toulmins modell på Giornos skriftliga lösning av uppgift 12.

Likt tidigare är alla delar som innefattar icke-symboliska motiveringar uteslutna från bevisschemat. Härledes är detta argument snarare av formen DC än DWC. Det finns emellertid bevisscheman hos elever som är på formen DWC, både skriftligt och verbalt. Här följer ett avsnitt från Dios lösning av uppgift 7:

> Intervjuare: Linje A och B är parallella…
>
> Dio: A och B… är det inte en grej..? Det finns enkla samband i sådana fall… jag kan skriva det. En sekund.



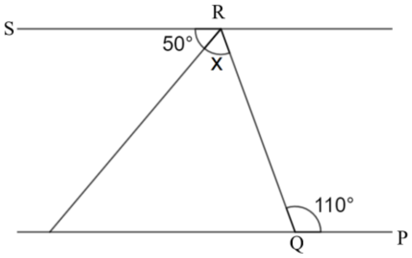
Ty A || B så ger det att:

Figur 24. Dios första steg i uppgift 9.

Dio: Fast hur ska jag skriva vinklarna…? Hm…

Intervjuare: Du kan hitta på egna bokstäver om du vill.

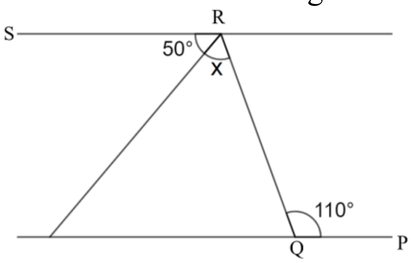
Dio: Ok… i sådana fall…



Ty A || B så ger det att ∡PQR = ∡SRQ (alternatvinklar).

Figur 25. Dios mellansteg till uppgift 9.

Dio: Så… detta ger… x + 50 är 110… och det betyder att x är 110 – 50.



Ty A || B så ger det att ∡PQR = ∡SRQ (alternatvinklar). Alltså:

$50 + x = 110$ (alternatvinklar)
$x = 110 - 50 = 60$

Figur 26. Dios slutliga lösning till uppgift 9.

Intervjuare: Oh, känns det ok? Även för ett prov?

Dio: Ja, det känns bra. En femma.

Se att Dios lösning, till skillnad från de tidigare, faktiskt inkluderar en skriftlig motivering som kopplar ihop alternatvinklarna. Vi ser även att Dio använder en annan notation än de tidigare svaren där Dio har ett effektivt symbolspråk för att skriva att två linjer är parallella.

Hur såg det för samtliga deltagare? Analys av uppgift 7 – 13.

I denna sista del kommer en samlad bild ges av när och vilka motiveringar som dök upp. Hos de elever som intervjuats för denna studie sammanfattas deras bevisscheman i tabellen nedan:

*Tabell 3. Elevernas skriftliga argument enligt Toulmins modell. Tabellen nedan beskriver vilka typer av argument som användes skriftligt av eleverna. Om texten är blå så matchade det skriftliga och verbala argumentet varandra. En * markerar att eleven inte kände att hen klarade av uppgiften alls och valde att fortsätta med nästa uppgift utan någon lösningsansats alls.*

Uppgift	Dio	Giorno	Lisa Lisa	Speedwagon
7	**DWC**	DC	DC	**DWC**
8	**DWC**	DC	DC	DC
9	**DWC**	DC	DC	**DWC**
10	**DWC**	DC	DC	DC
11	**DWC**	DC	DC	DC
12	**DWC**	DC	DC	*
13	**DWC**	DC	DC	*

Alla elever gav motiveringar för varje steg i sina verbala argumentationer. Däremot var det bara Dio som var konsekvent med att det skriftliga och verbala argumentet innehöll samtliga motiveringar. Det var ingen elev som använde ett DBC argument utan att först ledas in i de tankarna. Nedanstående tabell redogör för vilka verbala motiveringar som utelämnades i de skriftliga argumenten. Se att de alla är motiveringar som hade krävt en viss mängd text för att uttryckas:

Tabell 4. Tabellen nedan sammanfattar vilken typ av motivering som dyker upp verbalt men INTE skriftligt. Dessa är icke-symboliska motiveringar som hade krävt en del text för att uttrycka.

Uppgift	Förklarning av motiveringar (W) som nämns VERBALT, men INTE skriftligt.
7	*Om två linjer är parallella så är alternatvinklarna lika stora.* *Om två linjer är parallella så är likbelägna vinklar lika stora.* Motiveringar för vilka vinklar som är alternat/likbelägna vinklar *Att vinkelsumman är 180 grader för det är en triangel (nämndes algebraiskt).* *Att vinkelsumman är 180 grader för det är en rak vinkel (nämndes algebraiskt).* *Att sidovinklarna tillsammans blir 180 grader. (nämndes algebraiskt)*
8	*Om en triangel är likbent så är basvinklarna lika stora.* *Om de små trianglarna är kongruenta så har basen delats mitt itu (för de två mindre baserna är lika stora).*
9	*Om två linjer är parallella så är alternatvinklarna lika stora.* och kontrapositionen: *Om alternatvinklarna inte är lika stora, så är linjerna inte parallella.* *Om två linjer är parallella så är likbelägna vinklar lika stora.* och kontrapositionen: *Om likbelägna vinklar inte är lika stora, då är de två linjerna inte parallella.* *Två linjer är parallella ⇔ alternatvinklarna lika stora.*
10	Motivering för att vinkeln mellan radien och koordinataxlarna är rät. Exempel: *det syns att vinkeln är rät, vinkeln är rät för att en kan placera koordinataxlarna längs cirkeln så att det blir rät,* samt *om en cirkel tangeras av en linje, då är vinkeln mellan tangenten och radien rät.* *Att triangeln är rätvinklig*. Tillämpar Pythagoras sats utan att bekräfta eller markera att triangeln är rät.
11	*Om en triangel är likbent så är basvinklarna lika stora.* *Om basvinklarna är lika stora så är triangeln likbent.* *Triangeln är likbent ⇔ Basvinklarna är lika stora.*
12	*Om två linjer är parallella så är alternatvinklarna lika stora.* *Om två linjer är parallella så är likbelägna vinklar lika stora.* *Motivering för att det finns parallella linjer*. Motivering för att trianglarna är likformiga för de har två vinklar gemensamt. Dvs. *om två trianglar har minst två vinklar gemensamt då är trianglarna likformiga*[45].

[45] Detta består av två fall. Elever kan helt enkelt säga att trianglarna är likformiga (för de ser det) och köra sambandet direkt. De kan dock även visa att trianglarna har två vinklar gemensamt. Sedan, ställer de direkt upp förhållandet UTAN att nämna en motivering för varför de kan göra detta. I sin verbala presentation dock så nämner de detta (trianglarna är likformiga för de har minst två vinklar gemensamt).

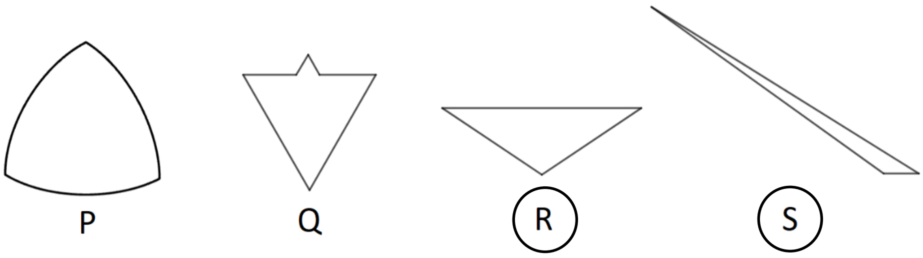
13	Motivering för att trianglarna är likformiga för de har två vinklar gemensamt. Dvs. *om två trianglar har minst två vinklar gemensamt då är trianglarna likformiga.*

5.1.2 Vilken typ av motiveringar använder elever (II)

En av forskningsfrågorna ämnade besvarade vad det är elever anser vara ett bevis. För att nå detta mål definierades ett så kallat ”bevisschema”. I enlighet med Harel och Sowder (1998, s.244) anammades tolkningen att ett bevisschema består av det som ska fastställas (dvs. det som ska visas) och det som en person finner övertygande. Eleverna har redogjort för ett antal olika typer av motiveringar (W) för att nå fram till slutsatsen (C). I detta avsnitt kommer ett antal teman presenteras som fångar dessa motiveringar. Dessa motiveringar tolkas härledes som det som elever finner mer, eller mindre, övertygande i ett bevisschema. Den vanligaste typen av motivering presenteras först och sedan fortsätter ordningen i nedåtstigande led.

Deduktiv

En deduktiv motivering är av den typen att en respondent kopplar ihop en given data (D) eller härledd slutsats (C) med en ny slutsats med stöd av någon egenskap som de givna premisserna innehar. Argumentet byggs alltid upp på formen A → B, dvs. på formen: om A då gäller B. Alltså, slutsatser motiveras med hjälp av logiska härledningar och omvändningar av påståenden. Detta kan göras mer konkret via allmänna egenskaper hos geometriska figurer, kontraposition, modus ponens och modus tollens, definitioner och kedjeargument. Här nedan följer ett arketypiskt exempel där Giorno resonerade kring uppgift 1:

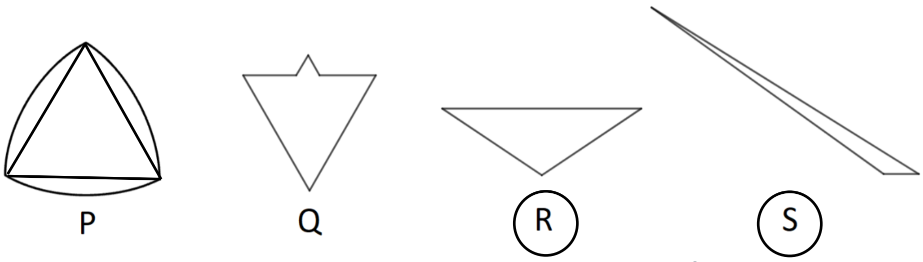


Figur 27. Giornos svar till uppgift 1.

Giorno: Det här skulle vara mitt svar då (fyller i R och S).

Intervjuare: Ok, så… varför tycker du inte den här funkar? (Pekar på P och sedan Q)

Giorno: Ja men, de ska ju ha 180 grader, de tre hörnen då, och Q har ju då fyra hörn. Den kommer ju ha mer än 180 grader. Och P… Ja, det … det känns som att det kommer vara större än 180 grader. För att… det är ju ingen vinkel som är 90 grader eller mindre. (Ritar in en liksidig triangel i figuren P).



Figur 28. Giorno ritar en liksidig triangel i uppgift 1.

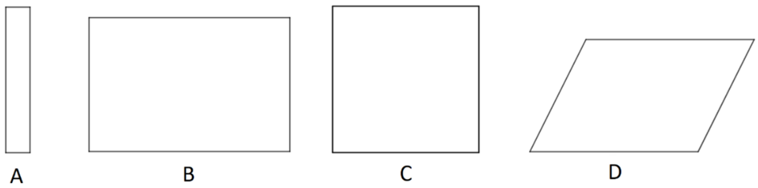
Giorno: Så det betyder ju att denna figur, eller figurer som denna, kan ha två stycken 90 graders vinklar. Ingen triangel har två stycken 90 gradsvinklar så … det kan inte vara en triangel.

Intervjuare: Kan du förklara lite tydligare?

Giorno: Jamen visst … alltså, en triangel har ju 180 grader. Så, om figuren inte har 180 grader så är det inte en triangel. Vi ser här att figuren klart är större än 180 grader så det är inte en triangel.

I detta stycke dyker det upp flera fall av deduktioner där Giorno använder implikationer och givna satser för att motivera sina svar. Främst är det den sista meningen som är roten till stycket i sin helhet. Omskrivet en aning så kan motiveringen skrivas på följande form: *om en figur är en triangel, då är figurens vinkelsumma 180 grader*. Giorno nyttjar sedan denna motiverings kontraposition för att utesluta figurer som inte är trianglar. Alltså*: om figurens vinkelsumma INTE är 180 grader, då är figuren inte en triangel.* Uttryckt med van Hieles terminologi så verkar denna elev befinna sig på en nivå 4 i sitt resonemang, där Giorno kan manipulera samband hos de logiska implikationerna i sig för att härleda olika slutsatser. Visserligen framkommer även andra typer av motiveringar i detta stycke som inte strikt är logiska deduktioner, men detta avvaktar vi med tills senare.

Ett intressant fall av deduktionens värde verkar vara hur den spelar roll för definitioner. Van Hiele argumenterade för att en elev kommer särskilja en kvadrat och en rektangel fram till dess att hen har och utnyttjar ett språk av definitioner (van Hiele 1986). Däremot verkar dessa intervjuer visat på att elever kan fortsätta särskilja kvadrater och rektanglar även om de använder definitioner av geometriska objekt. Definitionerna **skiljer** sig helt enkelt från de **formella**. Observera följande exempel från Giorno, uppgift 3:



Figur 29. Bild till uppgift 3. Fyra fyrhörningar.

Intervjuare: Så… vad tycker du är en rektangel? Du har ju bokstavligen pekat på dem (A och B), men om du skulle säga det med ord.

Giorno: Ja, men vi har ju fyra sidor och varje hörn ska vara 90 grader. Sen så är skillnaden mot en kvadrat att rektangelns två sidor är lika långa och de andra två sidorna är också lika långa men de är inte lika långa som det första paret.

Intervjuare: Och med den definitionen?

Giorno: Så skulle inte C vara en rektangel.

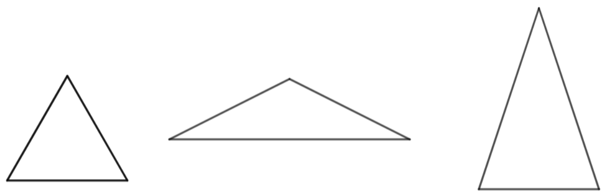
Giorno definierar härledes en rektangel så att kvadrater INTE är en del av dem. Utifrån denna definition drar Giorno sedan den logiska slutsatsen att C inte kan vara en rektangel. Giorno använder alltså ett språk av definitioner. Likaväl finns det även studenter som intuitivt ser kvadrater som särade från rektanglar. När de väl ger en definition av rektangel så inser de att även kvadrater uppfyller dessa krav. Här följer ett utdrag från Speedwagons resonemang i uppgift 4:

> Speedwagon: Jag är ganska säker på att det är bara två rektanglar. Bredden ska vara lika lång som den andra bredden och… längden ska vara lika lång som den andra längden.
>
> Intervjuare: Mhm…
>
> Speedwagon: Så det stämmer ju… på kvadraten också.
>
> Intervjuare: Ja, dom är ju lika stora…. Och även de… så det stämmer. (pekar på varje par av motstående sidor).
>
> Speedwagon: Ja…
>
> Intervjuare: Jag tolkar det som att du säger att en fyrhörning är en rektangel om motstående sidor är lika stora… Har jag tolkat dig fel?
>
> Speedwagon: Nej, det har du inte.
>
> Intervjuare: Men räcker det…?
>
> Speedwagon: Så ÄR en kvadrat en rektangel?
>
> Intervjuare: Hmm…
>
> Speedwagon: … jag kommer inte på något sätt att argumentera emot det… så… jag skulle säga så, ja. Det är en rektangel.
>
> Intervjuare: Men det går emot din intuition?
>
> Speedwagon: Ja… för att… det känns lite… känns lite fel… Det känns som att en kvadrat är något speciellt.

Denna elev insåg också i slutändan att definitionen som först beskrevs passar bättre in på parallellogram än rektanglar. Speedwagon uttryckte ändå en viss osäkerhet (en 3:a) kring sin definition. Speedwagons definition säger en sak medan intuitionen säger något annat. **Elever behöver alltså inte helt och hållet tilldela en hög tillit till deduktiva argument.** Här har definitioner använts deduktivt av elever för att peka ut figurer och deras egenskaper. Däremot är dessa inte nödvändigtvis en och densamma som lärarens (eller den formella matematiken). Likväl kan elever vara kapabla till att dra slutsatser från en given definition, må den överensstämma med den formella eller ej.

Visuell

Elever kan använda det visuella sinnet för att härleda egenskaper hos olika figurer. Detta kan vara alltifrån att två sidor ”ser lika stora ut”, att en ”ser att det är en rät vinkel”, till att en ser att två figurer är likformiga eller kongruenta. Den visuella motiveringen, ”jag ser att”, ”det syns att”, och ”det går att se att” brukades ganska ofta av respondenterna för att dra olika slutsatser. Här nedan följer ett avsnitt från en visuell motivering till uppgift 2 från Speedwagon:



Figur 30. Bild till uppgift 2. Exempel på likbenta trianglar.

Intervjuare: Nu… det finns minst två vinklar…

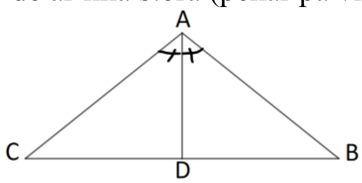
Speedwagon: Som är lika stora… den är sann.

Intervjuare: Ok… för att? Varför?

Speedwagon: För att… vi ser det. Det syns ju. De är det.

Fråga 5 var specifikt inriktat på att fånga huruvida elever utgår från visuella bevisscheman eller ej, och i vilken grad de gör det. Uppgiften formulerades allmänt, dvs. i en triangel ABC ritas en bisektris, däremot är det uppritade fallet nästintill likbent[46]. En elev som förlitar sig på visuella intryck skulle härledes dra slutsatser ur dessa observationer. De som förlitar sig på detta intryck verkar uttrycka en stor säkerhet i sitt svar. Nedan följer ett avsnitt från Lisa Lisa:

Lisa Lisa: Ok… jag tänker… de är lika stora (pekar på vinklarna, ritar in följande):



Figur 31.Lisa Lisas ritning till uppgift 5.

Intervjuare: Vet du någonting mer här? …

Lisa Lisa: De är räta (pekar på vinklarna vid D) så då är väl de här två… kongruenta? Vinkel, sida, vinkel?

Intervjuare: Ah, och är de det så är även…

Lisa Lisa: Ja, alla sidor lika stora, och vinklar.

Intervjuare: Ja… det verkar väl ok… hur säker känner vi oss på detta?

Lisa Lisa: Fem…

Samtidigt så ifrågasätter Lisa Lisa validiteten hos visuella argument men verkar ändå falla tillbaka in i dem om bilden är snäll nog. Lisa Lisa för följande resonemang kring bilder som bevis[47]:

[46] Den är fel med 0,1 mm.
[47] Fråga 2, påstående b).

Lisa Lisa: Ja men… kan man använda bilderna som bevis?

Intervjuare: … det är en bra fråga..? Får man det? Nu går vi in på det… är det ok att använda bilder som motbevis?

Lisa Lisa: För det här är ju specifikt… så… det motbevisar ifall man tittar på alla fall? … här är det ju att man ska visa för ALLA då räcker det med att visa att det finns en som INTE är, för då är ju inte alla så.

Sammanfattningsvis så verkar visuella motiveringar kunna spela en relevant roll inom elevers bevisscheman. Detta kan vara till den grad att en *elev insett att bilder **inte nödvändigtvis** räcker som bevis men de kan **ändå utgå från det rent visuella** oberoende av detta*. Om bilden ser tillräckligt snäll ut så föreligger en viss risk att de visuella motiveringarna uppkommer i elevens bevisschema.

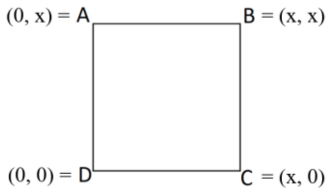
Algebraisk/Symbolisk

Elever kan också välja översätta geometriska problem till algebraiska problem. Detta kan göras med hjälp av olika satser, såsom Pythagoras sats eller bisektrissatsen, eller genom ett införande av ett koordinatsystem[48]. Med utgångspunkt ur Harel och Sowder (1998, 2007) kan en introducera en viss ”skala” för förståelse i hur elever använder och tolkar algebraiska motiveringar och slutsatser. Om en elev exempelvis kan tolka en algebraisk lösning utifrån den givna kontexten så kallas det här en ”algebraisk” motivering. Om en elev däremot inte kan tolka sina lösningar utifrån kontexten utan enbart ser det som ett svar så har det kodats detta som en ”symbolisk” motivering. Eleven har nått fram till ett svar men kan inte förstå vad svaret innebär. Först inleds exemplen med ett utdrag från Lisa Lisa, uppgift 3b):

Lisa Lisa: AC och BD är vinkelräta..?

Intervjuare: Ja… förstår du vad de menar med vinkelräta?

Lisa Lisa: Ja, men det är väl att k-värdena… Det är väl att $k_1 \cdot k_2 = -1$ (skriver upp det och läser högt) gör väl att de är vinkelräta… om jag inte minns fel. Ja, en rät vinkel. Alltså, man ser ju. Ja, ja… alltså man kan ju bara ta med x… om vi tänker att om B har koordinaterna… x och x… eller… höjden är x, basen är x… ja, x och x. k-värdet ökar med 1… (skriver följande)



$$k_1 = \frac{x-0}{x-0} = 1$$

$$k_2 = \frac{x-0}{0-x} = -1$$

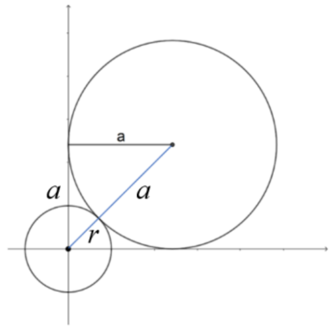
Figur 32. Lisa Lisas markeringar till uppgift 3.

Intervjuare: Och den andra (pekar på AC)…

[48] Med andra ord, algebraisk geometri.

Lisa Lisa: Den blir -1. Ja, då 1 gånger -1 är -1, så de är vinkelräta mot varandra.[49]

Lisa Lisa valde att översätta problemet till algebra och koordinatgeometri med hjälp av sambandet $k_1 \cdot k_2 = -1$. När det kommer till tolkningar av algebraiska lösningar kan en exempelvis se följande lösning från Giorno, uppgift 10:



$$
\begin{aligned}
2a^2 &= (r+a)^2 \\
\sqrt{2}a &= r + a \qquad \Big| -a \\
\sqrt{2}a - a &= r \\
a(\sqrt{2}-1) &= r
\end{aligned}
$$

Figur 33. Giornos ritning till uppgift 10.

Giorno: Jo, jag rita en linje mellan dessa punkter (medelpunkterna). Detta bildar en rätvinklig triangel.

Så jag ser sedan att det är Pythagoras. ***Man tar sedan roten ur på båda sidor. Detta ger roten ur, bara positiva då för vi jobbar med sträckor.***

Alltså, Giorno inser att algebran i sig implicerar att det finns flera lösningar. Likväl är inte alla lösningar rimliga, givet att problemet definierades i en geometrisk kontext. En symbolisk motivering hade varit ifall eleven accepterat båda lösningarna som sanna och intekopplat detta till det konkreta fallet[50].

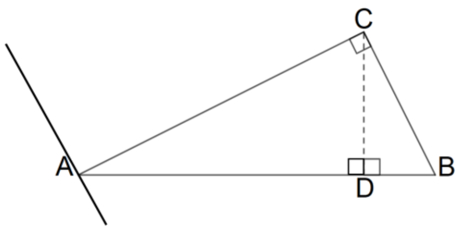
Transformativ

En transformativ motivering är när en elev tillämpar någon form av ”transformation” på de geometriska objekt som är givna för att skapa en ny bild. Eleven kan förutsäga hur denna transformation kommer påverka utseendet och sedan rita bilden av transformationen. Slutligen används transformationen för att belägga en slutsats. Vanliga transformationer kan vara att rita nya linjer med vissa egenskaper såsom förlängningar, medianer, och bisektriser. En elev kan även markera sidor och vinklar som är lika stora. Även mer dynamiska aktioner är möjliga, såsom translationer, förstorning och förminskning, rotationer samt speglingar. Dessa motiveringar vilar starkt på de visuella elementen och hur en kan modifiera dem via olika operationer. Nedan följer ett avsnitt från Giorno, som gärna använde denna typ av motiveringar. Giorno lägger här fram ett argument för att uppgift 13:s påstående stämmer.

Giorno: … Om vi ritar en linje genom A som är parallell med BC…?

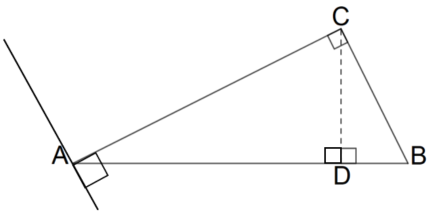
[49] För att kontrastera detta mot en deduktiv lösning; Dio och Speedwagon valde istället att dela kvadraten först med en diagonal vilket skapar två kongruenta, likbenta trianglar. Detta ger basvinklar på 45 grader. Gör man det igen så bildas fyra trianglar, alla med basvinklar 45 – 45 grader och slutligen 90 grader vid diagonalernas skärningspunkt.

[50] Det råkar dock vara så att den negativa lösningen fungerar. Försök lista ut hur på egen hand.



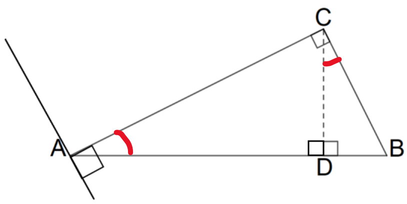
Figur 34. Giorno ritar en parallell linje i uppgift 13.

Giorno: Då är ju vinkeln rät, det vet vi från C… (markerar ut den räta vinkeln).



Figur 35. Steg 2 i Giornos lösning till uppgift 13.

Giorno: De är samma. Man har liksom flyttar över vinklarna från C till A och snurrat på dem. De är parallella och… vinkeln vid A finns redan där, de ska bli räta, precis som vid C… (Giorno ritar in en till vinkel vid A samt C):



Figur 36. Giornos sista steg i uppgift 13.

Giorno: Då ser vi ju att vinklarna är samma, de är samma fall. Alltså är trianglarna likformiga för de har två vinklar gemensamt.

Auktoritet

Auktoritetstemat förtjänar nästintill ett helt eget avsnitt. I detta tema är en lösning eller samband korrekt därför att det är så läraren eller utbildningen har gjort det tidigare. Det är vad en har lärt sig, helt enkelt. Denna typ av motivering är alltså inte nödvändigtvis en warrant (W) som resten av dessa utan förefaller handla mer om (B), dvs. hur en belägger att ens motivering är tillämpbar eller korrekt. Såhär kunde det se ut: en elev känner igen att en viss formel är tillämpbar. Sedan används denna formel för att motivera en slutsats. Om vi utmanar elevens tilltro till att denna motivering är tillämpbar så avslöjas den snart som något som en sanning som springer ur en auktoritet. I Toulmins modell verkar denna motivering uppkomma främst i (B) snarare än i (W)[51]. Nedan följer ett exempel på detta från Giorno. Avsnittet handlar om vad för backing (B) Giorno nyttjar för att påstå att parallella linjer ger oss att alternatvinklarna är samma:

Intervjuare: Har du någonsin sett något belägg för det? … alltså, de ser ju ut att vara det men kan man lite på det?

[51] En motivering baserat på auktoritet eller en auktoriativ motivering (W) hade i sådana fall sett ut som: ”och detta påstående stämmer för att läraren har sagt det”. Exempelvis kunde en elev ha sagt i uppgift 2 att basvinklarna i en likbent triangel är lika stora för att läraren har sagt att de är lika stora..

Giorno: Nej, det kan man inte, särskilt inte med tanken på… er…

Intervjuare: Ah (plockar upp uppgift 5) du tänker på den här?

Giorno: Ja! Den fällan har man gått i innan.

Intervjuare: Känner du ändå att vi litar på detta?

Giorno: Väldigt svårt för mig att säga.

Intervjuare: Eller ska vi tvivla på det?

Giorno: Det är ju så här jag blivit lärd. Alltså, lärare har sagt det. Formelbladet säger det.

Dio hade följande att säga till samma fråga:

Dio: Om linjerna är parallella så är alternatvinklarna samma.

Intervjuare: Ok, vi tror att det här påståendet stämmer… men… vi vet inte riktigt.

Dio: Ja, alltså jag har lärt mig att det är så och jag ser det, men nej. Skulle inte säga att jag kan förklara det, nej.

Metrisk

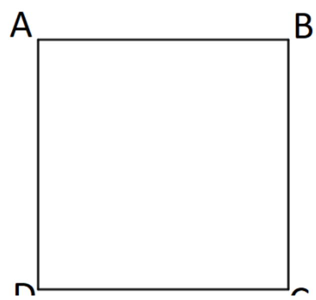
Flera av de teman som hittills har presenterats har varit, mer eller mindre, likartade till de teman som beskrivits av Harel & Sowder (1998, 2007) och Chazan (1993). Dessa studier har däremot inte helt och hållet tillåtit elever använda vilka verktyg som helst. Främst verkar elever inte haft tillgång[52] till fysiska verktyg som sax, linjal och gradskiva. Givet att denna studie har tillåtit samtliga av dessa verktyg så har en till form av motivering iakttagits: **metriska** motiveringar. Dessa motiveringar grundar sig på användning av mätverktyg där linjaler och gradskivor används för att belägga att vissa slutsatser håller.

Det förefaller nog för en kritisk läsare att sådana motiveringar bör vara snarlika de visuella motiveringarna. Utifrån de transkriberingar som gjorts här så verkar detta inte vara hela sanningen. Verktyg upplevs ha en högre grad av tillförlitlighet än de enbart visuella motiveringarna. Några få exempel bör förklara skillnaden. Följande avsnitt är från Lisa Lisa, uppgift 3a).

Lisa Lisa: Er… (paus 15 sekunder). Vänta… (pausa 5 sekunder). Kan jag mäta?

Intervjuare: Ja, det får du!

Lisa Lisa: Ja… den är… 3,5? (Mäter CD). (Mäter sedan BC). 3,5..? Så… (mäter diagonalen). Ja, den är större. 5,4…



Figur 37. Kvadraten i uppgift 3.

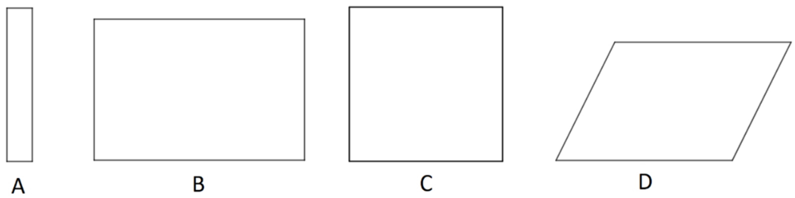
[52] Eller haft ett behov av. Harel & Sowder innehöll bland annat en Linjär Algebra 2 kurs.

Ett liknande argument framhölls även av Speedwagon:

> Speedwagon: Vänta… så… har dom samma längd? (plockar upp linjalen)… ungefär 5,4…
>
> Intervjuare: Och den andra?
>
> Speedwagon: Inte alls… 3, någonting. Så, nej.

Lägg märke till att den metriska motiveringen hålls som av högre tillit och särad från den visuella. Giorno ger oss ytterligare ett exempel på detta, där ett uppenbart ”visuellt” fall av en kvadrat ändå bekräftas vara en kvadrat via mätningar:

Uppgift 4.



Figur 38. Uppgift 4:s fyrhörningar.

> Giorno: Det ser ut som en kvadrat… (Tar upp linjal och mäter kvadratens sida). Denna är… 2,9 – 3 cm? Är även den (mätte andra sidan). Ja… Det är en kvadrat.

Märk väl hur mätningarna används som belägg i sig för att dra en slutsats. Se även att respondenter ställer upp mätningar mot visuella motiveringar. De särskiljs och ses separata argument. Främst genom att den metriska motiveringen tilldelas en högre grad av tillit än det visuella intrycket.

Axiomatisk

Den axiomatiska motiveringen är svår att särskilja från den deduktiva ifall den används för att belägga en slutsats som redan är given. Där blir snarare utmaningen att avslöja huruvida en elev ser ett steg i sin motivering som ett axiom eller inte[53]. Exempelvis kan elever se formelsamlingen som en samling av axiom. Däremot är det mycket lättare att upptäcka axiomatiska motiveringar när en elev ifrågasätter om ett påstående stämmer överhuvudtaget, eller vad för natur som ett viss primitivt objekt innehar[54]. Härledes var axiomatiska motiveringar lättare att upptäcka i (R) av en slutsats, snarare än när de försöker bevisa att ett påstående stämmer. Först, så ger Giorno oss ett exempel på hur formelsamlingen kan tolkas som en samling av axiom i uppgift 3b):

> Intervjuare: Men jag tänker lite här… är du helt säker på att … det här sambandet (k1 * k2 = - 1) stämmer för alla vinkelräta linjer? För det vilar ju lite på det, eller?
>
> Giorno: … ja, det gör det. Det skulle jag tro dock… **Så, så länge det stämmer (pekar på formeln), om vi vet att formeln stämmer så vet vi att vinkeln är 90 grader.**

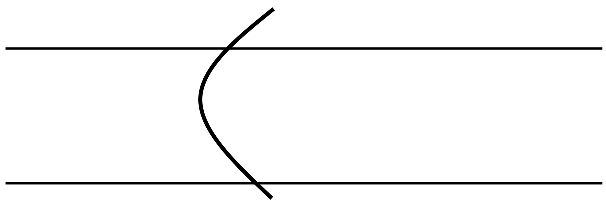
[53] Vilket nog överlag är svårt, såvida en elev inte själv har problematiserat axiom och vad eleven ser som axiom.
[54] Såsom en linje, punkt eller parallellism.

Se här att Giorno hanterar formelsamlingens innehåll axiomatiskt. Om vi tar formeln som en given sanning, då följer slutsatsen från argumentationen. Skälet till att den axiomatiska motiveringen blev nödvändig att inkludera som ett eget tema är främst för att det uppkom argument som ifrågasatte naturen hos primitiva objekt; vad är en linje? Följande utdrag är från Lisa Lisas svar till uppgift 9. I denna uppgift skulle en motivera huruvida två linjer är parallella eller ej. Lisa Lisa kritiserade utformningen på frågan som för vag för att kunna ha ett entydigt svar:

> Intervjuare: Är vi helt säkra på att den alltid stämmer? Att två parallella linjer gör att dem där (vinklarna) är lika stora?
>
> Lisa Lisa: Mhm… Jag funderar på…?
>
> Intervjuare: Kan vi tänka oss ett motexempel?
>
> Lisa Lisa: Vänta… det beror väl på hur man skär den linjen…? (Linje A). (Ritar en bild av linje A och B). Men… måste den linjen… alltid vara rak?

