Vad är större: En *Quarter Pounder* eller en *Third-Pound* hamburgare?

En översikt om elevers missuppfattningar och svårigheter beträffande bråk och hur lärare kan motverka dem

Adam Haglund, Joakim Edoff &
Yuli Brandebäck

Ämneslärarprogrammet med inriktning mot
arbete i grundskolans årskurs 7–9
Förstaämne: matematik

Uppsats/Examensarbete:	15 hp
Kurs:	L9MA2A
Nivå:	Grundnivå
Termin/år:	VT/2022
Handledare:	Jan Stevens
Examinator:	Johan Wästlund

Nyckelord: Bråk, missuppfattningar, svårigheter, undervisning, heltalsbias, del-helhet, mätning, stambråk, konceptuell förståelse, Egypten.

Abstract

Fractions, and calculations involving them, appear to be a difficult topic for students to grasp. Therefore, the purpose of this study is to investigate what secondary school teachers can do to improve their teaching practice regarding fractions. This paper is a literary study based on fraction related searches in academic data bases. It examines how fractions can be understood, and what types of misconceptions and difficulties that can be found among students all the way up to upper secondary school. It also presents what teachers, according to different research, should do to improve their teaching practice regarding fractions and how fractions were dealt with in ancient Egypt. We have found that students have several fraction-related misconceptions and difficulties, such as *whole number bias* or *gap thinking*. It appears that this is due to focusing too much on procedures instead of quality education focusing on building conceptual understanding. We conclude that education should highlight the differences between whole numbers and fractions, and focus on the *measurement aspects* of fractions rather than on *part-whole relationships.* A road to success for students struggling to understand fractions could be visualizing unit fractions and focusing on the sizes of unit fractions in relation to the number line, even when working with non-unit fractions.

Förord

Vi vill börja med att tacka vår handledare Jan Stevens för hans engagemang. Han har bland annat hjälpt oss hitta bra källor och att utveckla vår text och våra tankegångar. Det faktum att han fortlöpande har läst och kommenterat vårt arbete och regelbundet stämt av arbetets fortgång har varit mycket värdefullt. Vi vill också tacka Peter Nyström, Nationellt Centrum för Matematikutbildning, som genom sin didaktikundervisning inspirerat oss till att skriva om just elevers missuppfattningar och svårigheter med bråk. Genom hans undervisning har vi bland annat fått aha-upplevelser kring användandet av cirkelskivor och rektanglar i bråkundervisningen. Vi vill även tacka Jonathan Engstad för korrekturläsning och våra opponenter, Alicia Jogdal, Sekia Abdi och Vanessa Adlemo, för värdefulla kommentarer. Slutligen vill vi tacka varandra för trevliga fikastunder och utvecklande diskussioner.

Innehållsförteckning

1 Inledning

Att bråk är svårt fick McDonald's konkurrent A&W erfara när de på 1980-talet lanserade sin *Third-Pound Burger*, med $\frac{1}{3}$ *pound* kött, till samma pris som McDonald's *Quarter Pounder*, med $\frac{1}{4}$ *pound* kött. Trots att A&Ws hamburgare föredrogs i blindtester uteblev kunderna (A&W Restaurants, u.å.; Conradt, 2016). Genom intervjuer framkom att kunder menade att de fick mer kött för pengarna hos McDonald's: "*Why should we pay the same amount for a third of a pound of meat as we do for a quarter-pound of meat?*" (anonym citerad i A&W Restaurants, u.å.).

Under tiden på ämneslärarprogrammet har vi på kurser i matematik och matematikdidaktik fått höra att elever i grund- och gymnasieskolan har svårigheter med bråk. Svårigheterna, deras orsak och hur de kan motverkas har dock inte diskuterats närmare. Vi har även under VFUer, som lärarvikarier och som läxhjälpare fått se dessa missuppfattningar och svårigheter med egna ögon. I Facebook-gruppen *Matematikundervisning* har vi noterat att gymnasielärare efterlyser mer utvecklad bråkförståelse hos elever som börjar gymnasiet. Och också att högstadielärare gör det samma hos elever som börjar högstadiet. Mot denna bakgrund har vi motiverats att ta reda på vad vi kan göra i vår framtida bråkundervisning för att motverka bråkrelaterade missuppfattningar och svårigheter.

Varför bråkförståelse är viktigt adresseras inte uttryckligen av Skolverket i styrdokumenten. Enligt McIntosh (2008) har bråk numera inte någon framträdande roll i vardagen, men hon påtalar att god bråkförståelse möjliggör förståelse av tal i decimal- och procentform och också underlättar algebraförståelse. Det finns forskning som visar på korrelation mellan god bråkförståelse i tidiga skolår och generellt god förståelse och gott självförtroende beträffande matematik i senare skolår (Tian & Siegler, 2018). Det sistnämnda knyter an till syftet med matematikundervisningen, som enligt kursplanen för grundskolan bl.a. "*ska bidra till att eleverna utvecklar intresse för matematik och tilltro till sin förmåga [...]*" (Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet [Lgr11], 2019, s. 54).

Utifrån bl.a. McIntosh (2008) anser vi att god bråkförståelse innefattar följande:

- Att bråk är ett kontinuerligt fenomen och <u>inte</u> ett diskret fenomen som heltalen.
- Att bråk kan avse ett tal, men också ett förhållande eller del av en helhet.
- Att samma bråk kan visualiseras på många olika geometriska sätt.
- Att ett bråk kan skrivas på oändligt många olika sätt och att förlängning och förkortning därmed inte förändrar storleken.
- Att multiplikation och division med ett bråk både kan förstora och förminska.
- Att kunna avgöra vilket bråk som är störst/minst och korrekt placera dem på tallinjen.
- Att ett bråk kan skrivas i decimal- eller procentform och omvänt.
- Att kunna addera, subtrahera, multiplicera och dividera såväl heltal som bråk med bråk.

Innan vi tar oss an missuppfattningarna och svårigheterna, vill vi notera vad styrdokumenten säger om bråkundervisningen i svensk skola. Enligt både nuvarande och från den 1 juli 2022 gällande kursplan ska bråk introduceras på lågstadiet (Lgr11, 2019; Matematik, 2020). Båda kursplanerna anger att det ska ske utifrån konceptet del av kontinuerlig eller diskret helhet med fokus på vad delarna kallas, hur de kan bestämmas, hur bråk kan illustreras eller skrivas, hur bråk förhåller sig till naturliga tal och hur bråk används i vardagen. Utgångspunkten ska vara enkla bråk som eleverna har en vardagsrelation till, vilket exemplifieras med $\frac{1}{2}$ och $\frac{1}{4}$ (Skolverket 2017, 2021). Även på mellanstadiet ska vardagskopplingen betonas, vilket sägs vara en viktig väg till förståelsen (Skolverket 2017, 2021). Då ska också de rationella talen och relationen mellan tal i bråk-, decimal- och procentform introduceras (Lgr11, 2019; Matematik 2020). Den kommande kursplanen betonar arbete på mellanstadiet med bråks beståndsdelar, men det gör inte den gällande kursplanen (Lgr11, 2019; Matematik 2020). Det arbetet ska bl.a. handla om täljaren och nämnarens betydelse och hur bråk och heltal kan delas upp i stambråk (Skolverket, 2021). Enligt nuvarande kursplan ska metoder för operationer med bråk introduceras på högstadiet (Lgr11, 2019). Den kommande kursplanen anger att enkel addition och subtraktion av liknämniga bråk ska introduceras redan på mellanstadiet (Matematik, 2020; Skolverket, 2021).

2 Syfte

Syftet med detta arbete är att underlätta för oss, och för andra, att undervisa om bråk i svensk årskurs 7–9 så att kända missuppfattningar och svårigheter synliggörs, motverkas och inte befästs. Vi har dessutom fördjupat oss kring procedurerna för bråkanvändning i det gamla Egypten.

Utifrån vårt syfte uppfattar vi ett problemområde som fångas av följande tre frågeställningar:

1. Vilka vanliga missuppfattningar och svårigheter har elever i svensk skola under högstadietiden beträffande bråk?
2. Varför föreligger de?
3. Vad kan och bör högstadielärare göra för att motverka och inte befästa missuppfattningarna och svårigheterna?

Vi är intresserade av de missuppfattningar och svårigheter som elever kan ha mer generellt. Frågeställningarna omfattar därför inte missuppfattningar och svårigheter kopplade till mer individspecifika svårigheter såsom dyskalkyli, *mathematics anxiety* eller andra särskilda matematik- eller språksvårigheter.

3 Material och metod

Detta arbete är en forskningsöversikt kring problemområdet (se 2). Det är också en fördjupning kring bråkanvändningen i det gamla Egypten. Nedan redovisas hur litteraturen har valts ut.

En översikt skaffades genom avsnitten om bråk i McIntosh (2008) och genom sökningar på Nationellt Centrums för Matematikutbildning (NCM) hemsida, Google Scholar och Göteborgs universitetsbiblioteks supersök. Det senare gjordes genom kombinationer av sökorden *bråk*, *svårigheter*, *missuppfattningar*, *undervisning*, *fractions*, *difficulties*, *misconceptions* och *teaching*. Detta gav följande bild: Det finns flera kända missuppfattningar och svårigheter. De är liknande över landsgränserna. I hög grad föreligger de från tidig skolålder och fortgår upp till (eller förbi) högstadieåldern. Anknytande forskning har bedrivits sedan åtminstone 1970-talet inom flera områden, bl.a. psykologi, kognitionsvetenskap och matematikdidaktik.

Mot denna bakgrund gjordes mer precisa sökningar. Först i databasen Education Research Complete. För att spegla problemområdet gjordes en boolesk sökning på *(fractions or rational numbers) and (misconceptions or misperceptions or misunderstanding or difficulties)*. Den begränsades till *peer reviewed* och utvidgades till *apply equivalent subjects*. Detta gav 872 träffar, vilka begränsades till 88 genom krav på *mathematics education* som *subject*. Rubriker och *abstracts* lästes. Träffar som inte huvudsakligen uppfattades handla om missuppfattningar och svårigheter beträffande bråk, och studier som inte var av relevans för undervisning på grundskolan, sorterades bort.

Därefter återstod 38 träffar. Bland dem fanns inga avhandlingar och, med ett undantag, ingen svensk forskning. Svenska (och finska) avhandlingar söktes därför i förteckningen på NCMs hemsida. Det ledde till tre träffar; Löwing (2016), Nagy (2017) och Sveider (2021).

Med något undantag är träffarna från 2000-talet. En översiktlig genomgång visade att de i stor utsträckning hänvisar till äldre forskning. Genomgången visade också att träffarna, utöver att hänvisa till varandra, ofta hänvisar till ytterligare litteratur. Detta primärt för att underbygga teorier eller resultat. Mot denna bakgrund antas äldre litteratur av nutida relevans vara återspeglad i träffarna. Mot samma bakgrund antas också åberopad annan litteratur i träffarna vara i linje med träffarna. Av denna anledning, och eftersom översikten begränsas av att göras inom ramen för examensarbete om 15 hp, uppfattas det som en rimlig avgränsning att inte ta del av denna ytterligare litteratur. Återkommande hänvisas dock särskilt till tre äldre artiklar, som därför uppfattas som mer grundläggande. De har därför sökts fram särskilt; Behr, Lesh, Post och Silver (1983), Behr, Wachsmuth, Post och Lesh (1984) och Kieren (1980).

Fokuset i denna studie är högstadietiden. En översiktlig genomgång av träffarna pekar på att förståelsen av missuppfattningar och svårigheter under högstadietiden förutsätter en bild av det som bärs med dit. Träffarna har därför beaktats utan åtskillnad utifrån åldersgrupp. Fokuset är också svensk skola. Träffarna har beaktats utan åtskillnad utifrån nationalitet eftersom missuppfattningarna och svårigheterna beskrivs som närmast universella. Träffarna har också beaktats utan sådan åtskillnad eftersom de i allt väsentligt avser länder som vi uppfattar skolkulturellt rimligt närliggande.

Utgångspunkten för Egyptenfördjupningen har primärt varit den bok handledaren rekommenderade; Thompson (1996). Komplettering har skett med ett skönsmässigt urval från träffarna vid sökningen på *Egypt* and fractions* and ancient** i Google Scholar. Sökningen kvalificerades med *peer reviewed* och *Egypt* i titeln och gav 450 träffar.

4 Resultat/litteraturöversikt

Utifrån utvald litteratur[1] redovisas här dels elevers missuppfattningar och svårigheter beträffande bråk och bakomliggande orsaker (se 4.3), dels vad lärare kan och bör göra för att motverka och inte befästa dem (se 4.4). Som bakgrund klargörs först några bråkrelaterade begrepp (se 4.1) och grunddragen i radikal konstruktivism (se 4.2).

Respektive studie introduceras i det sammanhang den primärt rör. Då anges bl.a. antalet elever i studien (t.ex. n=100) och också antalet skolor. För utländska studier anges vilken svensk årskurs som motsvarar studerade elevers ålder. När en studie åberopas i annat sammanhang noteras i vilket avsnitt den introducerades och vilken motsvarande svensk årskurs den avser. Det förekommer även litteratur som för resonemang utan att ha utfört en egen studie, t.ex. Ni och Zhou (2005).

4.1 Några bråkrelaterade begrepp

Med bråk avser författarna "uttryck av formen a/b eller $\frac{a}{b}$ " (Kiselman och Mouwitz, 2008, s. 40) där a och b är tal. Detta exkluderar bl.a. algebraiska bråk. Som kommer att utvecklas har bråkbegreppet flera betydelser (se 4.3.3). Ett bråk kan avse ett tal (dvs. ett tal i bråkform). Det kan också avse bl.a. ett förhållande mellan a och b, som kan vara samma slags eller olika storheter. Med bråk i det följande avses generellt ett tal om inget annat anges.

Utifrån Kiselman och Mouwitz (2008) noteras följande: I bråket $\frac{a}{b}$ är a täljare och b nämnare och generellt gäller b≠0. När a=1 kallas bråket stambråk. Liknämniga bråk har samma nämnare. Rationella tal är tal som är eller kan skrivas i bråkform med a och b som heltal. Bråk förlängs när a och b multipliceras med samma tal. Bråk förkortas när a och b divideras med gemensam delare. Dessa operationer förändrar inte förhållandet mellan täljare och nämnare eller talets storlek. Genom förlängning eller förkortning kan samma bråk skrivas på oändligt många sätt. Alla sådana bråk sägs vara ekvivalenta, varför $\frac{1}{2}$ och $\frac{9}{18}$ är olika namn på samma tal (Vretblad & Ekstig, 2006). Bråk i blandad form är uppdelat i heltalsdel och rest, varför $6\frac{2}{3}$ är blandad form av $\frac{20}{3}$ (Blandad form, 2017).

4.2 Grunddragen i radikal konstruktivism

Här ges en översikt över radikal konstruktivism eftersom litteraturen ofta uttalat eller underförstått utgår från den teorin. Begrepp från denna teori används återkommande i resten av arbetet, bl.a. kognitiva strukturer, konstruera och omkonstruera förståelse, generalisera från befintliga strukturer och kognitiv konflikt.

Enligt *radikal konstruktivism* anses individen dels aktivt *konstruera kunskap och förståelse* av världen i *kognitiva strukturer* utifrån sina erfarenheter, dels uppleva och förstå världen utifrån dessa strukturer (Skott, Jess, Hansen & Lundin, 2010; Säljö, 2017). Enligt Skott et al. (2010) och Säljö (2017) menar teorin att individen genom kognitiv anpassning strävar efter att förstå. Om nya erfarenheter är förenliga med befintliga strukturer antas kunskap och förståelse förbättras genom att bekräftas. Om nya erfarenheter inte är förenliga med befintliga strukturer antas individen antingen omedvetet bortse från skillnaderna och *generalisera från befintliga strukturer* eller erfara en *kognitiv konflikt*. En sådan konflikt innebär insikt om att strukturerna inte

[1] Med litteraturen avses i det följande utvald litteratur.

är till fullo dugliga. Om konflikten paras med missnöje över strukturernas duglighet samt upplevelsen att förståelse kring det nya är både relevant och möjligt att konstruera kan *omkonstruktion* ske. Då både utvidgas och förbättras kunskap och förståelsen. När dessa förutsättningar inte är uppfyllda kan konflikten i stället medföra att delar av befintlig struktur förkastas. Detta kan medföra avlärande (Skott et al., 2010; Säljö, 2017).

4.3 Elevers missuppfattningar och svårigheter beträffande bråk

Litteraturen betonar återkommande två orsaker till elevers missuppfattningar och svårigheter beträffande bråk: Dels att sådant som gäller för heltal omedvetet anses gälla också för bråk (heltalsbias), dels att samma bråk kan ha flera betydelser (t.ex. Gabriel, Coché, Szucs, Carette, Rey & Content, 2013; Sveider, 2021; Vamvakoussi, 2015; Van Hoof, Engelen & Van Dooren, 2021). Härtill noteras också några andra orsaker: De kan vara orsakade av skillnadsstänkande eller omvänd bias (González-Forte, Fernández, Van Hoof & Van Dooren, 2020). De kan även vara orsakade av för stort procedurfokus (bl.a. Moss & Case, 1999). De kan också vara orsakade av hur bråk visualiseras (t.ex. Moss & Case, 1999; Nagy, 2017; Sveider, 2021). Och de kan vara orsakade av bråknotationens komplexitet. Det senare exemplifieras med täljare och nämnares multiplikativa förhållande, att notationen kan leda tanken till två stycken heltal, och att det finns oändligt många ekvivalenta bråk (t.ex. Moss & Case, 1999; Nagy, 2017). Först redovisas det som rör heltalsbias (se 4.3.1) och skillnadstänkande och omvänd bias (4.3.2). Sedan redovisas det som rör bråks olika betydelser (se 4.3.3) och procedurfokus (se 4.3.4). Det som rör visualisering och notation berörs delvis i flera olika avsnitt.

4.3.1 Heltalsbias

Heltalsbias rör missuppfattningar och svårigheter med bråk som ett tal. Här förklaras begreppet heltalsbias (se 4.3.1.1), hur biaset avspeglar sig (se 4.3.1.2) och vad som uppfattas orsaka det (se 4.3.1.3). Därefter redovisas förekomst och förändring över tid (se 4.3.1.4). Undervisningsrekommendationer redovisas i senare kapitel (se 4.4).

4.3.1.1 Vad menas med heltalsbias?

Heltalsbias innebär, som tidigare nämnts, att individen omedvetet antar att det som gäller för heltal också gäller för bråk. Detta beror på omedveten generalisering från befintliga kognitiva strukturer pga. ofullständig bråkförståelse (Ni & Zhou, 2005; Vamvakoussi, 2015; Van Dooren, Lehtinen & Verschaffel, 2015).

Heltalsbias är en översättning av *whole number bias*. På svenska avser heltal positiva heltal (de naturliga talen) och negativa heltal (Kiselman & Mouwitz, 2008). I litteraturen används biasbegreppet bara på engelska; ibland som *whole number bias*, ibland som *natural number bias* (t.ex. Ni & Zhou, 2005; Vamvakoussi, 2015; Van Dooren et al., 2015). Av två anledningar uppfattar vi att samma fenomen avses oavsett beteckning: Alla exempel som ges avser positiva heltal. Och engelskans *whole numbers* kontrasteras ofta mot *integers*, där det förra avser positiva heltal och likställs med *natural numbers* och det senare avser alla heltal (Khan Academy, u.å.; Whole number, 2021). Vi föredrar *heltalsbias* framför det språkligt klumpigare *naturligt tal-bias*.

4.3.1.2 Hur avspeglas heltalsbias?

Att elever är påverkade av heltalsbias avspeglar sig vid lösandet av fyra slags bråkuppgifter (t.ex. Van Dooren et al, 2015; Van Hoof, Verschaffel & Van Dooren, 2015b):

- Bestämmandet av storleken på bråk (storleksordnande).

- Addition och subtraktion med bråk.
- Tolkning av effekten av multiplikation och division med bråk.
- Bestämmandet av vilka tal som kan finnas mellan två andra tal, dvs. hur tät eller kontinuerlig tallinjen uppfattas vara.

Ibland nämns även att heltalsbias avspeglas vid utplacering av bråk på tallinjen (Siegler & Pyke, 2013). Eller att det avspeglas genom räkning av icke-kongruenta delar i geometriska figurer, dvs. att en helhet inte antas behöva vara delad i lika stora delar vid bestämmande av del av helhet (Ni & Zhou, 2005). Dessa två sistnämnda aspekter lyfts dock inte i litteraturen i övrigt i samband med heltalsbias. Vi behandlar dem tillsammans med *bråk som del/helhet* (se 4.3.3.2.1) och *bråk som mätning* (se 4.3.3.2.4).

När en individ påverkad av heltalsbias ska storleksordna bråk, uppfattar den inte bråknotationen som en enhet där täljare och nämnares storlek och multiplikativa förhållande måste beaktas samtidigt, enligt bl.a. Gabriel et al. (2013) och Van Hoof et al. (2015b). I stället menar de att två separata delar – två heltal – uppfattas. Bråkets storlek antas därmed kunna avläsas direkt på samma sätt som ett heltals storlek. Vilken av delarna som fokuseras varierar. I liknämniga bråk antas korrekt att bråket med störst täljare är störst, men när bråk har samma täljare antas i stället bråket med störst nämnare vara störst, varför $\frac{5}{9}$ uppfattas större än $\frac{5}{7}$ (González-Forte et al., 2020). När bråk har olika täljare och nämnare kan bråket med störst täljare eller bråket med störst nämnare antas vara störst (Gabriel et al., 2013). Exempelvis kommer $\frac{3}{7}$ uppfattas större än $\frac{2}{8}$ vid fokus på täljarna men mindre vid fokus på nämnarna. Alternativt kan bråket med både störst täljare och nämnare antas vara störst, varför $\frac{5}{9}$ uppfattas som större än $\frac{2}{3}$ (González-Forte et al., 2020).

Vid addition och subtraktion medför heltalsbias att täljare och nämnare, av motsvarande skäl som vid storleksordnande, behandlas som separata heltal. Täljare adderas eller subtraheras därför med täljare och nämnare adderas eller subtraheras med nämnare (bl.a. Gabriel et al., 2013; Van Hoof et al., 2015b). Därför kan $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}$ uppfattas lika med $\frac{2}{6}$ (Gabriel et al., 2013). En variant är att alla delar adderas, varför $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$ beräknas som 1 + 1 + 3 + 4 = 9 (Powell & Nelson, 2020).

Vid tolkning av effekten av multiplikation eller division medför heltalsbias att effekten antas vara samma som vid multiplikation eller division av två heltal, som alltid förstorar respektive alltid förminskar (bl.a. Gabriel et al., 2013; Powell & Nelson, 2020). Vi exemplifierar med att $\frac{3}{4}\cdot 12$ antas vara större än 12 och $\frac{12}{\frac{3}{4}}$ antas vara mindre än 12.

Eftersom heltal är en diskret företeelse kan heltalsbias medföra att bråk också antas vara det, varför tallinjen inte uppfattas tät, dvs. inte uppfattas kontinuerlig (bl.a. Vamvakoussi & Vosniadou, 2004; Van Hoof et al., 2015b). Mellan $\frac{3}{8}$ och $\frac{5}{8}$ kan därför uppfattas finnas bara ett tal; $\frac{4}{8}$ (Van Hoof et al., 2015b).

4.3.1.3 Vad orsakar heltalsbias?

Det föreligger inte konsensus kring vad som orsakar heltalsbias (bl.a. Ni & Zhou, 2005; Van Dooren et al., 2005). Utifrån forskningen identifierar Ni och Zhou (2005) tre förklaringar: Hypotesen om den medfödda begränsningen, hypotesen om odifferentierad storlek hos tidig kvantitativ representation och hypotesen om inlärning. I litteraturen argumenterar bl.a. Ni och Zhou (2005) för den senare hypotesen och andra för en utvecklad variant, vilket också belyses nedan.

Enligt Ni och Zhou (2005) antas individen i *hypotesen om den medfödda begränsningen* ha en medfödd förspråklig mekanism (en kognitiv struktur) för antalsuppfattning. Den antas hjälpa redan mycket unga att särskilja diskreta mängder utifrån skillnad i antal. Den antas också stödja utvecklingen av räkneord och talförståelse. Samtidigt som mekanismen antas underlätta eller möjliggöra förståelse av de diskreta heltalen antas den försvåra förståelse av de kontinuerliga bråken därför att de inte uppfattas passa in (Ni & Zhou, 2005). De två viktigaste argumenten för hypotesen är enligt Ni och Zhou (2005) dels studier som visar att mycket små barn särskiljer diskreta mängder utifrån skillnad i antal, dels observerade svårigheter för små barn att förstå bråk samtidigt som de tidigt och enkelt utvecklar heltalsförståelse.

Hypotesen om odifferentierad storlek hos tidig kvantitativ representation innebär, enligt Ni och Zhou (2005), att den medfödda mekanismen inte alls särskiljer utifrån antal. I stället antas den särskilja utifrån skillnad i utbredning. Enligt Ni och Zhou (2005) är det viktigaste argumentet för denna hypotes att de studier som sägs stödja föregående hypotes, inte gör det. I stället anses studierna visa att mycket små barn bara särskiljer mellan mängder utifrån skillnad i yta eller volym. Föreligger ingen sådan skillnad anses barnen inte uppfatta någon skillnad utifrån antal (Ni & Zhou, 2005).

Utifrån den sistnämnda hypotesen menar Ni och Zhou (2005) att det inte är konceptuell förståelse kring storlek eller skillnad mellan diskreta och kontinuerliga mängder som är medfött svårt (begreppet *konceptuell förståelse* diskuteras i 4.3.4.1). De uppfattar i stället att det är de visuella likheterna mellan notationerna för heltal och bråk som är svårt. Denna observation är enligt dem utgångspunkt för *hypotesen om inlärning*, som de förordar. De förklarar den med att det är <u>när</u> och <u>hur</u> skillnader och likheter mellan heltal och bråk erfars som avgör hur bråkförståelsen konstrueras. Misslyckande i denna process riskerar att orsaka heltalsbias.