Figur 39. Lisa Lisa ritar två parallella linjer.

> Intervjuare: Oh?
>
> Lisa Lisa: För… om den ser ut så här (ritar en krökt linje) så ser det inte ut att funka längre.



Figur 40. Lisa Lisas syn på linjer.

> Lisa Lisa: För det beror väl helt på… vad det är för linje som skär...?

Lisa Lisa tolkar linjer som att vara samma begrepp som kurva. Detta är inte helt i strid med hur matematiken har behandlat ordet tidigare. Euklides själv hade exakt samma tolkning och delade in linjer i två typer: de räta linjerna och de krökta linjerna[55] (Heath 1956a, s.158-165). Samma tolkning finns även kvar i delar av modern matematik. Exempelvis skulle *linjeintegraler* fortfarande inneha samma tolkning. **Det finns alltså elever som ser linjer som ett mer allmänt begrepp än vad skolmatematiken åsyftar.**

Induktiv

Den sista typen av (W) var en induktiv motivering. Ett givet påstående beläggs med exempel och beroende på antal testade fall så tilldelas en högre grad av tillit till slutsatsen. En elev som utgår från induktiva bevisscheman kan även tolka och se deduktiva bevis som en och densamma som induktiva. Alltså, ett deduktivt bevis visar att det stämmer för ett enda fall och inte rent allmänt. Avsnittet nedan är taget från Giorno och refererar till huruvida Giorno kan lita på formelsamlingen eller ej:

> Intervjuare: OM det stämmer, där kom det. Eh… men är vi säkra på det? Hm… är det bara något vi tar från formelsamlingen?
>
> Giorno: Ja men… det måste ju va så för att, vi har ju testat det och det stämmer. Sen har man ju gjort liknande uppgifter tidigare och då har det stämt för varje fall, så … den har ju inte svikit mig än! (Skratt)

Detta kan även dyka upp i diskussioner kring vilken typ av motivering man litar främst på. Fas 3 för elevdelen var ämnad att upptäcka huruvida elever litar mer på deduktiva bevisscheman eller induktiva. Nedan följer en del från Speedwagon som ansåg att Nasirs (induktiva) argument var mer pålitligt än Astrids (deduktiva). Speedwagon hade nyss läst klart Astrids bevis och uttryckte därefter följande:

> Speedwagon: Ja… det skulle jag säga är… korrekt.
>
> Intervjuare: Känner du att vi litar på den här?
>
> Speedwagon: …
>
> Intervjuare: Har hon visat det?
>
> Speedwagon: På denna triangel… så har hon gjort det. Men inte… alla?
>
> Intervjuare: Känner du att det är ett enstaka fall?
>
> Speedwagon: Nja… jo… det känns inte som hon har visat det på alla trianglar.
>
> Intervjuare: Så vad skiljer henne från Nasir?
>
> Speedwagon: Nasir hade fler exempel och det var mycket lättare att räkna ut hans. Det ser… mindre matematiskt ut. Men det är ändå… mer bevis för dom alla fallen. Det känns mer belagt hos Nasir.

Det finns alltså attityder hos elever där de inte särskiljer deduktiva och induktiva bevis utan behandlar dem som en och densamma. Bevis som är lättare att förstå och består av fler exempel tilldelas en högre grad av tillit än svårförståeliga deduktioner.

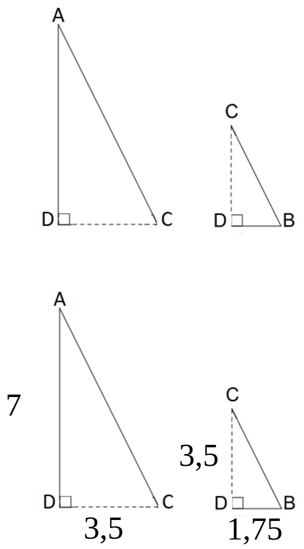
5.1.3 (R): Begräsningar och motexempel

I det teoretiska ramverket[56] definierades (R) (rebuttals) som den del i ett argument som motbevisar, begränsar, eller nyanserar trovärdigheten till ett argument. Detta avsnitts syfte är att konkretisera vad detta kan innebära i praktiken inom geometri och bevisföring. Genom analysen har det framstått som att elever kan uppvisa flera olika typer av (R), där de varit återhållsamma eller kritiska till en lösning.

[56] Se s.11-13.

Lokala och Globala motbevis[57]

I analysen av elevernas motiveringar verkar det uppkomma två olika typer av motbevis; de som skapar en motsägelse mot delar av en lösning samt de som motbevisar en hel utsaga. För att exemplifiera detta lånar denna studie terminologi från Lakatos (1976) som diskuterar samma observation i ett tänkt klassrum. Ett *lokalt motbevis*[58] är ”ett exempel som tillbakavisar ett lemma utan att nödvändigtvis tillbakavisa det huvudsakliga förmodandet” (Lakatos 1976, s. 11). Ett **globalt motbevis** är istället ett bevis eller exempel som visar att det som ska bevisas är felaktigt. Här nedan följer ett antal exempel, först ett lokalt motexempel och sedan några globala. *Lokala* motexempel kommer skrivas med *kursivt* medan **globala** kommer skrivas med **fetstil.** Först beskrivs ett lokalt motexempel från Giorno, uppgift 12:



Figur 41. Giornos ritningar till uppgift 12.

Giorno: Då kan man, med blicken, se att de är likformiga (fniss).

Intervjuare: Hm… fast räcker det…

Giorno: Vi skulle visserligen bara kunna mäta den. Den får vi till… 3,5 kanske..? (mätte 3,5). Den andra är … 7 cm (mätte AD). BD är … 1,7 – 1,8 cm, 1,75. (Skriver in) … … (paus i 20 sekunder). Nu är jag inte bråkspecialist men det här ser ut som en faktor 2, och även denna ger en faktor två (AD / CD samt CD / BD). Så likformighet…

Intervjuare: Ah, ok. Men skulle detta argument funka på alla trianglar? Att mäta upp det och sen…

Giorno: Nej.

Intervjuare: Varför inte?

Giorno: Ibland så säger dem att bilden ej är skalenlig. Och då behöver vi ett annat sätt att göra det på.

Här kritiserar alltså Giorno inte slutsatsen i sig, dvs. att ACD och BCD är likformiga, utan kritiserar sin egen lösning. Giorno lyfter fram ett enkelt skäl för att vi inte kan lita på argumentet: inte alla bilder är skalenliga. Detta *lokala motbevis* förkastar alltså Giornos argument men **inte** likformigheten i sin helhet.

Dio visar ett exempel på vikten i elevernas definitioner när det kommer till deras svar, likväl flera fall av globala motexempel. En elev kan mycket väl ha varit helt konsekvent i sitt tankesätt och tillämpat ett helt hållbart resonemang. Däremot så skiljer sig deras personliga definition från den formella matematiken[59]: I uppgift 4 argumenterade Dio på följande vis:

Intervjuare: Så… om det är en kvadrat… betyder det att det är en rektangel?

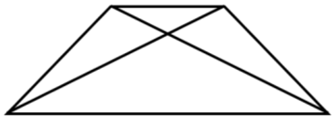
---

[57] Eller motexempel.
[58] Lakatos själv använder ”motexempel”.
[59] Jämför detta med Tall & Vinners (1981) ”concept image” och ”concept definition”. Dessa författare problematiserade också hur en elevs personliga definition kan skilja sig från den formella och hur detta påverkar studenters svar och ansatser.

Dio: Ho ho, nej. Att Y implicerar Z, på något vis, är alltid något vi kan stryka. **Om det är en kvadrat, implicerar det att dess diagonaler är av samma längd… men det betyder inte att det är en rektangel. För det implicerar i sin helhet att en kvadrat är en rektangel, och en kvadrat är inte en rektangel.**

Intervjuare: Hm… finns det en figur vars diagonaler är samma men som inte är en rektangel?

Dio: **Det kan vara en kvadrat… vänta… det kan också vara en trapets? Dess diagonaler kan vara av samma längd?**



Figur 42. Dios parallelltrapets.

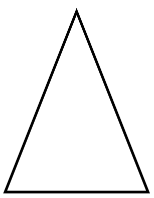
Dio: **så det… finns andra figurer som det funkar för? Men i sådana fall betyder det att X [Diagonalerna är lika stora] inte implicerar NÅGON av de första, den implicerar inte någon av Y eller Z. Snarare tvärtom. Ja. Jag är helt säker.**

Globala och lokala motexempel är alltså tillvägagångssätt som elever mycket väl kan ta till för att visualisera och ställa upp och testa hypoteser och lösningar. Inom geometri finns det även möjligheten att kunna visualisera hur sådana motexempel ser ut, samt införliva förståelse för skillnaden mellan empiriska bevis och att förkasta bevis utifrån motexempel.

Sinnestvivel och skepticism

Vissa elever utgår ifrån en epistemologisk ståndpunkt där sinnet i sig inte kan anses vara helt pålitligt, antingen på grund av tidigare erfarenheter eller rationella ståndpunkter. I uppgift 2 var syftet att testa om elever kände till grundläggande egenskaper hos likbenta trianglar. Dvs. att om en triangel är likbent så är minst två vinklar lika stora. Lisa Lisa uttryckte klart att detta påstående var korrekt, men trots detta så uttryckte Lisa Lisa ändå en stor grad av osäkerhet när en väl försökte fånga hur mycket tillit Lisa Lisa tilldelade påståendet.

Intervjuare: Hur säker är du på att det stämmer?

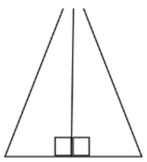


Figur 43. Lisa Lisas likbent triangel (1).

Lisa Lisa: … hm… får jag kladda lite? Oj, nu blev jag jätteosäker… Ok… (ritar upp flera olika fall av likbenta trianglar, här ritas enbart en av dem):

Lisa Lisa: Vi tänker att dom är lika stora… Hur säker är jag… Mhm… En fyra… tror jag.

Lisa Lisa försökte först en induktiv motivering, där en samlar in intryck från flera olika exempel. Lisa Lisa är emellertid inte är helt övertygad av enstaka exempel. Detta är konsekvent med hennes generella ställning: att bilder i sig inte kan tas som bevis. Det finns alltså en grad av osäkerhet här som kan utforskas.



Figur 44. Lisa Lisas likbent triangel (2).

Intervjuare: En fyra? Intressant… Kan det finnas ett motexempel?

Lisa Lisa: Ja, men jag tänker att den och den (de två benen) är lika stora… fast då är ju… Neh… Ja, men jag måste bara testa att lösa det... (ritar ner en höjd och markerar räta vinklar).

För att lyckas med detta utför Lisa Lisa ett bevis med hjälp av Pythagoras sats. Lisa Lisa använde datan att triangeln är likbent samt att höjden är gemensam för att visa att de två mindre trianglarna har lika stora sidor. Vid detta skede uttryckte Lisa Lisa en högre grad av tillit.

> Intervjuare: Känner vi oss säkra NU?
>
> Lisa Lisa: Ja, det gör vi. Vi kan sätta en femma nu. (Skriver 5).

Se nu att Lisa Lisa utrycker en större säkerhet för påståendet efter att ett deduktivt bevis hade konstruerats[60]. En följdfråga försökte fånga varför Lisa Lisa kände sig osäker:

> Intervjuare: Så! Vi känner oss säkra nu. Så… varför kände du dig osäker?
>
> Lisa Lisa: Ja, men bara för att du ritar det, att det ser ut som det stämmer, så kan man inte vara helt säker ändå… visst, man utgår ju alltid från dem bilderna man har, men sen tänker jag att det finns SÅ många typer, de kan se ut på så många olika sätt. Och vem vet, kan vi testa för allt?

Lisa Lisa anser att det inte finns något praktiskt sätt att testa **alla** möjliga likbenta trianglar som finns. Trots att sinnet säger att påståendet är sant så menar Lisa Lisa att detta inte räcker för att vara säker.

Ödmjukhet

Vissa elever uttrycker helt enkelt en grad av osäkerhet till sina resonemang utifrån en generell känsla av ödmjukhet. Mer konkret är eleverna av åsikten att det inte är helt säkert att ingen miss har gjorts i resonemanget vid något skede. Denna inställning dyker främst upp efter att eleverna tagit sig an uppgift 5. I denna uppgift ser triangeln ut som den är likbent. Speedwagon hade följande att säga efter att ha dragit flera slutsatser till uppgift 5:

> Intervjuare: Hur säker känner vi oss på detta nu?
>
> Speedwagon: Det blev… ganska många slutsatser… men… jag är ganska säker på det som är med… en fyra. Lite ”humble”.
>
> Intervjuare: Är det något specifikt som du känner är osäkert?
>
> Speedwagon: Nej, det är allt sammanlagt. Finns nog en chans att något har blivit fel.

För Speedwagon var det främst antalet slutsatser som orsakade en viss grad av osäkerhet. Är en helt säker att i en lång kedja att inte någonting blev fel? Ytterligare ett exempel finner vi hos Giorno, efter att en lösnings presenteras till uppgift 12[61].

> Intervjuare: Ok. Hm… och med det argumentet? Hur säker känner du dig?

[60] Visserligen är Pythagoras sats något som kommer EFTER ett bevis för att likbenta trianglar innehar den här egenskapen. Det är möjligt att Lisa Lisa ser Pythagoras sats mer eller mindre axiomatiskt, som en given sanning som kan tillämpas utan tvivel. Åtminstone, så väljer Lisa Lisa inte att betvivla huruvida Pythagoras sats är sann eller inte i syftet att belägga detta påstående.

[61] Se avsnittet under motiveringar med namnet ”transformativ”.

Giorno: Ja, jag känner väl en fyra då. Vågar inte vara kaxig liksom och säga en femma, kanske har jag missat någonting.

Kan inte tänka sig motexempel

I vissa fall kan elever inte komma på några motexempel. När detta skedde hos deltagarna dök det upp två typer av detta fall: de som **inte är säkra** att motexempel finns och de som **är säkra** att inga motexempel finns. Med andra ord så har det i denna studie uppkommit ett beteende där elever kan både tro på och betvivla att ett påstående stämmer, även om de inte kan tänka sig ett motexempel. Kopplat till förra temat så verkar det handla om en viss grad av ödmjukhet; bara för att en inte kan komma på ett motexempel så betyder det inte att det inte finns ett sådant. Speedwagon upplevde att Nasirs lösning i fas 3 var trovärdigt. Däremot var Speedwagon fortfarande en aning osäker. I avsnittet nedan presenteras ett stycke där Speedwagon där Nasirs lösning behandlas:

Intervjuare: Känner du att han har missat någonting?

Speedwagon: inte vad jag kan tänka på… Jag litar på det.

Intervjuare: Ok! Hur säker känner du dig?

Speedwagon: En fyra.

Intervjuare: Oh, du känner dig lite osäker. Vågar du prata om det?

Speedwagon: Ja, mitt tankesätt är ju att… Så… själv kan jag inte tänka på något motexempel. Eller fel. Jag tror att det finns mer exempel som kanske kan visas. Alltså, själv är jag ganska säker. Men det finns en chans att det finns mer exempel som… inte har egenskapen.

Speedwagon sätter alltså en relativt hög tilltro till Nasirs induktiva bevis, men är inte helt säker på att ett specialfall har missats eller ej. Det kan existera ett motexempel, det är helt enkelt inte belagt än. När det kommer till fall där elever kände sig helt säkra på att inga motexempel existerar så utfördes oftast ett deduktivt bevis innan. Lisa Lisa betvivlade ursprungligen att likbenta trianglar har lika stora basvinklar, eller snarare att sinnet var pålitligt. Vi såg i ett tidigare tema Lisa Lisas bevis för att detta påstående stämmer[62]. Uppgiften avslutades med att fråga om Lisa Lisa kunde tänka sig något motexempel:

Intervjuare: Hm ja… kan du tänka dig något motexempel?

Lisa Lisa: Neeej… vi har ju bevisat att det stämmer. Det finns inga.

Intervjuare: Ok, då fortsätter vi.

Auktoritet

Slutligen så kan elever av ren princip lita mer på utlåtanden från experter[63] samt innehåll i formelsamlingar. Ett uttalande från en lämplig auktoritet höjer tilliten till ett påstående medan

[62] Under sinnestvivel och skepticism.
[63] Såsom lärare.

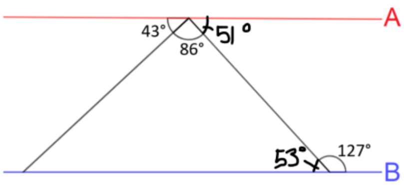
uttalanden från elever kan, åtminstone jämfört med experter, sänka tilliten. Här utgår alltså elever från *vem* det är som presenterar argumentet, snarare än *vad* det är som presenteras. I sista uppgiften skulle elever jämföra två bevis, ett induktivt och ett deduktivt. Speedwagon hade nyss läst klart Nasirs bevis när följande avsnitt utspelade sig:

> Intervjuare: Så är du helt övertygad av argumentet i sådana fall?
>
> Speedwagon: … nej, inte helt övertygad. Men… jag tror också att det är för att det kommer från en elev och inte från en lärare eller typ… välkänd formel eller… en matematiker. Men ändå, om det kommer från en elev så… lite mer misstro till det. Om en lärare sagt det hade jag nog helt litat på det.

Lägg märke till hur det ovanstående argumentet belyser hur Speedwagon inte önskar tilldela en alltför stor tillit till Nasirs motivering, på grund av att Nasir är en elev. Nasir begränsar sin grad av tillit (Q) baserat på att det inte är, för Speedwagon, en expert som utför argumentet.

5.1.4 (Q), vilken tillit ger eleverna till sina bevis (II)

Slutligen består Toulmins modell även av en ”qualifier” (Q) av ens grad av tillit, dvs. hur mycket en elev litar på ett påstående. Denna studie utgick från två sätt att mäta detta, ett via en temaanalys enligt Braun & Clarke (2006), men även genom att explicit be elever värdera sin grad av säkerhet på en skala 1 – 5 (osäker till nästan helt säker / helt säker). Syftet var att fånga huruvida elever själva litar på lösningen och dess innehåll, och i sådana fall i vilken grad. Resultatet av denna analys indikerar att elevers skriftliga argument antingen saknar sådana värderingar eller är i helt säkra termer. Exempelvis finner vi Lisa Lisas lösning till fråga 9. Här markeras de ord som tolkas som (**Q**) med fetstil:



180 – (43+86) = 51
180 – 127 = 53
*De **är** inte parallella.*

Figur 45. Lisa Lisas bild till uppgift 9.

> Lisa Lisa: Jo, om dem **är** parallella så **borde** den här vinkeln vara lika stor som denna (pekar på alternatvinklarna). Och den här vinkeln **är** 180 minus 43 och 86… Jag **tror** det blir 129 eller?
>
> Intervjuare: Ja.
>
> Lisa Lisa: Så 51. Den **är** 180 – 127 som ger 53. Dom **är ju** inte lika stora, så linjerna **är** inte parallella.

Lisa Lisas skriftliga lösning statuerar kort och gott att något ”är”. Detta återfinnes i samtliga skriftliga lösningar. Hennes verbala motivering innehar däremot några led av osäkerhet i form av ”borde” och ”jag tror”. När det kommer till matematisk argumentation inom geometri så är alla deltagare konsekventa med att uttrycka sig i säkra termer skriftligt. Verbalt förekommer även ”borde” och ”bör” samt ”jag tror” och ett antal fler termer, såsom ”det måste vara så”, ”det är helt säkert” och ”det följer”. Visserligen dyker även en större grad av osäkerheter upp i de verbala motiveringarna, såsom ”jag är osäker”, ”jag vet inte riktigt” eller ”jag är inte helt säker”. En punkt som är värd att lyfta fram är att elever kan uttrycka en stor grad av säkerhet för saker som är visuellt uppenbara, trots att det rent matematiskt sett inte är helt säkert. I uppgift 5 uttryckte Giorno följande:

> Intervjuare: Så frågan är: du får en triangel och man ritar en bisektris… vad för slutsatser kan du dra från denna informationen?
>
> Giorno: Jag tror man kan lista ut rätt mycket, faktiskt. Jag vet ju att från början så har vi en triangel där de här sidorna ska vara lika stora (markerar att triangelns ben är lika stora, pekar nu på dem).

Giorno drar flera slutsatser, såsom att bisektrisen skapar en rät vinkel, delar en vinkel mitt itu, triangeln är likbent, har lika stora basvinklar och basen delas mitt itu.

> Intervjuare: Hur säker känner du dig på alla de här slutsatserna?
>
> Giorno: De här slutsatserna känner jag mig 100% säker på.

Det var inte förrän intervjuaren påpekade ett behov av att tänka på andra trianglar som Giorno själv testade att rita andra fall som skapade motexempel till de flesta av dessa slutsatser. Elever kan också ställa upp konkreta definitioner OCH dra logiska slutsatser från dessa definitioner men trots det uttrycka en stor grad av osäkerhet. Såsom det beskrevs tidigare[64] ansåg Speedwagon att det var *nödvändigt* att en kvadrat är en rektangel, i alla fall givet den definition som ställdes upp.

> Speedwagon: Jag är **ganska säker** på att det är bara två rektanglar. Bredden **ska** vara lika lång som den andra bredden och… längden **ska** vara lika lång som den andra längden.
>
> Intervjuare: Mhm…
>
> Speedwagon: Så det stämmer **ju**… på kvadraten också. … Så **ÄR** en kvadrat en rektangel? … jag kommer inte på något sätt att argumentera emot det… så… jag skulle säga så, ja. Det **är** en rektangel.
>
> Intervjuare: Men det går emot din intuition?
>
> Speedwagon: Ja… för att… **det känns lite**… **känns lite fel.**
>
> Intervjuare: Det känns fel?
>
> Speedwagon: **Det känns** som att en kvadrat **är** något speciellt. En kvadrat **är** en kvadrat. Men, ja… en rektangel.

Elever kan alltså acceptera att en definition kräver att ett visst objekt är en del av en viss klass. Med andra ord, elever kan ge ett korrekt svar utan att själva helt tro på det. De upplever en viss grad av osäkerhet. Matematisk argumentation kan alltså tillåta sådana modala termer i viss mån, men de skrivna argumenten verkar inte överlag innehålla ”osäker” terminologi. Där uttrycks matematiken med säkerhet, jämfört med de verbala motiveringarna som innehar en

[64] Se s.35 (under Deduktiv).

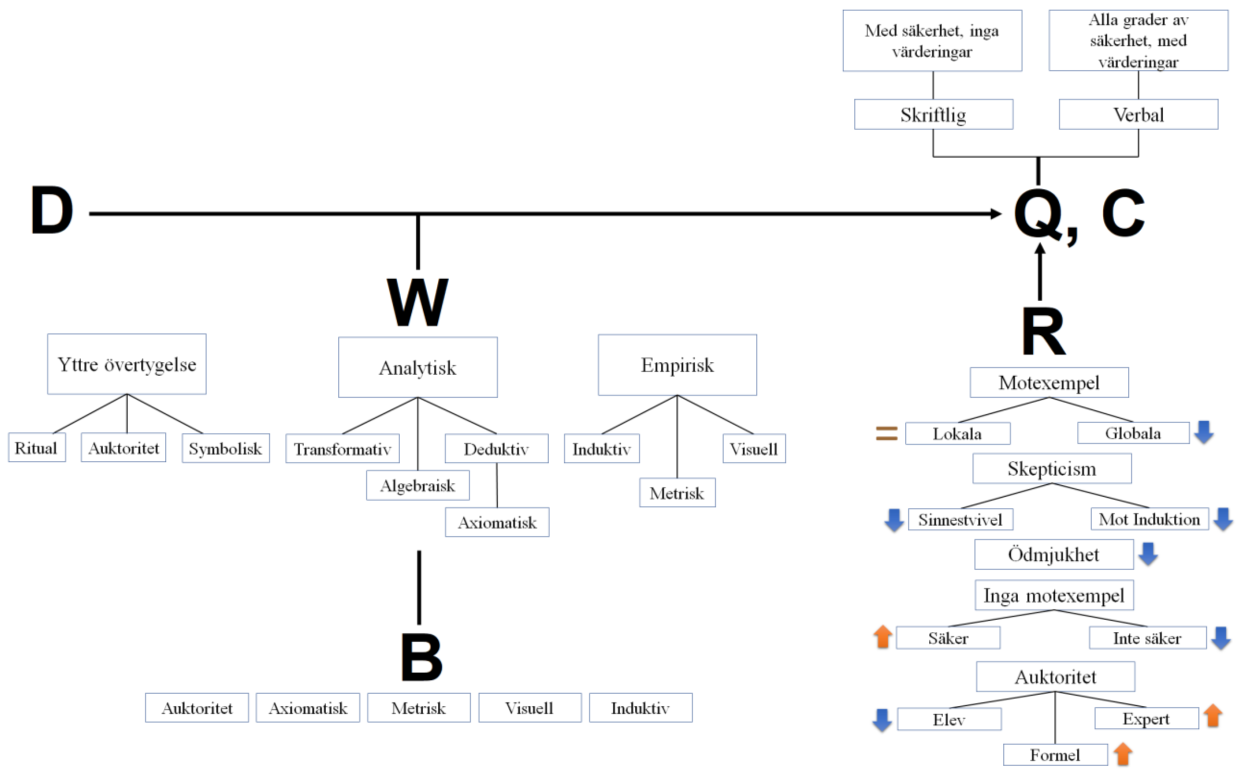
viss grad av osäkerhet – men dessa graderingar och hur en elev tar sig ur dessa, framgår inte nödvändigtvis i de skriftliga argumenten.

5.1.5 Sammanfattning av elevernas argumentation enligt Toulmins modell. Struktur och innehåll (I, II)

Elevers skriftliga och verbala argument kan skilja sig åt i en väsentlig aspekt: motiveringar (W) som hade krävt mycket text att uttrycka, eller saknar ett effektivt symbolspråk, kan utelämnas ur skriftliga motiveringar. I den verbala finns däremot dessa motiveringar.

Figur 46. Det existerar elever som verbalt motiverar varje steg men som utelämnar vissa motiveringar i sina skriftliga argument. De motiveringar som utelämnas är av typen som saknar ett effektivt symbolspråk.

Flera typer av motiveringar används av elever och bedöms som trovärdiga och övertygande. I diagrammet nedan sammanfattas samtliga dessa delar av resultatet med stöd av Toulmins modell:



Figur 47. Resultatet tolkat utifrån Toulmins modell. I (R)-kolumnen så har det även illustrerats hur tilliten påverkades av typen av (R) som dök upp.

Elever använder en mängd av olika motiveringar för att belägga sina slutsatser. Dessa kan ha sin utgångspunkt i yttre övertygelser, analytiska metoder likväl som empiri. Elevers motexempel (R) kan bestå av flera delar som kan utgå från både epistemologi likväl konkreta exempel. Avslutningsvis saknade elevernas skriftliga argument värderingar av deras grad av tillit som var ”osäkra”. Verbala argument innehöll emellertid en viss grad av osäkerhet.

Lösningen som presenteras på papper avslöjar alltså härledes inte nödvändigtvis vilka delar som elever känner sig osäkra kring.

5.1.6 Vad anser elever vara ett bevis? Elevernas egna definitioner (II)

Hittills har resultatet behandlat vad för motiveringar elever använder när de försöker bevisa olika påståenden samt skillnaden i strukturer mellan skriftliga och verbala bevis. Vad som kvarstår är nu elevernas egna uttryckliga definition av ett bevis och dess syfte. Om en fråga ber eleverna ”visa X”, vad är det som egentligen efterfrågas enligt eleverna? Vad är syftet med att bevisa någonting alls?

Vad är ett bevis?

Efter att eleverna utfört alla uppgifter som skapats inför intervjun efterfrågades deras egna definitioner av ett bevis. Dio sammanfattar väl den gemensamma tanke som eleverna hade kring bevis:

> Intervjuare: SÅ… vad anser du att frågan att visa ens betyder? När en fråga ber dig visa någonting… vad är frågan?
>
> Dio: Uppgiften är att använda det som är givet och anlända till det som ska visas.
>
> Intervjuare: Så från starten och till slutsatsen…
>
> Dio: Ja, man börjar från given information och tar sig vidare via några regler, eller stöd, och fokuserar på att nå fram till slutsatsen.

Giorno uttryckte sig en aning annorlunda:

> Giorno: Det är ju att jag ska visa att oberoende av vad vi har för tal så ska vi visa att något samband stämmer.
>
> Intervjuare: Så, lite mer generellt… vad är ett bevis egentligen?
>
> Giorno: Det är en funktion då, som alltid… du stoppar in en låda i en maskin och du kommer alltid få ut samma produkt.

Så ett bevis är en ”funktion”, en regel, som utvärderar sanningshalten i ett påstående. Eleverna må se bevis som en verifikation som utförs via en mängd ”regler” eller ”stöd”. Vad dessa regler är varierar mellan elever där flera olika typer av motiveringar (W) accepteras

5.1.7 Vad är syftet med ett bevis? (II)

I tidigare avsnitt har vi belagt att elever kan ha skilda åsikter om hur ett bevis ska se ut, samt vad för motiveringar som är övertygande, men ändå ha relativt enhetliga definitioner av vad ett bevis ”är”. Det går även att tillägga till detta att elever även kan ha skilda tolkningar av syftet eller ”poängen” är med bevis. För att avsluta intervjun så efterfrågades specifikt elevernas egna perspektiv på detta område. Resultatet som sådant pekar på att även ett så litet underlag som fyra elever ger vitt skilda åsikter angående bevisens syfte. I stora drag verkar det finnas två linjer: *bevis har ett syfte* samt *bevis saknar syfte.*

Kunskap och förståelse

Ett tema som dök upp bland eleverna var att bevisens syfte var för kunskapen i sig. Bevis ger oss en djupare förståelse för det vi arbetar med. Denna kom i två former: bevis *har ett egenvärde* samt bevis är *pragmatiskt* användbara. Bevis är användbara för den personliga kunskapen vilket i sin tur hjälper en att prestera bättre. Det första perspektivet kan representeras av Dio:

> Intervjuare: Finns det någon poäng med det? (bevisföring)
>
> Dio: Hm… ja… jag skulle nog säga att det ger oss förståelse, en djupare förståelse av fenomenet…
>
> Intervjuare: Känner du att bevis har ett värde i sig själv?
>
> Dio: I sig själv?
>
> Intervjuare: Som konst ungefär, konst är konst.
>
> Dio: Hm… ja, jag skulle nog säga det. Det låter oss komma närmare den sanna naturen hos … vad som helst. På grund av att… oh ja, hela poängen är, så vitt som jag ser det, är att vi helt enkelt försöker förstå det som omger oss, att komma närmare sanningen.

Det andra perspektivet kan representeras av följande citat från Giorno:

> Intervjuare: Ok… känner du att det finns någon poäng med allt det här, egentligen?
>
> Giorno: Men det visar väl på lite djupare kunskap, framförallt.
>
> Intervjuare: För läraren eller för dig?
>
> Giorno: Det är väl ett kvitto för en själv att man kan det. Men även för läraren som ser att man kan det verkligen. I skolan kan du ju få en exempeluppgift och så kan du den exempeluppgiften sedan. Men om du ändrar lite så måste du ändå förstå vad det är du har gjort. Så, de ger väl en lite mer djupare kunskap som gör att du kan klara av lite svårare uppgifter som handlar om samma sak.

Verifikation

Ett annat perspektiv som dök upp är att bevisens syfte är att bekräfta att ett givet påstående är sant. Detta perspektiv dök visserligen upp redan i det tidigare avsnittet, där elever fick presentera sin tolkning av frågan ”visa att”. Speedwagon hade följande att säga som pekar på att bevisets syfte är att bekräfta ett påstående:

> Intervjuare: Kan du tänka dig något syfte med bevis för de som är intresserade av matte, dock?
>
> Speedwagon: Syfte… alltså, lite samma sak som jag sa innan. De vill se, utan tvivel, att man kan visa svaret. Med all säkerhet att svaret stämmer.

Det finns inget syfte

Elever kan även ha inställningen att bevis inte tjänar något egentligt syfte, åtminstone ur ett personligt och praktiskt perspektiv. Detta kan särskiljas från det matematiska syftet, där elever kan skilja på det personliga perspektivet och det allmänna. Specifikt så framhävde Speedwagon följande tankar:

> Intervjuare: Känner du att det finns någon poäng med att visa att någonting stämmer?
>
> Speedwagon: … jag skulle nog säga att det spelar roll för vissa… men för mig, för den andra delen, så finns det ingen större poäng med det.
>
> Intervjuare: Hur menar du då?
>
> Speedwagon: Men det är liksom… poängen är att kunna det… det är ju ganska många som efter utbildningen som aldrig använder det igen i resten av sina liv. Så, om de inte gör det så skulle jag säga att de **inte** fanns någon viss poäng med det. Men på andra sidan… finns det nog inte någon poäng alls som kan hjälpa alla.
>
> Intervjuare: Ah, det kan vi förstå. Visserligen, så är det från DITT perspektiv. Hur ser du på det?
>
> Speedwagon: För MIG, så… anser jag att så fort jag är klar med matten så kommer detta inte ha någon betydelse för mig.

Efter att ha hört detta svar och efter en kort reflektion slog det mig att Speedwagon möjligen ser matematiken som en enda mängd av operationer som ska memoreras. Att bemästra matematiken är att behärska alla minnesregler. Följande följdfråga ställdes till Speedwagon:

> Intervjuare: Upplever du att det här är någonting som du bara behöver memorera? Du ska bara minnas det?
>
> Speedwagon: Ja, så är det. Jag vet också att det utvecklar logiskt tänkande…
>
> Intervjuare: Känner du att matten hjälp dig med detta eller inte?
>
> Speedwagon: Nej, det tycker jag inte.

Detta avslut pekar alltså på att även om Speedwagon hört att matematiken ska utveckla logiskt tänkande så är det inte något som upplevts självklart. Sådana inställningar är nog inte Speedwagon ensam om[65]. Det är härledes en inställning en lärare behöver förväntas vara kapabel att hantera och bemöta.