Betydelsen av <u>när</u> och <u>hur</u> utvecklas i teorier bakom flera av studierna av heltalsbias, s.k. *framework theories*. Enligt dem konstrueras inte förståelse fragmentariskt, utan i ett sammanhängande ramverk där förståelse kring senare erfarenheter försöks, i första hand, passas in i det befintliga ramverket (t.ex. Kainulainen, McMullen & Lehtinen, 2017; McMullen, Van Hoof, Degrande, Verschaffel & Van Dooren, 2018; Vamvakoussi, 2015; Vamvakoussi & Vosniadou, 2010; Van Dooren et al., 2015, Van Hoof et al, 2015b; 2021). Eftersom förståelse kring heltal konstrueras tidigt, och bråk generellt erfars senare, antas heltalsförståelse initialt prägla ramverket. Individen kommer därför försöka passa in bråkföreteelsen med, eller generalisera den utifrån, heltalen. Både nyss nämnd litteratur och Ni och Zhou (2005) betonar därför att frånvaron av nödvändiga kognitiva konflikter i undervisningen, kring skillnader mellan heltal och bråk, lägger grunden för heltalsbias.

4.3.1.4 Förekomst och förändring

Studierna om heltalsbias avser ibland någon och ibland flera aspekter av biaset och har delvis olika syften. Generellt pekas på följande: Heltalsbias är ett internationellt fenomen. Stora elevgrupper påverkas av alla aspekter av biaset från tidig skolålder, men påverkan avtar över tid. Dock är påverkan när det gäller tallinjens täthet mycket stor, och påverkan vid tolkning av effekten av multiplikation och division stor, även i hög skolålder. Vidare pekas på samband mellan de olika aspekterna av biaset eller mellan dem och förståelsen av hel- eller decimaltal. För att synliggöra heltalsbias används inkongruenta bråkuppgifter, ibland tillsammans med kongruenta. Vad det innebär och viss kritik redovisas först (se 4.3.1.4.1). Därefter introduceras studier om heltalsbias (se 4.3.1.4.2). Sedan redovisas slutsatser avseende respektive aspekt (se 4.3.1.4.3–4.3.1.4.6) och några andra slutsatser (se 4.3.1.4.7).

4.3.1.4.1 Kongruenta och inkongruenta bråkuppgifter

Enligt Van Hoof et al. (2015b) är *kongruenta bråkuppgifter* utformade så att korrekt svar uppnås oavsett om eleven har konceptuell förståelse eller är påverkade av heltalsbias. *Inkongruenta bråkuppgifter* är istället utformade så att korrekt svar bara nås utifrån konceptuell förståelse. De exemplifierar med att storleksordnande av $\frac{3}{8}$ och $\frac{7}{8}$ är kongruent eftersom heltalsbias i form av fokus på störst täljare leder till korrekt svar. De exemplifierar vidare att storleksordnande av $\frac{4}{5}$ och $\frac{4}{7}$ är inkongruent eftersom heltalsbias i form av fokus på störst nämnare leder till fel svar. Även storleksordnande av $\frac{4}{7}$ och $\frac{5}{10}$ inkongruent eftersom heltalsbias i form av fokus på störst täljare, på störst nämnare eller på samtidigt störst täljare och nämnare leder till fel svar (McMullen et al., 2018). Även att ange hur många tal som finns mellan $\frac{3}{8}$ och $\frac{5}{8}$ är inkongruent eftersom heltalsbias kan medföra att däremellan antas finnas bara ett bråk (Van Hoof et al., 2015b).

Lenz, Dreher, Holzäpfel och Wittmann (2020) menar att uppgifter som ska påvisa konceptuell förståelse ofta inte gör det på avsett sätt. De exemplifierar med att inkongruenta uppgifter vid storleksordnande av bråk kan lösas med outvecklad konceptuell förståelse om procedurkunskapen är god, nämligen med hjälp av en effektiv steg-för-steg-procedur för storleksjämförelse oavsett om förståelse kring proceduren finns eller inte.

4.3.1.4.2 Introduktion av studier

Påverkan av olika aspekter av heltalsbias har studerats hos amerikanska, australiensiska, belgiska, finska, grekiska, spanska, turkiska och tyska elever på olika sätt: Dels hos elever i viss årskurs vid ett tillfälle. Dels parallellt hos elever i olika årskurser vid ett tillfälle. Och dels hos samma elevgrupp över tid. Ibland har förståelsen av hel- eller decimaltal studerats parallellt. Vi har inte uppmärksammat studier explicit om heltalsbias hos svenska elever. Löwing, som tillsammans med andra utvecklat Skolverkets bedömningsstöd *Diamant*, har använt dessa diagnoser för att bl.a. synliggöra begreppsförståelse och räknefärdighet beträffande bråk i svenska skolor (Löwing, 2016). Hon gör i samband med det observationer som vi uppfattar kan avspegla heltalsbias. I 4.3.1.4.3–4.3.1.4.7 redovisas resultatet från studierna. För att underlätta läsningen av de avsnittet, som fokuseras på bara resultaten, introduceras studierna samlat här nedan.

Huruvida heltalsbias förekommer internationellt har studerats av McMullen et al. (2018). De studerade skillnader i påverkan beträffande tallinjens täthet och vid storleksordnande av bråk och decimaltal genom att vi ett tillfälle studera belgiska och finska elever i årskurs 4–6 genom skriftliga test med bara inkongruenta uppgifter (Belgien: n=353, fem skolor; Finland: n=258, två skolor).

Påverkan i tidig skolålder, motsvarande årskurs 1–5, har studerats av Van Hoof, Janssen, Verschaffel och Van Dooren (2015a) samt Van Hoof, Verschaffel och Van Dooren (2017):

- Van Hoof et al. (2015a) studerade samband mellan heltalsbias och tre olika förståelser av bråk, nämligen tallinjens täthet, storleksordnande samt tolkning av effekten av multiplikation. Vid ett tillfälle studerade de belgiska elever i årskurs 3 genom skriftliga test med både kongruenta och inkongruenta uppgifter (n=213; nio skolor). De motiverar valet av årskurs med att eleverna då antas befinna sig i inledningen av bråklärandet, varför förekomsten av biaset antas vara tydlig.
- Van Hoof et al. (2017) studerade samband mellan heltalsförståelse och heltalsbias vid storleksordnande och tolkning av effekten av multiplikation genom att vid ett tillfälle studera belgiska elever i årskurs 5 genom skriftliga test med både kongruenta och inkongruenta uppgifter (n=130; sex skolor).

Det har också studerats i studier om förändring över tid, som introduceras senare.

Påverkan i högre skolålder, från årskurs 6, har studerats av Aliustaoğlu, Tuna och Biber (2018), Clarke och Roche (1999), Prediger (2008), Siegler och Pyke (2013 samt Vamvakoussi och Vosniadou (2004):

- Aliustaoğlu et al. (2018) studerade bråkrelaterade missförstånd i allmänhet genom att vid ett tillfälle studera turkiska elever i årskurs 6 genom skriftliga test med både kongruenta och inkongruenta uppgifter (n=104; fem skolor).
- Clarke och Roche (1999) studerade vilka strategier som används vid storleksordnande av bråk genom att vid ett tillfälle studera australiensiska elever i årskurs 5 som under enskilda intervjuer fick redogöra för strategival (n=323; flera skolor).
- Prediger (2008) studerade konceptuell förståelse av multiplikation och division med bråk genom att vid ett tillfälle studera tyska elever i årskurs 6 som under enskilda intervjuer fick göra test och redovisa resonemang (n=81; en skola).
- Siegler och Pyke (2013) studerade hur bråkförståelse utvecklas över tid hos elever med lägre respektive högre generell matematikkunskap (enligt resultat från vissa nationella matematiktest) genom att vid ett tillfälle studera amerikanska elever i årskurs 6 och 8 genom skriftliga test (n=60, n=60; tre skolor).
- Vamvakoussi och Vosniadou (2004) studerade förekomsten av biaset beträffande tallinjens täthet när det gäller bråk och decimaltal genom att vid ett tillfälle studera grekiska elever i årskurs 9 som under enskilda intervjuer fick göra test och redovisa resonemang (n=16; en skola). De motiverar valet av årskurs med att eleverna då ska ha fått all grundläggande bråkundervisning.

Det har också studerats i studier om förändring över tid, som introduceras nedan.

Påverkan över tid har studerats av Van Hoof et al. (2015b), González-Forte et al. (2020), Vamvakoussi och Vosniadou (2010) samt ovannämnda McMullen et al. (2018). De studerade elever i olika årskurser samtidigt:

- Van Hoof et al. (2015b) studerade hur påverkan beträffande tallinjens täthet och vid storleksordnande och tolkning av effekten av multiplikation förändras över tid genom att vid ett tillfälle studera belgiska elever i årskurs 5, 7 och 9 samt gymnasiets år 1–2 genom skriftliga test med både kongruenta och inkongruenta uppgifter (n=213, n=230, n=239, n=302, n=305; 21 skolor).
- González-Forte et al. (2020) studerade hur påverkan av heltalsbias och vissa andra bias (se 4.3.2) vid storleksordnande förändras över tid genom att vid ett tillfälle studera spanska elever i årskurs 4–9 genom skriftliga test med både kongruenta och inkongruenta uppgifter (n=205, n=219, n=221, n=209, n=198, n=210; tio skolor).
- Vamvakoussi och Vosniadou (2010) studerade förekomsten av heltalsbias beträffande tallinjens täthet beträffande bråk och decimaltal genom att vid ett tillfälle studera grekiska elever i årskurs 6 och 8 och gymnasiets år 1 genom skriftliga test (n=181, n=166, n=202; sex skolor).

Påverkan över tid har också studerats av Kainulainen et al. (2017) samt Van Hoof, Degrande, Ceulemans, Verschaffel och Van Dooren (2018). De studerade samma elevgrupp över tid:

- Kainulainen et al. (2017) studerade hur påverkan vid storleksordnande av bråk och decimaltal förändras över tid genom att en gång per termin under tre påföljande terminer studera finska elever i årskurs 3–6 genom skriftliga test med bara inkongruenta uppgifter (totalt n=251; två skolor).

- Van Hoof et al. (2018) studerade förändringen över tid beträffande tre olika förståelser av bråk och decimaltal: tallinjens täthet, storleksordnande samt tolkning av effekten av multiplikation. De studerade även sambandet mellan förståelsen av bråk och decimaltal. De gjorde det genom att en gång per termin under tre påföljande terminer studera belgiska elever i årskurs 3–4 genom skriftliga test med bara inkongruenta uppgifter (n=113, n=88; fyra skolor).

Löwing (2016) gör en syntes av vid olika tillfällen utförda *Diamantdiagnoser* i olika elevgrupper och i olika kommuner. Hon drar slutsatser kring bråkförståelsen utifrån lösningsfrekvens på bråkuppgifter. Utöver att sätta fingret på vilken typ av bråkuppgifter som har låg lösningsfrekvens, förklarar hon inte direkt vari elevernas missuppfattningar och svårigheter ligger. Några undantag finns dock, där hon återger hur intervjuade elever har resonerat. Hon anger att analysen utgår från resultat från 2000–5000 elever från olika skolor per diagnos och årskurs. Det anges huvudsakligen inget närmare om de elevgrupper som omfattas.

4.3.1.4.3 Storleksordnande

Utifrån studierna om storleksordnande, se nedan, konstateras följande: Påverkan av heltalsbias vid storleksordnande är ett internationellt fenomen. Påverkan är betydande i tidig skolålder, avtar över tid, men är förhållandevis stor även i högre skolålder.

Att det inte är ett lokalt fenomen konstateras av McMullen et al. (2018) utifrån att ungefär hälften av både de belgiska och de finska eleverna var tydligt påverkade av biaset vid storleksordnande. De noterar att andelen var något lägre för de belgiska eleverna och också att andelen varierade något beroende på vilken del av elevgrupperna som jämfördes. De framhåller att deras slutsats överensstämmer med liknande, tidigare studie av belgiska och grekiska elever.

Avtagandet över tid konstateras i alla studier, förutom av Kainulainen et al. (2017). De sistnämnda uppfattar ingen egentlig förändring över studerad tid. González-Forte et al. (2020) konstaterar att påverkan är mycket hög i lägre skolålder, successivt avtar med ökad ålder, avtar snabbare under högstadieåren och är mycket låg hos elever i årskurs 9. Van Hoof et al. (2015b) uppfattar samma förändringstrend och noterar att påverkan är närmast obefintligt hos gymnasieeleverna. Van Hoof et al. (2018) konstaterar att påverkan successivt avtar över tid, men att förändringstakten varierar mycket mellan individer. De noterar särskilt att ungefär en femtedel tycks vara oförändrat starkt påverkade under hela den studerade tiden.

Att påverkan av heltalsbias är betydande redan i tidig skolålder konstateras av Van Hoof et al. (2015a), Van Hoof et al. (2018), Kainulainen et al. (2017), Gabriel et al. (2013; åk. 4–5; se 4.3.3.2.1), McMullen et al. (2018) och Van Hoof et al. (2015b, 2017). Bland annat noterar Van Hoof et al. (2015a) att lösningsfrekvensen sjunker från hög till ca 50% när uppgiften är inkongruent i stället för kongruent. Även Clarke och Roche (2018) nämner att heltalsbias förekommer, men inga specifika andelar.

Påverkan i högre skolålder må vara lägre än för yngre elever men den är ändå förhållandevis stor enligt Gabriel et al. (2013), Kainulainen et al. (2017), McMullen et al. (2018), Van Hoof et al. (2015b) och Aliustaoğlu et al. (2018). De sistnämnda konstaterar att nästan 40% av eleverna är tydligt biaspåverkade. Eftersom eleverna i deras studie fick motivera sina svar, framkom att storleksordnande av biaspåverkade elever skedde utifrån: *Vilket bråk har störst täljare? Vilket bråk har störst nämnare?* eller *Vilket bråk har störst både täljare och nämnare?*

I Löwing (2016) framgår att nästan 40% av eleverna i årskurs 5 inte kan korrekt storleksordna stambråk. Det anges dock inte om detta skulle avspegla heltalsbias eller andra svårigheter.