Riktiga bevis efterfrågas inte

Det sista perspektivet som speglar att bevis inte spelar en alltför stor roll inom utbildningen är att elever kan uppleva att bevis inte efterfrågas av läraren. Vid slutet av intervjun påpekades

[65] En kan bara säga att en är matematiklärare / arbetar med matematik i en allmän tillställning och höra åsikter av alla dess slag; ”jag är inte en mattemänniska”, ”jag förstod aldrig matten”, ”jag ser inte poängen med matten utöver plus, minus, gånger och division…”, etc.

det för Lisa Lisa att hennes verbala och skriftliga argument skiljde sig åt. Efter att Lisa Lisa[66] bekräftat detta utspelade sig följande episod:

> Lisa Lisa: Jooo… Men alltså, det är ju ingen lärare, eller ja, inte min lärare, skulle inte ge mig mindre poäng för att jag inte skrivit det. Det är inte det som hon kräver av mig. Det efterfrågas inte liksom motiveringar och man får inte avdrag för dem.
>
> Intervjuare: Vänta… er… om jag tolkar dig rätt så upplever du att det inte efterfrågas motiveringar av den typen?
>
> Lisa Lisa: Neeeh, vi kan ju få frågor som att man ska visa att A = B, vad det nu är, men de är ju inte… inte ett ”riktigt bevis”. Alltså, på tavlan så hade läraren sagt att de vinklarna är lika stora för vi ser att de är lika stora. Här (pekar på 11:an) så hade vi nog fått säga att vinkeln är rät för den ser rät ut. I alla fall när vi kör på tavlan.
>
> Intervjuare: OK… känner du att motiveringar inte spelar någon roll?
>
> Lisa Lisa: De spelar väl någon roll, men inte fulla motiveringar. Jag tycker min lärare bara bryr sig om att vi får fram rätt svar. Hon ser vad det är vi håller på med.

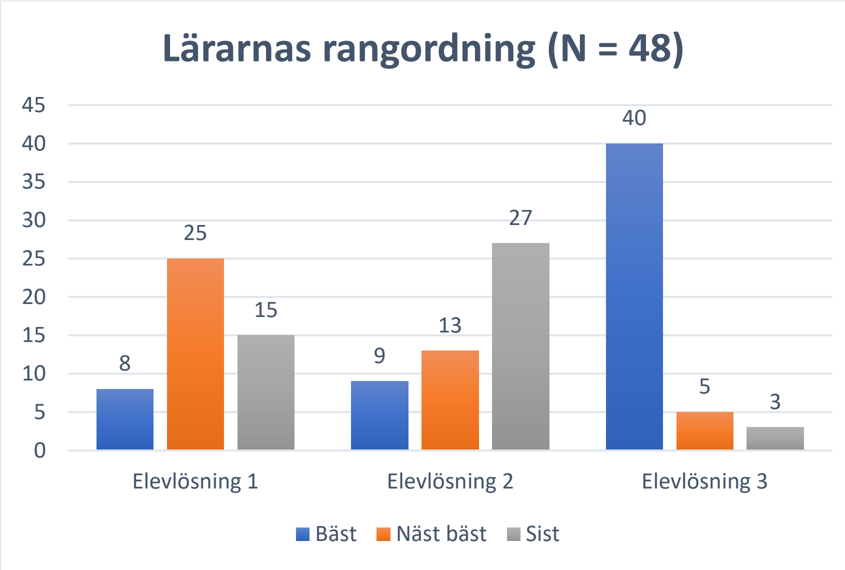
Lisa Lisa uttryckte alltså att lärare fyller i de motiveringar som saknas. Att de däremot saknas är inte relevant.

5.2 Lärare (III)

Enkäten lades ut på matematikundervisningsgruppen den 2 maj samt den 27 maj och totalt sett samlades 48 enkätsvar in[67]. Lärarnas svar analyserades med en temaanalys och ordnades sedan utefter de vanligaste motiveringarna. (Se bilaga 8 för enkäten i sig).

[66] Lisa Lisa har läst högre mattekurser (Matematik 4). Dessa inkluderar bevis i kunskapskraven.
[67] Egentligen 61 svar. På grund av att vissa svar som gavs till lärare i anknytning med enkäten kan svaren ha påverkats efter ett visst skede. Alla svar efter detta har uteslutits.

5.2.1 Lärarnas rangordningar (III)



Figur 48. Figuren ovan beskriver hur lärarna rangordnade de olika elevlösningarna. Uppmärksamma att antalet lösningar som rankas som "bäst", "näst bäst" och "sist" inte summerar till 20. Detta beror på att vissa lärare valde att rangordna vissa lösningar som lika bra (exempelvis valde vissa lärare att välja att samtliga lösningar var "bäst").

Rangordningen ovan kan behöva nyanseras för en ser snabbt att varje kategori inte summerar till 48. För att förtydliga detta så följer lärarnas rangordningar som tripletter i tabellen nedan:

Tabell 5. Tabellen nedan beskriver hur lärarnas rangordning fördelar sig i tripletter. Tabellen avläses på följande vis: (1, 2, 3) betyder att lösning 1 rankades som bäst, 2 näst bäst och 3 sist. (1 och 2 och 3) innebär att samtliga lösningar rankades lika högt. Ett "X" markerar att läraren inte tyckte att någon lösning uppfyllde den rangen.

Rangordning	Frekvens
(3, 1, 2)	22
(3, 2, 1)	10
(1 och 2 och 3, X, X)	3
(1, 3, 2)	2
(1 och 3, 2, X)	2
(2, 1, 3)	2
(2, 3, 1)	2
(3, X, 1 och 2)	2
(1, 2, 3)	1
(3 och 2, 1, X)	1
(X, 3, 1 och 2)	1

Tabellen och diagrammet ovan klargör att de flesta lärare, ca. 83%, som deltog i studien föredrar den tredje lösningen. Förvisso är det bara 75% som ansåg att elevlösning 3 var av en högre kvalité än de andra lösningarna. Med ett χ^2-test på den samlade datan kan en bestämma att skillnaden mellan svaren är statistiskt signifikant ($\chi^2 \approx 68{,}3$, $p < 0{,}00001$), dvs. svaren är inte oberoende av elevlösningen, utan beror på vilken elevlösning som lärarna rankat.

5.2.2 Lärarnas motiveringar (III)

Skälen till att en lärare ordnar lösningar som de gör ska nu redogöras för. Sammanfattningsvis utgår lärare från flera olika värderingar i sin rangordning, oftast mer än en i ett givet fall. Lärare skiljer sig också sinsemellan angående vilka värderingar som framhävs. I resultatet nedan presenteras temat med stöd av vissa citat som sedan följs av vilken rangordning läraren gjorde.

Formalism

I detta tema är fokus på att argumentationen är logiskt valid. Uttryckt med Toulmins modell så ska eleven ta sig från en start (data) till ett slut (C) och däremellan motivera sina steg (W). Lärare värdesätter alltså att argumentet är på formen DWC. Fullständigheten ses här som ett krav för att ens ”visa” att något stämmer. Dessa lärare sätter överlag en lägre rank på elevlösningar som saknar dessa motiveringar (W), eller har brister i sin framställning i användning av begrepp. Följande citat exemplifierar den centrala idéen i temat:

> Elevlösning 3 motiverar/visar att likformighet råder innan den visar att x^2=10. (3,1,2)
>
> Eleven använder också flera begrepp i sin lösning som parallella, likbelägna, samt ett korrekt matematiskt symbolspråk för trianglar, likformighet, vinklar och sträckor. (3,1,2)
>
> Uppgift 2 är väldigt knapphändig och saknar motivering för likformigheten, den hade därmed fått en lägre bedömning. (3,1,2).
>
> I en uppgift där man ska "visa att" är redan svaret givet, därför blir det än viktigare med viss fullständighet. Det huvudsakliga jag utgått från är skillnaden, dvs. hur väl likformigheten av trianglar motiveras. Lösning 2 motiverar inte alls likformighet utan räknar bara på det som vore likformighet given information, därför bedömer jag den som sämst. (3,1,2).

Lakonism (Kärnfullhet)

I delvis konflikt med formalismen finner en istället lakonismen[68]. En lärare som värdesätter lakonism sätter ett större värde på att ett argument ska vara så kärnfullt och koncist som möjligt[69]. Alla triviala steg ska utelämnas i den mån det är möjligt. Överlag värdesätts 2:an högre här än hos andra värderingar medan 3:an sjunker i rank.

> Den jag valde är kortfattad, men tillräcklig. Den tredje är onödigt komplicerad. (2,1,3).
>
> Kortfattat, med självklara aspekter underförstått. Finns ingen anledning att skriva en massa saker som är självklara. (2, 3, 1).
>
> Det känns egentligen ganska onödigt att skriva så mycket för att få ut så lite. Uppgiften var att visa att arean är 10 cm^2 och det har lösning 2 gjort på ett kortare och elegant sätt. (2, 1, 3).

I sin mest extrema form verkar detta till och med innebära att det ska finnas så få ord som möjligt, till den gräns att en kontrasterar matematik med det skrivna ordet som olika saker:

> Hade elev 3 använt lite mindre text och bara matte hade jag rankat den högst. (2, 3, 1).

---

[68] Lakonism, ur Lakonien (dvs. Sparta). Härstammar från hur spartaner brukade vara, åtminstone enligt historierna.

[69] Givet att lösningen tolkas som korrekt.

Tydlighet

Lärare verkar även värdesätta tydlighet hos elevernas lösningar. Inom geometrin har lärare beskrivit önskemål om tydliga markeringar i bilder. Ansatser som är tydliga både i markeringar och struktur ses som bättre än de vars presentationer upplevs bristfälliga. Figurens tydlighet omtalas främst i lösning 1.

> Lösning 1 tar ett tag att förstå den första likheten. (3, 1, 2)
>
> Lösning 1 lägger till y utan motivering kring vad y är. Annars gillar jag den uträkningen bäst. (3, 1, 2).
>
> Ekvationen som leder till y = v behöver motiveras, använder eleven vinkelsumma i en triangel = 180 grader? Rak vinkel = 180 grader? Vilken vinkel är ens y, finns inte i figuren? (3, 1, 2).

Det kan även vara att vissa delsteg eller avslut hos lösningarna kan upplevas otydliga. Detta ställs upp emot den tredje lösningen vars struktur anses tydlig.

> Elevsvar 1 försöker motivera att trianglarna är likformiga, dock jämfört med elev 3 så är detta inte lika tydligt. (3, 1, 2).

Bedömningsunderlag

Det finns lärare som uppskattar lösningar vars presentationer ger mycket information om vad eleverna har tagit med sig från undervisningen. Ett rikt innehåll som ger läraren information om elevens kunskaper och läger grunden för ett bra bedömningsunderlag värdesätts mer än en alltför kärnfull respons. Lösningar som inte klargör vad eleven vet premieras en aning lägre.

> Den sista lösningen ger mest information om vad eleven vet om likformighet. (3, 1, 2)
>
> I den första uppgiften har eleven markerat ut en rät vinkel och visar att trianglarna har ytterligare en vinkel gemensam. Så eleven visar att den troligen förstår vad som krävs för likformighet mellan trianglar men gör inget specifikt konstaterande kring varför hen vet det. (3, 1, 2).
>
> Elevlösning 3 är mest utförlig, motiverar flest samband. Elevlösning 2 ger ingen förklaring till påståendet att likformighet råder. Mittemellan har vi elevlösning 1 som gör ett försök att motivera likformigheten. (3, 1, 2).

Relevans

Lärare lägger även fram relevans som ett viktigt begrepp. När en elev presenterar en lösning till läraren så bör denna innehålla enbart relevanta steg. Detta bör jämföras med lakonism som värdesätter kärnfulla svar i sig. Här är det inte nödvändigtvis kärnfullheten som är det viktiga utan snarare att alla steg har med lösningen att göra. Exempelvis ska en elev inte ta till metoder som inte hjälper en ta sig till en lösning på problemet. Jämfört med lakonism kan alltså lösningar vara av en längre karaktär så länge varje steg är relevant för lösningen. Det är relevansen som värdesätts, inte att svaret är kortfattat. Exempelvis kunde följande tankar uttryckas:

> I detta fall anser jag att lösning 1 och 2 är liknande, men olika. 1an introducerar variabeln y som inte används, samt att trianglarna är likformiga egentligen utan att konstatera hur. (3, 2, 1).

Andra lärare uttryckte liknande tankar, fast gick även på steg som dök upp senare i lösningen:

> Elevlösning 1 har en irrelevant inledning, motivering av likformighet saknas och eleven verkar inte förstå att när väl x^2=10 är visat är lösningen färdig (de sista två raderna är alltså onödiga). (3, 2, 1).
>
> Elevlösning 2 saknar motivering för likformighet, men innehåller inte heller några ovidkommande beräkningar. (3, 2, 1).
>
> Elevlösning 2 är bättre än 1:an då den inte innehåller några irrelevanta beräkningar. (3, 2, 1).

Kunskapskraven och ämnesplanens intention

Lärare kan även välja att delvist förkasta principen av att personligen rangordna lösningarna och istället utgå från en princip grundad i hur väl eleverna har uppfyllt ämnesplanens intentioner. Frågan är alltså inte ”hur bra tycker jag lösningarna är” utan snarare ”hur väl står sig lösningarna mot ämnesplanens kunskapskrav och nationella prov?”. *Alla lösningar som når upp till dessa krav värdesätts på samma sätt*.

> Jag tycker ändå alla har löst uppgiften, i alla fall utifrån min tolkning av det eleverna ska kunna i matematik 2b. (1 och 2 och 3, X, X).
>
> Det som är viktigt är hur väl eleverna uppfyllt kunskapskraven. Så vitt jag ser det skulle alla få full poäng. (1 och 2 och 3, X, X).
>
> Såsom det ser ut i matematik 2 så skulle jag ge alla full poäng. (1 och 2 och 3, X, X).

Idealism

Det verkar även som att lärare kan värdera sin egen lösning över alla andra. Den lösning som är önskvärd är den som bäst speglar den egna lärarens lösningsansats. Elevers lösningar bedöms alltså utifrån hur väl de har anammat lärarens lösning, där de som är snarlika värderas högre medan de som skiljer sig värderas lägre.

> Lösning 1 är "rak på sak", dvs bevisar att en sats kan tillämpas, och kommer snabbt till en lösning. Det är hur jag förväntar mig att en godtycklig elev ska svara på ett matteproblem. (1, 3, 2).
>
> Elevsvar 1 försöker motivera att trianglarna är likformiga, dock jämfört med elev 3 så är detta inte lika tydligt. Den är väl närmast mitt egna svar dock, så jag förväntar mig något sådant. (1, 2, 3).

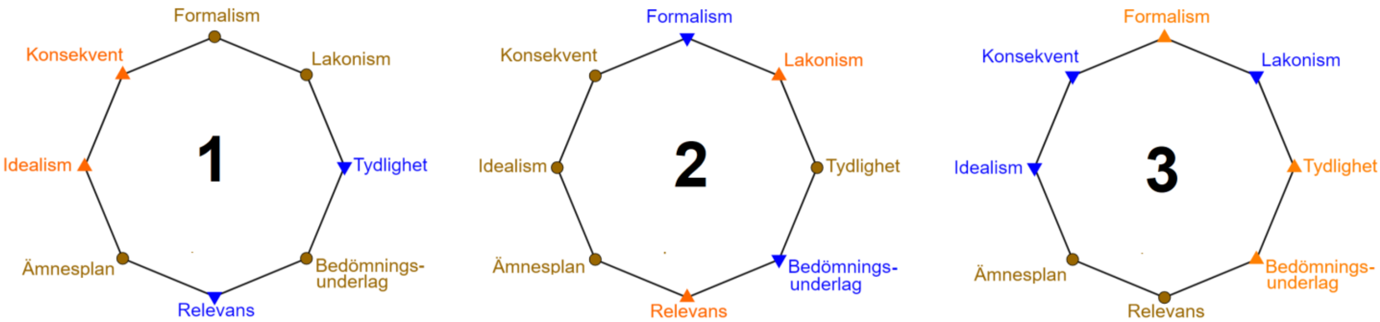
Korrekthet och konsekventhet

Slutligen är det sista temat som identifierades från lärarnas svar att elevernas motiveringar bedöms främst utifrån korrekthet och konsekventhet. Först bedöms huruvida lösningen är korrekt eller ej. Om något fel upptäcks så kommer lösningen sättas sist. Om inga fel upptäcks så bedöms sedan hur konsekvent lösningen är, dvs. om eleven använder en och samma notation genom hela lösningen eller om hen håller reda på ordningen på termerna i sina formler. Lösningar som är inkonsekventa värderas lägre, även om de har bättre framställda motiveringar. Formalismen i sig värderas inte högre än att lösningen är helt och hållet konsekvent. Lärarsvar kunde se ut på följande vis:

> Lösning 1 är bättre än lösning 3 för det finns ett ordningsfel[70] när eleven går från formeln till talen. (2, 1, 3).
>
> …Vidare är det fel att y=v. Lösning 2 saknar argument för att trianglarna är likformiga, vilket krävs när du ska ”visa…” att något gäller. (3, X, 1 och 2).
>
> 1:an är tydlig och enkel, trean mer formell men avslutar sämre. 1:an är bäst. (1, 3, 2).

5.2.3 Sammanfattning av lärares värderingar (III)

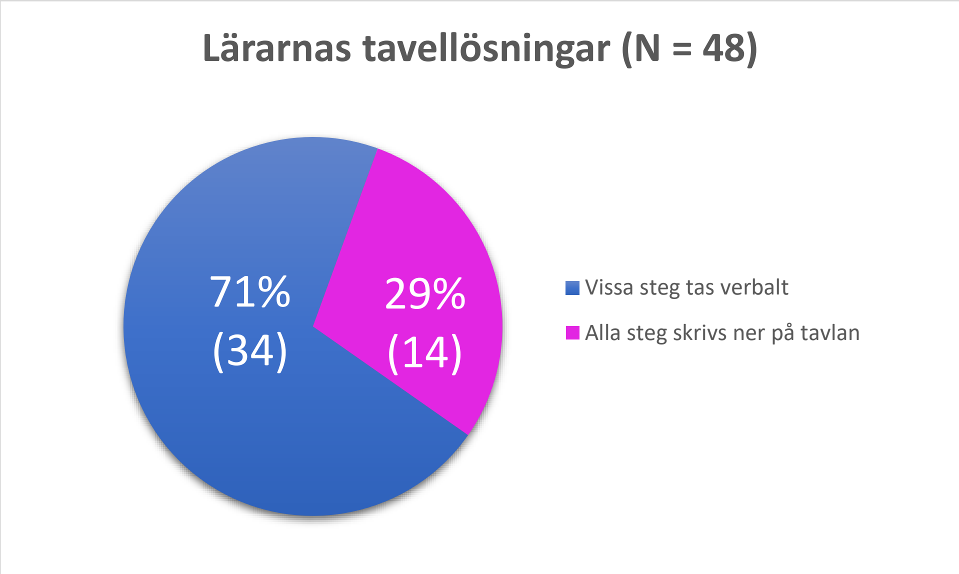
Lärare utgår från ett större antal olika värderingar när de bedömer elevlösningar. I denna studie kunde åtta värderingar identifieras. Beroende på vilka värderingar en lärare har så påverkar det hur läraren rankar elevlösningen gentemot en annan. I illustrationen nedan presenteras en samlad bild för hur en värdering kan påverka en lösnings ställning i lärarnas rangordning.



Figur 49. Diagrammet illustrerar hur lärarnas värderingar påverkar en elevlösnings ställning i rangordningen. En orange triangel som pekar uppåt innebär att lösningen höjs gentemot en annan lösning. En blå triangel nedåt innebär att lösningen sänks gentemot en annan lösning. Slutligen, en brun cirkel innebär en neutral position. Lärare med dessa värderingar talar antingen inte om lösningen eller så värdesätter de samtliga lösningar lika mycket.

[70] Byte ordning på likhetenen och använde de inversa förhållandena.

5.2.4 Vilka delar hade lärare exkluderat ur sina motiveringar? (III)



Figur 50. Diagrammet ovan visar hur lärarnas svar angående tavelpresentationen fördelade sig.

Lärare rapporterade i denna studie i större skala att de hade tagit vissa steg verbalt. De steg som hade skippats **överensstämmer med de motiveringar som utelämnades hos eleverna i uppgiften**: skriftliga motiveringar av parallellism och likformighet[71]. Lärarnas svar kunde se ut på följande vis:

> Att de två trianglarna är likformiga för att de delar två vinklar.
>
> Parallella linjer och likbelägna vinklar
>
> Att linjerna är parallella och likformigheten hos trianglarna hade motiverats verbalt.
>
> Hade inte skrivit långa förklaringar om varför trianglarna är likformiga (i stil med elevlösning 2). Eleverna hade fått motivera det muntligt och på så sätt "hjälpt" mig motivera det. Däremot hade jag markerat lika stora vinklar i trianglarna.

Se att dessa svar matchar de strukturer som observerades i elevdelen. **Samtliga** lärare som svarade att vissa steg tagits verbalt hade utelämnat något mellansteg för att belägga likformigheten[72]. Detta kan emellertid problematiseras ytterligare utifrån huruvida det anses trivialt att de två trianglarna är likformiga.

> Om likformigheten är trivial så tas den motiveringen verbalt.

Denna lärare hade alltså motiverat skriftligt ifall likformigheten ansågs vara icke-trivial. Det kan även vara av intresse att utgå från klassen normer och kunskap ifråga. Exempelvis lyfte följande lärare fram klassens kunskaper som essentiella i hur lösningen kommer se ut:

---

[71] Se s. 31-33.

[72] Parallellism, vinklar, att visa trianglarna är likformiga samt att två trianglar är likformiga när de har minst två vinklar gemensamt.

> Motiveringen av likformighet. Men detta beror förstås på ifall detta är något som är nytt för klassen, i så fall skulle jag dragit ramsan med vinklar etc.

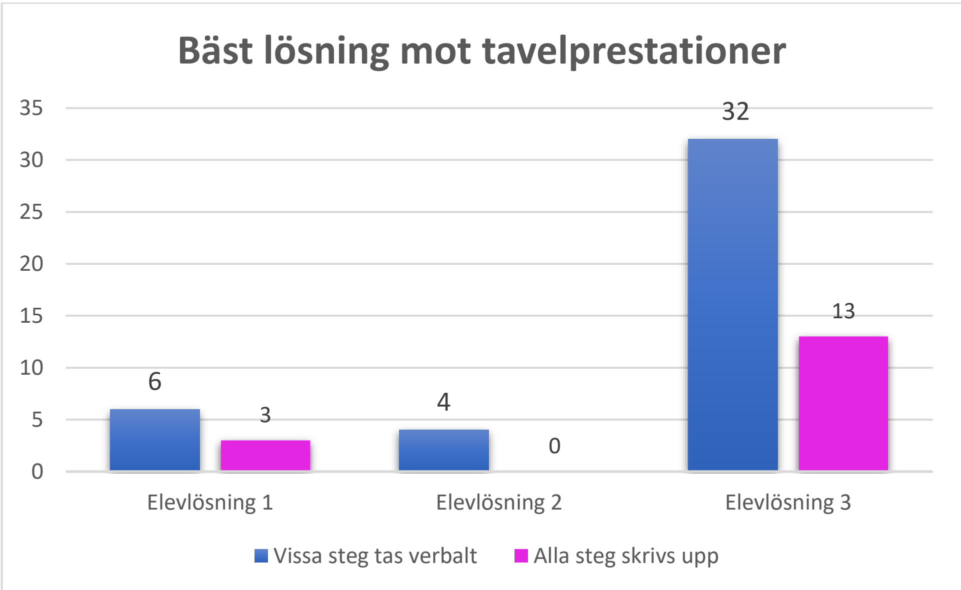
Vissa lärare reflekterar även kring skillnaden mellan deras skriftliga och verbala argument. De framhäver att det är viktigt att poängtera för elever vilka delar som ska vara med, även om de skippas på tavlan:

> Argumenten för likformighet tar jag ofta verbalt, men påpekar för eleverna att de, när de ska kommunicera en lösning skriftligt, **måste skriva ner även de argumenten**. Jag går regelbundet igenom och visar hur lösningar av denna typ ska kommuniceras skriftligt, dock inte på varje uppgift jag går igenom.

Bland de lärare som hade skrivit ner allt på tavlan så verkar de utgå antingen från formalism eller från en enklare lösning. Följande respons bör klargöra vad tanken är:

> Som frågan är ställd hade alla steg kommit upp på tavlan. Hade uppgiften varit "beräkna arean av kvadraten" hade jag ritat ut vinklarna i de två små trianglarna och angett vilka som är lika stora. Motiveringarna hade skett verbalt.
>
> Jag hade nog använt enbart symboler och kanske något ord inom parentes för det som skrivs först, som <AFD=<ACB (likbelägna vinklar) och kanske inte motiverat varför de var likbelägna. I övrigt hade jag skrivit allt då ju **uppgiften avser att visa varför sambandet gäller.**

Slutligen är det relevant att visa hur lärarnas rangordning fördelar sig beroende på om de inkluderat alla steg eller ej. Fördelningen i fråga hade sett ut på följande vis:

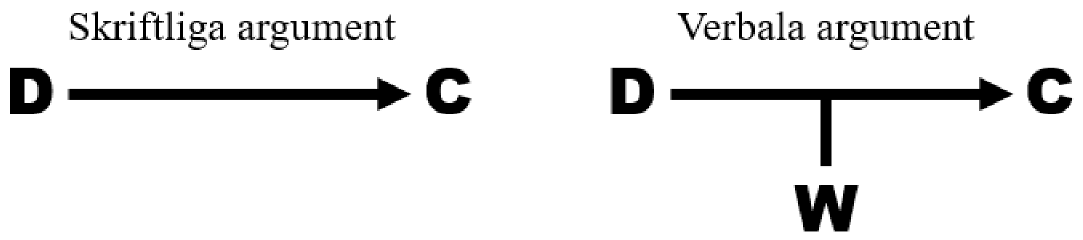


Figur 51. Diagrammet ovan beskriver hur lärares rapporterade tavelprestationer jämför sig med vilken elevlösning som valdes som bäst. Vissa lärare valde att flera lösningar var bäst vilket förklarar varför summan inte är 48.

6. Diskussion

I denna diskussionsdel kommer resultaten diskuteras gentemot varandra samt sättas i relation mot litteraturen. Först diskuteras hur strukturskillnader mellan skriftliga och verbala argument kan vara relevant i skolans värld. Sedan hanteras frågeställning II och dess implikationer. Slutligen diskuteras studiens begränsningar och signifikans, några pedagogiska insikter samt förslag till framtida forskning.

6.1 Den strukturella skillnaden mellan verbala och skriftliga argument (I, III)



Figur 52. Resultatet från studien indikerar att det existerar elever vars verbala och skriftliga argument skiljer sig åt. DC-argument är argument där eleven går från en data till en slutsats utan att nämna en motivering. I DWC nämns någon form av motivering.

Med stöd av Toulmins modell[73] identifierades det en skillnad mellan verbala och skriftliga argument. Samtliga elevers verbala argument var på formen DWC medan vissa elevers skriftliga argument var på formen DC[74]. De motiveringar (W) som utelämnades var konsekvent de som hade krävt skriftliga motiveringar **utan** ett effektivt symbolspråk[75]. Från detta resultat ställdes det upp en hypotes att lärarnas tavelpresentationer, eller mer allmänt, klassrum, var uppbyggt på samma form. Dvs. den verbala argumentationen är på formen DWC medan vissa skriftliga presentationer är på formen DC. De argument som förväntades presentera en sådan skillnad är de argumentationer som kräver skriftliga motiveringar utan ett effektivt symbolspråk. Med stöd av uppgift 12 presenterades det tre elevlösningar, varav två av dessa saknade motiveringar i åtminstone ett led[76]. De lärare som rapporterade att de hade tagit vissa motiveringar verbalt (71%, N = 34)[77] beskrev att det var uteslutande icke-symboliska, skriftliga motiveringar (W) som hade körts verbalt[78]. Härledes verkar det finnas en överensstämmelse mellan den typen av motiveringar (W) som tas verbalt av både lärare och elever. Majoriteten av de lärare som kör dessa steg verbalt verkar **ändå** anse att elevlösning 3, den mest formella, **är den bästa** lösningen. Lärare väljer alltså överlag, mer eller mindre medvetet, att presentera lösningar på tavlan som **inte** överensstämmer med deras egna värderingar.

Finns det något syfte med att en sådan skillnad ens existerar? Eleverna verkar i sådana fall faktiskt kunna materialet, eller åtminstone vara kapabla till att motivera saker på något sätt. Jag anser, att det föreligger vissa pragmatiska skäl som bör tas i åtanke för att nyansera ett

[73] Se s.11-13.
[74] DC: Data till slutsats (conclusion), samt DWC: data → motivering → slutsats.
[75] Alltså de hade krävt mycket text. Se s. 31-32.
[76] En saknade en motivering för varför trianglarna är likformiga (dvs. likformighetskriteriet) medan den andra helt enkelt statuerar att trianglarna är likformiga.
[77] Se s.60-61. Det tidigare avsnittet.
[78] I detta fall: att trianglarna är likformiga (med samtliga steg för att belägga detta).

sådant tänkande. Jag önskar presentera tre aspekter som är värda att ha i åtanke. Dessa aspekter är följande:

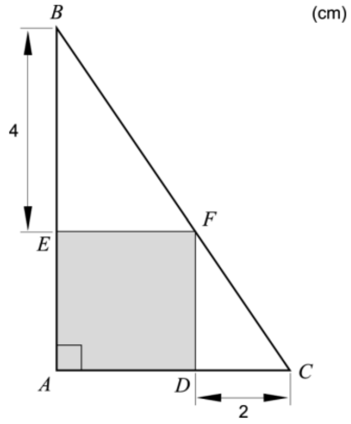
- Provens validitet: mäter de elevernas kunskaper?
- Inkonsekvens hos vilka motiveringar som värdesätts av lärare och NP.
- Vet vi egentligen vad eleven har tänkt om de presenterar ett skriftligt DC argument? Fyller lärare i motiveringar som inte finns där?

Låt oss inleda med den första punkten: först och främst, så är det givet att ett vanligt sätt att utvärdera elever inom matematik, åtminstone i den svenska skolan, är via skriftliga prov (såsom Nationella proven). Dessa må vara relativt reliabla, dvs. en given elev kommer presentera samma resultat givet två liknande prov. Däremot måste en vid detta skede fråga sig om de är helt valida? Om eleverna ger strukturellt annorlunda svar beroende på bedömningsform så kan det uppstå relevanta skillnader. Främst skulle det vara poäng inom problemlösning, resonemang och kommunikation som är problematiska, givet att markanta skillnader existerar. Skulle en elev som presenterar ett muntligt svar till samma uppgift och är av denna typ, prestera bättre med **muntliga bedömningsformer**? Kan en därmed säga att skriftliga prov fångar elevernas kunskaper optimalt? Ska ändå inte elever ha möjlighet att presentera sina kunskaper på bästa sätt[79]?

Den andra aspekten tar sin ståndpunkt i att lärare och NP är inkonsekventa med vilka motiveringar (W) som efterfrågas och värdesätts. Resultaten pekar på att det kan existera en skillnad mellan de lösningar som värderas högt och de som presenteras för eleverna. Klassrumsnormen riskerar därmed bli att dessa icke-symboliska motiveringar inte är aktuella att skriva ner. Lärarens skriftliga argument, expertens argument, är på denna form. Härledes, kan det implicit antas utifrån auktoritära argument, så är detta den lösning en ska eftersträva. Ändå anser lärare i högre grad att det är de lösningar som inkluderar motiveringarna som är åtråvärda, givet att frågeställningen är att en ska ”visa” att något stämmer. Med principer baserat i formalism, så tolkar lärare frågan som att en ska belägga att påståendet stämmer på ett logiskt konsekvent sätt. Är detta verkligen sanningsenligt för eleverna? Hur ska elever kunna värdera vad det är en lärare vill ha om, på ena sidan, så presenterar lärare bevis som saknar de tidigare motiveringarna, men på andra sidan så är det dessa lösningar som värdesätts högst? Visserligen, så bör en inte oreflekterat sätta ett likhetstecken mellan en bra lösning och explicit text. Kärnfullhet är en värdering som är åtråvärd. Men det lämnar fortfarande frågan för elevernas del; hur ska de veta vad som ska vara med eller inte? Till detta läggs det nu även till en fråga om ”hur” detta ska gå till? De nationella proven själv är inkonsekventa med detta format, dvs. huruvida elever ska eller inte ska presentera motiveringar (W) i en lösning. Se följande två uppgifter:

[79] I nästa avsnitt kommer jag även diskutera fallet där elever är mer osäkra. Dvs. det omvända fallet där det verkar som att de elever som utfört korrekta svar är mer osäkra muntligt. Detta kopplas bättre till fråga II.

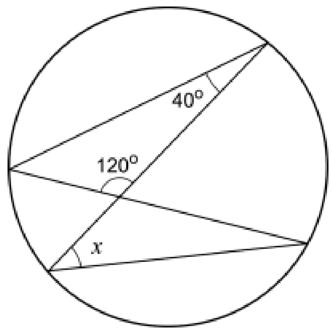
15. I en rätvinklig triangel *ABC* finns en grå kvadrat *AEFD* inritad. Sträckan *BE* är 4 cm och sträckan *CD* är 2 cm. Se figur.



Visa att den grå kvadratens area är 8 cm^2. (0/2/0)

Figur 53. Uppgift 15 från NpMa2b vt 2015.

20. Visa att vinkeln x är $20°$.

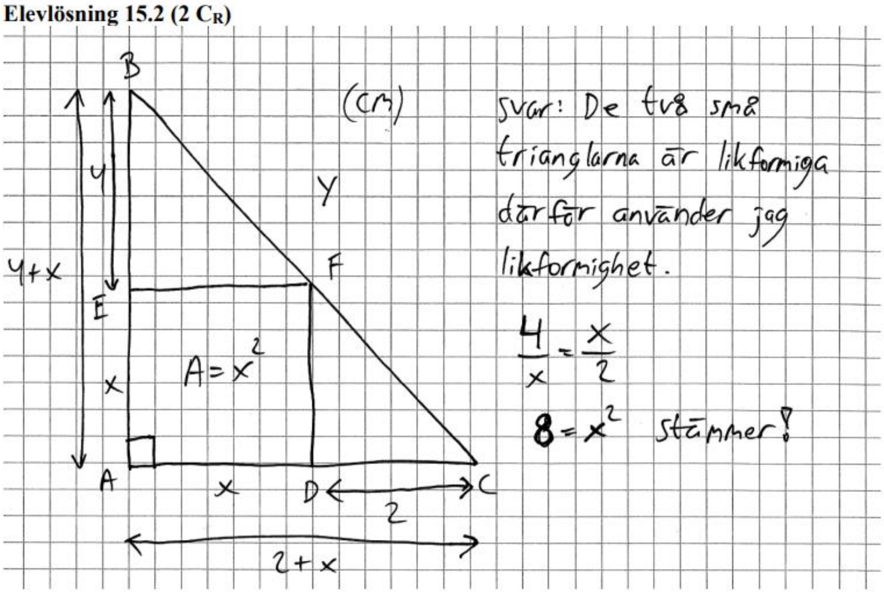


(1/0/0)

Figur 54. Uppgift 20 från NpMa2b ht 2014.

Båda dessa frågor testar resonemangspoäng, varav den första är C-poäng och den andra är E-poäng. Följande lösningar är tagna ur bedömningsmallen för respektive prov:

Elevlösning 15.2 (2 C_R)



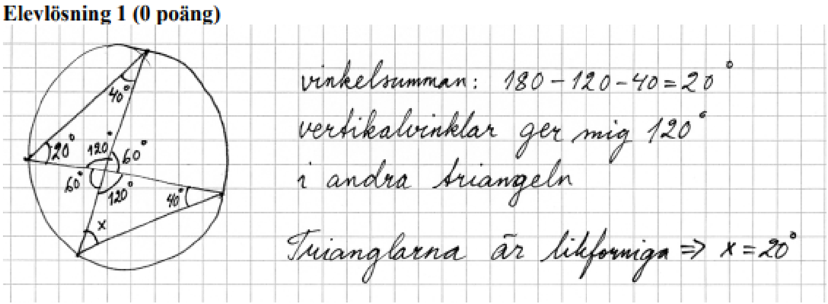
Kommentar: Elevlösningen visar en korrekt uppställd ekvation utifrån likformighet. Variabeln x definieras genom figuren och figuren visar även att kvadratens area är $A = x^2$. Slutfrasen "$8 = x^2$ stämmer" anses tillsammans med figuren motsvara kraven för ett välgrundat resonemang. Elevlösningen ges båda resonemangspoängen på C-nivå.

Figur 55. Bedömningsmallen till Uppgift 15 från NpMa2b vt 2015.

Samt bedömningsmall för den senare:

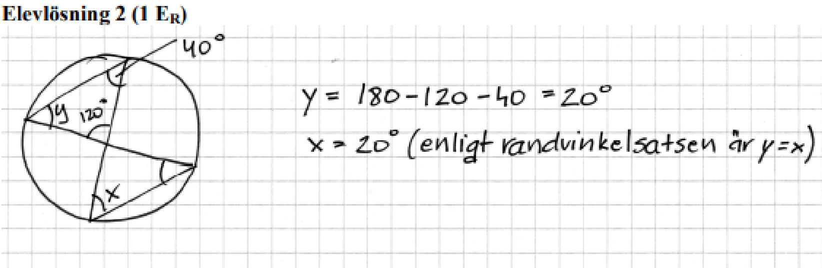
Uppgift 20

Elevlösning 1 (0 poäng)



Kommentar: Elevlösningen visar ett ej godtagbart resonemang eftersom det inte motiveras att vinkeln i den nedre triangeln är $40°$. I och med detta motiveras inte heller varför trianglarna är likformiga. Lösningen ges 0 poäng.

Elevlösning 2 (1 E_R)



Kommentar: Elevlösningen visar ett godtagbart enkelt resonemang som bygger på randvinkelsatsen. Lösningen ges en resonemangspoäng på E-nivå.

Figur 56. Bedömningsmall till uppgift 20 från NpMa2b ht 2014.

Observera att för att få C-poängen i det första fallet så behöver eleverna INTE motivera varför trianglarna är likformiga. Det verkar räcka med att statuera det, att ”se det”. I det senare fallet accepteras inte bristen på motivering, utan här ses motiveringen som ”icke-trivial”. Jag anser att det finns två problem att uppmärksamma här utifrån studiens resultat. När ska motiveringar vara med och hur ska eleven veta detta? I det första fallet kan den utelämnas, av något skäl[80]. Det verkar räcka med att ”se” att trianglarna är likformiga. Men i sådana fall, skulle inte en elev helt enkelt kunna påstå att hen ”ser” att trianglarna är likformiga i det andra fallet? Plötsligt räcker det inte med en visuell observation. Varför? För att läraren och provkonstruktören säger och känner så. Samtidigt som de accepterar visuella motiveringar själva, så förkastar de samma motivering för andra fall, en implicit och dold modell för bedömning där eleven inte kan vara helt säker på när en motivering ska vara med eller ej.

Kopplat till studiens resultat så finns det även ett validitetsproblem. Den första eleven i fråga 20 har ändå, på något vis, kommit till slutsatsen att trianglarna är *likformiga*[81]. **Hur**? Det kan vara så att hen bara ”sett det”, men det kan även vara fallet att eleven helt enkelt inte skrivit ner sin motivering. Motiveringen kan vara av den typ som utelämnas, dvs. en skriftlig motivering som saknar effektivt symbolspråk för eleven. Med andra ord: eleven kan mycket väl ha fört en argumentation på formen DWC. Den skrevs visserligen ner på formen DC. Det är även udda, enligt mig, att en E-uppgift kräver en strukturellt mer utvecklad argumentation än vad en C-uppgift gör. Det leder en in på följande problem: vad för tolkning har Nationella proven och dess konstruktörer av frågan ”visa att…”? Detta ligger emellertid vida utanför denna studies område.

Slutligen, till den sista punkten, så existerar det ett avslutande problem med att enbart skriva ”visa” uppgifter på formen DC, medan det verbala ges på formen DWC. Detta utgår ifrån fallet där lärare vill se ett skriftligt DC-argument, dvs. att elevens lösning ska vara DC och skippa motiveringen. Under denna förutsättning så skippas motiveringar av denna typ som egentligen förklarar hur eleven kom fram till sitt svar. En lärare som använder denna bedömningsmall kan argumentera, baserat på denna begränsade studie, att elevens lösning går att följa ändå. En förstår vad eleven har gjort. Detta synsätt framkom exempelvis från Lisa Lisa:

> Intervjuare: OK… känner du att motiveringar inte spelar någon roll?
>
> Lisa Lisa: De spelar väl någon roll, men inte fulla motiveringar. Jag tycker min lärare bara bryr sig om att vi får fram rätt svar. Hon ser vad det är vi håller på med.

Detta speglas även hos lärare fast på ett paradoxalt sätt: lärare presenterar lösningar som saknar vissa skriftliga motiveringar. Samtidigt värderar de överlag fullständiga elevlösningar högre. Det finns en risk att lärare kan **fylla in** denna typ av motiveringar, om de saknas hos eleven. Jag önskar ställa följande fråga: är vi helt säkra på hur eleven resonerade? Se ännu en gång på uppgift 15 från NP2b vt 2015. Hur kom eleven fram till att trianglarna är likformiga? Såg hen bara att de var det? Eller använde eleven, i sina tankar, en transformativ motivering? Om en förskjuter den övre triangeln så att den överlappar med den andras bas så kan en skala om trianglarna så att de är identiska. Var det möjligen en deduktion? Vi har en kvadrat så detta ger oss två räta vinklar i de två trianglarna. Observera sedan att de små trianglarna är likformiga med den stora triangeln, för de har alla en rät vinkel och minst en till vinkel gemensamt? Detta i sin tur ger att trianglarna är likformiga med varandra? För allt vi vet kan

[80] Troligen för att lärare anser att det är ”visuellt uppenbart”, likt de resultat vi såg i studien.
[81] Eller möjligen har de helt enkelt ”gissat”. Men detta kan också ha en motivering i bakgrunden.

eleven till och med ha löst uppgiften ”baklänges”. Eleven startar med slutsatsen $x^2=10$, löser sedan ut ekvationen till: $\frac{x}{2}=\frac{5}{x}$ och drar slutsatsen att det handlar om likformighet.[82]

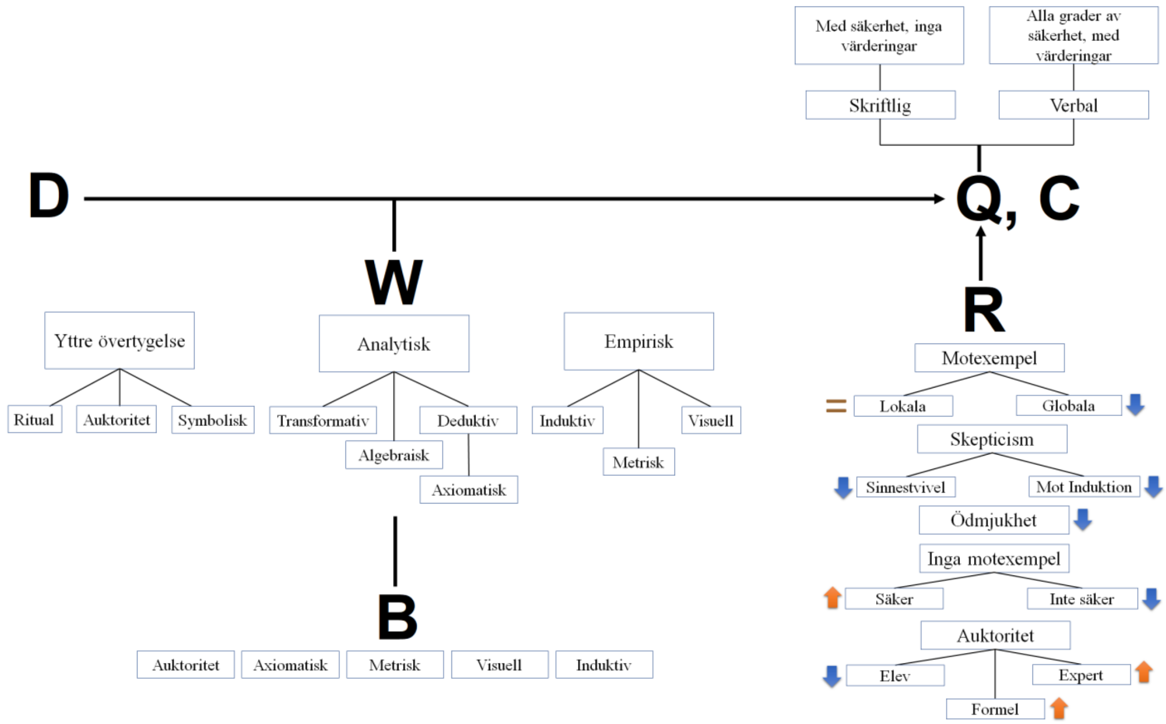
Min poäng är att om elever inte skriver ner sina motiveringar i kombination med att lärare också utelämnar detta från sina egna presenterade lösningar, så kan detta ge upphov till en miljö där **elever förväntar sig att läraren ”ser” vad de gjort**. Men vi har egentligen inte den blekaste aning om hur eleven tänkt alls. Eleven kan ha använt vilken motivering som helst av de ovanstående. Läraren kan inte bedöma vilken av dem som användes med säkerhet. Istället blir risken att läraren ”fyller i” elevens lösning, med sina egna tankar och resonemang och därmed föreskriver motiveringar och tankar som eleven aldrig hade. Kort och gott: ”ja, det var så jag presenterade det i klassen så troligen tänkte eleven på samma sätt”. Detta antagande, att läraren är den enda källan till elevernas rationalitet är en riskabel förmodan. Det förutsätts att det existerar en isomorfism eller till och med en identisk kartläggning mellan det som lärs ut i klassen och det som eleverna presenterar, trots att, så vitt en yttre observatör kan se, så går det inte säga vad för motivering eleverna använde för den finns ***inte*** med. Vad är det vi bedömer egentligen i sådana fall? Elevernas kunskaper och resonemangsförmåga eller deras kapacitet att skriva på ett likartat sätt som läraren gör på tavlan?

Jag anser att det inte är säkert att elevernas motiveringar matchar det som presenterats under lektionerna. Resultatet från denna studie pekar på att elever kan acceptera en stor mängd motiveringar som inte nödvändigtvis är formella deduktioner.[83] Jag argumenterar helt enkelt för att elever bör få mer möjlighet till att inkludera DWC argument, och att faktiskt ha fler möjligheter att uttrycka dem. Om den skriftliga formen inte är optimal för alla elever så bör även andra bedömningsformer användas. Detta kan även användas formativt, för att göra elever medvetna om vad som är viktigt att redovisa i sina lösningar. Detta kan göras i syftet att förbereda elever inför ”ordentliga” bevis på universitet. Emellertid ger det även eleverna en mer sanningsenlig bild av vad begreppet ”bevis” ens innebär.

6.2 Elever och deras bevisscheman samt motiveringar (II)

Harel och Sowders (1998, 2007) bevisscheman kategoriserade elevers resonemang utifrån en övergripande plan som tillskrevs hela argumentet[84]. Däremot, verkar studiens resultat peka på att elever i vissa fall blandar dessa motiveringar. I Toulmins modell faller bevisschemat in på vad för karaktär motiveringen (W) samt dess backing (B) har, beroende på typen av bevisschema. Ingen av eleverna producerade en rituell motivering men detta kan bero på att studien fokuserade helt och hållet på bevis samt dess begränsade underlag. Visserligen är stora delar av studiens resultat, främst inom vilka motiveringar elever använder, en reproduktion av Harel & Sowders resultat. Det är visserligen möjligt att tillägga metriska motiveringar som särskiljs från visuella utifrån graden av tillit som ges till dem.

[82] Jämför ett rituellt schema hos Harel & Sowder (1998). Se s.5-6.
[83] Se kapitel 5.1.2 eller sammanfattningen på sidan 50. Se även bilden på nästa sida.
[84] Se s.5-6.



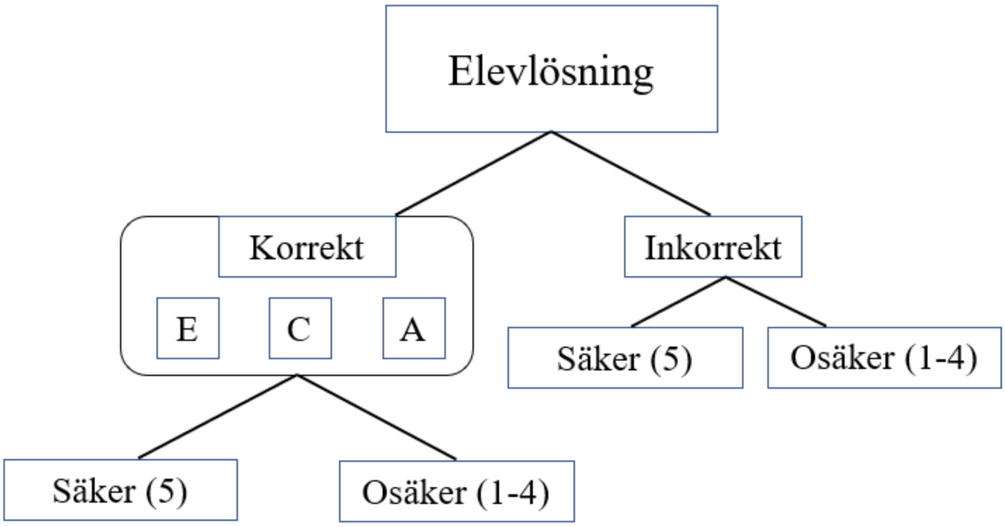
Figur 57. Sammanfattar studiens resultat om elevers bevisscheman utifrån Toulmins modell.

Elevers tolkningar av vad ett bevis är skiljer sig åt. Detta är både i respekt till deras definitioner och vad för typer av motiveringar som används i praktiken. Genom att vara medveten om dessa motiveringar, samt var en given klass befinner sig, så bör en lärare kunna bygga upp sina lektioner bättre. Exempelvis är det relevant att tänka på om en elev accepterar empiriska bevis eller ej. För sådana elever kan induktiva, visuella och metriska motiveringar vara precis lika övertygande, om inte mer övertygande, än deduktiva bevis. Detta implicerar i sin tur att en lärare behöver vara försiktig med sådana perspektiv i en klass. Om en större del av elever inte särskiljer deduktiva och empiriska bevis så är det möjligt att elever har svårt att förstå vitsen med deduktiva bevis. De kan till och med finna dem onödigt krångliga. Med stöd av resultat från Healy & Hoyles 2000 (s.412) så verkat det befogat att tro att ”självklarheten” i påståendet även spelar roll. Studiens resultat har däremot get flera exempel på hur elever kan antingen öka eller minska sin tilltro till argument som de själva presenterar och utvärderar.

Deltagarnas skriftliga presentation innehöll enbart säkra begrepp medan deras verbala argument visade på en större variation av säkerhet. Med andra ord verkar inte skriftliga argument vara fullt kapabla till att fånga vissa aspekter av **elevernas osäkerhet**. Det skriftliga kan enbart bedöma det som beskrivs men inte vilka delar (om några alls) som upplevs osäkra. Visserligen gav studien en indikation på att den skriftliga lösningen inte nödvändigtvis är en bra indikation på hur säker en elev känner sig på en lösning. Exempelvis kan en elev känna sig helt och hållet säkra på en lösning, trots att den är felaktig[85]. Det finns alltså situationer där elever även upplever sig vara helt säkra på ett argument trots att lösningen inte riktigt stämmer. Likaväl kan elever presentera exemplariska lösningar[86] men ändå känna en viss grad av misstro. Det är alltså möjligt att skriftliga lösningar inte nödvändigtvis reflekterar hur säker en elev känner sig på ett begrepp. En pedagogisk insikt som kan dras från detta är härledes att lärare bör använda uttryckliga metoder för att utvinna hur säkra elever känner sig inom ett område, inte enbart korrekta och inkorrekta skriftliga lösningar. Den senare modellen missar

[85] Se sidorna 48-50.
[86] Se Lisa Lisas lösning på sida 48.

de fall där elever känner sig mycket osäkra med korrekta lösningar, samt fall där elever känner sig säkra med inkorrekta lösningar. Med grund i de slutsatser som drogs Hattie & Timperleys metastudie (2007) samt Hattie (2014, s.319-321) så tillåter detta tankesätt ytterligare en dimension av analys för läraren som kan användas för att förstå hur eleven *ser på sitt eget lärande*. På detta vis skulle en lärare kunna fånga upp de elever som kräver lite mer stöd. Det kan även öppna upp för nya tankegångar i klassrummet; såsom hur en ska definiera olika objekt som rektanglar. Det kvarstår att bestämma i vilken grad denna hypotetiska modell kan vara användbar i matematikundervisning.



Figur 58. En hypotetisk modell som beskriver hur en elevlösning först kan bedömas utifrån dess validitet (som inte var syftet i denna studie) men även utifrån hur säker en elev känner sig på sin lösning.

En form som kan fånga upp denna dimension bör vara muntliga bedömningsformer. Visserligen är detta inte nödvändigtvis relevant rent summativt sett. Elever kan ändå uppvisa en stor oro för muntliga prov. Vad det däremot tillåter en fånga mer nyanser i elevernas tankebanor. Alltså, hur säkra känner sig eleverna faktiskt med materialet? Om språket i skriftliga lösningar uttryckts med mestadels säkra termer så är metoden begränsad som en formativ metod. Därmed så bör det vara relevant med mer systematiserade muntliga ”prov” eller diagnoser som används formativt.

När det kommer till elevernas egna definitioner och synsätt på bevis så verkar dessa vara snarlika de som redan upptäckts i litteraturen[87]. Med andra ord har dessa utländska resultat nu reproducerats i en svensk kontext. Dessvärre skulle det inte finnas så mycket att tillägga till det material som redan existerar.

6.3 Studiens begränsningar

Den största begräsningen är att studien är avgränsad i antalet deltagare, både i elev och lärardelen. Med fyra respektive 48 deltagare kan en inte dra några generella slutsatser. Däremot så exemplifierar studien att det existerar fall såsom det har beskrivits i resultatdelen. Exempelvis kan elevers verbala argument skilja sig från det skriftliga strukturellt sett. Härledes kan studien fortfarande ge stöd för dess ursprungliga syfte: att skapa testbara hypoteser som kan testas i en större studie.

[87] Se sida 6-8.

Metodologin i elevdelen för denna studie delade in intervjun i olika faser[88]. Den första fasen skiljer sig från fas 2 i en viktig bemärkelse: eleverna behöver enbart ge ett svar och sedan motivera sitt svar. Givet att eleverna sedan i fas 2 förväntas skriva ner sina svar så finns det en risk att elever implicit valt att utesluta delar av sitt argument. Elever kan ha antagit i varje skede att de ändå skulle motivera sina argument och härledes behöver de inte skriva ner allt. För att bemöta detta ombads elever skriva såsom de gör på prov. Dessvärre kvarstår problemet att elever kan ha utökat sitt ursprungliga resonemang ***medan*** de utförde sin verbala motivering. Med van Hieles språk (1986) så kan elever först ha löst problemet på en lägre nivå för att sedan höja den när väl den verbala motiveringen efterfrågades. Visserligen skulle detta vara av intresse i vilket fall för om så vore fallet så skulle elever av något skäl välja att sänka sin nivå för skriftliga lösningar gentemot den verbala. Dessvärre kvarstår det en problematik för den ekologiska validiteten (Bryman 2018) i metodologin. Även om en ber att elever ska skriva som de vore ett prov så är det inte nödvändigtvis fallet att detta skett.

Frågorna i sig kan även vara felaktigt ställda. Alltså, det kan fortfarande vara fallet att en elev svarat annorlunda på en fråga som ber dem ”motivera” sitt svar. Dvs. elever tolkar frågan ”visa” som ”visa för läraren”. Denna tolkning upptäcktes inte i denna studie i fråga 9 men eftersom fråga 9 dök i kombination med andra ”visa” frågor så riskerar det handla om en generalisering hos deltagarna. Det krävs en större studie som försöker fånga om elever tolkar ”visa” frågor annorlunda än ”motivera”. En jämförelse bör göras mellan två liknande och representativa grupper. Det bör även göras ett kontrolltest inom grupperna för att upptäcka om en elev är konsekvent i sin tolkning.

En kan även fråga sig om en annan metod hade varit mer lämplig för att fånga lärarnas värderingar vid bedömning: skulle exempelvis inte en fenomenografi varit bättre? Borde det inte vara bättre att studera hur lärare bedömer elevlösningar i verkligheten snarare än med en enkät? Det är ändå möjligt att lärare bedömer elevlösningar på ett sätt när de presenteras med en enkät men på ett annat sätt i ”verkligheten”. Det finns ett övertag med den valda designen; vi har kontroll över vilken typ av uppgifter som presenterats, vilken innebär att vi har mer kontroll över variablerna i fråga. Vi kan därmed skapa en studie som har en hög grad av replikerbarhet. En fenomenografi riskerar att fokusera en aning för mycket på den specifika anekdoten, dvs. de lärare som deltar i studien. Med en enkät kunde en nå ut till en större mängd lärare och urskilja en större mängd värderingar som är gemensam hos flera lärare. Förvisso är resultatet troligen snävt ändå, givet att det finns ett så stort bortfall. Urvalet är inte heller stort nog för att dra generella slutsatser i vilket fall, men en utökning av studien är möjlig.

Givet att urvalet av uppgifter gjordes utifrån en analys av elevers misstolkningar och problem samt van Hieles teori, så verkar det som att vissa ”teman” redan existerar fördefinierade. Framställningen i bakgrunden av elevers olika bevisscheman har också tydliggjort vissa potentiella kandidater för teman i datamängden. Därmed kan man inte nödvändigtvis påstå att datan hanteras utan förutsättningar och antaganden. Koderna är, såsom det framställdes i resultatavsnittet, snarlika de som Harel och Sowder (1998) beskrev[89]. Visserligen kopplades dessa till Toulmins modell vilket gav ett annorlunda perspektiv på deras syfte och praktiska tillämpning. Det är intressant att ett så litet underlag, visserligen med ca. 2h intervjumaterial per respondent, gav liknande resultat.

[88] Se metod, s.22.

[89] Se s.4-6.

Toulmins modell är för övrigt en modell som har vissa svårigheter med att på ett effektivt sätt redovisa större argumentationer. Det tar upp en hel del plats och det kan finnas svårigheter med att skapa en enkel och överskådlig modell för denna typ av argumentationer. På samma område så existerar det slutligen ett problem med att kodningen av all data, både via temaanalysen och med Toulmins modell utfördes av en enda bedömare. Simosi (2003, s.197-199) rekommenderar och använder i sin egen studie (minst) två bedömare. Givet att studien enbart utförts av en enda person så är det möjligt att en annan bedömare hade skapat markant annorlunda modeller för samma argument. Visserligen givet att området är matematik som innehåller en grad av ordning i sig, så bör detta motverka en alltför låg interbedömarreliabilitet.

6.4 Ytterligare pedagogiska insikter

Studiens resultat, om så begränsat av sitt lilla urval, ger oss emellertid en indikation på att det kan finnas en länk mellan de argument som presenteras skriftligt på tavlan och elevernas skriftliga argument. Främst i vilka motiveringar som utelämnas, dvs. de som konsekvent tas verbalt pga. avsaknad av ett effektivt symbolspråk eller storlek i ordomfång. Troligen behöver lärare vidare reflektera och observera sådana aspekter i sina presentationer, men det krävs mer studium i hur stark denna länk är, och i vilken grad. Oberoende av detta så väcker studien tankar om vad för motiveringar ska inkluderas i skriftliga presentationer samt när en kan utelämna vissa steg. Elever behöver också troligen ha mer stöd med att kunna bedöma kvalité i sina lösningar samt hjälp med att kunna bedöma vilka motiveringar som ska inkluderas eller inte. Elever bör också ges möjlighet att kunna motivera sina argument muntligt, för det kan existera en skillnad mellan deras skriftliga och verbala argumentationer som påverkar resultatet. Detta kan även användas formativt Läraren behöver även vara medveten om att ens presentationer på tavlan kan ha en oväntad korrelation med hur eleverna presenterar sina skriftliga argument. Det krävs förvisso mer forskning för att bekräfta detta. Om en ska utvärdera elevers kommunikation och resonemang, så bör det vara möjligt att göra detta på samtliga nivåer. Detta kan även ge läraren stöd med formativ bedömning; elevernas skriftliga argument saknade uttryck för osäkerhet medan det dök upp begrepp i verbala argument. Därmed så är det även lämpligt att låta elever ge mer muntliga presentationer för att bättre fånga vad elever är osäkra på.

Även med studiens begränsade underlag uppvisades en variation i hur elever resonerar och vilka motiveringar som de finner övertygande. I ett helt klassrum är det sannolikt att elever utgår från en mängd olika bevisscheman och övertygas av olika motiveringar, beroende på kontexten. En lärare bör vara medveten om detta och försöka fånga vad det är för motiveringar som är övertygande för en elev och klass för att sedan kunna arbeta därifrån, på en lämplig nivå för eleverna.

Lärare uttrycker även en stor variation i vilka värderingar de använder när de rangordnar elevernas lösningar. Pedagogiskt sett så väcker det frågor kring hur ens egna värderingar påverkar de bedömningar en gör av en elev, både formativt och summativt. Lärare bör reflektera kring vilka lösningar de anser bäst samt vilka värderingar som kommer fram när de gör det. Främst bör detta relateras till skolans styrdokument, kunskapskraven och de Nationella proven.

6.5 Förslag till vidare forskning

Det huvudsakliga syftet med denna studie var att generera testbara hypoteser och frågeställningar som kan utforskas med större underlag och mer säkra metoder. Givet de upptäckter som har gjorts så existerar det flera frågeställningar som nu kräver ett djupare studium, i syftet att besvara hur elevers argumentationer påverkas av undervisningen. Även lärarnas värderingar har väckt vissa frågeställningar.

- En hypotes som ställdes upp redan under denna studies gång var att resultatet hos eleverna kunde förklaras av hur klassrumsmiljön såg ut. Använder lärare och läroböcker främst DC eller DWC argument skriftligt? Även om de tidigare punkterna bekräftar vilken typ av argumentation som är mest förekommande så avslöjar det inte huruvida det faktiskt *påverkar* elevernas skriftliga argumentation eller ej. Härledes, bör det vara lämpligt att skapa ett experiment där olika men jämförbara klasser deltar i syftet att fånga detta. Med stöd av ett test försäkrar vi oss att klasserna är jämförbara för att sedan utföra en intervention på vissa klasser medan andra enbart observeras. Tre grupper bör ställas upp: en kontrollgrupp, en första interventionsgrupp där lärare explicit presenterar enbart DC argument på tavlan och slutligen en sista grupp där enbart DWC argument presenteras[90]. Eleverna jämförs sedan med ett liknande test som användes från början[91]. Med dessa medel bör det vara möjligt, givet ett tillräckligt stort urval, att bestämma om denna struktur påverkar elevernas skriftliga argumentationsstruktur eller ej. Det är även möjligt att detta är känsligt för matematikområdet i fråga, dvs. inom vissa områden kan elevernas påverkas mer av sådan undervisning än andra.

- Hur stor andel av elever är av typen DC när de skriver skriftligt men DWC om de presenterar verbalt? Studiens främsta resultat är att samtliga elever konsekvent motiverar varje steg de tar[92] i sina verbala framställningar men utelämnar vissa motiveringar i sina skriftliga presentationer. Dessa motiveringar, skriftliga motiveringar utan ett effektivt symbolspråk, nämns i verbala presentationer, men inte nödvändigtvis i skriftliga. Med en större studie (med färre frågor) bör en kunna först samla in både skriftliga och verbala svar från en större urval av elever. Det bör sedan vara möjligt att jämföra hur stor andel av de elever som skriver DC argument som verbalt följer strukturen DWC. Likt denna studie bör inte korrektheten eller validiteten bedömas utan enbart strukturen vara i fokus. Visserligen kan en även analysera denna aspekt men troligen är det av större intresse att jämföra elevers bakgrunder (såsom betyg) gentemot vilka strukturella scheman de presenterar skriftligt. Är det möjligt att elever som får högre betyg även generellt sett presenterar DWC argument skriftligt i högre grad?

- Vilken struktur följer lärares matematiska bevis och argumentationer i klassrumsmiljön? Resultatet från denna studie indikerar att lärare och elever utelämnar en viss typ av skriftliga motiveringar. Frågan är hur vidspritt en kan säga att detta är? En större studie med ett representativt urval bör kunna fånga i vilken grad lärare presenterar skriftliga DWC-argument på tavlan gentemot DC. Detta kan även nyanserar utifrån vilket område inom matematiken som behandlas och kvantifieras för en jämförelse mellan dessa områden. Utöver det så bör det vara av intresse att studera detta över flera årskurser, även hela vägen till universitetet, för att fånga om vissa

[90] En bör även kunna skapa fler grupper med en större gradient. Här är det dock enbart av intresse att fånga OM det påverkar eller inte.

[91] Möjligen presenterat som del av ett prov, dock kan detta ha konsekvenser ifall elever tolkar situationen annorlunda än de gjorde på första testet.

[92] Inte nödvändigtvis med valida steg, men de HAR använt någon motivering.

årskurser har mer eller mindre DWC argument i skriftliga argument.

- Vilken struktur följer den matematiska argumentationen i vanliga läroböcker? Det är möjligt att läroböcker också spelar en signifikant roll i att förklara hur elevers matematiska argumentation ser ut, rent strukturellt sett. Genom att studera läroböckerna bör det vara möjligt att på ett stort plan kategorisera vilka områden som följer en DWC struktur samt i vilken grad. Detta kan sedan jämföras med en studie på klassrumsmiljön i stort för att se om de följer ett gemensamt mönster. Vissa lärare utgår ju, mer eller mindre, från upplägget i boken vilket i sin tur kan spegla av sig i deras tavelpresentationer.

- Ett av studiens delresultat var att formelbladets innehåll kan behandlas axiomatiskt av elever. Alltså, formlerna betvivlas inte, utan ses som en utgångspunkt för all matematisk argumentation. Frågan är härledes vilka axiom elever i gymnasieskolan utgår från och i vilken grad? Eftersom elever inte nödvändigtvis problematiserar sina antaganden och tankemodeller med axiom i åtanke så kan det vara svårt att fånga detta direkt men troligen bör det vara möjligt att med en enkät fånga elevers tillit till olika påståenden.

- Tidigare lades ett pedagogiskt förslag fram där en lärare bör tänka på att inkludera sätt att fånga in hur **säker** olika elever känner sig på sina svar. En framtida studie skulle kunna vidare forska kring hur elevers grad av tilltro hänger ihop med svarens validitet och korrekthet. Detta kan även utökas till ett klassrum: är det fallet att ett klassrum som inkluderar sådana värderingar bättre fångar upp elevernas synsätt och höjer prestationen?

- En större studie bör utföras för att finna i vilken grad elever uttrycker vissa modala termer i sina skriftliga lösningar. Exempelvis skulle en kunna analysera elevlösningar till de Nationella proven genom att kontakta Umeå Universitet. Med detta underlag bör en kunna skapa en god grund för att elever allmänt inte uttrycker sig med osäkra termer i sitt skriftliga språk.

- Lärarnas värderingar verkar påverka hur de rangordnar elevers lösningar. Frågan är i vilken grad detta stämmer och om det är relevant för elevernas resultat på olika prov? Ett framtida forskningsområde bör härledes försöka fånga hur lärares värderingar påverkar deras bedömning av elevlösningar med ett mycket större urval så att kvantitativa metoder kan tillämpas. Med stöd av de begrepp som ställdes upp i denna studie samt från studier av Knuth (1999, 2002a, 2002b) bör det vara möjligt att skapa en enkät som först fångar lärarens värderingar. Sedan kan en presentera elevlösningar och studera hur lärare bedömer dessa. Det bör vara ett större antal uppgifter, likt ett prov. Lämpligast skulle nog vara att tilldela ett prov till lärare som de använder i sin undervisning och sedan jämföra denna bedömning mellan olika typer av lärare. Om lärare önskar en bedömningsmall så bör studien istället kunna fokusera på **hur** lärare skapar bedömningsmallar till detta prov eller hur dessa tolkas utifrån deras värderingar. Detta kan även nyanseras med skolor som arbetar kollegialt med rättningen av matematikprov gentemot de som inte gör det. Det är möjligt att lärare som bedömer prov kollegialt delvist motverkar effekten av dessa värderingar, men de kan även framhäva vissa värderingar högre.