Nagy (2017) nämner att det finns forskning som pekar på att svårigheter att storleksordna föreligger när uppgiften är i vanlig bråknotation, men inte i samma grad när uppgifterna avser konkret representerade bråk, exempelvis illustrerade som andel av en pizza.

4.3.1.4.4 Addition och subtraktion

Utifrån studierna om addition och subtraktion, se nedan, konstateras att påverkan är förhållandevis stor i högre skolålder.

Aliustaoğlu et al. (2018) noterade att omkring 30% av eleverna i åk 6 adderar täljare med täljare och nämnare med nämnare när bråk är geometriskt visualiserade. De anger att elever gör samma fel även när bråken är skrivna med vanlig notation. De anger dock inte om andelen i det senare fallet är högre eller lägre. Enligt Siegler och Pyke (2013) adderar 14% av eleverna i deras studie på sätt som indikerar heltalsbias. Andelen påverkade var enligt dem högre i den lägre årskursen. Utan att det redovisas närmare, nämner Powell och Nelson (2000) att det bland universitetsstudenterna i deras studier förekommer fel vid addition och subtraktion av bråk som kanske kan förklaras av generalisering från operationer med heltal (se 4.3.4.2).

I Löwing (2016) framgår bl.a. att lösningsfrekvensen vid addition och subtraktion av bråk sjunker påtagligt för elever i årskurs 5, 8 och gymnasiets år 1 när bråken inte är liknämniga (olika mycket beroende på uppgift). Det anges dock inte om detta skulle avspegla heltalsbias eller andra svårigheter.

4.3.1.4.5 Tolkning av multiplikation och division

Utifrån studierna som rör effekten av multiplikation och division, se nedan, konstateras att påverkan av heltalsbias är betydande i tidig skolålder, avtar över tid, men är stor även i högre skolålder.

Påverkan av biaset i detta avseende avtar över tid på liknande sätt som vid storleksordnande enligt Van Hoof et al. (2015b, 2018). Van Hoof et al. (2018) konstaterar dock att förändringen tycks ske långsammare. De framhåller särskilt att mellan de första två mättillfällena, med en termins mellanrum, var påverkan i princip oförändrad.

Betydande påverkan i tidig skolålder konstateras av Van Hoof et al (2015a, 2015b, 2017). Van Hoof et al. (2015a) konstaterar att påverkan är klart större än vid storleksordnande och noterar bl.a. att lösningsfrekvensen sjunker från hög till omkring 30% när uppgiften inte är kongruent.

Stor påverkan i högre skolålder konstateras av Aliustaoğlu et al. (2018), Prediger (2008) och Van Hoof et al (2015b). Eftersom eleverna fick motivera sina svar i den förstnämnda studien, framkom att biaspåverkade elever utgår från principerna *Multiplikation förstorar!* och *Division förminskar!* Prediger (2008) noterar att knappt hälften av de elever som korrekt kunde utföra en multiplikation mellan heltal och bråk som ledde till en produkt som var mindre än heltalet samtidigt poängterade *Multiplikation förstorar!* Utan att det redovisas närmare nämner Powell och Nelson (2000) att denna uppfattning förhållandevis ofta förekommer också bland universitetsstudenterna i deras studier (se 4.3.4.2). De menar att detta kanske förklaras av generalisering från operationer med heltal.

4.3.1.4.6 Tallinjens täthet

Utifrån studierna om tallinjens täthet, se nedan, konstateras återigen att heltalsbias är ett internationellt fenomen. Dessutom konstaterades att denna påverkan av heltalsbias är betydande i tidig skolålder, avtar något över tid men är betydande även i högre skolålder.

McMullen et al. (2018) konstaterar att ungefär 75% av både de belgiska och de finländska eleverna är tydligt påverkade. De noterar att andelen påverkade varierade något beroende på vilken del av elevgrupperna som jämförs. På samma sätt som vid storleksordnande framhåller de att slutsatsen överensstämmer med liknande tidigare studie av belgiska och grekiska elever.

Ett något avtagande över tid konstateras av McMullen et al. (2018) och Van Hoof et al. (2015b, 2018). Van Hoof et al. (2015b, 2018) betonar dock att även om avtagande sker så är påverkan genomgående mycket hög i alla elevgrupper. Vamvakoussi och Vosniadou (2010) konstaterar delvis omvänd förändringstrend. De noterar att bara drygt 6% av alla elever konsekvent uppfattar att det mellan två tal på tallinjen finns oändligt många tal. De noterar att fler yngre än äldre elever ingår i denna grupp

Den stora påverkan i tidig skolålder konstateras av McMullen et al. (2018) och Van Hoof et al. (2015a, 2015b, 2017). Van Hoof et al. (2015a) noterar att bara ca 15% av eleverna <u>inte</u> var påtagligt påverkade.

Att påverkan är betydande i högre skolålder konstateras av McMullen et al. (2018), Vamvakoussi och Vosniadou (2004, 2010) samt Van Hoof et al. (2015b). Vamvakoussi och Vosniadou (2004) noterar att eleverna i princip genomgående uppfattar bråk som diskret företeelse.

4.3.1.4.7 Några andra slutsatser om heltalsbias

I ett par studier noteras särskilt att biaspåverkade elever agerar konsekvent. Utifrån flera studier antas den avtagande påverkan vara en följd av hur bråkförståelse successivt omkonstrueras och förbättras utifrån nya erfarenheter, vilket uppfattas vara en långsam, individuell och stegvis process. I några av studierna antas detta ske i viss ordning. Och i några av studierna uppfattas samband mellan omkonstruktionen och förståelsen av hel- eller decimaltal. Detta utvecklas delvis nedan och delvis i 4.4.2.6.2 och 4.4.3.2.

I tre studier konstateras att biaspåverkade elever i allt väsentligt genomgående löser inkongruenta uppgifter fel (Kainulainen et al., 2017; McMullen et al, 2018; Vamvakoussi & Vosniadou, 2010). Den mindre andel elever som inte agerar konsekvent antar Kainulainen et al. (2017) vara på väg att omkonstruera mer utvecklad bråkförståelse alternativt vara påverkade av andra slags missuppfattningar och svårigheter.

Van Dooren et al. (2015) menar att heltalsbias utövar mindre inflytande med ökad skolerfarenhet. De förklarar detta med att det intuitiva tänkandet, som antas färgat av heltalsbias, kontrolleras av analytiskt tänkande allt eftersom konceptuell förståelse utvecklas.

4.3.2 Skillnadstänkande och omvänd bias

González-Forte et al. (2020) pekar på forskning som visar att vissa individer har högre lösningsfrekvens på inkongruenta bråkuppgifter än på kongruenta, dvs. motsatt det som antas vid påverkan av heltalsbias. Utifrån sin studie uppfattar de att svårigheter att storleksordna bråk inte bara förklaras av heltalsbias. De menar att skillnadstänkande och omvänd bias är alternativa förklaringar. Vad det innebär och hur det avspeglas förklaras först (se 4.3.2.1). Därefter redovisas förekomst, förändring och slutsatser (se 4.3.2.2).

4.3.2.1 Vad menas med, och hur avspeglas, skillnadstänkande och omvänd bias?

Skillnadstänkande är en översättning av *gap thinking.* Skillnadstänkande är en strategi vid storleksordnande av bråk där bråket med minst skillnad (*gap*) mellan nämnare och täljare antas vara störst, varför $\frac{2}{3}$ (skillnad 3-2=1) antas vara större än $\frac{7}{9}$ (skillnad 9-7=2) (González-Forte et al., 2020). Skillnadstänkande kan medföra att $\frac{4}{5}$ och $\frac{6}{7}$ uppfattas lika stora (González-Forte et al., 2020).

Omvänd bias är en översättning av *reverse bias*. Omvänd bias är en strategi vid storleksordnande som liknar heltalsbias genom fokusering på bara nämnare, men här antas bråket med minst nämnare alltid vara störst (González-Forte et al., 2020).

4.3.2.2 Orsak, förekomst och förändring

I litteraturen studeras förekomst av skillnadstänkande och omvänd bias bara av González-Forte et al. (2020). I två andra studier konstateras dock att elever ibland motiverar felaktigt storleksordnande utifrån resonemang som innebär skillnadstänkande eller omvänd bias; Aliustaoğlu et al. (2018) samt Clarke och Roche (2018) (båda åk. 6; se 4.3.1.4.2). Clarke och Roche (2018) noterar att nästan 40% av eleverna i deras studie använde skillnadstänkande på vissa uppgifter.

För att samtidigt kunna studera förekomsten av skillnadstänkande, omvänd bias och heltalsbias använde González-Forte et al. (2020) en kombination av uppgifter som är kongruenta eller inkongruenta utifrån var och en av aspekterna på ett sätt de uppfattar möjliggör att påverkan av respektive aspekt kan särskiljas. Utifrån sin studie (åk. 4–9; se 4.3.1.4.2) konstaterar de att skillnadstänkande uppvisar omvänt mönster mot heltalsbias: Andelen som utgår från skillnadstänkande ökar successivt med skolålder samtidigt som påverkan av heltalsbias successivt minskar. De noterar att skillnadstänkande är den vanligaste orsaken till fel i de två högsta årskurserna men istället heltalsbias i de lägre. Utifrån detta antar de att skillnadstänkande utvecklas när bråkförståelsen omkonstrueras i samband med att heltalsbias överges, men att bråkförståelsen då alltjämt är bristfällig. När det gäller omvänd bias konstaterar de att andelen som är påverkade är relativt konstant över årskurserna, men klart lägre än för heltalsbias och skillnadstänkande. De noterar dock att andelen påverkade av omvänd bias ökar påtagligt i den högsta årskursen. Det sistnämnda antar de vara en konsekvens av då pågående omkonstruktion.

4.3.3 Bråkbegreppet mångfacetterat

I 4.3.1 och 4.3.2 behandlades missuppfattningar och svårigheter som rör bråk som ett tal. Nu behandlas missuppfattningar och svårigheter med anledning av att bråkbegreppet är mångfacetterat. Först redovisas olika sätt att förstå bråk på (se 4.3.3.1). Därefter redovisas hur anknytande missuppfattningar och svårigheter avspeglar sig (se 4.3.3.2).

4.3.3.1 Bråkbegreppets olika betydelser

I forskningen framförs alternativa, mer eller mindre lika uppfattningar kring bråkbegreppets olika betydelser, där en tongivande uppfattning presenterats av Kieren (1980) och modifierats av Behr et al. (1983) (Elias, Ribeiro & Savioli, 2020). Litteraturen utgår i allt väsentligt, uttalat eller underförstått, från Kieren (1980). Ibland med modifieringarna av Behr et al. (1983). Därför redovisas deras uppfattningar; först Kierens (se 4.3.3.1.1) och sedan Behrs et al. (se 4.3.3.1.2). Elias et al. (2019) är kritiska till Kierens uppfattning, som de menar för mycket fokuserar på hur matematiker tänker och utgår från radikal konstruktivism. De förordar ett alternativ med sociokulturellt avstamp, som diskuteras i 4.3.3.1.3.

4.3.3.1.1 Fem betydelser enligt Kieren

Kieren (1980) menar att utvecklad bråkförståelse konstrueras utifrån fem matematiskt och kognitivt delvis överlappande, delvis kompletterande sätt att förstå bråk; fem konstrukt: *Bråk som del/helhet*, *bråk som förhållande*, *bråk som kvot*, *bråk som mätning* och *bråk som operator*.

Konstrukt är benämningen på de konstruktioner som individen enligt konstruktivism använder för att sortera, förstå och förklara världen (Egidus, u.å.). När ett av konstrukten avses i det följande skrivs det kursiverat.

Utifrån Kieren (1980) förklaras konstrukten så här:

- *Bråk som del/helhet* (*part/whole*) beskriver förhållandet mellan ett visst antal lika stora delmängder och en kontinuerlig eller diskret mängd uppdelad i sådana delmängder. Vi exemplifierar med att när en kontinuerlig eller diskret mängd delats i fyra lika delmängder kan $\frac{3}{4}$ förstås som förhållandet mellan tre sådana delmängder och helheten.
- *Bråk som förhållande* (*ratio*) beskriver förhållandet mellan två storheter. Vi exemplifierar med att $\frac{3}{4}$ kan förstås som förhållandet mellan antalet hundar och antalet katter, där antalen kan vara exempelvis tre hundar och fyra katter eller femton hundar och tjugo katter. Kieren (1980) uppfattar *bråk som del/helhet* som ett specialfall av *bråk som förhållande*. Han betonar att båda handlar om förhållande, varför förståelsen av ekvivalenta bråk följer utifrån dem, eftersom ekvivalenta bråk speglar samma förhållande. Han betonar samtidigt att flera *bråk som del/helhet* kan bli föremål för meningsfull addition (givet samma helhet), men att så generellt inte är fallet med *bråk som förhållande*.
- *Bråk som kvot* (*quotient*) beskriver resultatet av en division. Vi exemplifierar med att $\frac{3}{4}$ kan förstås som resultatet när 3 divideras med (delas på) 4.
- *Bråk som mätning* (*measure*) återspeglar att en mätenhet delats upp i ett visst antal lika stora delar (anges av nämnaren) och att ett visst antal sådana delar sedan har lagts efter varandra från mätenhetens startpunkt (anges av täljaren). Han betonar att *bråk som mätning* har likheter med *bråk som del/helhet*, men att helheten, dvs. mätenheten, ofta bara är underförstådd. Vi exemplifierar med att $\frac{3}{4}$ kan förstås som talet som har den position på tallinjen som bestäms genom att först dela avståndet mellan 0 och 1 (mätenheten) i fyra lika delar och sedan lägga tre sådana delar efter varandra från positionen för 0 (mätenhetens startpunkt). Ett annat exempel är att $\frac{3}{1000}$ *m* (dvs. 3 *mm*) kan förstås som den sträcka som bestäms genom att först dela 1 *m* (mätenheten) i 1000 lika delar och sedan lägga tre sådana delar efter varandra från startpunkten för mätningen.
- *Bråk som operator* (*operator*) beskriver den mekanism som multiplikativt förstorar eller förminskar genom multiplikation följt av division eller omvänt. Vi exemplifierar med att $\frac{3}{4}$ tillsammans med 12, dvs. $\frac{3}{4}$ av 12 eller $\frac{3}{4} \cdot 12$, kan förstås som mekanismen som förminskar 12 till 9.

Kieren (1980) menar att lösandet av olika bråkuppgifter förutsätter samtidig förståelse av flera, ibland alla konstrukt. Han framhåller dock ingen särskild kognitiv hierarki mellan dem eller mellan dess konstruktion.

4.3.3.1.2 Sju betydelser enligt Behr et al.

Behr et al. (1983) utgår från Kieren (1980) men menar att utvecklad bråkförståelse konstrueras utifrån istället sju konstrukt, vilka delvis kompletterar och delvis omformulerar Kierens: *Bråk som förhållande*, *bråk som kvot*, *bråk som operator*, *bråk som linjär koordinat*, *bråk som andelsmått*, *bråk som förändringstakt* och *bråk relaterat till decimaltal*. När något av konstrukten avses i det följande skrivs det kursiverat.

Bråk som förhållande, *bråk som kvot* och *bråk som operator* är hos Behr et al. (1983) samma sak som hos Kieren (1980). Utifrån Behr et al. (1983) förklaras de övriga konstrukten så här:

- *Bråk som linjär koordinat* (*linear coordinates*) liknar *bråk som mätning*. Konstruktet betonar dock främst följande grundläggande aspekter av tallinjen: Tallinjens täthet, att bråk är ett tal och en viss punkt på tallinjen, och hur avstånd mellan tal på en tallinje bestäms. Dessa aspekter är i linje med den tolkning av *bråk som mätning* som ibland tycks göras i litteraturen, innebärande att det konstruktet antas åsyfta primärt bråk som tal/som en specifik punkt på tallinjen (t.ex. av Sveider, 2021).
- *Bråk som andelsmått* (*fractional measurement*) är ett annat sätt att uppfatta *bråk som del/helhet*. Här beskriver bråket hur många som finns av en viss kvantitet relativt kvantitetens helhet. Vi uppfattar detta i linje med den tolkning av *bråk som del/helhet* som ibland tycks göras i litteraturen utan Kierens (1980) betonande av förhållande (t.ex. av Sveider, 2021), innebärande att $\frac{3}{4}$ förstås som tre av de delmängder som fås när en kontinuerlig eller diskret mängd delats upp i fyra lika delmängder.
- *Bråk som förändringstakt* (*rate*) beskriver en storhet uttryckt som förhållandet mellan två andra storheter, t.ex. hastighet definierad som förhållandet mellan sträcka och tid. Vi exemplifierar med att $\frac{3}{4}$ *m/s* kan förstås som den hastighet som följer av förhållandet $\frac{3}{4}$ mellan tillryggalagd sträcka och tiden för tillryggaläggandet, exempelvis att 3 *m* tillryggaläggs på 4 *s* eller 15 *m* på 20 *s*.
- *Bråk relaterat till decimaltal* (*decimal*) handlar om att uppfatta dels att samma tal kan skrivas i både bråkform och decimalform, dels sambandet mellan representationsformerna, särskilt när nämnaren är en tiopotens. Vi exemplifierar med att $\frac{375}{1000}$ kan förstås som talet 0,375 och omvänt.

Analogt med Kieren (1980) menar Behr et al. (1983) att lösandet av olika bråkuppgifter förutsätter samtidig förståelse av flera, ibland alla, konstrukt. Till skillnad från Kieren uppfattar de dock en kognitiv hierarki mellan konstrukten. När de föreslår den utgår de från Kierens konstrukt (och inte sina alternativa sju) och menar att förståelse av *bråk som del/helhet* är grundläggande för förståelsen av alla andra aspekter av bråk (Behr et al., 1983).

4.3.3.1.3 Elva betydelser enligt Elias et al.

Elias et al. (2019) menar att bråk ges betydelse eller förstås utifrån elva sociokulturella delvis överlappande, delvis kompletterande teman: *Bråk som förhållande mellan dimensioner*, *bråk som division av heltal*, *bråk som invers till heltal*, *bråk som process för dubbelräkning*, *bråk som representationsform*, *bråk som geometrisk tolkning*, *bråk som kombination av multiplikation och division*, *bråk i vardagssammanhang* och *bråk som representant för en ekvivalensklass av ordnade par av heltal* samt två teman med koppling till högre matematik; *bråk som element i kroppen* $\mathbb{Q}$ och *bråk som element i kvotkroppen till integritetsområdet* $\mathbb{Z}$.

Deras avsikt är att deras alternativ ska läggas till grund för bråkrelaterad forskning. Eftersom litteraturen inte gjort det och då de själva inte särskilt lyfter elevers missuppfattningar eller svårigheter eller anknytande undervisning, redovisas bara teman som vi uppfattar har högstadierelevans och som kompletterar det Kieren (1980) och Behr et al. (1983) förordar. Utifrån Elias et al. (2019) förklaras dessa teman så här:

- *Bråk som division av heltal* innefattar att bråket ses som antingen en aktivitet (en divisionsuppgift) som ska utföras eller som resultatet av denna aktivitet.
- *Bråk som invers till heltal* innefattar att stambråk uppfattas som multiplikativ invers till heltal och därigenom förståelse av att division med ett heltal ger samma resultat som multiplikation med dess invers.

- *Bråk som representationsform* innefattar att bråket uppfattas som ett tal, oavsett om det är fråga om ett rationellt tal.
- *Bråk som geometrisk tolkning* handlar om att visualisera bråk som exempelvis en punkt på tallinjen, som förhållandet mellan sträckor eller som skuggade delar av en geometrisk figur.
- *Bråk i vardagssammanhang* betonar att bråkrelaterade vardagsord, som bl.a. kan röra matlagning, vikt eller tid, ofta inte har samma precisa betydelse som bråk i matematiken. Vi exemplifierar med att en fjärdedel eller kvart i vardagen sällan avser exakt $\frac{1}{4}$ utan exempelvis ungefär $\frac{1}{4}$ av en pizza eller ungefär 15 *min* ($\frac{1}{4}$ *h*).
- *Bråk som representant för en ekvivalensklass av ordnade par av heltal* innefattar förståelse av ekvivalenta bråk och att ett bråk kan skrivas på oändligt många sätt.

4.3.3.2 Missuppfattningar och svårigheter beträffande bråks olika betydelser

Studierna om missuppfattningar och svårigheter beträffande bråk har delvis olika syften och avser ibland ett och ibland flera av Kierens (1980) konstrukt, med eller utan modifieringarna av Behr et al. (1983). Studierna pekar på att missuppfattningar och svårigheter förekommer beträffande alla konstrukt. Generellt pekar de på mer utvecklad förståelse av *bråk som del/helhet* och mindre utvecklad förståelse av *bråk som mätning.* Utifrån hennes genomgång av forskning menar Nagy (2017) att de missuppfattningar och svårigheter som i utländska studier uppfattas hos primärt yngre elever återfinns hos svenska elever även högre upp i åldrarna. I det följande redovisas missuppfattningar och svårigheter beträffande de konstrukt som nämns i litteraturen tillsammans med hur det avspeglar sig och slutsatser: *Bråk som del/helhet* (se 4.3.3.2.1), *bråk som förhållande* (se 4.3.3.2.2), *bråk som kvot* (se 4.3.3.2.3), *bråk som mätning* (se 4.3.3.2.4), *bråk som operator* (se 4.3.3.2.5) och *bråk relaterat till decimaltal* (se 4.3.3.2.6). Aspekter som också är hänförliga till heltalsbias, skillnadstänkande eller omvänd bias respektive procedurer för bråkoperationer har redovisats ovan (se 4.3.1– 4.3.2) eller redovisas i 4.3.4.

4.3.3.2.1 Bråk som del/helhet

Utifrån forskning Sveider (2021) pekar på utvecklar elever tidigast och lättast förståelse kring *bråk som del/helhet,* vilket antas bero på att det konstruktet präglar tidig bråkundervisning. Anknytande missuppfattningar och svårigheter som framhålls i forskningen sägs primärt röra att helheten måste delas upp i lika stora delar och relationen mellan antalet delmängder och antalet element i delmängderna när det är fråga om diskreta mängder (Löwing, 2016; Nagy, 2017; Sveider, 2021). Nedan redovisas hur detta bekräftas av studier avseenden belgiska, kinesiska, svenska och turkiska elever.

Utifrån sin studie konstaterar Gabriel et al. (2013) att förståelsen av *bråk som del/helhet* är hög i alla åldersgrupper, högre än för andra konstrukt och något ökande med skolålder. De studerade förståelsen av olika aspekter av bråk och dess utveckling över tid genom att vid ett tillfälle studera belgiska elever i årskurs 4–6 genom skriftliga test (total n=439; fem skolor). De noterar dock att elever ofta har en stereotyp bild av hur *bråk som del/helhet* kan illustreras: Tämligen genomgående utgår eleverna från en kontinuerlig mängd som helhet och skuggar del av en geometrisk figur istället för att utgå från diskreta mängder när det skulle göra illustrerandet lättare. Med viss anknytning till detta pekar Nagy (2017) på forskning som menar att elever även i högstadieåldern kan ha en inre bild av bråk inte som ett tal utan som en del av en cirkelskiva.

När det gäller likadelning av helheten konstaterar Aliustaoğlu et al. (2018) utifrån sin studie att ca 40% av eleverna bortser från att markerade delar av geometriska figurer är tydligt olika stora och bara räknar antalet för att bestämma *bråk som del/helhet* (åk. 6; se 4.3.1.4.2). Detta illustrerar den aspekt av heltalsbias, som Ni och Zhou (2005) menar avspeglas i räkning av icke-kongruenta delar (se 4.3.1.2). Aliustaoğlu et al. (2018) anger att observationen är i linje med tidigare studier. Utifrån sin studie konstaterar dock Kullberg och Runesson (2013) att elever i huvudsak tycks vara klara över att helheten måste delas i lika stora delar. De studerade initial förståelse av *bråk som del/helhet* hos svenska elever i årskurs 3 genom dels skriftliga test, dels observation av inspelningar av elevernas två första bråklektioner (n=59; två skolor).

När det gäller diskreta mängder noterar dock Kullberg och Runesson (2013) missuppfattningar i sin studie. De nämner att flera elever felaktigt antar att antingen täljaren eller nämnaren direkt anger antalet i en diskret delmängd. Samtidigt noterar de att sådana missuppfattningar inte tycks föreligga när aktuellt bråk är stambråk.

Utifrån sin studie säger Ni (2001) att elever har lätt för att avläsa bråk illustrerade av geometriska figurer, svårare när illustrationen är en diskret mängd och än svårare när illustrationen avser förhållande mellan sträckor. Han studerade hur visualisering av bråk kan begränsa elevers förståelse av *bråk som del/helhet* och *bråk som mätning* genom att vid ett tillfälle studera kinesiska elever i årskurs 4–5 genom skriftliga test (n=205, n=208; en skola). Han noterar att lösningsfrekvensen är snarlik i båda åldersgrupperna, förutom att de äldre eleverna i större utsträckning inser att samma illustration kan avse flera ekvivalenta bråk. Det senare antar han förklaras av mer utvecklad förståelsen av det multiplikativa förhållande bråk speglar. Att förstå att bråk speglar ett multiplikativt förhållande antar han utvecklas senare än andra aspekter av *bråk som del/helhet*, såsom att helheten måste delas i lika stora delar. I linje med hans observationer anger Löwing (2016) (se 4.3.1.4.2) att lösningsfrekvensen är generellt hög för svenska elever i årskurs 3–5 när angivet bråk ska skuggas i geometriska figurer eller när det bråk som redan är skuggat ska anges. Hon noterar dock att lösningsfrekvensen sjunker påtagligt i två fall. Den sjunker när den geometriska figuren är uppdelad i multiplar av nämnaren, som i åtta delar när $\frac{3}{4}$ ska skuggas. Den sjunker också när bråk som inte är stambråk ska illustreras genom att ringa in figurer i en diskret helhet. Exempelvis att ringa in två av åtta karameller för att illustrera $\frac{1}{4}$. Utifrån dessa observationer menar hon att eleverna inte kan generalisera den förståelse de har kring *bråk som del/helhet*.