- Det kvarstår en signifikant frågeställning som inte behandlades i någon större grad av denna studie: **när är ett argument bra nog för att det ska anses ha ”visat” någonting?** Främst är detta inom gymnasieskolan men kan även utökas till universitetet. Kort och gott: när är ett bevis ett bevis? Var dras gränsen? Vad måste vara med och vad kan skippas (om någonting)? Vad anser lärare är tillräckligt för att frågan ska vara besvarad? En framtida studie bör kunna fånga i vilken grad lärare utelämnar vissa motiveringar, samt jämföra detta med en indikator på när lärare anser att en given ”visa” uppgift är färdig. En möjlig design kan vara att be lärare presentera en tänkt elevlösning till en ”visa uppgift” som de anser är tillräcklig. Detta kan även utökas, om möjligt, till att inkludera en lösning som inte är tillräcklig samt en som är utmärkande. Utifrån detta bör en kunna skapa teman som beskriver vad lärare anser nödvändigt för att ”bevisa” ett påstående. Detta kan, precis som innan, nyanseras genom att behandla olika kurser.

Det är relevant att ha i tanken att vad som anses vara ett bevis är sociokulturellt bundet, dvs. ett bevis är beroende både av den historiska, kulturella och sociala kontexten en arbetar med (Fawcett 1938; Bell 1976; Hanna 1989, 1990, 2000; de Villiers 1990; Hersh 1993; Coe & Ruthven 1994; Hanna & Jahnke, 1996; Weber 2002, 2003; Reid 2005; Varghese 2009; Köğce, Aydın, Yıldız 2010).[93]. Likaväl existerar det troligen en skillnad mellan vad som är ett formellt bevis och ett bevis som en matematiker skulle konstruera. Alla ”mänskliga” bevis är, så vitt som jag ser det, enbart ”sketcher” av bevis. De förutsätter en viss kärna, vissa axiom och satser samt logiska funktioner, för att utvärdera sin sanningshalt. Inte för att tala om att rent formella bevis av vissa påståenden skulle kunna kräva hundratals om inte tusentals sidor! Någonstans måste en dra gränsen och det kvarstår att bestämma var denna går i praktiken i en svensk kontext.

6.6 Studiens signifikans

Studien, med ett begränsat antal deltagare, lägger ändå grunden för att ställa upp flera testbara hypoteser kring elevers argumentation. Främst hur strukturen i elevers matematiska argumentation kan skilja sig mellan verbala och skriftliga framställningar i en viktig aspekt: *elever kan utelämna skriftliga motiveringar som saknar ett effektivt symbolspråk*. Elever kan alltså föra fullt utvecklade resonemang verbalt utan att skippa motiveringar mellan två steg medan den skriftliga framställningen saknar vissa vitala steg. Hypotetiskt sett kan dessa förklaras av att klassrummets diskurs är upplagt på sådant vis, dvs. lärare och elever interagerar på detta vis. Lärarenkäten ger stöd för att så är fallet; om en motivering utelämnas skriftligt och enbart tas verbalt är det oftast argument som skulle ta mycket text att skriva. Förslag på vidare forskning ges i diskussionsdelen. Elever använder en stor mängd olika motiveringar, där inte alla är deduktiva i naturen. Studien ger belägg för att elever kan se empiriska bevis som likställda med deduktiva samt att elever inte uttrycker mycket osäkerhet i sina skriftliga argument men däremot i sina verbala. Detta bör kunna användas som en analytisk metod för formativ bedömning.

[93] Se sidorna 6-8.

Referenslista

Atebe, H. U (2008). Students' van Hiele levels of geometric thought and conception in plane geometry: A collective case study of Nigeria and South Africa. (Unpublished doctoral dissertation). Rhodes University, Grahamstown.

Balacheff, N. (1987). Processus de preuves et situations de validation. I *Educational Studies in Mathematics*, 18(2), 147-176. Processus de preuve et situations de validation | SpringerLink

Balacheff, N. (1988). Aspects of Proof in Pupils' Practice of School Mathematics. In: D. Pimm(ed.), *Mathematics, Teachers and Children*. London, Hodder & Stoughton, s. 216-238.

Balacheff, N. (1991). Construction et anlyse d'une situation didactique. Le cas de 'la somme des angles d'un triangle'. I *Journal für Mathematik-Didaktik* 12(2/3): s.199- 264. Construction et analyse d'une situation didactique Le cas de «la somme des angles d'un triangle» | SpringerLink

Ball, D., & Wilson, S. (1990, April). Knowing the subject and learning to teach it; examining assumptions about becoming a mathematics teacher. Paper presented at the meeting of American Research Association, Boston, MA. ERIC - ED323207 - Knowing the Subject and Learning To Teach It: Examining Assumptions about Becoming a Mathematics Teacher. Research Report 90-7., 1990-Jun

Ball, D. & Bass, H. (2000). Interweaving content and pedagogy in teaching and learning to teach: Knowing and using mathematics. In J. Boaler (Ed.), *Multiple perspectives on the teaching and learning of mathematics*, s. 83–104. Westport, CT: Ablex. Interweaving content and pedagogy in teaching and learning to teach: Knowing and using mathematics | Request PDF (researchgate.net)

Ball, D., Hoyles, C., Jahnke, H. N., & Movshovitz-Hadar, N. (2002). The teaching of proof. I L. I. Tatsien (Ed.), *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Vol. III, s. 907-920. Beijing: Higher Education (PDF) The Teaching of Proof (researchgate.net)

Ball, D., & Bass, H. (2003). Making mathematics reasonable in school. I J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to Principles and Standards for School Mathematics*, s. 27-44. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics. (PDF) Making mathematics reasonable in school (researchgate.net)

Ball, D. (2003). *What Mathematical Knowledge is Needed for Teaching Mathematics?* Ball2003Math Summit.pdf (uga.edu)

Ball, D., Thames, M., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special?. Journal of Teacher Education, 59, 389-407.

Ball, W. J**.** (1994). Using Virgil to Analyze Public Policy Arguments: A System Based on Toulmin's Informal Logic. *I Social Science Computer Review* 12 (1), s.26-37. Using Virgil to Analyze Public Policy Arguments: A System Based on Toulmin's Informal Logic - William J. Ball, 1994 (sagepub.com)

Battista, M. & Clements, D. (1995). Geometry and proof. I *Mathematics Teacher. 88*. s. 48-54. (PDF) Geometry and proof (researchgate.net)

.
Bell, A. W. (1976). A Study of Pupils’ Proof-Explanations in Mathematical Situations. *Educational Studies in Mathematics*, *7*(1/2), 23–40. http://www.jstor.org/stable/3481809

Braun, V., & Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. I *Qualitative Research in Psychology*, 3(2), 77 – 101. (PDF) Using thematic analysis in psychology (researchgate.net)

Braun, V., Clarke, V. (2012). Thematic analysis. I H. Cooper, *APA Handbook of research methods in Psychology*: Vol. 2. Research designs (pp. 57 – 71). American Psychological Associate. (PDF) Thematic analysis. (researchgate.net)

Brockriede, W. & Ehninger, D. (1960). Toulmin on argument: An interpretation and application. I *Quarterly Journal of Speech*, 46:1, s. 44-53. Citations: Toulmin on argument: An interpretation and application (tandfonline.com)

Bromley, D.B. (1986). *The Case-Study Method in Psychology and Related Disciplines.* John Wiley & Sons.

Brousseau, G. (1997) *Theory of Didactical Situations in Mathematics* 1970-1990. Dordrecht: Kluwer.

Bryman, A. (2018). Samhällsvetenskapliga metoder. (3. uppl.). Stockholm: Liber.

Burger, W. F., & Shaughnessy, J. M. (1986). Characterizing the van Hiele Levels of Development in Geometry. *Journal for Research in Mathematics Education*, *17*(1), 31–48. https://doi.org/10.2307/749317

Carpenter, T. P., Franke, M. L., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic & algebra in elementary school*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Casanova, J., Cantoria, C. & Lapinid, M.R. (2021). STUDENTS’ GEOMETRIC THINKING ON TRIANGLES: MUCH IMPROVEMENT IS NEEDED. I *Infinity Journal*. s. 217-234. ResearchGate

Chazan, D. (1988). Proof and measurement: An unexpected misconception. I A. Borbas (ed.), Proceedings of the Twelfth Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Veszprem, Hungary, s. 207-214.

Chazan, D. (1989). Ways of Knowing: High School Students' Conceptions of Mathematical Proof, Unpublished doctoral dissertation, Harvard Graduate School of Education, Cambridge, MA.

Chazan, D. (1993). High school geometry students' justification for their views of empirical evidence and mathematical proof. I *Educational Studies in Mathematics*, 24, 359-387. (PDF) High school geometry students' justification for their views of empirical evidence and mathematical proof (researchgate.net)

Chen, C., & Herbst, P. (2013). The interplay among gestures, discourse, and diagrams in students’ geometrical reasoning. I *Educational Studies in Mathematics*, 83(2), s. 285-307. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9454-2

Chigonga, B. (2016). Learners' misconceptions in deductive geometry proofs and remedial strategies. Presenterad på konferensen AMESA. (PDF) Learners' misconceptions in deductive geometry proofs and remedial strategies (researchgate.net)

Cirillo, M., & Herbst, P. G. (2012). Moving toward more authentic proof practices in geometry. I *Mathematics Educator*, 21(2), 11-33. v21n2_Online[1].pdf (ed.gov)

Cirillo, M., & Hummer, J., (2019). Addressing misconceptions in secondary geometry. I The Mathematics *Teacher*, 35(6), 410-417. https://doi.org/10.5951/mathteacher.112.6.0410

Cirillo, M., & May, H. (2020). Decomposing proof in secondary classrooms: A promising intervention for school geometry. I *The 14th International Congress on Mathematical Education.* Shanghai, China.

Cirillo, M., Griffin, C., Seiwell, A., & Hummer, J. (2021). What do you believe is true? A routine for proving theorems in secondary geometry. I *Proceedings of the 43rd Meeting of the North American Chapter of the International Groups for the Psychology of Mathematics Education*. Philadelphia, PA, USA. (PDF) "WHAT DO YOU BELIEVE IS TRUE?' A ROUTINE FOR PROVING THEOREMS IN SECONDARY GEOMETRY (researchgate.net)

Cirillo, M., & Hummer, J. (2021). Competencies and behaviors observed when students solve geometry proof problems: An interview study with smartpen technology. I *ZDM−Mathematics Education*, 53(4), s. 861-875. Competencies and behaviors observed when students solve geometry proof problems: an interview study with smartpen technology | SpringerLink

Clements, D. & Battista, M. (1992). Geometry and spatial reasoning. (PDF) Geometry and spatial reasoning (researchgate.net)

Coe, R., & Ruthven, K. (1994). Proof Practices and Constructs of Advanced Mathematics Students. *British Educational Research Journal*, *20*(1), 41–53. http://www.jstor.org/stable/1500862

Davis, P. J. & Hersh, R. (1981). *The mathematical experience*. Viking Penguin Inc.: New York.

de Villiers, M. (1990). The role and function of proof in mathematics. I *Pythagoras*, 24, s. 17-24. (PDF) The Role and Function of Proof in Mathematics (researchgate.net)

de Villiers, M. (2001). THE ROLE AND FUNCTION OF PROOF WITH SKETCHPAD. proof.PDF (carmamaths.org)

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking, in D. Tall(ed.), Advanced Mathematical Thinking. http://www.math.wisc.edu/~wilson/Courses/Math903/ReflectiveAbstraction.pdf

Dubinsky E., & Mcdonald M.A. (2001). APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education Research. In: Holton D., Artigue M., Kirchgräber U., Hillel J., Niss M., Schoenfeld A. (eds) The Teaching and Learning of Mathematics at University Level. New ICMI Study Series, vol 7. Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/0-306-47231-7_25

Dubinsky, E., Arnon, I., Cottrill, J., Oktaç, A., Fuentes, R. S., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). APOS Theory: A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education. Springer. APOS Theory | SpringerLink

Eemeren, F. H. van, R. Grootendorst and T. Kruiger. (1987). *Handbook of Argumentation Theory*. Foris, Dordrecht.

Eruduran, S.; Aleixandre, M., eds. (2007). Argumentation in Science Education: Perspectives from Classroom-Based Research. Science & Technology Education Library. Vol. 35. New York: Springer-Verlag, s. 15–16. Argumentation in Science Education | SpringerLink

Fawcett, H.P. (1938). The Nature of Proof. A Description and Evaluation of Certain Procedures Used in Senior High School to Develop an Understanding of the Nature of Proof. I *National Council of Teachers of Mathematics, Yearbook 13* [1938]. Reprint 1966. ERIC - ED096174 - The Nature of Proof. A Description and Evaluation of Certain Procedures Used in Senior High School to Develop an Understanding of the Nature of Proof. National Council of Teachers of Mathematics, Yearbook 13 [1938]. Reprint 1966., 1938

Fischbein, E. (1982). Intuition and Proof. *For the Learning of Mathematics*, *3*(2), 9–24. http://www.jstor.org/stable/40248127

Fox, J., Modgil, S. (2006). From Arguments to Decisions: Extending the Toulmin View. In: Hitchcock, D., Verheij, B. (eds) *Arguing on the Toulmin Model*., vol 10. Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-1-4020-4938-5_18

Fox, J. & Glasspool, D. & Modgil, S. (2006). A Canonical Agent Model for Healthcare Applications. Intelligent Systems, I *IEEE*. 21, s.21-28. (PDF) A Canonical Agent Model for Healthcare Applications (researchgate.net)

Fox, J. & Glasspool, D. & Grecu, D. & Modgil, S. & South, M. & Patkar, V. (2007). Argumentation-Based Inference and Decision Making--A Medical Perspective. I *IEEE Intelligent Systems*. 22. (PDF) Argumentation-Based Inference and Decision Making--A Medical Perspective (researchgate.net)

Freeman, J.B. (1991). *Dialectics and the Macrostructure of Arguments.* Foris. Berlin.

Freeman, J.B. (2005). Systematizing Toulmin's warrants: An epistemic approach. I *Argumentation* 19(3), s. 331–346. s10503-005-4420-0.pdf (springer.com)

Freudenthal, H. *Mathematics as an educational task*. Dordrecht, Holland;, D. Reidel, 1973.

Fuys, D., Geddes, D., & Tischler, R. (1985). An investigation of the van Hiele model of thinking in geometry among adolescents (Final report of the Investigation of the van Hiele Model of Thinking in Geometry Among Adolescents Project). Brooklyn, NY: Brooklyn College, School of Education.

Fuys, D., Geddes, D., Tischler, R. (1988). The Van Hiele Model of Thinking in Geometry among Adolescents. I *Journal for Research in Mathematics Education*. Monograph , 1988, Vol. 3, pp. i+1-196. https://www.jstor.org/stable/749957

Goldin, G. A. (2000). A scientific perspective on structured, task-based interviews in mathematics education research. I A. E. Kelly, & R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education*, s. 517-545. Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Goodwin, D. & Goodwin, C. (1987). Children's arguing. In S.U. Philips, S. Steele, & C. Tanz, *Language, gender and sex in comparative perspective,* s.200 – 248. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Gutierrez, Angel & Jaime, Adela. (1998). On the Assessment of the Van Hiele Levels of Reasoning. I *Focus on Learning Problems in Mathematics,* 20, s. 27-46. (PDF) On the Assessment of the Van Hiele Levels of Reasoning (researchgate.net)

Hanna, G (1983). Rigorous proof in mathematics education. Toronto: OISE Press. Hanna, G (1990). Some pedagogical aspects of proof. I *Interchange* 21(1), 6-13.

Hanna, G. (1989). Proofs that prove and proofs that explain. I G. Vergnaud, J. Rogalski, and M. Artigue (eds.), *Proceedings of the Thirteenth Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. II, s. 45-51, Paris'

Hanna, G (1990). Some pedagogical aspects of proof. Interchange 21(1), s. 6-13. (PDF) Some pedagogical aspects of proof (researchgate.net)

Hanna, G. & H. N. Jahnke (1993). Proof and Application. I *Educational Studies in Mathematics*, 24(4): s. 421 - 438. Proof and application | SpringerLink

Hanna, G. (1995). Challenges to the importance of proof. I *For the Learning of Mathematics*, 15(3), s. 42-49. (PDF) Challenges to the importance of proof (researchgate.net)

Hanna, G. & H. N. Jahnke (1996). Proof and proving. I: A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick and C. Laborde (eds.), *International handbook of mathematics education.* Dordrecht, Kluwer: s. 877 - 908.

Hanna, G. and Jahnke, H.N. (1999). Using arguments from physics to promote understanding of mathematical proofs. I O. Zaslavsky (ed.), *Proceedings of the twenty-third conference of the international group for the psychology of mathematics education*, Vol. 3, s. 73–80.

Hanna G. (2000). Proof, Explanation and Exploration: An Overview. I Keith Jones, Ángel Gutiérrez Maria Alessandra Mariotti (eds.), *Educational Studies in Mathematics*, 44(1&2), s.5-23. Proof, Explanation and Exploration: An Overview | SpringerLink

Hanna, G., & Jahnke, H. N. (2002). Arguments from Physics in Mathematical Proofs: An Educational Perspective. I *For the Learning of Mathematics*, 22(3), 38–45. (PDF) Arguments from physics in mathematical proofs: An educational perspective (researchgate.net)

Hanna, G, & De Villiers, M. (2012). *Proof and Proving in Mathematics Education.* 1. Aufl. ed. Vol. 15. Dordrecht: Springer Netherlands, 2012. New ICMI Study Ser. Web.Proof and Proving in Mathematics Education | SpringerLink (gu.se)

Harel, G. and Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. I E. Dubinsky, A. Schoenfeld and J. Kaput (eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education*, III, American Mathematical Society, Providence, RI, s. 234–283. Students' Proof Schemes.pdf (ucsd.edu)

Harel, G. & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. I *Second Handbook of Research in Mathematics Teaching and Learning*. 2. Microsoft Word - HandbookAugust11.doc (ucsd.edu)

Hattie, J., & Timperley, H. (2007). The Power of Feedback. I *Review of Educational Research*, 77(1), s. 81-112. https://doi.org/10.3102/003465430298487

Hattie, J. (2014). Synligt lärande: en syntes av mer än 800 metaanalyser om vad som påverkar elevers resultat. Originaltitel: Visible Learning: A synthesis of over 800 meta-analyses relating to achievement. (2009). Översatt av Karin Ashing.

Heath, Sir Thomas L. (1956a). *Euclid: The Thirteen Books of the Elements*, Translated with introduction and commentary by Sir Thomas L. Heath. Vol 1. Dover Publications, Inc.: New York.

Heath, Sir Thomas L. (1956b). *Euclid: The Thirteen Books of the Elements*, Translated with introduction and commentary by Sir Thomas L. Heath. Vol 2. Dover Publications, Inc.: New York.

Heath, Sir Thomas L. (1956c). *Euclid: The Thirteen Books of the Elements*, Translated with introduction and commentary by Sir Thomas L. Heath. Vol 3. Dover Publications, Inc.: New York.

Hefendehl-Hebeker, L. (1995). Mathematik lernen für die Schule? Mathematische Semesterberichte 42, s. 33-52.

Hemmi, K. & Lepik, M. & Viholainen, A. (2013). Analysing proof-related competences in Estonian, Finnish and Swedish mathematics curricula—towards a framework of developmental proof. I *Journal of Curriculum Studies*. 45. (PDF) Analysing proof-related competences in Estonian, Finnish and Swedish mathematics curricula—towards a framework of developmental proof (researchgate.net)

Herbst, P. G. (2002). Establishing a custom of proving in American school geometry: Evolution of the two-column proof in the early twentieth century. I *Educational Studies in Mathematics*, 49, s. 283-312. Establishing a custom of proving in american school geometry: evolution of the two-column proof in the early twentieth century | SpringerLink

Hersh, R. (1993). Proving is convincing and explaining. Educational Studies in Mathematics, 24, 389-399. Proving is convincing and explaining | SpringerLink

Healy, L., & Hoyles, C. (2000). A Study of Proof Conceptions in Algebra. I *Journal for Research in Mathematics Education*, *31*(4), s. 396–428. https://doi.org/10.2307/749651

Hitchcock, D.L. (2005). Good reasoning on the Toulmin model. I *Argumentation* 19(3), s. 373–391

Hoffer, A. (1979). *Geometry. Teacher's Edition*. Menlo Park, CA: AddisonWesley.

Hoffer, A. (1981). Geometry is More than Proof. I *The Mathematics Teacher* 74, s. 11-18.

Hoffer, A. (1983). *Van Hiele Based Resarch*. Eugene, OR. Department of Mathematics. University of Oregon.

Hoyles, C. & Küchemann, D. (2002). Students' understandings of logical implication. I *Educational Studies in Mathematics* 51, s. 193–223. https://doi.org/10.1023/A:1023629608614

Inglis, M., Mejia-Ramos, J. P., & Simpson, A. (2007). Modelling mathematical argumentation: the importance of qualification. I *Educational Studies in Mathematics*, 66, s. 3–21. (PDF) Modelling mathematical argumentation: The importance of qualification (researchgate.net)

Inglis, M. & Mejia-Ramos, J. & Weber, K. & Alcock, L. (2013). On Mathematicians' Different Standards When Evaluating Elementary Proofs. I *Topics in cognitive science*, 5, s. 270-82. On Mathematicians' Different Standards When Evaluating Elementary Proofs - Inglis - 2013 - Topics in Cognitive Science - Wiley Online Library

Jahnke, H. (2005). A Genetic Approach to Proof. Inhämtad 6 April från: CERME4Jahnke.pdf (lettredelapreuve.org)

Jahnke, H. (2008). Theorems that admit exceptions, including a remark on Toulmin. ZDM: I *the international journal on mathematics education*, 40, s. 363-371. (PDF) Theorems that admit exceptions, including a remark on Toulmin (researchgate.net)

Kembitzky, K.A. (2009). Addressing Misconceptions in Geometry through Written Error Analyses. Ph.D. Dissertation: Ohio State University. ERIC - ED513658 - Addressing Misconceptions in Geometry through Written Error Analyses, ProQuest LLC, 2009

Knuth, E. J. (1999). The nature of secondary school mathematics teachers' conceptions of proof. Unpublished doctoral dissertation, University of Colorado, Denver, Colorado. The nature of secondary school mathematics teachers' conceptions of proof - ProQuest

Knuth, E. J. (2002a). Secondary school mathematics teachers‘ conceptions of proof. I *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(5), s. 379–405. https://doi.org/10.2307/4149959

Knuth, E. J. (2002b). Teachers‘ conceptions of proof in the context of secondary school mathematics. I *Journal for Mathematics Teacher Education*, 5, s. 61–88. Teachers' Conceptions of Proof in the Context of Secondary School Mathematics | SpringerLink

Krummheuer, G. (1995). The Ethnography of Argumentation. I Cobb, Paul; Bauersfeld, Heinrich (eds.). *The Emergence of Mathematical Meaning*, s.229–269.

Köğce, D., Aydın, M. & Yıldız, C. (2010). The views of high school students about proof and their levels of proof (The case of Trabzon). I *Procedia - Social and Behavioral Sciences*. 2. 2544-2549. ResearchGate

Lakatos, I. (1976). *Proofs and Refutations*. Cambridge University Press, Cambridge, England.

Larry, M., Bradbard, D.A. (1976). *Space and Geometry. Papers from a Research Workshop.* ERIC - ED132033 - Space and Geometry. Papers from a Research Workshop., 1976-Aug

Larson, R., Boswell, L., & Stiff, L. (2001). *Geometry*. Boston, MA: McDougal Litellell.

Loui, Ronald P. (2006). A Citation-Based Reflection the the Toulmin and Argument. I Hitchcock, David; Verheij, Bart (eds.). *Arguing on the Toulmin Model: New Essays in Argument Analysis and Evaluation*. Springer Netherlands. s. 31–38. doi:10.1007/978-1-4020-4938-5_3. Inhämtad 6 April 2022.

Luneta, K. (2014). Foundation phase student teachers' (limited) knowledge of geometry. I *South African Journal of Childhood Education*, 4(3), s. 71–86. ERIC - EJ1187141 - Foundation Phase Teachers' (Limited) Knowledge of Geometry, South African Journal of Childhood Education, 2014-Dec

Luneta, K. (2015). Understanding students' misconceptions: An analysis of final Grade 12 examination questions in geometry. I *Pythagoras*. 36. (PDF) Understanding students' misconceptions: An analysis of final Grade 12 examination questions in geometry (researchgate.net)

Machaba, France. (2016). The concepts of area and perimeter: Insights and misconceptions of Grade 10 learners. I *Pythagoras*, 37, s. 1-11. (PDF) The concepts of area and perimeter: Insights and misconceptions of Grade 10 learners (researchgate.net)

Mahlabela, P.T. (2012). Learner errors and misconceptions in ratio and proportion : a case study of grade 9 learners from a rural KwaZulu-Natal school. ResDocPrnt (ukzn.ac.za)

Manin, Y. (1977). *A course in mathematical logic*. Springer Verlag, New York.

Martin, W. G., & Harel, G. (1989). Proof Frames of Preservice Elementary Teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*, *20*(1), s. 41–51. https://doi.org/10.2307/749097

Martin, T. & Mccrone, S. (2003). Classroom factors related to geometric proof construction ability. I. *The Mathematics Educator*, 7, s. 18-31. (PDF) Classroom factors related to geometric proof construction ability (researchgate.net)

Mayberry, J. (1983). The Van Hiele Levels of Geometric Thought in Undergraduate Preservice Teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*, *14*(1), s. 58–69. https://doi.org/10.2307/748797

Mbusi, N. (2019). The Use of Van Hiele Theory to Address Bed Foundation Phase Students' Misconceptions in Transformation Geometry. https://www.proquest.com/dissertations-theses/use-van Hiele-theory-address-bed-foundation-phase/docview/2504878276/se-2?accountid=11162

Mbusi, N., & Luneta, K. (2021). Mapping Pre-service Teachers' Faulty Reasoning in Geometric Translations to the Design of Van Hiele Phase-based Instruction. I *South African Journal of Childhood Education*, 11.1: E1-E11. (PDF) Mapping pre-service teachers' faulty reasoning in geometric translations to the design of Van Hiele phase-based instruction (researchgate.net)

Meyer, M., Schnell, S. (2020). What counts as a “good” argument in school?—how teachers grade students’ mathematical arguments. I *Educ Stud Math* 105, s. 35–51. https://doi.org/10.1007/s10649-020-09974-z

Ndlovu, Mdu & Mji, Andile. (2012). Pedagogical implications of students' misconceptions about deductive geometric proof. I *Acta Academica*. 44. s. 175-205. (PDF) Pedagogical implications of students' misconceptions about deductive geometric proof (researchgate.net)

Philipp, K. (2018). Diagnostic Competences of Mathematics Teachers with a View to Processes and Knowledge Resources. In: Leuders, T., Philipp, K., Leuders, J. (eds) Diagnostic Competence of Mathematics Teachers. I *Mathematics Teacher Education*, vol 11. Springer, Cham. DOI:10.1007/s10649-020-09974-z

Prakken, H. (2005). AI & law, logic and argument schemes. I *Argumentation* 19(3): s. 303–320.

Reed, C.; Walton, D. N.; Macagno, F. (2007). Argument diagramming in logic, law and artificial intelligence. I *The Knowledge Engineering Review*. 22 (1), s. 87–109. Argument diagramming in logic, law and artificial intelligence | The Knowledge Engineering Review | Cambridge Core

Reid, D. (2002). What is proof?

Reid, D. (2005). The meaning of proof in mathematics education. (PDF) THE MEANING OF PROOF IN MATHEMATICS EDUCATION (researchgate.net)

Schoenfeld, A. (1989). Explorations of students' mathematical beliefs and behavior. I *Journal for Research in Mathematics Education* 20(4), s. 338-355. (PDF) Explorations of Students' Mathematical Beliefs and Behavior (researchgate.net)

Schoenfeld, A. H. (1994). What do we know about mathematics curricula? I *Journal of Mathematical Behavior*, 13, s. 55-80

Senk, S. L. (1983). Proof-writing achievement and Van Hiele levels among secondary school geometry students. Dissertation Abstracts International Section A: Humanities and Social Sciences, 44(2-A), 417. PROOF-WRITING ACHIEVEMENT AND VAN HIELE LEVELS AMONG SECONDARY SCHOOL GEOMETRY STUDENTS - ProQuest

Senk, S. L. (1985). How Well Do Students Write Geometry Proofs? I *The Mathematics Teacher*, *78*(6), s. 448–456. http://www.jstor.org/stable/27964580

Senk, S. L. (1989). Van Hiele Levels and Achievement in Writing Geometry Proofs. I *Journal for Research in Mathematics Education*, *20*(3), s. 309–321. https://doi.org/10.2307/749519

Shulman, L. S. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. I *Educational Researcher*, *15*(2), s. 4–14. https://doi.org/10.2307/1175860

Simosi, Maria. (2003). Using Toulmin's Framework for the Analysis of Everyday Argumentation: Some Methodological Considerations. I *Argumentation*. 17. Using Toulmin's Framework for the Analysis of Everyday Argumentation: Some Methodological Considerations (springer.com)

Simpson, A. (1995). Developing a proving attitude. I *Conference Proceedings: Justifying and Proving in School Mathematics*, Institute of Education, University of London, London, s. 39–46.

Skolverket. (2014). Nationella provet i matematik 2b höstermin (ht). Umeå Universitet. Ma2b-ht14.pdf (umu.se)

Skolverket. (2015). Nationella provet i matematik 2b höstermin (vt). Umeå Universitet. Ma2b-vt15.pdf (umu.se)

Skolverket. (2021a). Ämnesplanen i matematik. Ämne - Matematik (Gymnasieskolan) - Skolverket

Skolverket. (2021b). Kommentarmaterial till ämnesplanen i matematik. Kommentarmaterial till ämnesplanen i matematik - Skolverket

Spriggs, J. (2012). GSN—The Goal Structuring Notation: A Structured Approach to Presenting Arguments. London; New York: Springer-Verlag. GSN - The Goal Structuring Notation | SpringerLink

Stylianides, A. J. (2007). Proof and Proving in School Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *38*(3), s. 289–321. https://doi.org/10.2307/30034869

Stylianides, A. J, & Ball, D. (2008). Understanding and Describing Mathematical Knowledge for Teaching: Knowledge about Proof for Engaging Students in the Activity of Proving. I *Journal of Mathematics Teacher Education*, 11.4, s. 307-332. Understanding and describing mathematical knowledge for teaching: knowledge about proof for engaging students in the activity of proving | SpringerLink

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity. I *Educational Studies in Mathematics*. 12. (PDF) Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity (researchgate.net)

Thames, M. & Ball, D. (2010). What math knowledge does teaching require?. *Teaching Children Mathematics*, 17, s. 220-229. ERIC - EJ907315 - What Math Knowledge Does Teaching Require?, Teaching Children Mathematics, 2010-Nov

Toulmin, S. (1958). *The Uses of Argument*. Cambridge University Press, London.

Toulmin, S., Rieke R., & Janik, A. (1984). *An Introduction to Reasoning*. 2nd edition, Macmillan: New York.

Toulmin, S. (2003). *The Uses of Argument:* Updated Edition. Cambridge University Press.

Toulmin, S. (2004). Reasoning in theory and practice. I *Informal Logic* 24(2), s. 111–114.

Usiskin, Z. (1982). *Van Hiele Levels and Achievement in Secondary School Geometry. CDASSG Project*. Chigago University, IL. ERIC - ED220288 - Van Hiele Levels and Achievement in Secondary School Geometry. CDASSG Project., 1982

Van Baalen, K. (1981). De (onuitgesproken) vooronderstellingen van Bram Lagerwerf en van Hiele. I *Euclides 10 1980/1981*. Groningen: J. B. Wolters.

Van Dormolen, J. (1977) Learning to understand what giving a proof really means, I *Educational Studies in Mathematics*, 8, s. 27-34. Learning to understand what giving a proof really means | SpringerLink

Van Hiele, P.M. (1957). *The problem of insight, in connection with schoolchildren's insight into the subject matter of geometry*. English summary (by P.M. van Hiele) of De Problematiek van het Inzicht Gedemonstreed wan het Inzicht von Schoolkirdren in Meetkundeleerstof. Doctoral dissertation, University of Utrecht.

Van Hiele-Geldof, D. (1957). *The didactics of geometry in the lowest class of the secondary school*. English summary (by Dina van Hiele-Geldof) of De didaktiek van de Meetkunde in de eerste klass van het V.H.M.O. Doctoral dissertation, University of Utrecht, 1957.

Van Hiele, P.M., van Hiele-Geldof, D. (1958). A method of initiation into geometry at secondary schools. In *Report on Methods of the Initiation into Geometry*, Hans Freudenthal, editor. Subcommittee of the International Commission on Mathematical Instruction for the Netherlands, Report No. III. Groningen: J.B. Wolters.

Van Hiele, P.M. (1958-1959). La signification des niveaux de pensee dans l'enseignement par la methode deductive (The significance of level of thought in teaching by the deductive method). Translated (from Dutch to French) by A. van Twembeke. I *Mathematica & Pedagogia* 16 (1958-59).

Van Hiele, P.M. (1959). *Development and Learning Process: A study of some aspects of Piaget's psychology in relation with the didactics of mathematics*. Institute of Education, University of Utrecht, No. XVII. Groningen: J.B. Wolters, 1959.

Van Hiele, P.M. (1968). Quelques aspects didactiques du developpement de la pensee des enfants dans les mathematiques et la physique (Some.didactic aspects of the development of thought in children in mathematics and physics). Paper presented at the Congres sur l'Integration des enseignements scientifiques (Meeting on the integration of the teaching of sciences), Varna, Bulgaria, September 11-19, 1968.