4.3.3.2.2 Bråk som förhållande

Utifrån forskning som Sveider (2021) pekar på, rör missuppfattningar och svårigheter beträffande *bråk som förhållande* primärt två aspekter: Dels att förhållandet speglar ett multiplikativt och inte ett additivt förhållande, och dels vad som är ekvivalenta bråk. Nedan redovisas hur detta bekräftas av studier avseenden belgiska, kinesiska och svenska elever.

Gabriel et al. (2013) noterar att *bråk som förhållande* knappast berörs i studerade belgiska läroböcker för åk. 4–6 och i liten grad undervisas enligt lärarintervjuer. Utifrån sin studie uppfattar de trots detta att eleverna har god förståelse för det konstruktet (åk. 4–6; se 4.3.3.2.1). De framhåller dock att ungefär var tionde yngre elev, vars förståelse av *bråk som förhållande* antas hålla på att utvecklas, uppfattar additiva i stället för multiplikativa samband (Gabriel et al., 2013).

När det gäller att avgöra om bråk är ekvivalenta noterar Löwing (2016) (se 4.3.1.4.2) att lösningsfrekvensen för svenska elever i årskurs 5 är generellt hög. Samtidigt framhåller hon att när bråk ska förlängas utifrån givna nämnare i flera steg, så är lösningsfrekvensen hög när täljarna kan uppfattas komma i nummerordning, som i $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{}{9} = \frac{}{12}$, men låga 10% när de inte gör det, som i $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{}{15} = \frac{}{18}$. Beträffande förståelsen av ekvivalenta bråk noterar Ni (2001), som redan nämnts, att de äldre eleverna i hans studie i väsentligen högre grad uppfattar att en geometrisk illustration kan avse flera ekvivalenta bråk (åk. 4–5; se 4.3.3.2.1). Sveider (2021) nämner forskning som pekar på att svårigheter att uppfatta ekvivalenta bråk kan kopplas till heltalsbias vid storleksordnande. Detta eftersom ekvivalenta bråk då kan uppfattas olika stora eftersom de har olika stora täljare (eller olika stora nämnare).

4.3.3.2.3 Bråk som kvot

Utifrån den forskning Sveider (2021) pekar på så utvecklas förståelsen för *bråk som kvot* bl.a. genom att uppfatta skillnaden mellan delningsdivision och innehållsdivision och utifrån detta uppfatta att kvoten kan svara på olika frågor. Löwing (2016) knyter an till detta utifrån intervjuer med svenska elever som hade svårt att lösa uppgifter som $1/\frac{1}{3}$ och $\frac{3}{4}/\frac{1}{4}$, vilket är uppgifter med mycket låg lösningsfrekvens. Hon nämner att eleverna genomgående tolkade uppgiften som (svårlöst) delningsdivision, t.ex. *Hur dela* $\frac{3}{4}$ *på* $\frac{1}{4}$*?* och inte som innehållsdivision. Hon noterar att det senare skulle ha gjort uppgiften enklare att lösa och kvoten mer begriplig; t.ex. *Hur många* $\frac{1}{4}$ *ryms i* $\frac{3}{4}$*?* Flores, Samson och Yanik (2006) poängterar samma sak. De menar också att det kan förvirra elever att en divisionsuppgift och resultatet av den kan vara skrivet på samma sätt, exempelvis uppgiften $\frac{3}{4} =$ och resultatet $\frac{3}{4}$.

4.3.3.2.4 Bråk som mätning

Utifrån forskning som Sveider (2021) pekar på är förståelsen kring *bråk som mätning* (där vi uppfattar ett betonande av *bråk som linjär koordinat*) svårutvecklad, vilket bl.a. antas beror på att förståelsen förutsätter förståelse av *bråk som förhållande*. Anknytande missuppfattningar och svårigheter sägs primärt avse vilken del av tallinjen som ska beaktas, särskilt om bara två punkter är talsatta (Sveider, 2021). Nedan redovisas hur detta bekräftas av studier avseenden amerikanska, belgiska, indonesiska, kinesiska, svenska och turkiska elever.

Utifrån sin studie pekar Gabriel et al. (2013) på att förståelsen av *bråk som mätning* är klart mindre än förståelsen av *bråk som del/helhet* och *bråk som förhållande* (åk. 4–6; se 4.3.3.2.1). Vamvakoussi (2015) pekar på att vad som utgör mätenheten är särskilt svårförstått. Att uppfatta hela tillhandahållen tallinje som helhet istället för bara avståndet mellan 0 och 1 kan medföra att $\frac{1}{2}$ antas ligga mitt emellan ytterpunkterna, exempelvis vid positionen för 2,5 på en tallinje med 0 och 5 som enda markerade punkter. Detta har konstaterats i ett flertal studier avseende årskurs 4-6 (Aliustaoğlu et al., 2018; Gabriel et al., 2013; Ni, 2001; Patahuddin, Usman & Ramful, 2018; Yanik, Helding & Flores, 2008). De antar alla att detta beror på att elever generaliserar vad som är helheten från konceptet *bråk som del/helhet* och tänker därmed att *allt* är helheten även vid *bråk som mätning.* De menar att eleverna uppfattar tillhandahållen tallinje, exempelvis 0 till 5, som helheten och inte bara avståndet mellan 0 och 1. Specifikt studerade Patahuddin et al. (2018) hur elevers bråkförståelse underlättas eller begränsas av lärarens illustrationer genom att under två tillfällen studera indonesiska elever i årskurs 6 genom klassrumsobservationer (n=99; två skolor). Och Yanik et al. (2008) studerade förändring av förståelsen av *bråk som del/helhet* och *bråk som mätning* genom fyra intervenerande lektioner och intervjuer med amerikanska elever i årskurs 6 (n=56; en skola).

Ungefär varannan elev felplacerar bråk på ovannämnt sätt enligt Aliustaoğlu et al. (2018) och ännu fler när bråket är större än 1. Ni (2001) noterar ännu lägre lösningsfrekvens, som dessutom var påtagligt lägre för de äldre eleverna (28%). Utifrån sin studie av svenska elever i årskurs 3 och 9 (se 4.4.2.1) noterar Nagy (2017) samma missuppfattning i båda åldrarna. Hon säger att de inte tycks uppfattar aktiviteten som ett tal att placera ut, utan som en (tal-)linje att dela upp.

Ni (2001) diskuterar varför lösningsfrekvensen i hans studie var lägre för de äldre eleverna. Han antar att det beror på att förståelsen av *bråk som mätning* är mindre stabilt konstruerad än *bråk som del/helhet* och att de äldre eleverna, som precis hade börjat med *bråk som förhållande*, kanske håller på att experimentera med förståelsen av denna nya aspekt. Han tror att de då befinner sig i en omkonstruktionsfas där lösande av uppgifterna kan ha störts av tänkande på *bråk som förhållande* istället för *bråk som mätning*.

Utöver att eleverna kan vara färgade av tidigare stort fokus på *bråk som del/helhet*, uppfattar Patahuddin et al. (2018) att den relativt låga lösningsfrekvens i deras studien kan ha påverkats av elevernas vana av tvådimensionellt visualiserade bråk, dvs. skuggning av geometriska figurer. De menar att elever kan erfara kognitiva svårigheter när det tvådimensionella tänkandet ska transformeras till tallinjens endimensionella värld.

När det gäller hur avståndet mellan 0 och 1 ska delas upp nämner Aliustaoğlu et al. (2018) att en del elever missuppfattar nämnarens innebörd och uppfattar att nämnaren anger *antal streck* som ska sättas mellan 0 och 1 vid uppdelning. Detta kan medföra att $\frac{1}{3}$ placeras som $\frac{1}{4}$.

Aliustaoğlu et al. (2018) noterar också att en del elever bara beaktar nämnaren när bråk ska placeras på tallinjen, varför $\frac{2}{3}$ placeras som $\frac{1}{3}$, eller placerar bråk mellan de heltal som återfinns i täljare och nämnare, varför $\frac{2}{3}$ placeras som 2,5. Siegler och Pyke (2013) nämner att nästan 30% av eleverna i deras studier beaktar antingen bara täljare eller bara nämnare när bråk ska utplaceras på tallinjen (åk. 6, 8; se 4.3.1.4.2). Dessa svårigheter vid utplacering av bråk på tallinjen kan enligt dem vara orsakat av heltalsbias (se 4.3.1.2).

Gabriel et al. (2013) anger att när både 1 och olika bråk skulle placeras i storleksordning i deras studie, placerade elever ofta 1 som störst även om bråk som $\frac{8}{4}$ ingick (åk. 4–6). Nagy (2017) pekar på forskning som säger att elever har svårt att förstå att bråk skrivet i vanlig notation kan vara större än 1, men lättare gör det vid resonemang utifrån konkret material.

Flores et al. (2006) konstaterar att avståndet mellan 0 och 1 delas upp i olika många/stora delar för olika stambråk men i lika många/stora delar för liknämniga bråk. En konsekvens av detta är att avståndet på tallinjen mellan två efterföljande liknämniga bråk är konstant men varierar mellan två efterföljande stambråk. När bråk ska placeras på tallinjen måste därför både inbördes ordning och avstånd mellan bråken övervägas, vilket Flores et al. (2006) menar kan vara intuitivt svårt för eleverna att uppfatta.

4.3.3.2.5 Bråk som operator

Sveider (2021) hänför missuppfattningar och svårigheter beträffande operationer generellt till *bråk som operator*. Konstruktet skulle därmed fånga mer än förståelse av effekten av multiplikation och division, som Kieren (1980) samt Behr et al. (1983) avgränsar sig till. Detta har diskuterats i 4.3.1. Övriga operationer som Sveider (2021) pekar på redovisats i 4.3.4.

4.3.3.2.6 Bråk relaterat till decimaltal

När det gäller missuppfattningar och svårigheter beträffande *bråk relaterat till decimaltal* pekar forskning enligt Yopp (2018) på att elever ofta betraktar samma tal i decimal- och i bråkform som olika saker och bara uppfattar det senare som ett rationellt tal. Vamvakoussi och Vosniadou (2010) noterar att studerade elever i stor utsträckning uppfattar att det mellan två tal av *visst* slag (heltal, bråk eller decimaltal) bara finns tal av *samma* slag. De noterade att elever, även i högre ålder, ofta ser bråk som en diskret företeelse och decimaltal samtidigt som en kontinuerlig företeelse eller omvänt (åk. 6, 8 och gy. 1; se 4.3.1.4.2). Yopp (2018) menar även att elever är intuitivt övertygade om $0{,}333\ldots \neq \frac{1}{3}$.

Yopp (2018) studerade hur förståelsen kring omvandling mellan representationsformer kan utvecklas genom intervenerande undervisning av amerikanska elever i årskurs 8 under 24 lektioner. Hans analys skedde utifrån en djupintervju med en elev (n=1; en skola). Han konstaterar utifrån denna intervju att elever tycks begränsade av den inlärda definitionen av rationella tal, dvs. $\frac{a}{b}$ där a och b är heltal. Han menar att elever därför inte uppfattar decimaltal (med periodisk decimalutveckling) som ekvivalent med bråk. Av de elever som förstår kopplingen mellan bråk och decimalform verkar en del föredra att subtrahera bråk först efter omskrivning till decimaltal. Detta enligt intervjuer som Löwing (2016) genomfört med svenska elever med svårigheter med sådana uppgifter.

4.3.4 Fokus på procedurkunskap och operationer med bråk

Missuppfattningar och svårigheter beträffande operationer med bråk kopplas i studier till bristfällig konceptuell förståelse respektive bristfällig procedurkunskap. Vad begreppen innefattar redovisas först (se 4.3.4.1). Därefter redovisas konsekvenser av brister i konceptuell förståelse och procedurkunskap. Detta specifikt vid operationer med bråk (se 4.3.4.2). Anknytande undervisningsaspekter behandlas i 4.4.1. Detta för att hålla isär missuppfattningar och svårigheter från undervisningsförslag.

4.3.4.1 Vad är konceptuell förståelse och procedurkunskap?

Lenz et al. (2020) pekar på en vanlig uppdelning mellan *konceptuell förståelse* och *procedurkunskap* i bråksammanhang. Det förra handlar om att förstå bråkbegreppets olika betydelser. Det senare att känna till lösningsstrategier och hur de verkställs steg-för-steg för att leda till ett korrekt svar. De exemplifierar med att procedurkunskap krävs för att utföra addition av bråk med olika nämnare, som $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{1\cdot 4}{3\cdot 4}+\frac{1\cdot 3}{4\cdot 3}=\frac{4}{12}+\frac{3}{12}=\frac{4+3}{12}=\frac{7}{12}$, men att konceptuell förståelse krävs för att förstå varför proceduren ser ut som den gör och varför den är nödvändig. I konceptuell förståelse inkluderar de att förstå varför en operation är felaktig, exempelvis när addition av bråk genomförs som addition av täljare med täljare och nämnare med nämnare.

4.3.4.2 Missuppfattningar och svårigheter beträffande bråkoperationer

Flera studier pekar på missuppfattningar och svårigheter beträffande operationer med bråk som uppfattats kopplade till både bristfällig konceptuell förståelse och bristfällig procedurkunskap. Här redovisas studier som pekar på detta hos amerikanska, australiensiska, belgiska, svenska och turkiska elever. Aspekter som redovisats med koppling till heltalsbias, skillnadstänkande och omvänd bias (se 4.3.1–4.3.2) respektive olika betydelser av bråk (se 4.3.3) upprepas inte.

Löwing (2016) redovisar mycket statistik kring lösningsfrekvens för svenska elever i olika åldrar. Detta utifrån diagnoser med Diamantuppgifter avseende operationer med bråk (se 4.3.1.4.2). Enligt henne är uppgifterna utformade för att pröva såväl konceptuell förståelse som procedurkunskap. Generellt är lösningsfrekvensen liknande över kommuner i samma åldersgrupp för samma typ av uppgifter. I flera avseenden pekar utfallet på att såväl yngre som äldre elever har stora svårigheter att opererar med bråk (Löwing, 2016). Lösningsfrekvensen varierar mycket beroende på typ av operation och typ av bråk. Exempelvis är lösningsfrekvensen hög, ofta omkring 80–90%, beträffande enkel addition och multiplikation, men sjunker, ibland till låga 10%, vid bl.a. division eller då bråk behöver förlängas. Hon noterar vidare att omkring 60% av eleverna i början av gymnasiet uppvisar för låg lösningsfrekvens, exempelvis på uppgifter som $\frac{3}{4}$ - $\frac{1}{2}$. Mer generellt konstaterar hon att andelen mellanstadieelever med godtagbar kunskap, och därmed godtagbar lösningsfrekvens, kring bråkoperationer är relativt oförändrad i slutet av årskurs 5 och 6 (bara omkring hälften). När det gäller operationer med bråk på högstadiet konstaterar hon att nästan 90% av eleverna i årskurs 8 har för låg lösningsfrekvens gällande multiplikation och division och mer än 60% av eleverna gällande addition och subtraktion. Löwing (2016) uppfattar generellt stora brister i konceptuell förståelse och pekar bl.a. på intervjuer där elever nämner att de inte löst uppgifter eftersom de glömt bort vilken regel/algoritm som skulle användas. Eller så verbaliserar de algoritmer men kan inte förklara varför de fungerar. Aliustaoğlu et al. (2018) (se 4.3.1.4.2), Siegler och Pyke (2013) (se 4.3.1.4.2) samt Gabriel et al. (2013) drar liknande slutsatser som Löwing (2016) utifrån sina studier. Gabriel et al. (2013) studerade förståelsen av olika aspekter av bråk och hur förståelsen utvecklas över tid och sambandet mellan konceptuell förståelse och procedurkunskap genom att vid ett tillfälle studera belgiska elever i årskurs 4–6 genom skriftliga test (total n=439; fem skolor).

Powell och Nelson (2020) studerade konceptuell förståelse och procedurkunskap beträffande bråk, decimaltal och procent på högre utbildningsnivå genom att vid ett tillfälle studera amerikanska universitetsstudenter på första eller andra året av en fyraårig utbildning genom skriftliga test (n=331; ett lärosäte). Enligt dem är de största svårigheterna i den åldersgruppen att avgöra vilket tal som är markerat på en tallinje och att bestämma minsta gemensamma nämnare och största gemensamma delare.

4.4 Vad kan göras för att motverka missuppfattningarna och svårigheterna?

I litteraturen föreslås vad lärare bör göra för att motverka elevers bråkrelaterade missuppfattningar och svårigheter utifrån tre perspektiv: I studier av bråkundervisning lämnas undervisningsrekommendationer som ett led i resultatet. I studier om missuppfattningar eller svårigheter lämnas ibland undervisningsrekommendationer som ett led i resultatdiskussionen. Och i några fall lämnas undervisningsrekommendationer utifrån annans forskning. Här redovisas rekommendationerna utifrån fyra teman oavsett sådant perspektiv. Först behandlas avvägning mellan konceptuell förståelse och procedurkunskap (se 4.4.1). Sedan redovisas de grundidéer som vi uppfattar man menar att lärare primärt bör fokusera på (se 4.4.2). Därefter redovisas rekommendationer kring dels konkreta moment i undervisningen (se 4.4.3), dels från när bråk bör undervisas (se 4.4.4).

4.4.1 Konceptuell förståelse vs procedurkunskap

I litteraturen betonas risken med för stort fokus på procedurkunskap, men det lämnas egentligen inga rekommendationer om i vilken utsträckning procedurkunskap bör undervisas om. Först redovisas studier som rör hierarkin mellan konceptuell förståelse och procedurkunskap (se 4.4.1.1). Därefter diskuteras fokus på procedurkunskap (se 4.4.1.2).

4.4.1.1 Hierarki mellan konceptuell förståelse och procedurkunskap?

Lenz et al. (2020) samt Hecht och Vagi (2010) noterar att det i forskningen finns olika uppfattningar om hur konceptuell förståelse och procedurkunskap utvecklas relativt varandra. De nämner forskning som pekar på positiv korrelation mellan djupare konceptuell förståelse och god procedurkunskap, men också forskning som inte uppfattar sådan korrelation. De nämner även att konceptuell förståelse och procedurkunskap ofta sägs vara förbundna och utvecklas parallellt. Det senare konstaterar Hecht och Vagi (2010) utifrån sin studie. Utifrån sin studie är dock Gabriel et al. (2013) mer försiktiga med att dra den slutsatsen (åk. 4–6; se 4.3.4.2). De är mer öppna för möjligheten att konceptuell förståelse och procedurkunskap utvecklas mer frikopplat från varandra. Detta håller Ni (2001) med om med tillägget att viss procedurkunskap inte automatiskt medför förståelse av att och hur proceduren kan användas i olika sammanhang. Han exemplifierar med att procedurkunskap om förlängning och förkortningen inte automatiskt medför förståelse av ekvivalenta bråk. Och inte heller förståelse av att förlängning/förkortning kan användas för att göra bråk liknämniga för att exempelvis underlätta storleksjämförelse.

Hecht och Vagi (2010) studerade hur konceptuell förståelse och procedurkunskap beträffande olika aspekter av bråk utvecklas och påverkar varandra och också av allmän aritmetikkunskap över tid. De gjorde detta genom att vid ett tillfälle under höstterminen och sedan under vårterminen påföljande läsår studera amerikanska elever i årskurs 4 genom skriftliga test som de menar särskiljer procedurkunskap från konceptuell förståelse (n=181; nio skolor).

4.4.1.2 Konceptuell förståelse vs procedurkunskap

Utifrån genomgång av forskning uppfattar Moss och Case (1999) att en viktig orsak till elevers missuppfattningar och svårigheter beträffande bråk är för stort fokus på procedurer kontra konceptuell förståelse. Clarke och Roche (2009) säger samma sak utifrån sin studie (åk. 5; se 4.3.1.4.2). På liknande sätt reflekterar även andra i litteraturen. Powell och Nelson (2020) nämner att procedurer inte bör läras ut så att de uppfattas som ett slags trick. De betonar att förståelse kring hur algoritmer fungerar, och varför, alltid bör etableras. Löwing (2016) knyter an till det sistnämnda och menar att elever behöver diskutera olika aspekter av bråk och inte primärt fokusera på procedurer. Detta eftersom hon uppfattar att eleverna därigenom blir bättre rustade att kunna förstå och generalisera utifrån procedurer.

Yang (2102) beskriver progressionen i bråkundervisningen i Taiwan, som han menar förklarar varför Taiwan presterar bättre i internationella kunskapsjämförelser än t.ex. USA. Han är mer positiv till fokus på procedurkunskap än de som nämnts ovan, men betonar att procedurer introduceras successivt utifrån elevernas konceptuella förståelse. Han menar att procedurkunskap bidrar till att utveckla konceptuell förståelse och exemplifierar med hur förståelsen av konceptet minsta gemensam nämnare successivt utvecklas i Taiwan genom att procedurer stegvis introduceras: Från att bestämma en gemensam nämnare genom att multiplicera nämnarna i årskurs 4, till att bestämma den minsta gemensamma nämnare utifrån primtalsfaktorisering i årskurs 6.

När det gäller specifika konceptuella aspekter framhåller Löwing (2016) att läraren behöver göra en didaktisk ämnesanalys och kartlägga vilka aspekter som i varje avseende behöver förstås och byggas vidare på. Hon framhåller att en sådan analys ligger bakom utformningen av uppgifterna i Diamantdiagnoserna (se 4.3.1.4.2).

4.4.2 Grundidéer beträffande bråk som lärare bör fokusera på

I litteraturen lyfts sju delvis överlappande, delvis kompletterande grundidéer som lärare rekommenderas att fokusera på för att underlätta konceptuell bråkförståelse. De utvecklas nedan: Fokus på *dela lika* (se 4.4.2.1), fokus på storleken på bråk (se 4.4.2.2), fokus på *bråk som del/helhet* (se 4.4.2.3), fokus *på bråk som mätning* (se 4.4.2.4), fokus på *stambråk* (se 4.4.2.5), fokus på procent- eller decimalform (se 4.4.2.6) samt fokus på naturliga tal (se 4.4.2.7). Kursivering sker frekvent i det följande för att tydliggöra när det är fråga om en av grundidéerna.

4.4.2.1 Fokus på dela lika

Utifrån sin studie i förskolan menar Nagy (2017) att *dela lika* är den första förståelsen av bråk som elever skapar i sin vardag. Hon exemplifierar med att *dela lika* med sitt syskon eller kompis är en vardagssituation som många elever upplevt och kan relatera till. Nagy (2017) studerade progressionen i svensk bråkundervisningen från förskola till årskurs 9 i syfte att bl.a. bidra med kunskap om hur lärare utformar undervisningen utifrån elevernas förförståelse. Under tre terminer planerade hon undervisning tillsammans med fyra lärare, videodokumenterade genomförandet och analyserade undervisningen.

Ni och Zhou (2005) framhåller en nackdel med fokus på *dela lika*. De menar att förståelsen av *bråk som del/helhet* konstruerad utifrån *dela lika* inte kan generaliseras när likadelning inte är möjlig. De nämner bl.a. att förståelse av bråk med större täljare än nämnare, dvs. när delen är större än det hela, kan försvåras av detta.

4.4.2.2 Fokus på storleken på bråk

Utifrån utfallet i flera studier, som avser årskurs 3–8, förespråkas att förståelsen av storleken på bråk borde vara tidigt fokus i bråkundervisningen (Clarke & Roche, 2018; Siegler & Pyke, 2012; Van Hoff et al., 2015a, 2017, 2018). Van Hoof et al. (2018) uppfattar att elever som erfarit sådant fokus lyckas bättre på uppgifter som rör bl.a. operationer med bråk och tallinjens täthet. Även Vamvakoussi (2015) förespråkar sådant fokus utifrån genomgång av forskning.

Clarke och Roche (2018) ger några konkreta förslag på uppgifter för att uppnå storleksfokus: Givna bråk kan kombineras för att erhålla så stor eller liten summa som möjligt. Storleksskillnad på bråk med samma täljare kan utforskas utifrån storleken på delarna, vilket förklarar varför t.ex. $\frac{3}{7}$ är större än $\frac{3}{8}$. Och storleksskillnad kan utforskas genom att göra bråken liknämniga. När det gäller det sistnämnda betonar de att proceduren för att göra liknämnigt endast utnyttjas för att kunna göra jämförelsen, inte för procedurens egen skull. Även Behr et al. (1984) lyfter fokus på storleksordning och då specifikt kopplat till storleksjämförelser av stambråk.

Siegler och Pyke (2012) menar att elever i stor utsträckning bör få arbeta med att storleksjämföra bråk utan samma täljare och nämnare. Detta istället för de jämförelse av bråk med samma täljare eller samma nämnare som de uppfattar är det vanliga i läromedel och i undervisningen.

4.4.2.3 Fokus på bråk som del/helhet

Det verkar underförstått att tidigt fokus på *bråk som del/helhet* är det vanligaste sättet att undervisa om bråk (Smith, 1995). Det är också den grundidé som uttryckligen lyfts i läroplanen (Lgr11, 2019; Matematik, 2020). I litteraturen betonar många att detta är bra samtidigt som några varningsflaggor reses.

Aliustaoğlu et al. (2018) menar att förståelse av *bråk som del/helhet* bör stå i centrum innan arbete sker med olika talrepresentationer och operationer. Yanik et al. (2008) uttrycker också att eleverna bör börja med *bråk som del/helhet* och då specifikt kopplat till stambråk.

När det gäller kritik mot fokuset på *bråk som del/helhet* är Ni och Zhou (2005), som nämnts i 4.4.2.1, kritiska kring hur konstruktet ibland ensidigt kopplas till *dela lika*. Som nämnts där menar de att detta kan begränsa förståelsen av bl.a. bråk med större täljare än nämnare, dvs. när delen kan uppfattas större än helheten. Samtidigt betonar de att *bråk som del/helhet* är lätttillgänglig och därmed roligt för eleverna eftersom det bygger på förutbestämda uppdelningar av mängder. Utifrån sin studie uppfattar Kleve (2010) att lärares ensidiga betonande av *bråk som del/helhet* riskerar att försvåra förståelsen av bl.a. *bråk som förhållande* och *bråk som mätning* (bråk som tal). Hon studerade hur elevers förståelse underlättas eller försvåras utifrån vilka aspekter av bråk som läraren betonar och hur genom att vid ett tillfälle studera norska elever i årskurs 5 utifrån en videoinspelning av en lektion (n=en klass; en skola). Även Patahuddin et al. (2018) lyfter liknande kritik utifrån sin studie (åk. 6; se 4.3.3.2.4). De menar att elevers tvådimensionella bilder av bråk från arbetet med *bråk som del/helhet* illustrerade med geometriska figurer kan försvåra övergången till arbete med tallinjen, som är endimensionell. Detta säger de kan överbryggas om läraren är tillräckligt tydlig med den dimensionella skillnaden.