Van Hiele, P.M. (1973). *Begrip en Inzicht (Understanding and Insight)*. Muusses Purmerend, 1973.

Van Hiele, P.M. (1976). Wie Kann Man Im Mathematikunterricht den Denkstufen Rechnung Tragen? (How Can One in Mathematics Instruction Accommodate the Thought Levels?). I *Educational Studies in Mathematics,* 7 (1976), s. 157-169.

Van Hiele, P.M. (1978). van a tot z. Muusses Purmerend.

Van Hiele, P.M. (1979). Written responses to items submitted to him by Joanne Mayberry.

Van Hiele, P.M. (1980). Levels of Thinking: How to Meet Them and How to Avoid Them. Paper presented at the Research Presession to the annual meeting of the National Council of Teachers of Mathematics, Seattle, WA, April, 1980.

Van Hiele, P. (1986). *Structure and Insight: A Theory of Mathematics Education*. Academic Press Inc.

Van Hiele, P. M. (1999). Developing Geometric Thinking through Activities that Begin with Play, *Teaching Children Mathematics*, Vol. 5, s. 310–316, 1999.

Varghese, T. (2009). Secondary-level Teachers' Conception of Mathematical Proof. I *IUMPST: The Journal.* Vol 1. Microsoft Word - article.doc (ed.gov)

Verheij, B. (2005). Evaluating arguments based on Toulmin's scheme. I *Argumentation* 19(3), s. 347–37

Vinner, S. (1983) Concept definition, concept image and the notion of function. I *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 14:3, s. 293-305. Concept definition, concept image and the notion of function: International Journal of Mathematical Education in Science and Technology: Vol 14, No 3 (tandfonline.com)

Vojkuvkova, I. (2012). The van Hiele model of Geometric Thinking. I *WDS'12 Proceedings of Contributed Papers*, Part I, s. 72–75, 2012. WDS12_112_m8_Vojkuvkova.pdf (cuni.cz)

Volmink, J. D. (1990). The nature and role of proof in mathematics education. I *Pythagoras*, 23, s. 7-10.

Weber, K. (2001). Student Difficulty in Constructing Proofs: The Need for Strategic Knowledge. I *Educational Studies in Mathematics, 48*(1), s. 101–119. http://www.jstor.org/stable/3483117

Weber, K. (2002). Beyond Proving and Explaining: Proofs That Justify the Use of Definitions and Axiomatic Structures and Proofs That Illustrate Technique. I *For the Learning of Mathematics*, *22*(3), s. 14–17. http://www.jstor.org/stable/40248396

Weber, K. (2003). Students' difficulties with proof. MAA Online: Research Sampler, Inhämtad 6 April från: http://www.maa.org./t_and_l/sampler/rs_8.html

Weiss, M., Herbst, P. G., & Chen, C. (2009). Teachers' perspectives on "authentic mathematics" and the two-column proof form. I *Educational Studies in Mathematics,* 70, s.275-293. Teachers' perspectives on "authentic mathematics" and the two-column proof form | SpringerLink

Williams, E.R. (1979). An investigation of senior high school students understanding of the nature of mathematical proof. Unpublished doctoral dissertation. Edmonton, University of Alberta. An investigation of senior high school students understanding of the nature of mathematical proof : Edgar Roland Williams : Free Download, Borrow, and Streaming : Internet Archive

Wirszup, I. (1976). Breakthroughs in the psychology of learning and teaching geometry. In J. L. Martin & D. A. Bradbard (Eds.), *Space and geometry: Papers from a research workshop*, s. 75-97. Columbus, OH: ERIC Center for Science, Mathematics and Environmental Education. ERIC - ED132033 - Space and Geometry. Papers from a Research Workshop., 1976-Aug

Yackel, E. (1997). Explanation as an Interactive Accomplishment: A Case Study of One Second-Grade Mathematics Classroom. ERIC - ED409198 - Explanation as an Interactive Accomplishment: A Case Study of One Second-Grade Mathematics Classroom., 1997-Mar

Yackel, E. (2001). Explanation, justification and argumentation in mathematics Classrooms. I *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 1, Freudenthal Institute*, Utrecht, Holland, s. 9–23. ERIC - ED466631 - Explanation, Justification and Argumentation in Mathematics Classrooms., 2001-Jul

Yackel, E., & Hanna, G. (2003). Reasoning and proof. I J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to Principles and Standards for School Mathematics,* s. 227-236. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics

Özerem, Ayşen. (2012). Misconceptions In Geometry and Suggested Solutions For Seventh Grade Students. I *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 55, s. 720–729. (PDF) Misconceptions In Geometry And Suggested Solutions For Seventh Grade Students (researchgate.net)

Bilagor

Bilaga 1 – Formelblad

Algebra

Regler

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Andragradsekvationer

$$x^2 + px + q = 0 \qquad x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Funktioner

Räta linjen

$$y = kx + m \qquad k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$ax + by + c = 0$, där inte både a och b är noll

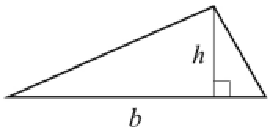
Andragradsfunktioner

$$y = ax^2 + bx + c \qquad a \neq 0$$

Geometri

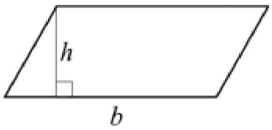
Triangel

$$A = \frac{bh}{2}$$



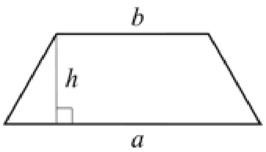
Parallellogram

$$A = bh$$



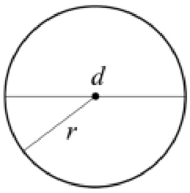
Parallelltrapets

$$A = \frac{h(a+b)}{2}$$



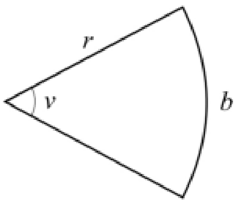
Cirkel

$$A = \pi r^2 = \frac{\pi d^2}{4}$$
$$O = 2\pi r = \pi d$$



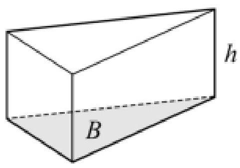
Cirkelsektor

$$b = \frac{v}{360°} \cdot 2\pi r$$
$$A = \frac{v}{360°} \cdot \pi r^2 = \frac{br}{2}$$



Prisma

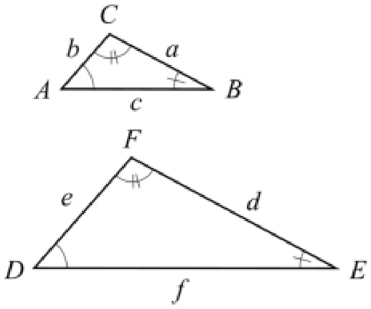
$$V = Bh$$



Likformighet

Trianglarna ABC och DEF är likformiga.

$$\frac{a}{d}=\frac{b}{e}=\frac{c}{f}$$

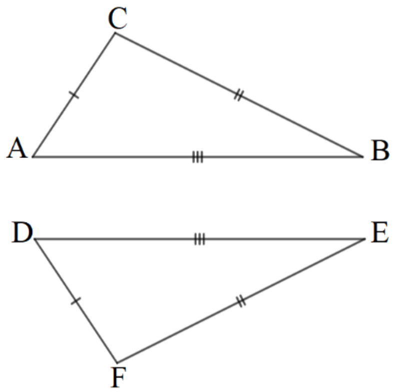


Skala

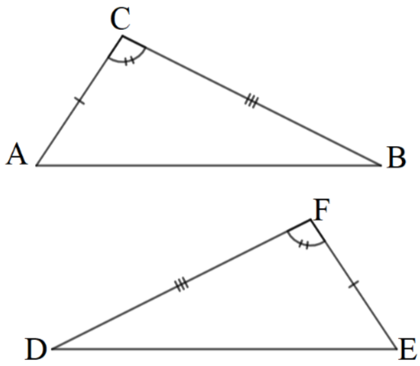
Areaskalan = (Längdskalan)^2
Volymskalan = (Längdskalan)^3

Kongruens

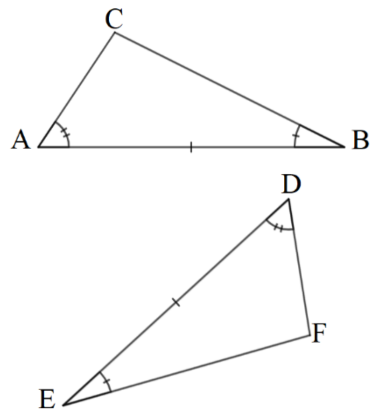
Trianglarna ABC och DEF är kongruenta (identiska) om de har samma:



Sida – sida – sida
SSS



Sida – vinkel – sida
SVS



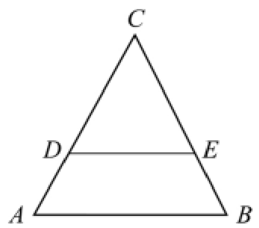
Vinkel– sida– vinkel
VSV

Topptriangel- och transversalsatsen

Om DE är parallell med AB gäller

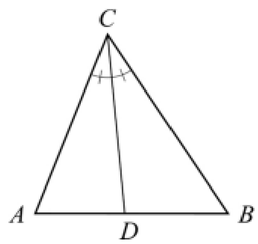
$$\frac{DE}{AB}=\frac{CD}{AC}=\frac{CE}{BC} \text{ och}$$

$$\frac{CD}{AD}=\frac{CE}{BE}$$



Bisektrissatsen

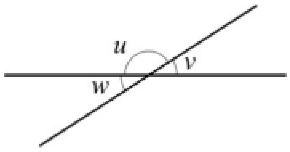
$$\frac{AD}{BD}=\frac{AC}{BC}$$



Vinklar

$u + v = 180°$ Sidovinklar

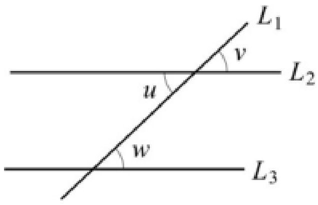
$w = v$ Vertikalvinklar



L_1 skär två parallella linjer L_2 och L_3

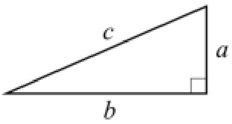
$v = w$ Likbelägna vinklar

$u = w$ Alternatvinklar



Pythagoras sats

$a^2 + b^2 = c^2$

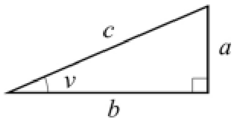


Trigonometri

$\sin v = \dfrac{a}{c}$

$\cos v = \dfrac{b}{c}$

$\tan v = \dfrac{a}{b}$



Avståndsformeln

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Mittpunktsformeln

$x_m = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ och $y_m = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$

Bilaga 2 – Principer för urval via van Hiele Fas 1.

För att välja uppgifter användes bland annat följande tabell av aspekter som ingår i olika van Hiele nivåer. Van Hiele beskriver över flera olika verk en mängd beteenden som kan observeras på de olika nivåerna. Jag har även inkluderat en studie av Burger & Shaughnessy (1986) som kvalitativt iakttagit beteenden på olika nivåer (n = 13) samt åldrar. Det bör nämnas att genom litteraturen så är inte nivåernas namn konsekvent. Mer konkret; ibland startar författare med nivå 0 istället för 1. Tabellen nedan summerar dessa handlingssätt och referenser på en enda plats[94]:

Tabell 6. En tabell som beskriver beteenden på de olika nivåerna. Citaten är översatta till svenska från olika språk (engelska, franska, tyska och nederländska).

Nivå	Beteenden	Referens
Nivå 1 Visuell	”Figurer bedöms utefter sitt utseende” ”Ett barn känner igen en rektangel genom dess form, dess skepnad” ”… och rektangeln verkar vara annorlunda från en kvadrat”[95] ”När en har visat för ett sexåldrigt barn vad en romb är, vad en rektangel är, vad en kvadrat är, vad en parallellogram är, så kan han skapa figuren utan fel med en geoboard[96], även med svåra fall. ”Ett barn känner inte igen en romb som en parallellogram” ”Romben är inte en parallellogram. Romben verkar vara … något ganska annorlunda.	Van – Hiele (1958 – 1959)
	”när en säger att fyrhörningar vars fyra sidor är lika stora kallas romber, så räcker inte detta påstående för att övertyga en begynnande student att parallellogrammen han kallar kvadrater är en del av mängden av romber.”	Van – Hiele (1968)
	(om en fråga om huruvida en roterad kvadrat är en kvadrat eller ej) ”för att du kan se det”	Van – Hiele (1979)
	”På den visuella nivån är det möjligt att se att trianglar är likformiga, men det är meningslöst att fråga varför de är likformiga; det finns inget varför, en ser det bara”	Van – Hiele (1986)
	”Använder oprecisa egenskaper (kvaliteter) för att jämföra ritningar och för att identifiera, karaktärisera samt sortera figurer” ”Refererar till visuella prototyper för att känna igen figurer”	Burger & Shaughnessy (1986)

[94] Observera att vissa av dessa har översatts från andra språk än engelska (franska, tyska och nederländska). Ibland i flera led: dvs. först från nederländska till franska och sedan till engelska. Viss information kan ha gått förlorad i översättningsprocessen.

[95] … and the rectangle seems different to him from a square.

[96] Geoboard - Wikipedia

	”Inkluderar irrelevanta egenskaper när en identifierar och beskriver figurer, såsom figurens orientering[97]” ”Inkapabel till att tänka sig att det finns en oändlig variation av en typ av figur”. ”Inkonsekvent ordning av figurer; dvs. sorterar figurer utefter egenskaper som inte alla figurer innehar” ”Kan inte använda egenskaper som nödvändiga krav för att bestämma figurer”	
Nivå 2 Analys	”Han[98] kan associera namnet ’likbent triangel’ med en specifik triangel, med vetskapen att två av dess sidor är lika stora, och drar följdsatsen att de två motsvarande vinklarna är lika stora”.	Van – Hiele (1957)
	”…En elev som känner till egenskaperna hos en romb och kan namnge dem, kommer också ha den grundläggande förståelsen att en likbent triangel är en semiromb”[99] ”Figurerna är stödet[100] för deras egenskaper” ”Att en figur är en rektangel innebär att den har fyra räta vinklar, det är en rektangel även om dess figur inte ritas ut ordentligt.” ”Figurerna känns igen genom sina egenskaper. Dvs. Om en säger att figuren ritad på tavlan har fyra räta vinklar, så är det en rektangel, även om figuren inte har ritats särskilt ordentligt. ”Egenskaperna är ännu inte organiserade på ett sådant sätt att en kvadrat identifieras som att vara en rektangel”.	Van – Hiele – Geldof (1957) Van Hiele & van – Hiele – Geldof (1958)
	”Ett barn lär sig att se romben som en liksidig fyrhörning med identiska, motstående vinklar med diagonaler som är rätvinkliga mot varandra som delar både varandra och vinklarna mitt itu”.[101] [102] ”När det är bestämt att en struktur är en ’likbent triangel’ så kommer barnet också veta att en viss mängd samband[103] måste gälla, utan att behöva memorera dem i detta specifika fall.	Van – Hiele (1959)

[97] Vilket jag finner en aning ”roande”. När en kommer högre upp i matematiken (flöden) så blir orienteringen plötsligt viktig igen.

[98] Eleven.

[99] Det verkar som om den nederländska ämnesplanen (och även amerikanska ämnesplaner, såsom Kaliforniens) lägger mycket större vikt på egenskaper hos figurer än den svenska. Särskilt romber.

[100] Bokstavligt från franskan ”support”, dvs. stöd.

[101] Denna har jag modifierat en del. Här är originalet: ”The child learns to see the rhombus as an equilateral quadrangle with identical opposed angles and interperpendicular diagonals that bisect both each other and the angles.

[102] Ännu en gång, det läggs mer fokus på rombers egenskaper än det nog görs i Sverige. Visserligen speglar detta kritiken från Himmi och kollegor som togs upp tidigare i detta arbete.

[103] Governing properties

	”När barnet kommer till nivån att den vet vad en romb är och känner igen en likbent triangel som en semiromb, då kan den (barnet) utan problem[104] bestämma en viss mängd egenskaper hos en likbent triangel”	
	”De (eleverna) kan frågas om egenskaperna hos likformiga trianglar…”	Van – Hiele (1986)
	”Jämför figurer explicit genom egenskaper av deras komponenter” ”Förbjuder klassinkludering mellan generella typer av figurer, såsom fyrhörningar” ”Sorterar figurer utifrån enbart ett attribut, såsom sidors egenskaper, medan en förkastar vinklar, symmetri och så vidare” ”Använder alla egenskaper en känner till om en figur istället för att bestämma de nödvändiga egenskaperna när en identifierar figurer” ”Beskriver typer av figurer genom explicit användning av deras egenskaper, snarare än mer passande namn, även om de känner till dem. Exempelvis, istället för att säga rektangel så säger eleven en fyrhörning med fyra räta vinklar”[105] ”Explicit förkastelse av bokens definitioner av figurer i förmån av egna, personliga karaktäriseringar” ”Behandlar geometri som fysik när en testar validiteten hos ett påstående; exempelvis förlitar sig eleven på en mängd bilder och gör observationer av dem”. ”Saknar förståelse för matematiska bevis”	Burger & Shaughnessy (1986)
Nivå 3 Abstraktion	”Elever … kan förstå vad som menas med ’bevis” i geometri. De har nått den andra[106] nivån av tänkande”	Van – Hiele – Geldof (1957)
	”Han kan manipulera relationerna mellan egenskaperna hos geometriska mönster”[107] ”Dvs., med utgångspunkt ur generella kongruenssatser, så är han kapabel till att dra slutsatser om att två vinklar eller linjesegment hos specifika figurer är lika.”[108]	Van – Hiele – (1957)

[104] Offhand

[105] Eller bara ”fyrhörning”.

[106] I den ursprungliga doktorsavhandlingen fanns inte nivå 1. Istället var nivå 2 den första nivån. Härledes var nivå 3 istället den andra nivån.

[107] He can manipulate the interrelatedness of the characteristics of geometric patterns.

[108] E.g., if on the strength of general congruence theorems, he is able to deduce the equality of angles and linear segments of specific figures.

	”Egenskaperna är ordnade[109]. De härleds från varandra: en egenskap föregår eller följer från en annan egenskap. ”Deduktionens egenvärde förstås inte av studenten”[110] ”Kvadraten känns igen som en rektangel för det är på denna nivå som figurers definitioner kommer in i spelet”	Van – Hiele – (1958 - 1959)
	”Barnet … kommer känna igen romben via dess egenskaper … på grund av att den är en fyrhörning vars diagonaler skär varandra rätvinkligt” ”Om barnet inte är kapabel till att studera geometri i den striktaste innebörden av ordet” ”Barnet kan resonera enligt ett deduktivt formellt system … detta är däremot inte identiskt med resonemang i samma grad av formell logik”.	Van – Hiele – (1959)
	”Förståelsen av implikation, ekvivalens, och negationer av implikationer är på andra nivån”	Van – Hiele – (1976)
	”De är kapabla till att förstå mer avancerade tankestrukturer, såsom att: ’att linjer är parallella implicerar att det finns en såg[111], och därmed är alternatvinklarna lika.” ”Jag (studenten) kan lära mig en definition utantill : ingen nivå. Jag kan förstå att definitioner kan vara nödvändiga: andra nivån.”[112] ”…du förstår vad som menas med det (användning av orden ’någon’ och ’alla’)”.	Van – Hiele – (1978)
	(om att bevisa att en konstruerat en kvadrat) ”Om du efterfrågas ge ett bevis att du konstruerat en kvadrat, och att denna kvadrat har en diagonal av den givna längden, så är du först tvingad till att ge en definition av en kvadrat. En ’definition’ … tillhör däremot den tredje nivån”[113] ”för att skapa ett sådant bevis, måste en först kunna argumentera på tredje nivån … och ha förstått att det är möjligt att organisera argument i en ordning så att varje påstående, förutom de i början, är ett resultat av de tidigare påståendena.”[114]	Van – Hiele (1986)

[109] Bokstavligen ”ordonnent”. Det är kanske bättre att använda ”organiserade”.
[110] The intrinsic significance of deduction is not understood by the student.
[111] Van Hiele referar ofta till ”såg” eller Z-form när en transversal skär två parallella linjer.
[112] Van Hiele anser att definitioner i sig kan läras utantill UTAN att eleven reflekterat kring dess innehåll, innebörd eller samband med andra begrepp. Därmed följer det ur van Hieles modell att en memorerad definition inte nödvändigtvis kan placeras i någon av nivåerna.
[113] Alltså ska en elev på tredje nivån kunna ge en egen formell (minimal) definition av ett geometriskt objekt. Se dock att detta citat verkar komma i konflikt med den tidigare punkten från van – Hiele (1978). Det verkar som att skillnaden ligger främst i huruvida det är elevens egen definition eller ej, dvs. om språket för att definiera ett geometriskt objekt är att internaliserat eller ej. Elever kan memorera utan att förstå.
[114] Elever ska alltså även kunna organisera sitt tänkande.

	”Skapar fullständiga definitioner av olika figurer” ”Kapabel till att ändra definitioner och genast acceptera samt använda nya definitioner” ”Explicit användning av definitioner” ”Kapabel till att använda ekvivalenta definitioner” ”Accepterar logisk ordning mellan olika typer av figurer, inklusive klassinkludering” ”Är kapabel till att sortera figurer utifrån en stor mängd av matematiskt exakta attribut” ”Explicit användning av ”om, då” satser”. ”Kapabel till att skapa korrekta informella deduktiva argument, använder implicit logiska former såsom kedjeregeln (om p implicerar q och q implicerar r, då gäller det att p implicerar r) samt modus ponens.” ”Förvirring mellan rollerna för axiom och sats”	Burger & Shaughnessy (1986)
Nivå 4 Deduktion/ Ordning	”Han kommer nå tredje nivån av tänkande när han börjar manipulera de inneboende egenskaperna hos relationerna. Till exempel: Om han kan skilja mellan ett påstående och dess motsats”	Van – Hiele (1957)
	”We can start studying a deductive system of propositions, i.e., the way in which the interdependence of relations is effected. Definitions and propositions now come within the pupils’ intellectual horizon”[115] ”Parallellism hos linjer implicerar att motsvarande vinklar är lika stora och vice versa”. [116]	Van – Hiele – Geldof (1957)
	”En student kan exempelvis skilja mellan ett påstående och dess motsats”. ”Det är … möjligt att utveckla ett axiomatiskt system för geometrin”	Van Hiele och van – Hiele – Geldof (1958)
	”Sinnet är upptaget med deduktionens signifikans, motsatsen till en sats, ett axiom, samt villkoren för nödvändighet och tillräcklighet.”	Van – Hiele (1958-59)

[115] Denna mening var ganska svår att översätta så jag lämna den som den är. ”Effected” är att åstadkomma eller verkställa. En fri översättning verkar alltså vara att ”vi kan börja studera ett deduktivt system av påståenden, dvs. på vilket sätt relationernas ömsesidiga beroende verkställs. Definitioner och påståenden kommer nu in i elevens intellektuella horisont.”.

[116] Skillnaden jämfört med den tidigare nivån verkar vara att det gäller i båda riktningar. Jämför vi med formelbladen så verkar enbart ena riktningen nämnas; om två linjer är parallella så är alternatvinklarna lika stora. Det verkar alltså som att den andra riktningen inte anses vara lika given även av de som skapar Nationella Proven.

	”… en kan säga till honom (studenten) att i ett bevis handlar det snarare om huruvida dessa teser är sanna eller inte”	Van – Hiele (1968)
	”Förtydligar otydliga frågor och omformulerar uppgifter i ett precist språk”[117] ”Frekvent användning av hypoteser och försök att verifiera dessa hypoteser” ”Förlitar sig på att bevis är den slutliga auktoriteten i att bestämma sanningshalten i ett matematiskt påstående” ”Förstår rollen av olika delar i en matematisk diskurs, såsom axiom, definitioner, satser och bevis” ”Implicit acceptans och användning av postulaten i Euklidisk geometri”	Burger & Shaughnessy (1986)
Nivå 5 Rigorositet[118] [119]	”En jämförande studie av de olika deduktiva systemen inom fältet av geometriska relationer är … begränsat till de som har nått den fjärde nivån.	Van – Hiele – Geldof (1957)
	”Slutligen på den fjärde nivån (som knappast kan nås under gymnasieutbildningen) så kan det logiska tänkandet i sig bli ämnesinnehållet. ”Axiomen i sig tillhör den fjärde nivån”	Van Hiele och van – Hiele – Geldof (1958)
	”En frågar inte frågar som: vad är punkter, linjer, ytor, etc.? … figurer definieras enbart av de symboler som kopplas samman via samband. För att finna den specifika meningen bakom en symbol behöver en gå ner till de lägre nivåerna där symbolernas specifika mening kan ses.”	Van – Hiele (1958-59)

[117] Denna punkt har använts explicit där vissa frågar har lämnats en aning ”vaga” för att upptäcka om elever poängterar sådant.

[118] Det är nämnvärt att van Hiele själv är kritisk till om denna nivå ens existerar eller kan klart separeras från nivå 4 (van – Hiele 1986, s.47). Usiskin (1982) utförde en stor kvantitativ studie på ca. 1500 - 1600 elever som inte visade en signifikant skillnad mellan nivå 3 och de senare nivåerna.

[119] Denna nivå har tillämpats en gång; i att fråga om hur elever ser på påståendet ”parallella linjer ger samma alternatvinklar”. Detta är inte ett postulat men elever kan se det som ett sådant.

Bilaga 3 – Tabell för vanliga fel och misstolkningar inom geometri

Nedan följer en tabell som redogör för en delmängd av vanliga problem som elever stöter på inom geometri:

Tabell 7. Vanliga misstag och misstolkningar inom geometri. Tabellen är indelad efter större kategorier (typer) och sedan deltyper (vad är det mer specifikt som kan missas / orsaka besvär). Slutligen finns det en referens till ett arbete som lagt grunden för inkluderingen. Inte alla delar av varje arbete har inkluderats; exempelvis visade vissa arbeten att elever har svårt för geometriska konstruktioner med passare och linjal. Givet att detta inte är en explicit del i ämnesplanen så har denna del uteslutits. Med andra ord, en typ har inkluderats om det går att härleda typen till någon del av ämnesplanen.

Typ	Deltyp	Referens
Parallella och rätvinkliga linjer	Vilka är alternat- och likbelägna vinklar?	Kembitzky (2009), Özerem (2012), Casanova et al (2021)
	När är linjer parallella?	Kembitzky (2009)
Månghörningars egenskaper	Definitionen av en specifik månghörning (romb, kvadrat, rektangel, etc.)	McCrone & Martin (2004), Kembitzky (2009) Özerem (2012), Luneta (2014)
	Använder inte egenskaper hos månghörningar	McCrone & Martin (2004), Kembitzky (2009) Özerem (2012)
	Beräkning av area och omkrets hos månghörningar	Machaba (2016), Kembitzky (2009) , Özerem (2012)
	Fyrhörningens Hierarki	Casanova et al (2021), Kembitzky (2009) , Özerem (2012), Luneta (2014)
Trianglars egenskaper	Typer av trianglar (likbent, liksidig, trubbiga, spetsiga, rätvinkliga)	Casanova et al (2021)
	Vinkelsumman är 180 grader.	Casanova et al (2021)
	Hierarki	Casanova et al (2021)
	Beräkning av area (glömmer dividera med två)	Özerem (2012)
	Bisektriser delar alltid en triangel i mitten / agerar som symmetrilinjer.	Cirillo & Hummer (2019)
Proportionalitet och likformighet	Inkorrekt användning av proportionalitet	Mahlabela (2012)
	Ställer upp fel förhållande (inte motsvarande sidor)	Mahlabela (2012)
	Använder likheten hos sidor snarare än proportionalitet för att bevisa likformighet.	Mahlabela (2012)
Bevis, definitioner och resonemang	Oprecis/inkorrekt terminologi	Atebe (2008), Özerem (2012)
	En definition kan innehålla allting en kan om ett objekt.	Cirillo & Hummer (2019)
	Användning av satser för att bevisa kongruens (SVS, etc.)	Clements & Battista (1992)
	Kan inte ändra bilder (ex. Rita nya linjer)	Clements & Battista (1992)
	Antar att det INTE går att anta någonting från ett diagram[120]	Cirillo & Hummer (2019)

[120] Detta är dock en ganska tvetydig punkt. Det finns definitivt uppgifter som är missledande genom att ha dåliga diagram. Visserligen försöker Cirillo och Hummer (2019) beskriva fall där elever går en aning för långt.

	Utelämnar viktiga steg i beviset. (Logiska, spatiala, m.m.)	Usiskin (1982), Kembitzky (2009), Ndlovu & Mji (2012), Özerem (2012), Chigonga (2016), Casanova et al (2021), Cirillo & Hummer (2021)
	När en försöker bevisa ett påstående så förutsätts det som ska bevisas	Cirillo & Hummer (2019)
	Svårigheter med vilka slutsatser som kan dras från de givna premisserna	Senk (1985), Cirillo & Hummer (2019, 2021)
	Osäkerhet om vilka antaganden som kan göras från ett diagram	Cirillo & Hummer (2019)
	Svårigheter med algebraisk manipulation	Özerem (2012)
	Drar slutsatser från enstaka diagram (induktiva resonemang)[121]	Williams (1979), Harel & Sowder (1998), Chazan (1989), Chazan (1993), Cirillo & Hummer (2019)
	Ser ett deduktivt bevis som ett bevis för ett enstaka fall / litar inte på deduktiva bevis	Williams (1979), Fishbein (1982), Harel & Sowder (1998), Balacheff (1988), Chazan (1993), Simpson (1995), Hefendehl-Hebeker (1995).
Matematiska satser	Kan inte använda / känna igen Pythagoras sats	Clements & Battista (1992)
	Inkorrekta beräkningar och/eller bristande förståelse av formlerna	Ndlovu & Mji (2012), Chigonga (2016)
Transformationer	Speglar inte figurer/punkter korrekt	Luneta (2015), Mbusi (2019)
	Skalar inte figurer/punkter korrekt	Luneta (2015), Mbusi (2019)
	Roterar inte figurer/punkter korrekt	Luneta (2015), Mbusi (2019)

Exempelvis betvivlar de att två räta linjer bara skär i en punkt, huruvida sidovinklar faktiskt är sidovinklar eller om en kan anta att två vinklar är vertikalvinklar.

[121] Exempel: Att ett diagram

Bilaga 4 – Varför valdes uppgifterna?

I denna bilaga kommer det lite mer ingående beskrivas hur frågorna valdes. Syftet som önskades besvara är tvådelat; studien önskar förstå vad elever anser vara ett bevis samt hur de argumenterar vid bevisföring. Tanken är även att elevernas svar ska användas för att besvara den tredje frågeställningen. Härledes utformades fyra övergripande önskemål angående vad uppgifterna ska uppnå:

1. Elevernas verbala och skrivna svar ska belysa hur eleverna tänker men också i vilken grad de tror på sina lösningar.

2. Elever ska kunna motivera på flera sätt, det ska gå att besvara på mer än ett sätt. För att delvist uppnå detta så får elever ha tillgång till flera mätinstrument (gradskiva och linjal), sax, formelblad och miniräknare.

3. Samtliga elever som avklarat geometridelen inom matematik 2 bör klara av de första tre uppgifterna i fas 2.

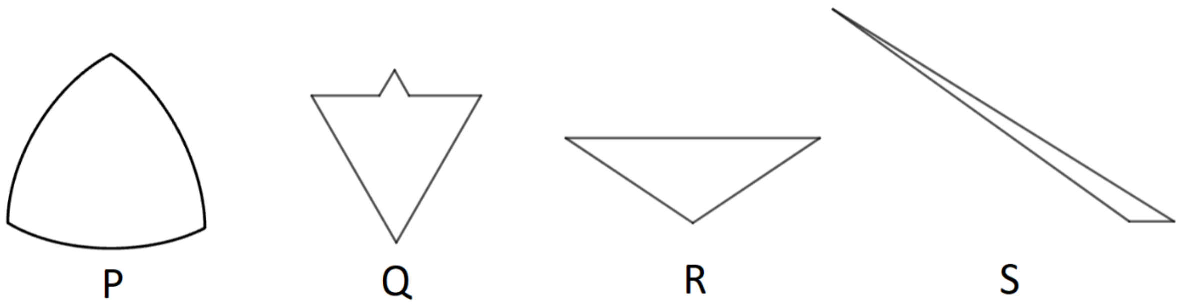
4. Elevernas skrivna svar ska kunna klargöra vad för värderingar och kunskaper en lärare använder vid bedömning av geometrisk bevisföring. För att uppnå detta så måste svaren ha en viss variation i sig. Härledes måste uppgifter väljas så att variation i svaren är möjliga[122].

Det finns därmed ett intresse att frågorna är delvist utforskande och saknar ett uppenbart svar. Vissa uppgifter måste även vara ”standarduppgifter”, dvs. uppgifter som kan dyka upp på nationella proven eller i läroböcker. För att lärare ska inneha bra reflektioner kring en elevlösning så förutsätts det att uppgifterna även bör inneha ett visst fokus på vanliga elevmisstag (Schulman 1986; Ball & Thames 2010, se även bilaga 3). Slutligen så tillämpades van Hieles teori för geometriskt tänkande (se bilaga 2) samt en analys av tidigare studier för att välja ut uppgifter till den första fasen (Usiskin 1982: Senk 1983, 1985; Mbusi 2019).

Urval och beskrivning av uppgifter i fas 1.

Frågorna som valdes ut var följande:

1. (Nivå 1) Vilken/Vilka av dessa figurer är trianglar?



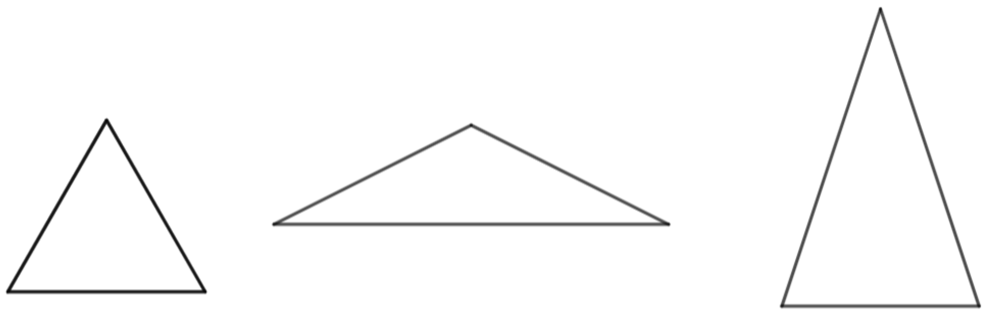
   a) Ingen är en triangel.
   b) Alla är trianglar.

[122] Vilket även är i enlighet med Goldins principer (2000).

c) Bara P är en triangel.
d) Bara R är en triangel.
e) P och R är trianglar.
f) R och S är trianglar.

Usiskin (1982) samt Senk (1983, 1985) påpekar att vissa elever kategoriserar figur S som att **inte** vara en triangel. Idéen verkar vara att detta extremfall särskiljer sig så mycket från andra trianglar att den inte faller i samma kategori. Resonemanget verkar vara att S är för smal för att vara en triangel. Hos unga barn kan även triangel P kategoriseras som en triangel[123]. Främst önskar jag fånga hur elever motiverar vad som är en triangel eller ej.

2. (Nivå 2) En likbent triangel är en triangel där två sidor är lika långa. Nedan följer tre exempel. .



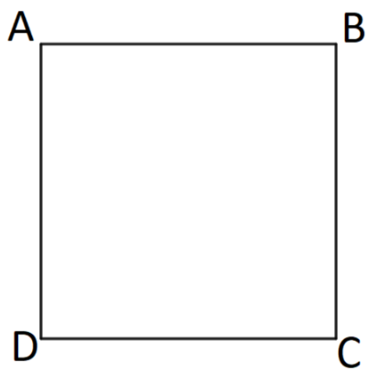
Vilken av a) – e) stämmer för alla likbenta trianglar?

a) De tre sidorna måste ha samma längd.
b) En sida måste vara dubbelt så stor som en annan sida.
c) Det finns minst två vinklar som är lika stora.
d) De tre vinklarna är lika stora.
e) Ingen av a) – d) stämmer för varje likbent triangel.

Van Hiele (1986) nästa nivå studerar de egenskaper hos figurer som är visuellt uppenbara. Figurer kategoriseras och deras egenskaper beskriver vad för figur det är (istället för konkreta, minimalistiska definitioner). Beroende på eleven i fråga kan vissa elever förlita sig enbart på dessa visuella motiveringar medan andra kan uttrycka deduktiva argument.

3. (Nivå 2) ABCD är en kvadrat. Vilket samband nedan stämmer för alla kvadrater?

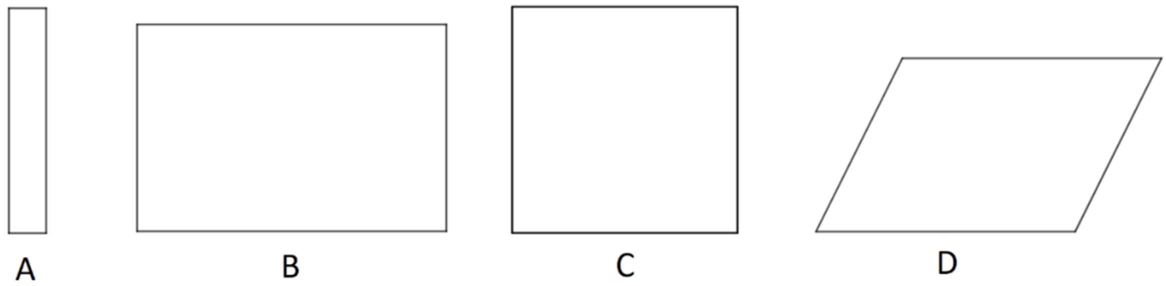
a) AC och CD har samma längd.
b) AC och BD är vinkelräta mot varandra.
c) AD och BC är vinkelräta mot varandra.
d) AD och BD har samma längd.
e) Vinkel B är större än vinkel C.



[123] Vilket är roande, givet att det är en sfärisk triangel.

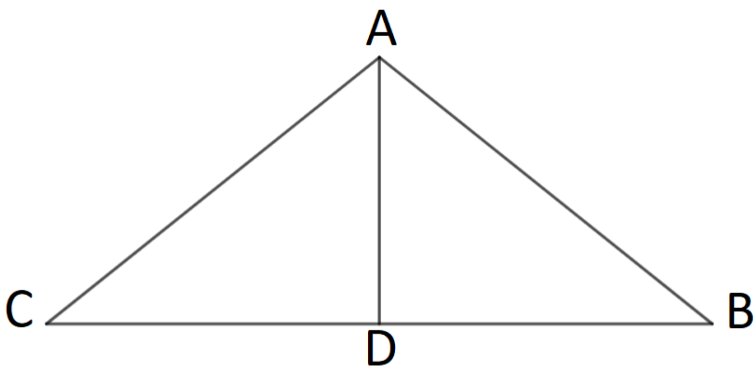
Likt tidigare är syftet att undersöka hur elever motiverar att ett givet påstående är sant eller falskt. Påståendet kan beläggas på flera sätt, må det vara via mätningar, eller mer deduktiva metoder.

4. (Nivå 3) Vilken/Vilka av dessa figurer är **rektanglar**? Rita en cirkel runt bokstaven på de figuren som är rektanglar.



Van Hieles teori anser att elever utan ett språk av definitioner inte är kapabla till att särskilja mellan kvadrater och rektanglar. Det finns inget behov av att inkludera kvadrater under begreppet rektanglar och givet att utbildningen har givet ett specifikt namn till kvadrater så ses de som unika figurer. Syftet med denna fråga är att fånga om elever kan tala och uttrycka definitioner för geometriska objekt muntligt, samt se hur de sedan motiverar klassinklusion (eller ej).

5. (Nivå 3) I triangeln ABC ritas en bisektris AD.



Vad för slutsats(er) kan du dra från denna information?

Flera författare har i sina studier belagt att elever har svårigheter med vilka slutsatser som kan dras från bilder (Williams 1979; Chazan 1989; Chazan 1993; Cirillo & Hummer 2019). På nivå 3 ska en elev kunna använda en definition för att kunna dra enkla slutsatser om en figur. Figuren ovan kombinerar dessa för att se om elever kan dra slutsatser under antagandet att figuren är likbent. Likaväl så vill en även se om elever kan studera motexempel som motbevisar de slutsatser som de dragit. Triangeln ovan är även ”nästan” likbent, alltså den avviker med ca. 0,1 mm. Alltså, så bör en elev som utgår från mätinstrument kunna inse, givet att de känner till egenskaper hos likbenta trianglar, kunna inse att de slutsatser de drar inte riktigt fungerar.

6. (Nivå 3) Här följer tre egenskaper hos en figur:
   Egenskap X: Dess diagonaler har samma längd.
   Egenskap Y: Det är en kvadrat.

Egenskap Z: Det är en rektangel.

Vilken av dessa stämmer?

a) X implicerar Y vilket implicerar Z.
b) X implicerar Z vilket implicerar Y.
c) Y implicerar Z vilket implicerar X.
d) Y implicerar X vilket implicerar Z.
e) Z implicerar Y vilket implicerar X.
f) Ingen av a) – e) stämmer.

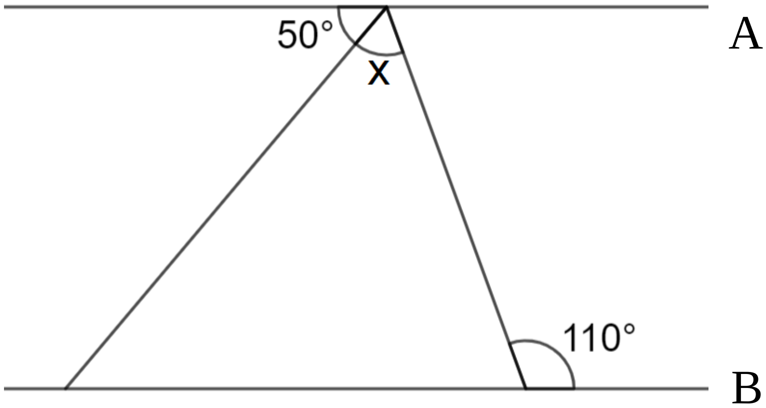
Slutligen, så valdes en uppgift där elever ska kunna dra slutsatser i en kedja. Uppgiften är från Usiskin (1982). Uppgiften har modifierats en aning så att elever som är logiskt konsekventa utifrån uppgift 4 ska kunna välja ett svarsalternativ. Ursprungligen fanns inte alternativ f) men lades till i syftet att se om elever kan utgå från en annan definition av en rektangel men kan fortfarande dra slutsatser från den med vissa motiveringar.

Urval och beskrivning av uppgifter i fas 2.

Hur ska en välja uppgifter som både är givande för elev- och lärardelen? Schulman (1986) samt Ball och Thames (2010) utgick från att en stor del av de reflektioner som en lärare gör angående sina pedagogiska kunskaper uppkommer ur elevers svårigheter med matematiken. Dvs. de misstag och missförståelser som elever uppvisar. Under denna förutsättning är det därmed aktuellt att vissa av frågorna ska direkt utgå från vanliga elevmisstag. Det är främst inom dessa delar som lärare har reflekterat och troligen kan ge utförliga svar kring sina värderingar. Dessa frågor bör även vara tillämpbara inom en svensk kontext, dvs. kunna kopplas till den svenska ämnesplanen inom matematik eller Nationella proven. För att uppnå detta mål skapades ytterligare en tabell utifrån litteraturen som beskriver de vanligaste elevproblemen inom geometrin (se bilaga 3). Tabellen består helt klart av en ganska stor del av begrepp. Det är inte aktuellt att testa för varje liten kategori utan snarare kommer vissa frågor testa på flera av deltyperna samtidigt. Vissa av delarna dyker även upp i första fasen vilket innebär att inte alla delar behöver explicit tas upp i fas 2.

Frågorna som valdes ut var följande:

7. Linje A och B är parallella. Visa att vinkeln x är 60 grader.



Denna fråga är mycket lik den fråga som väckte mitt intresse att undersöka elevers argumentation. Fråga 7 är kopplat till parallella linjer samt hur elever läser av och ritar i diagram. Den är även ämnad att paras ihop med fråga 9, som istället är en öppen frågeställning.

8. I denna fråga ska vi undersöka om ett påstående stämmer.

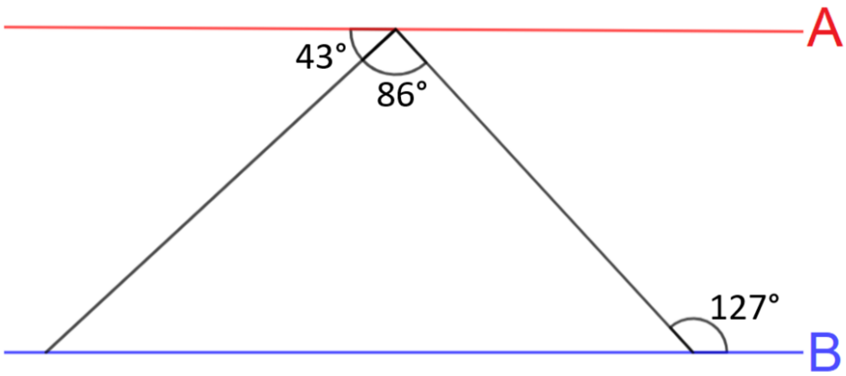
Du ska **rita** en figur och sedan försöka visa att påståendet stämmer.

Om en höjd ritas ner till basen i en likbent triangel, så delas basen mitt itu.

a) Rita en figur som beskriver fallet ovan.
b) Visa att påståendet stämmer.

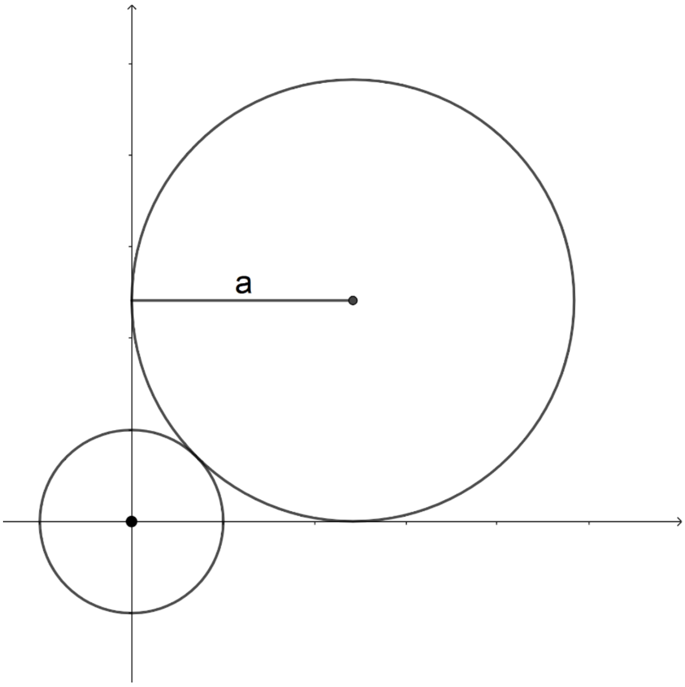
Litteraturen har visat belägg för att elever har svårt för att rita egna diagram, samt att göra goda markeringar. Exempelvis kan vissa elever sakna förståelsen för att höjder skapar räta vinklar. Elevers bilder är troligen värt en helt egen studie men det framgår i vilket fall att elever kan uppleva svårigheter inom detta område. Utöver det så utgör även bildskapandet en direkt koppling till vad för visualiseringar elever gör av matematiken, vilket i sin tur klargör deras motiveringar. Avslutningsvis så kan vissa elever även gå utöver detta och dra slutsatser enbart från bilder i sig, dvs. ett empiriskt bevis; detta kan vara både visuellt eller induktivt.

9. Är linjen A parallell med linje B? Motivera!



Van Hieles teori påstår att elever ibland kan uppvisa svårigheter med att utföra kontrapositioner. Detta är ett enklare fall där elever kan använda en kontraposition för att dra slutsatsen att linje A och B inte är parallella. Kembitzky (2009) fann även stöd för att elever inte är helt säkra på när två linjer är parallella eller ej. Bilden i detta fall är även *ej skalenlig*. Om en elev väljer att mäta i bilden och upptäcker detta så ska detta problematiseras tillsammans med intervjuaren.

10. En cirkel med radien a tangerar de positiva koordinataxlarna. Den tangerar även en mindre cirkel som har mittpunkten i origo. Se figur.



Visa att den mindre cirkelns radie är $a(\sqrt{2} - 1)$ längdenheter.

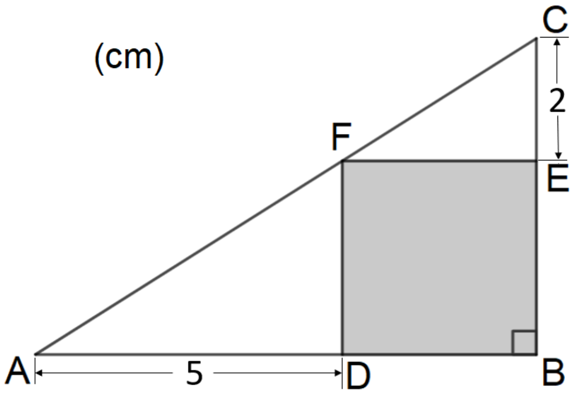
Denna fråga känner troligen flera igen som en fråga direkt från Nationella proven (NpMa2b vt 2015, fråga 16). Tabellen i bilaga 3 ger belägg för att elever kan ha svårt för att båda ändra i bilder (såsom att rita nya linjer) samt dra slutsatser från det som syns. Även Pythagoras sats i sig kan i vissa fall vara svår att känna igen. Slutligen kan det även uppstå problem med den algebraiska manipulationen och egentliga tolkningen av satsen.

11. Triangeln ABC är likbent. Bisektriserna vid basvinklarna skapar en ny triangel med hjälp av basen. Vilken typ av triangel är det?

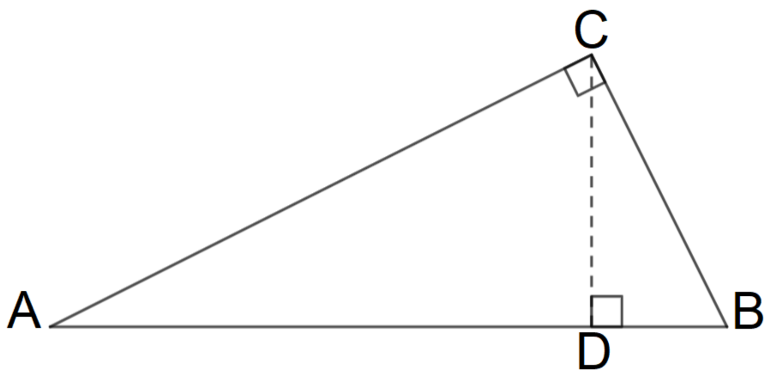
Denna fråga relaterar åter igen till elevers svårigheter med att rita egna diagram, samt dra slutsatser från dessa. Syftet här är att undersöka hur elever använder ekvivalenser, mer konkret: en triangel är likbent om och bara om dess basvinklar är lika stora.

Slutligen så studerar fråga 12 och 13 samma område: likformighet. Fråga 12 är en modifierad variant av en C-uppgift från Nationella proven (NpMa2 vt 2015). Fråga 13 är en vanlig svår uppgift från läroböcker, såsom Matematik 5000-serien samt Origo. Syftet med dessa frågeställningar är att fånga en aspekt som inte hanterades i fas 1; vad för kriterium elever använder för likformighet. Elevers motiveringar kan här variera från rent visuella, till transformativa eller mer deduktiva; beroende på vad elever anser nödvändigt. Den sista frågan är av en högre abstraktionsnivå där den inte ger några konkreta tal eller markeringar (utöver de räta vinklarna). Elever kan behöva rita i diagrammet eller dra slutsatser som inte är visuellt uppenbara, vilket i sin tur förväntas påverka de resonemang de använder.

12. I en rätvinklig triangel ABC finns en grå kvadrat BEFD inritad. Sträckan AD är 5 cm och sträckan CE är 2 cm. Se figur.
Visa att den grå kvadratens area är 10 cm^2.



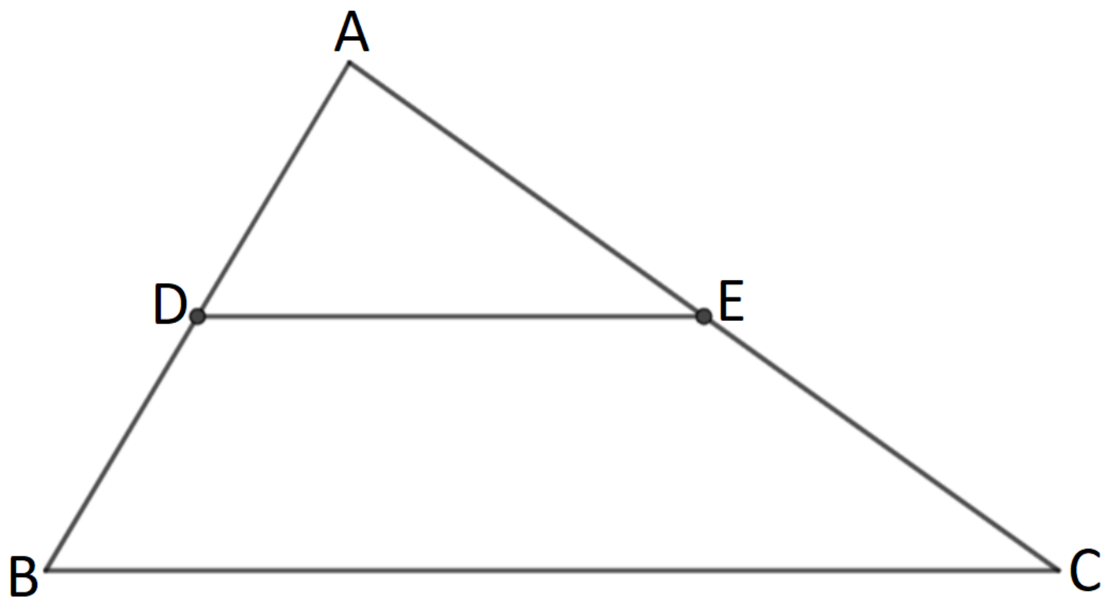
13. Visa att triangeln ACD är likformig med BCD.



Vad för uppgift presenteras i fas 3?

För att undersöka elevers särskiljningar mellan induktiva och deduktiva bevis så kommer det presenterats ett induktiv och ett deduktivt bevis av den så kallade mittpunktssatsen (mid point theorem). Satsen är följande:

> Linjesegmentet som kopplar ihop mittpunkterna av två av triangelns sidor är parallell med den tredje sidan (och är hälften så stor som den tredje sidan).



Figur 59. Illustration av satsen (mid point theorem).

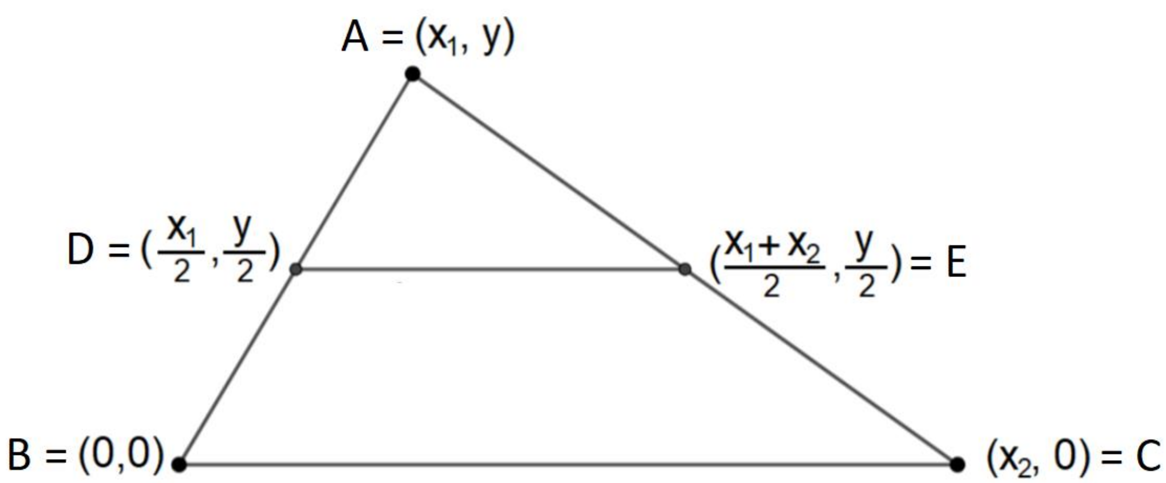
Sambandet har använts i tidigare studier, främst Chazan (1993) samt Knuth (2002a). Chazan använde enbart satsen för att konkretisera induktiva bevis, där det presenterades fyra exempel av trianglar där satsen tillämpades. Till skillnad från Chazan kommer jag istället presentera ett deduktivt bevis av påståendet. Ett sådant bevis måste uppfylla vissa krav:

1. Det måste vara tillgängligt för eleverna utan alltför mycket stöd.
2. Beviset får inte vara alltför långt.

Observera följande del av den svenska ämnesplanen (Skolverket 2021a):

- Användning och motivering av grundläggande klassiska satser i geometri om vinklar och likformighet samt Pythagoras sats, **inklusive exempel som omfattar beräkningar i koordinatsystem.**

Alltså, i den svenska ämnesplanen ingår även delar av koordinatgeometri. Denna punkt kan därmed användas för att rättfärdiga ett bevis som inför ett koordinatsystem:



Rotera triangeln så att två av hörnen ligger på x-axeln. Ge sedan triangelns hörn koordinater som i figuren ovan.

Mittpunktsformeln ger koordinaterna för mittpunkterna.

k-värdet för linje BC: $k_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0-0}{x_2-0} = 0$

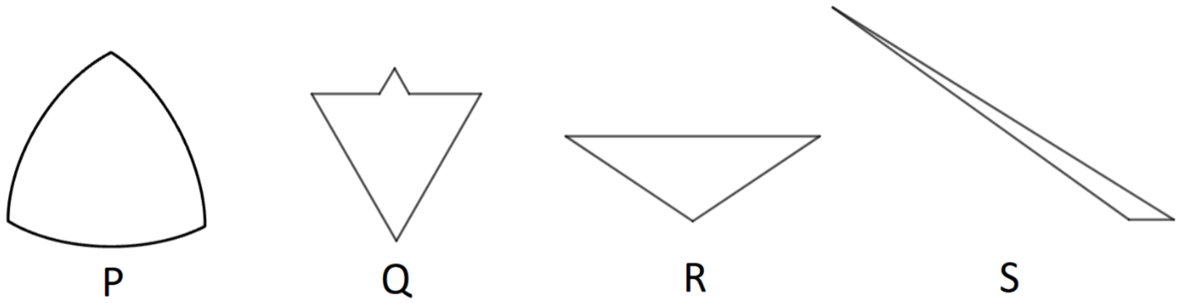
k-värdet för linje DE: $k_2 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{y}{2} - \frac{y}{2}}{\frac{x_1+x_2}{2} - \frac{x_1}{2}} = \frac{0}{\frac{x_2}{2}} = 0$

Linjerna har samma k-värde, så de är parallella.

Detta bevis skulle inte vara, i strikt mening, i geometrins anda. I alla fall om vi utgår från klassisk Euklidisk geometri. Däremot förväntas de flesta elever kunna förstå idéen med att när två linjer är parallella så är deras k – värde samma (och vice versa). Det som kan vara svårt är idéen med att transformera en arbiträr triangel så att en av dess sidor ligger längt x-axeln, beroende på hur bra en elevs spatiala förmåga är. Alternativt kan en förklara tillvägagångssättet från att en av sidorna BLIR en x-axel, ifall eleverna upplever svårigheter med transformationen. Harel & Sowder (1998, 2007) argumenterade för att elever ibland accepterar bevis för att det är en auktoritet som lägger fram eller bekräftar beviset. För att fånga denna aspekt kommer uppgiften introducera två elever, Nasir (induktiv) och Astrid (deduktiv). Om elever bryr sig om det är två elever som presenterar sina lösningar kan vara en metod för att fånga detta bevisschema.

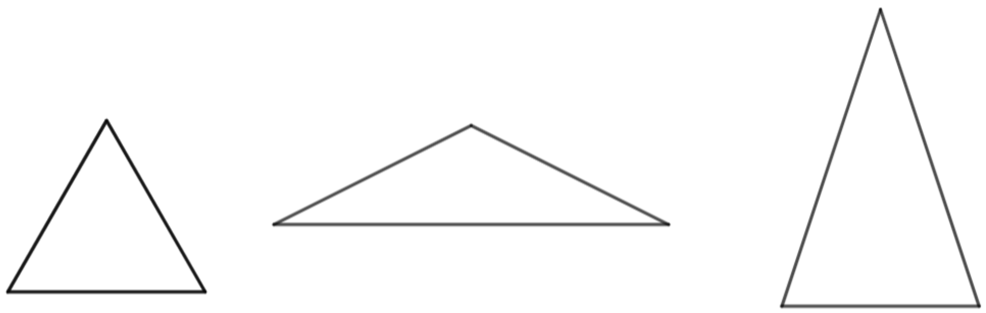
Bilaga 5 – Elever. Van Hiele. Fas 1.

1. Vilken/Vilka av dessa figurer är trianglar?



   a) Ingen är en triangel.
   b) Alla är trianglar.
   c) Bara P är en triangel.
   d) Bara R är en triangel.
   e) P och R är trianglar.
   f) R och S är trianglar.

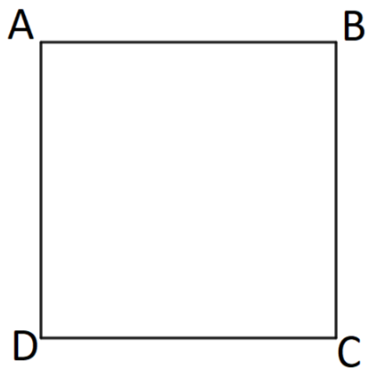
2. En likbent triangel är en triangel där två sidor är lika långa. Nedan följer tre exempel.



   Vilken av a) – e) stämmer för alla likbenta trianglar?

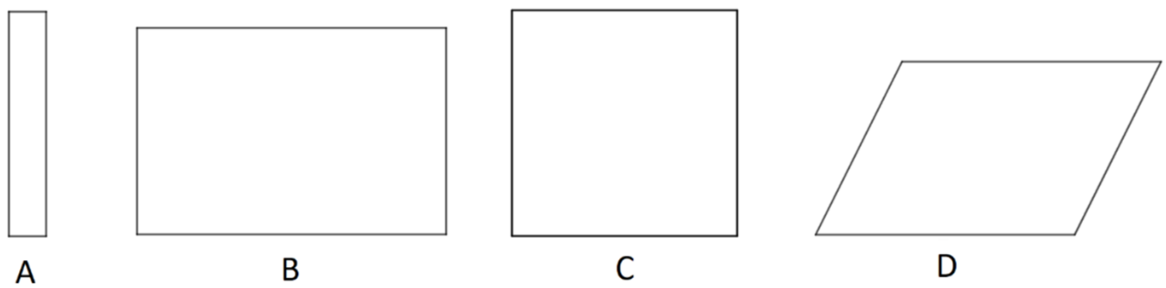
   a) De tre sidorna måste ha samma längd.
   b) En sida måste vara dubbelt så stor som en annan sida.
   c) Det finns minst två vinklar som är lika stora.
   d) De tre vinklarna är lika stora.
   e) Ingen av a) – d) stämmer för varje likbent triangel.

3. ABCD är en kvadrat. Vilket samband nedan stämmer för alla kvadrater?

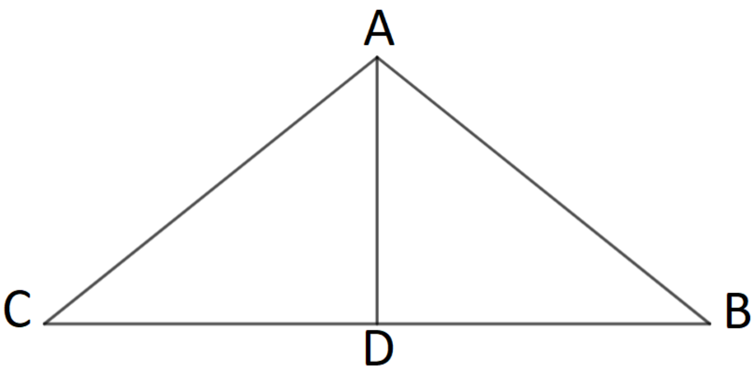


a) AC och CD har samma längd.
b) AC och BD är vinkelräta mot varandra.
c) AD och BC är vinkelräta mot varandra.
d) AD och BD har samma längd.
e) Vinkel B är större än vinkel C.

4. Vilken/Vilka av dessa figurer är **rektanglar**? Rita en cirkel runt bokstaven på de figuren som är rektanglar.



5. I triangeln ABC ritas en bisektris AD.



Vad för slutsats(er) kan du dra från denna information?

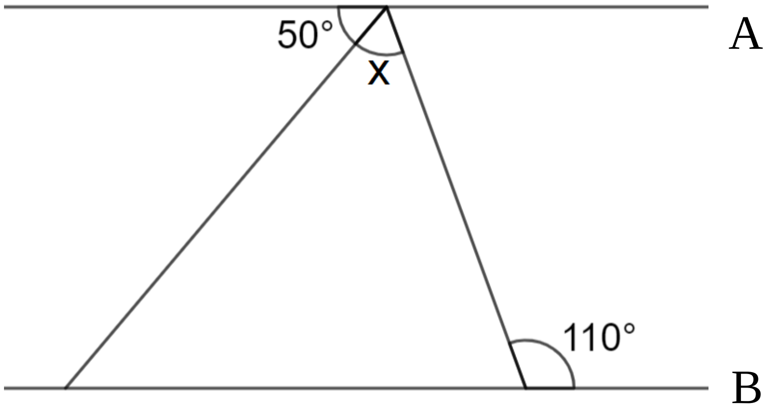
6. Här följer tre egenskaper hos en figur:
Egenskap X: Dess diagonaler har samma längd.
Egenskap Y: Det är en kvadrat.
Egenskap Z: Det är en rektangel.

Vilken av dessa stämmer?

a) X implicerar Y vilket implicerar Z.
b) X implicerar Z vilket implicerar Y.
c) Y implicerar Z vilket implicerar X.
d) Y implicerar X vilket implicerar Z.
e) Z implicerar Y vilket implicerar X.

Bilaga 6 – Bevisuppgifter. Fas 2

7. Linje A och B är parallella. Visa att vinkeln x är 60 grader.



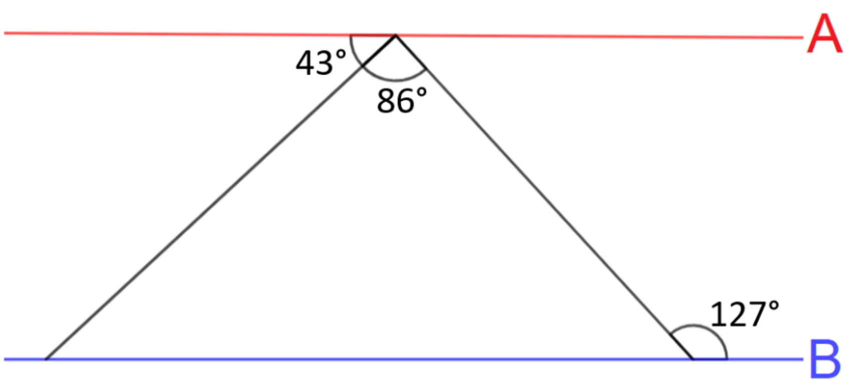
8. I denna fråga ska vi undersöka om ett påstående stämmer.

Du ska **rita** en figur och sedan försöka visa att påståendet stämmer.

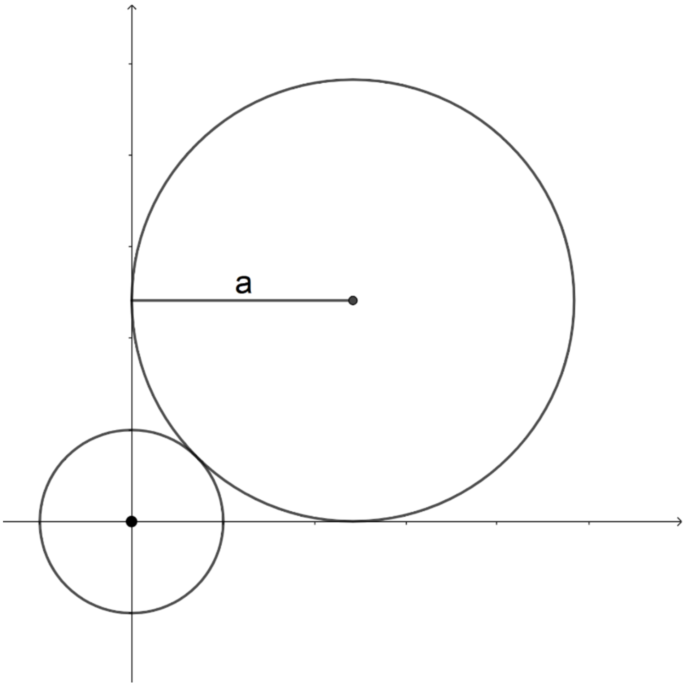
Om en höjd ritas ner till basen i en likbent triangel, så delas basen mitt itu.

a) Rita en figur som beskriver fallet ovan.
b) Visa att påståendet stämmer.

9. Är linjen A parallell med linje B? Motivera!



10. En cirkel med radien a tangerar de positiva koordinataxlarna. Den tangerar även en mindre cirkel som har mittpunkten i origo. Se figur.

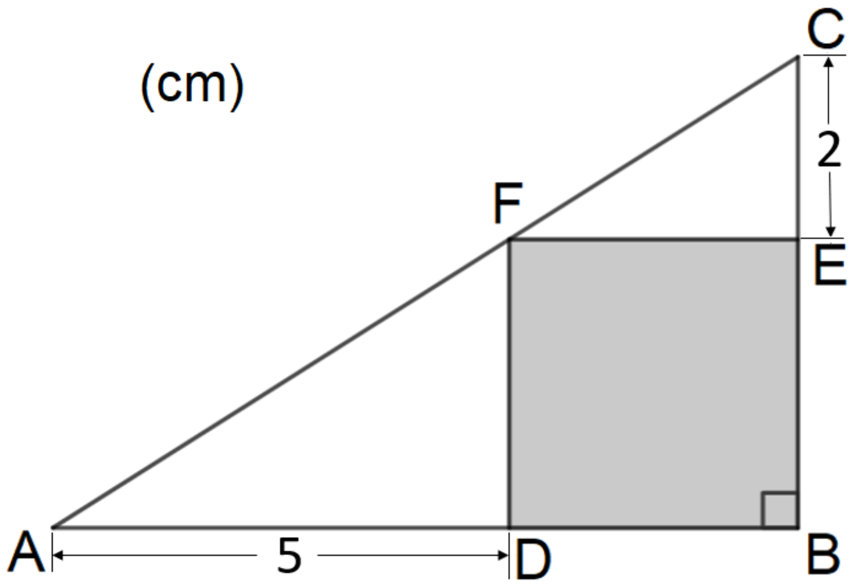


Visa att den mindre cirkelns radie är $a(\sqrt{2}-1)$ längdenheter.

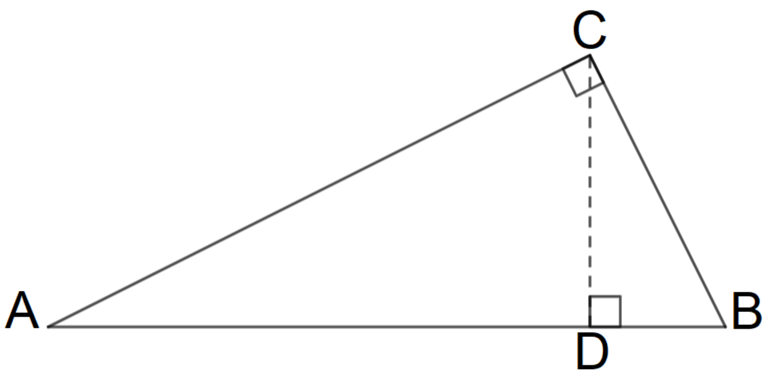
11. Triangeln ABC är likbent. Bisektriserna vid basvinklarna skapar en ny triangel med hjälp av basen. Vilken typ av triangel är det?

12. I en rätvinklig triangel ABC finns en grå kvadrat BEFD inritad. Sträckan AD är 5 cm och sträckan CE är 2 cm. Se figur.

Visa att den grå kvadratens area är 10 cm^2.



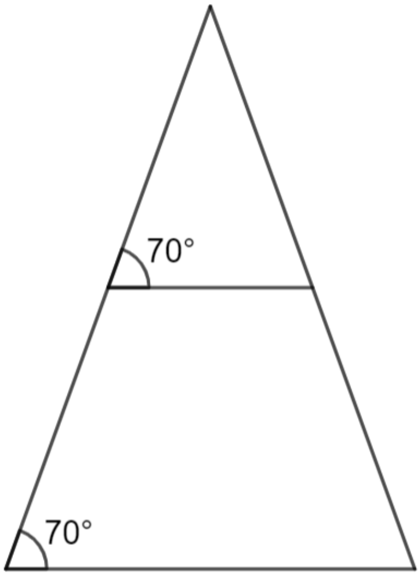
13. Visa att triangeln ACD är likformig med BCD.

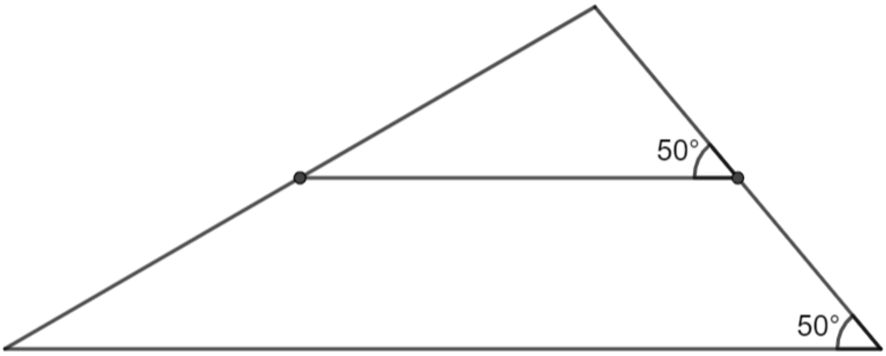


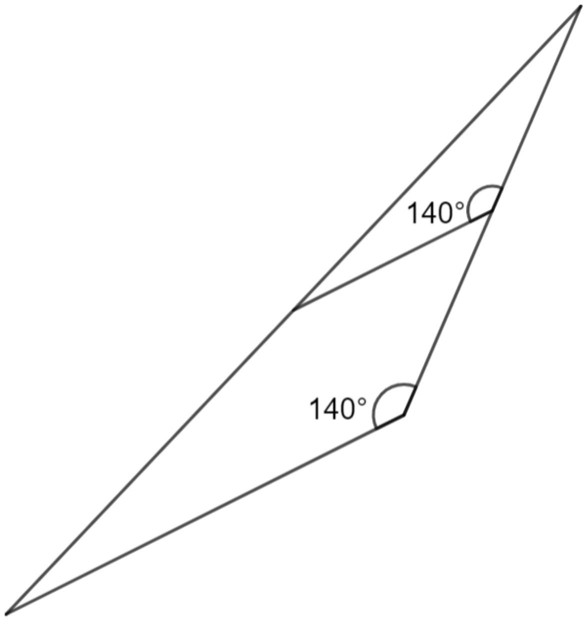
Bilaga 7 – Elever. Fas 3. Induktiv vs. Deduktiva bevis.

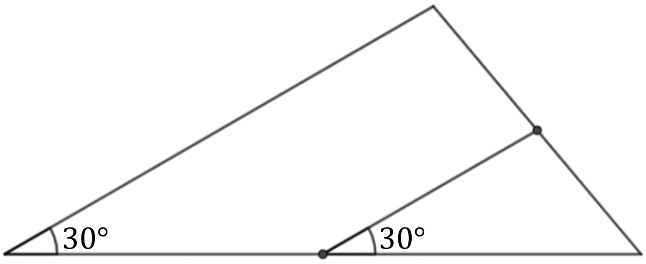
Nasir vill undersöka om följande påstående stämmer för alla trianglar:
I vilken triangel som helst så gäller det att en linje som kopplat ihop mittpunkterna av två av sidorna är parallell med den tredje sidan.

Nasir ritade upp olika trianglar och testade påståendet.



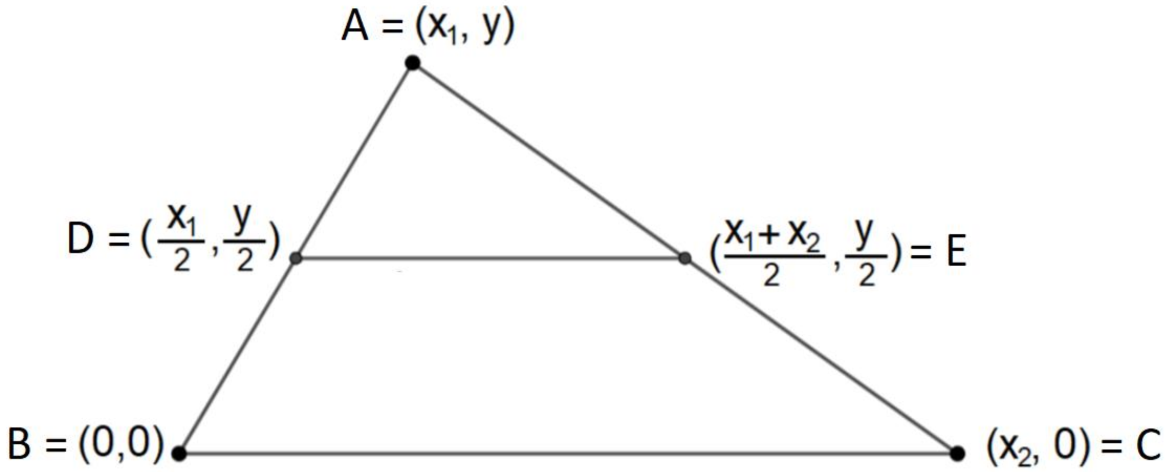






Nasir mätte vinkel för varje fall med en gradskiva. Eftersom vinklarna alltid är lika stora för varje fall så är linjen parallell med den tredje sidan. Nasir tänker då att påståendet alltid stämmer.

Nasirs vän, Astrid, väljer dock att visa att påståendet stämmer på ett annat sätt. Hon gör på följande vis:



Rotera triangeln så att två av hörnen ligger på x-axeln. Ge sedan triangelns hörn koordinater som i figuren ovan.

Mittpunktsformeln ger koordinaterna för mittpunkterna.

k-värdet för linje BC: $k_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0 - 0}{x_2 - 0} = 0$

k-värdet för linje DE: $k_2 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{y}{2} - \frac{y}{2}}{\frac{x_1 + x_2}{2} - \frac{x_1}{2}} = \frac{0}{\frac{x_2}{2}} = 0$

Linjerna har samma k-värde, så de är parallella.

Bilaga 8 – Lärarenkät.

Examensarbete: Hur lärare bedömer och redovisar lösningar

Hej!

Jag är en ämneslärarstudent vid Göteborgs Universitet som skriver ett examensarbete inom matematik. Syftet med denna enkät är att få mer kunskap om hur lärare bedömer elevlösningar samt hur de redovisar egna lösningar till ett problem. Sagt med andra ord så undersöks "vad som är en bra lösning till ett givet problem och varför?".

Autentiska elevlösningar har samlats in där eleverna löst en modifierad version av uppgift 15, NP Ma2b VT15. Tre av dessa har valts ut och du ska bedöma dessa och sedan rangordna dem. Enkäten samlar även in data om hur en lärare själv hade presenterat en lösning till uppgiften på en tavla inför helklass; främst om en hade motiverat vissa steg verbalt eller skriftligt.

Totalt sett är det 4 frågor. Baserat på en pilotstudie på 9 lärarstudenter och en verksam lärare så tar enkäten 5 - 20 minuter att genomföra (medelvärde ca. 10 minuter).

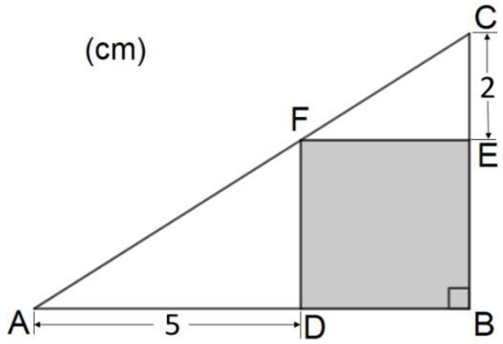
Svaren kommer enbart användas för denna studie och alla deltagare är anonyma. Ditt deltagande är frivilligt. Genom att lämna in enkäten samtycker du till att medverka anonymt i studien.

Jag vill tacka dig för att du klickat dig vidare till denna sida! Tack så otroligt mycket för att du hjälper mitt examensarbete bli bättre!

Om du vill ta del av resultatet, skicka ett meddelande till gusrobinbj@student.gu.se.

Uppgiften

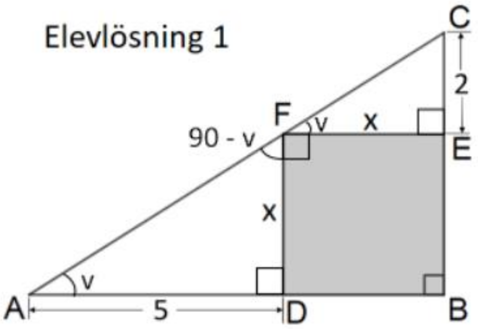
I en rätvinklig triangel ABC finns en grå kvadrat BEFD inritad. Sträckan AD är 5 cm och sträckan CE är 2 cm. Se figur.



Visa att den grå kvadratens area är 10 cm^2.

Elevlösningar till uppgiften

Elevlösning 1



Vinklarna vid F är:

$90 - v + 90 + y = 180$

$y - v = 0$

$y = v$

Trianglarna är likformiga

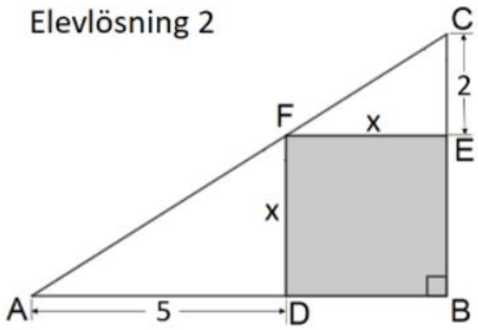
så: $\frac{x}{2} = \frac{5}{x}$

$x^2 = 10$

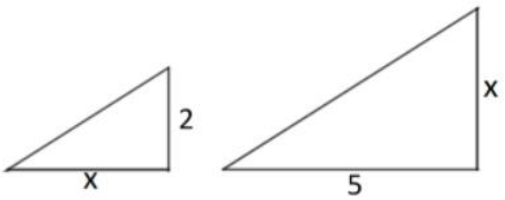
$x = \sqrt{10}$

$\sqrt{10} \cdot \sqrt{10} = 10$

Elevlösning 2



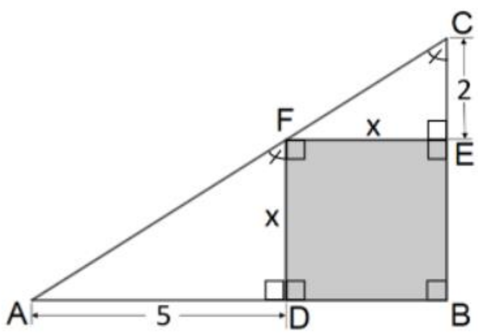
De två små trianglarna är likformiga. Detta ger:



$\frac{x}{2} = \frac{5}{x}$

$x^2 = 10$

Elevlösning 3



Det ska visas att $x^2 = 10$

Linje DF och BC är parallella pga. de likbelägna vinklarna, ∠ADF och ∠ABC, är samma.

⇒ ∠AFD = ∠ACB (likbelägna vinklar vid parallella linjer).

△ADF och △CEF har två vinklar gemensamt så de är likformiga.

△ADF ~ △CEF ⇒ $\frac{|DF|}{|AD|} = \frac{|CE|}{|EF|}$ alltså, $\frac{x}{2} = \frac{5}{x} \Leftrightarrow x^2 = 10$

v.s.b.

Rangordna elevlösningarna baserat på vilken du tycker är bäst. Du kan välja att två (eller fler) lösningar är lika bra. *

	Bäst	Näst Bäst	Sist
Elevlösning 1	○	○	○
Elevlösning 2	○	○	○
Elevlösning 3	○	○	○

Förklara hur du tänkte när du rangordnade elevlösningarna. Varför är en lösning bättre än en annan (eller inte)? *

Your answer

Om du svarade att vissa steg tas verbalt: ge ett exempel på ett steg som du hade motiverat verbalt.

Long-answer text

Bilaga 9 – Intervjuschema för eleverna.

Intervjuschema / Intervjuguide – Elever
Kortversion. För varje uppgift:

- (D) Introducera uppgift
- (W) Låt elever lösa uppgiften skriftligt på egen hand.
- (W) Be eleverna beskriva sin lösning verbalt.
- (W och B) Ställ följdfrågor.
- (Q) Fråga hur säkra elever är på sin lösning. Skala 1 – 5 (inte säker alls till helt säker /nästan helt säker). Om under fem, fråga varför.
- (R) Fråga om eleven kan tänka sig några motexempel.

Till sista fasen ersätts den skriftliga lösningen med att elever läser igenom på egen hand. Intervjuaren ska också specifikt kolla av att eleven upplever att hen förstått beviset. Det finns också ett antal konkreta frågor som måste ställas för att kolla om elever accepterar induktiva bevis alternativt ser deduktiva bevis som induktiva.

För att förtydliga vilka frågor som får ställas under respektive del bifogas följande avsnitt från Bromley (1986). Nedan är en egen översättning av vilka frågor som varje del i Toulmins modell motsvarar:

> C: svarar på frågorna ”vad säger du?”, ”vad är det du påstår?”, ”vad är din slutsats”?
> D: svarar på frågorna ”vad är det du utgår från?”, ”vad har du för bevis?”, ”vad för data har du?”
> W: svarar på frågorna ”hur kom du fram till det?”, ”vad är kopplingen?”, ”hur drar du den slutsatsen?”
> Q: svarar på frågorna ”hur säker är du?”, ”hur stor tillit ger du till ditt påstående?”, ”hur sannolikt är det att det du säger stämmer?”
> R: svarar på frågorna ”vad är det vi antar?”, ”under vilka omständigheter skulle argumentet fallera?”, ”vilka förbehåll har du?”
> B: svarar på frågorna ”vad för bevis har du?”, ”vad är rättfärdigandet för ditt resonemang”, ”finns det något stöd för den koppling du gör?”
>
> (Bromley 1986, s.195)

En intervjuare bör hålla sina frågor likt dessa men mer specifika följdfrågor kan läggas till ifall behov uppstår (såsom intressanta elevtankar).

Nedan följer en mer detaljerad beskrivning av intervjuschemat. Vissa frågor inkluderade konkreta frågeställningar som härletts ur litteraturen.

Introduktion

- Beskriv upplägget och hur lång tid undersökningen förväntas ta (90 - 120 minuter).
- Beskriv hur deras data kommer behandlas och användas.
- Beskriv rättigheter. Dvs. beskriv informationskravet, samtyckeskravet, konfidentialitetskravet, och nyttjandekravet.
- Samla in deltagarnas uttryckliga samtycke.
- Beskriv vilken utrustning de får använda.

- Minimera variation i de variabler[124] som kan kontrolleras (hur en använder instrumenten[125]).
- Förklara upplägget av intervjun (tre delar) för respondenterna.

Beskriv även att deras data kommer anonymiseras och enbart hanteras direkt av undersökaren. Vissa uppgifter kommer presenteras till lärare för bedömning, men de kommer skrivas om med undersökarens egen handstil. Beskriv för respondenten att hen alltid har rätten att dra sig ur intervjun under vilket skede som helst. Deras data kommer inte användas.
Beskriv vilken utrustning de får använda: ”Jag har lagt fram lite saker som du kan använda om du vill. Vi har en linjal, en sax, ett formelblad (Låt eleven ta sig en titt på den), massa papper, pennor och en gradskiva.”
”Vet du hur man använder en gradskiva?” Rita upp ett enkelt fall (45 grader).
Om ja, be dem testa den.
Om nej, visa hur en gör och låt sedan eleven testa.
Fortsätt sedan med fas 1.
Fas 1 – Van Hieles test.
Inled med:
”I denna första del ska vi titta lite generellt på frågor inom geometri.”
Lägg upp van Hiele delen. (fas 1)
”Du ska svara på de frågor som finns på detta blad. Jag vill att du fyller i ett svar och sedan motiverar ditt svar. Det här är inget test så du får gärna ställa frågor. Om något verkar oklart eller otydligt så fråga gärna. Jag kommer nog undvika att säga hur du ska göra dock.”
”Känner du att du har förstått uppgiften?”
Invänta svar.
Läs upp frågan på bladet. Låt sedan respondenten ta sig an uppgifterna. Ställ följdfrågor om något intressant uppkommer.
Det finns vissa specifika frågor som kan vara bra att ha i åtanke, beroende på vilken fråga vi tittar på.
Om studenten inte känner att något alternativ passar in; ”Jag kan ha missat ett alternativ som du hade velat ha med. Det är ok att lägga till alternativ.”

Tabell 8. Beskriver vissa följdfrågor till specifika elevsvar för varje uppgift i fas 1.

Fråga	
1	Eleven ser inte sista alternativet som en triangel. Fråga inte direkt varför, men fråga varför eleven svarat som hen gjort. Eleven ser första alternativet som en triangel. Fråga hur hen tänkt om det inte framgått. Eleven vill välja ett alternativ som inte finns (som att det finns tre korrekta svar). Tillåt det, men fråga varför.

[124] Betydelsen av ord, vilka mätinstrument och verktyg eleverna får använda, och hur de används.
[125] Goldins principer.

2	Fråga oberoende av svarsalternativ varför hen har gjort det val hen gjort. Fråga om eleven känner sig säker på sitt svar. (skala 1 – 5). [inte säker – helt säker). Om osäker, (under 4) fråga varför hen känner sig lite osäker. Fråga om eleven kan tänka sig några motexempel till sitt svar.
3	Innan eleven försöker lösa uppgiften, fråga om eleven förstår vad ”AB” betyder. Om eleven har svårt med uppgiften, be hen rita nya linjer. Gör en notis.
4	Fråga oberoende av svarsalternativ varför eleven gör det val hen gör. Fråga hur eleven definierar en rektangel. Om eleven verkar osäker på vad frågan innebär, fråga vad hen anser vara en rektangel.
5	Om eleven är osäker, fråga vad en bisektris är (ledande fråga). När eleven drar en slutsats, fråga om hen kan dra någon annan slutsats. Om hen drar en till slutsats, fråga hur säker eleven är att alla slutsatser stämmer. (Skala 1 – 5). Om osäker, (under 4) fråga varför hen känner sig lite osäker. Fråga om eleven kan tänka sig ett motexempel mot den slutsats hen dragit.
6	Fråga om eleven förstår vad ”X implicerar Y” betyder.

	Fråga hur säker eleven känner sig på sitt svar (skala 1 – 5). Om osäker, fråga varför hen känner sig lite osäker. Fråga om eleven tror att det finns något motexempel till svaret (titta på det specifika svaret och vänd dig till det). Försök inte implicera att något svar är korrekt. En elev kan ha en konsekvent definition av en rektangel som leder ner till att INGET av påståendena är korrekta.

Låt pappret med svar ligga kvar (och samla in det vid slutet).

Fas 2 – Uppgifter inom bevisföring
Lägg fram nästa fas (2).
”Du ska nu jobba med uppgifter som handlar om att ’visa” att någonting stämmer.”
”Du får göra detta hur du än vill med det som finns tillgängligt, såsom penna, sax, gradskiva, linjal eller formelblad”.

”Du ska skriva ner lösningen på papper. Skriv så att lärare kan förstå hur du tänkt och helst så bra som du gör på ett prov. När du känner dig färdig talar vi om din lösning. Jag kommer ställa några frågor sedan”.

Var uppmärksam på hur eleven löser uppgiften och om den får besvär under något led. Undersökaren ska INTE hjälpa eleven lösa uppgiften. Däremot får vi likt tidigare besvara förtydligande frågor.

Vänta med att ställa förtydligande frågor tills slutet när vi kollar igenom lösningen en gång till.

När eleverna känner sig färdiga, fråga eleven om hen känner att hen är nöjd med sin lösning. Även för ett prov.

Be eleven beskriva sin lösning.

Fråga sedan om hen känner sig säker på lösningen. Om eleven inte förstår frågan, säg att det är på en skala 1 – 5.

Om eleven vill ändra sin lösning, ta en bild av lösningen som den är, och låt sedan eleven ändra den.

Fortsätt med nästa uppgift och repetera de tidigare stegen.
Om eleven kör fast, agera som ett stöd för elevens tankar. Försök undvika att ge direkt hjälp såvida det inte är de två sista frågorna (den ena är en A-uppgift på nationella proven). Det enda stöd som får ges på de sista två är följande:

1. Du kan rita en ny linje.
2. Försök rita en triangel.
3. Vad är en bisektris? Vilka vinklar menar de?

Det finns några specifika frågor som bör ställas:

Tabell 9. Specifika frågeställningar att ha i åtanke inför fas 2.

Fråga	
7	Om eleven utelämnat en motivering (W), fråga hur hen kom fram till svaret. Fråga om eleven kan tänka sig något motexempel där två parallella linjer inte har samma alternatvinkel (peka på dem).
8	Påminn eleven att hen kan använda alla verktyg tillgängliga till hen. Om eleven har svårt att börja, be eleven rita en likbent triangel. Gör en notis. Observera om eleven inte markerar eller på något sätt tydliggör vinkeln mellan basen och höjden.
9	Om eleven försöker mäta och upptäcker att vinklarna är konstiga; ”figuren är inte skalenlig, såsom du själv upptäckt”. ”Det kommer behövas en annan metod för att lösa denna uppgift.”. När eleven är klar, peka på uppgift 7 och be eleven jämföra uppgifterna. Fråga eleven vad skillnaden är mellan dem. Invänta svar. Ställ följdfrågor (öppet). Försök nu undersöka elevens ”backing” till svaren i uppgift 7 och 11. Alltså, i uppgift 7 använde du att parallella linjer gör att alternatvinklarna, dvs. dessa vinklar (peka på dem) blir samma. Hur säker är du på att det stämmer? (skala 1 -5). Varför tror du att det stämmer? Kan du tänka dig något motexempel?

	Om eleven verkar vara tillgänglig till att diskutera axiom, ställ följande fråga: Slutligen; ”det verkar som det stämmer, men har du någonsin sett ett bevis för det?” Om eleven känner sig osäker, försök förtydliga frågan.
10	Påminn eleven att hen kan använda alla verktyg tillgängliga till hen. Om eleven har svårt att börja, be eleven rita en likbent triangel. Gör en notis. Observera om eleven inte markerar eller på något sätt tydliggör vinkeln mellan basen och höjden.
11	Denna uppgift ska elever som är säkra på egenskaper hos likbenta trianglar klara av på egen hand. Ställ enbart förtydligande frågor. Efter lösningen har presenterats (eller som en följdfråga): Fråga elever om de anser att dessa två påståenden är ekvivalenta: En triangel är likbent är ekvivalent med att basvinklarna är lika stora.
12	För att minska variation, fråga om eleven känner till något sätt att veta att två trianglar är likformiga. (Innan lösning) Fråga om eleven förstår vilka trianglar som ska visas likformiga. ”Vilka trianglar menar de?” Ställ förtydligande frågor om hur eleven vet att två trianglar är likformiga. Om den ger ett förslag, fråga om den vet något annat sätt. Om eleven känner sig osäker efter ett tag, ge ett förslag att markera ut en vinkel

	(exempelvis vinkeln A). Ge inte mer än detta. (Notera att du hjälpt).
13	Om eleven känner sig osäker efter ett tag, ge ett förslag att markera ut en vinkel (exempelvis vinkeln A). Ge inte mer än detta. (Notera att du hjälpt).

Fas 3 – Induktiv vs. deduktiv
Kort sammanfattning:

- Inled med Nasir (se senare i Schemat)
- Inled med Astrid.
- Be eleven jämföra lösningarna med varandra.
- Jämför med uppgift 8, sedan Pythagoras sats (ifall eleven inte ser poäng med uppenbara förhållanden).
- Avsluta med att fråga respondenten om vad hen anser ett bevis vara.
- Fråga om det finns något syfte/poäng med att de uppgifter vi gjort inom bevisföring.

INTRODUKTION
Inled med:
”I denna sista del kommer vi titta på två olika personers argument för samma påstående. Vi ska ta oss en titt på båda argumenten. Vad vi ska diskutera här är om du tycker att dessa personer har visat att påståendet stämmer eller inte.”

NASIR
Visa första argumentet (Nasir), fas 3. Läs upp den tillsammans med eleven.
”Känner du att du förstår argumentet?”
Om svaret är nej, fråga varför? Försök förtydliga.
Om ja, be respondenten sammanfatta argumentet själv.

Ställ förtydligande frågor om elevens sammanfattning, ifall något verkar intressant.

Fråga om respondenten anser att Nasir lyckats visa att påståendet stämmer.
Om ja, fråga respondenten hur säker hen känner sig om att det stämmer.
Om eleven är osäker på vad frågan betyder, säg att det är på en skala på 1 – 5.

Om eleven inte ändrar sig, be eleven förklara varför hen känner sig säker / osäker.

Fråga respondenterna om de anser att påståendet stämmer för att Nasir testat olika typer av trianglar.

Fråga också om hen anser att om påståendet stämmer för en typ av triangel så stämmer det för alla trianglar av den typen. Exempelvis, peka på den trubbiga triangeln; stämmer det för denna trubbiga så stämmer det för alla trubbiga trianglar.

Om ja, fråga hur säker hen känner sig om detta.
Är det alltid fallet att det fungerar eller finns det motexempel?

Om något nytt dyker upp, följ det resonemanget och försök förtydliga det. (Öppet)

Om nej, fråga respondenten hur säker hen känner sig om att det stämmer.
Om eleven är osäker på vad frågan betyder, säg att det är på en skala på 1 – 5. (inte så säker till helt och hållet säker).
Om eleven inte ändrar sig, be eleven förklara varför hen känner sig säker / osäker. Förtydliga ifall det behövs med varför hen inte litar på argumentet.

Om respondenten anser att det inte är säkert för man inte har testat alla trianglar, be respondenten förtydliga.

Om hen pekar på speciella typer av trianglar, såsom liksidiga, eller rätvinkliga trianglar, rita en av dessa. Be respondenten testa själv.

Fråga sedan igen om respondenten känner att påståendet är bevisat.

Om ja, gå till det tidigare avsnittet som behandla ”om ja”.

Om nej, fråga varför? Här får sedan intervjun bli mer öppen.

Om hen anser att mätningar inte räcker för att visa att påstående stämmer, fråga varför?

Om något annat dyker upp, följ resonemanget och försök förtydliga det. (Öppet).

ASTRID
Visa sedan det andra beviset. Läs upp det högt.
Fråga först:
”Känner du att du förstår argumentet?”
Om svaret är nej, fråga varför? Försök förtydliga. Om det är rotationen, utgå istället från att en sida ÄR x-axeln, visa med några exempel från Nasirs blad.
Om ja, be respondenten sammanfatta argumentet själv.

Om respondenten anser att det bara funkar för ett fall, be respondenten förtydliga. Handlar det om att det är specifikt den triangeln eller är det för alla trianglar?

Om ja, be respondenten sammanfatta argumentet själv.

Fråga om respondenten anser att Astrid lyckats visa att påståendet stämmer.
Om nej, fråga varför.
Om eleven är osäker på vad frågan betyder, säg att det är på en skala på 1 – 5. Fråga varför eleven gör den värdering hen gjort.

Om det inte kommit upp tidigare, fråga om eleven anser att Astrids bevis bara fungerar för den triangel som finns i bilden.

Be sedan eleven jämföra Nasir och Astrids lösning. Ställ följdfrågor.

Fråga hur säker respondenten känner sig om att det stämmer.

Avsluta med denna sista fråga:
”Vi har nu tittat på flera olika sätt att visa att påståendet stämmer. När du ser frågan ’visa att..., vad anser du då frågan handla om?”
Invänta ett svar. Ge respons och följdfrågor om det finns något intresseväckande.
”Vad tycker du är ett bevis? Hur skulle du förklara det för någon annan?”
Vänta lite.
”Du kan använda de tidigare uppgifterna som stöd om du vill.”
Följ sedan respondentens svar och ställ lämpliga följdfrågor beroende på hur de svarar. Denna del är öppen.

Avsluta sedan med denna sista kedja av frågor:

”Vi har nu talat om en hel del uppgifter som handlar om att ”visa” och ”bevisa”. Tycker du det finns något syfte med att göra dessa uppgifter? Finns det någon poäng med det hela?”
Vänta på svar.
Efter svaret, eller om respondenten är osäker, förklara genom att peka tillbaka till uppgift 8.
”Här arbetade vi med en likbent triangel och en höjd. Om vi ritar det ser vi att triangeln verkar delas mitt itu. Tycker du att det fanns någon poäng med uppgiften?
Samla in svar.
Om respondenten upplever att det inte finns någon poäng pga. påståendet är ”uppenbart”, fråga om något som inte är lika uppenbart. Exempelvis Pythagoras sats i formelbladet. Skulle det finnas en poäng att bevisa att Pythagoras sats stämmer?
När respondenten har svarat, ställ följdfrågor om det kommer upp något intressant.
Presentera sedan syftet med denna fas.