Smith (1995) ifrågasätter om fokus på *bråk som del/helhet* är det enda bra sättet att lägga grunden för bråkförståelsen. Han menar att det kan finnas olika kulturer och lärstilar som påverkar vilken aspekt av bråk som lärare utgår från. Både han och Flores et al. (2006) lyfter att ett stort fokus på *bråk som del/helhet* måste kombineras med fokus på även andra betydelser av bråk för att god bråkförståelse ska utvecklas.

4.4.2.4 Fokus på bråk som mätning

Bland annat Ni och Zhou (2005) menar att *bråk som mätning* är en bättre ingång än fokus på *bråk som del/helhet*, vilket utvecklas här. Med *bråk som mätning* menas här och nedan inte alla mätaspekter Kieren (1980) betonar, utan primärt relaterat till tallinjen, dvs. det fokus som framhålls med *bråk som linjär koordinat*.

Eftersom man för *bråk som mätning* delar upp en sträcka, menar Ni och Zhou (2001) att det blir lättare för eleverna att göra uppdelningen oavsett nämnare (jämfört med t.ex. uppdelningen av en cirkelskiva). De menar också att det blir lättare och visuellt tydligare att jämföra olika bråk. De lyfter även att fokus på *bråk som mätning* inte medför de begränsningar som de kritiserar *dela lika* och *bråk som del/helhet* för (se 4.4.2.1 och 4.4.2.3). De menar också att *bråk som mätning* lägger grunden för förståelsen av varför bråk måste vara liknämniga för att lätt kunna storleksjämföras, adderas och subtraheras. Även Kieren (1980), Hecht och Vagi (2010) samt Vamvakoussi (2015) betonar undervisning där tallinjen står i centrum.

Patahuddin et al. (2018) uppfattar att *bråk som mätning* borde stå i förgrunden eftersom det är en central aspekt i förståelsen av bråk. I sin studie noterar de att lärare inte betonar viktiga skillnader mellan *bråk som mätning* och *bråk som del/helhet* (se 4.3.3.2.2). Exempelvis att delning utifrån vad nämnaren anger i det första fallet avser bara avståndet mellan 0 och 1 (inte hela tallinjen) men i det senare fallet avser *allt*. Och som nämns i 4.4.2.3 menar de att elevers tvådimensionella bilder av bråk från arbetet med *bråk som del/helhet* illustrerade med geometriska figurer kan försvåra övergången till arbete med tallinjen, som är endimensionell. De nämner även att studerade lärare mest försökte förklara tallinjen utifrån delning av tredimensionella objekt. Exempelvis att tallinjen mellan 0 och 1 tänks vara en pinne som delas i fyra lika bitar för $\frac{1}{4}$. Eller att ett papper upprepade gånger viks i lika stora bitar. De menar att sådana konkreta bilder kan underlätta förståelsen, men också att översättningen från det konkreta exemplet till tallinjens endimensionella värld kan vara utmanande. Även Braithwaite och Siegler (2021), Tian och Siegler (2018) samt Yanik et al. (2008) framhåller användningen av tallinjen i bråkundervisningen, både för att utveckla bråkförståelsen och som en sorts måttstock för hur väl elever förstår bråk, dvs. hur väl de kan placera ut bråk på tallinjen.

Yanik et al. (2008) håller med om att *bråk som mätningar* är ett viktigt fokus, men menar att eleverna behöver förståelse av *bråk som del/helhet* innan de kan ta till sig *bråk som mätning.* Detta ligger i linje med Van Hoof et al. (2015b, 2018), som utifrån sina studier av elever från mellanstadiet upp till gymnasiet menar att det finns hierarkier mellan hur bråkförståelse bort från heltalsbias konstrueras (se 4.3.1.4.2). De uppfattar att förståelse kring tallinjens täthet tycks förutsätta förståelse av storleksordnade av bråk och effekten av multiplikation. De noterar dock att det finns elever som tycks konstruera förståelsen i annan ordning eller mer parallellt.

4.4.2.5 Fokus på stambråk

Stambråk är en aspekt av både *bråk som del/helhet* och *bråk som mätning*, men uppfattas även därutöver vara en viktig ingång till bråkförståelse. Flores et al. (2006), som generellt förespråkar variation och att flera av grundidéerna bör betonas, verkar ändå förespråka att elever ska börja med att lära sig om *stambråk*. Smith (1995) menar att studier som gjorts med inspiration av Kieren (1980) endast kommit fram till konsensus om en sak, nämligen att elever förstår *stambråk* innan de förstår andra slags bråk. Behr et al. (1984) håller med om detta, men med tillägget att initialt fokus ska ligga på att storleksordna *stambråk*. Att tidigt dela upp i *stambråk* och opererar med *stambråk* är något som också framhålls i Skolverkets kommentarmaterial till kursplanen (Skolverket 2017, 2021).

För att förstå *bråk som mätning* och kunna placera ut bråk på tallinjen betonar Yanik et al. (2008) att elever först måste förstå att nämnaren anger det antal lika stora delar som en helhet ska delas upp i. De konstaterar att varje sådan del utgör ett *stambråk* och att det föreligger ett inverst förhållande dem emellan. Om exempelvis nämnaren är 3 ska helheten delas i tre lika stora delar, vardera $\frac{1}{3}$, där $\frac{1}{3}$ är multiplikativ invers till 3 (dvs $3 \cdot \frac{1}{3} = 1$). De menar att detta måste synliggöras för eleverna explicit och inte bara underförstås. Detsamma gäller att täljaren anger det antal sådana delar som ska räknas upp.

Både Braithwaite och Siegler (2021) och Löwing (2016) menar att det måste synliggöras hur såväl enskilda bråk som summor och produkter av bråk kan representeras av ett antal *stambråk*. Exempelvis att $\frac{2}{3}$ kan representeras som två stycken $\frac{1}{3}$, dvs. som $\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$, och summan $\frac{2}{3} + \frac{1}{4}$ analogt därmed som $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$. De menar att detta stärker förståelsen av både *bråk som del/helhet* och *bråk som mätning*. Löwing (2016) menar att när elever ska multiplicera bråk med heltal så kan det bli lättare att förstå att det bara är täljaren som ska multipliceras med heltalet om multiplikationen visualiseras som upprepad addition med bråket uppdelat i *stambråk* eller utifrån associativa lagen med *stambråk* i fokus. Hon ger två exempel:

- Upprepad addition: $3 \cdot \frac{2}{5} = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5}\right) = 6 \cdot \frac{1}{5} = \frac{6}{5}$
- Associativa lagen: $3 \cdot \frac{2}{5} = 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{5} = 6 \cdot \frac{1}{5} = \frac{6}{5}$.

Braithwaite och Siegler (2021) har utvecklat ett undervisningskoncept fokuserat på *stambråk* som de kallar *PFT* (*Putting Fraction Together*). De hävdar bl.a. att inflytandet av heltalsbias kan motverkas eller minskas om eleverna uppmärksammas på ovannämnda stambråksdekonstruktion och får tillfälle att erfara storleksskillnader mellan stambråksbitar och får relatera dem till helheten 1. De menar bl.a. att elever som fysiskt eller mentalt placerar två stambråksbitar som är $\frac{1}{3}$ och en som är $\frac{1}{4}$ efter varandra på en tallinje därigenom inser det orimliga i att $\frac{2}{3} + \frac{1}{4}$ summeras till $\frac{3}{7}$, som är vanligt under inflytande av heltalsbias. Detta eftersom $\frac{3}{7}$ inte är nära 1. Utifrån sin studie av potentialen i *PFT* uppfattar de att *PFT* ger tydliga positiva effekter på utvecklingen av bråkförståelsen (åk. 4–5; se 4.4.3.5.4).

4.4.2.6 Fokus på procent- eller decimalform

Det finns litteratur som menar att lärare bör undervisa om tal i procent- eller decimalform innan bråk, vilket utvecklas nedan.

4.4.2.6.1 Procentform

Mose och Case (1999) säger sig ha en intuitiv uppfattning om i vilken ordning olika representationer av rationella tal bör läras och att det är bättre att successivt och djupare behandla en viss representation än att behandla flera mer eller mindre parallellt. De menar att elever har en intuitiv och erfarenhetsbaserad visuell och språklig uppfattning kring procent redan som unga, bl.a. genom att tolka och uttrycka hur mycket/lite något är av en helhet i procent. De menar vidare att missuppfattningar kring bråk kan undvikas genom fokus på bråks konceptuella och språkliga innebörd, som de menar lätt kan relateras till motsvarande hos procent och decimaltal. De uppfattar därför att tal i procentform borde introduceras innan tal i bråkform, med tal i decimalform där emellan. De anser att det blir lättare för eleverna att arbeta med översättning representationsformerna emellan om utgångspunkten är kända tal i procentform. De exemplifierar med $25\% = 0{,}25 = \frac{1}{4}$, som de menar eleverna kan förstå som hälften av hälften av helheten 100%. För att pröva effekten av sitt koncept genomförde de en interventionsstudie med kanadensiska elever i årskurs 4 med tester och elevintervjuer (n=13, n=29). Under 5 månader fick elever i en skola undervisning enligt deras koncept. I en annan skola fick eleverna samtidigt traditionell bråkundervisning. Båda elevgrupperna förbättrade sig mellan för- och eftertester, men Mose och Case (1999) framhåller att de som undervisats enligt deras koncept förbättrade sig i högre grad. Sistnämnda elever visade ingen betydande påverkan av heltalsbias vid eftertestet, vilket den andra gruppen gjorde. Moss och Case (1999) konkluderar därför att tidigt arbete med andelar uttryckta i procent, som senare får övergå i bråk, möjliggör djupare förståelse och undvikande av vanliga missuppfattningar.

4.4.2.6.2 Decimalform

I två studier av heltalsbias hos låg- och mellanstadieelever uppfattas viss korrelation mellan utvecklad decimaltalsförståelse och utvecklad bråkförståelse samt att påverkan av heltalsbias beträffande decimaltal var mindre än för bråk hos samma elever (McMullen et al., 2018; Van Hoof et al., 2018). Utifrån detta menar båda att konstruktion av decimaltalsförståelse kanske föregår bråkförståelse för var och en av aspekterna storleksordna tal, tolka effekten av multiplikation och tallinjens täthet. De menar därför att undervisning kring decimaltal borde föregå undervisning kring bråk.

Utifrån sin studie av äldre elever noterar dock Vamvakoussi och Vosniadou (2010) att en stor andel elever uppfattar bråk som en diskret företeelse samtidigt som decimaltal uppfattas som en kontinuerlig företeelse eller omvänt och att elever i stor utsträckning tycks uppfatta att det mellan två tal av visst slag (heltal, bråk eller decimaltal) bara finns tal av samma slag. De uppfattar det därför inte självklart att decimaltalsförståelse utvecklas före bråkförståelse. I en genomgång av forskningsläget konstaterar Tian och Siegler (2018) att det ofta argumenteras för att bråk, till skillnad mot vad som är vanligt i bl.a. USA, borde undervisas först efter decimaltal eftersom decimaltal skulle vara lättare att förstå utifrån befintlig heltalsförståelse. De påpekar att forskningen som underbygger detta inte jämfört elevers kunskap om bråk och decimaltal utifrån uppgifter av samma svårighetsgrad. De framhåller då annan forskning som pekar på att elever har liknande problem med bråk och decimaltal, bland annat pga. heltalsbias. Tian och Siegler (2018) betonar därför att mer forskning krävs för att underbygga förslag om specifik undervisningsordning mellan bråk och decimaltal.

4.4.2.7 Fokus på naturliga tal

Utifrån sin studie uppfattar Van Hoof et al. (2017) viss korrelation mellan utvecklad förståelse av naturliga tal och opåverkan av heltalsbias (åk. 5; se 4.3.1.4.2). De tolkar detta som att god bråkförståelse konstrueras utifrån utvecklad förståelse av naturliga tal. De reserverar sig dock med att korrelationen kanske kan förklaras av att eleverna med god förståelse av både naturliga tal och bråk har konstruerat god matematikförståelse i allmänhet. Utifrån en analys som beaktar elevernas allmänna matematikförståelse uppfattar de att elever endast har fördel av förståelsen kring naturliga tal när det kommer till operationer med bråk. Inte när det gäller tallinjens täthet eller storleken på bråk.

Siegler och Pyke (2012) menar att det är viktigt att grundläggande procedurkunskap för operationer med heltal föreligger innan operationerna generaliseras till att gälla för bråk. I sin studie uppfattade Hecht och Vagi (2010) ingen korrelation mellan god bråkförståelse och generellt god aritmetikkunskap (åk. 4; se 4.4.1.1). De menar att detta motsäger forskning som hävdar att fokus på allmänna aritmetikkunskap är en viktig väg till ökad bråkförståelse.

4.4.3 Hur bör lärare göra för att undervisa utifrån dessa grundidéer?

I litteraturen ges överlappande, delvis kompletterande rekommendationer kring vad läraren bör tänka på och hur läraren bör undervisa om ovannämnda grundidéer. Först berörs betydelsen av elevernas förförståelse och vardag (se 4.4.3.1). Sedan berörs hur kognitiva konflikter kan leda till omkonstruktion av förståelse (se 4.4.3.2). Utöver det som redan nämnts ovan (se 4.4.2) redovisas därefter några specifika rekommendationer: Om hur man bör prata om bråk (se 4.4.3.3), om vikten av variation (se 4.4.3.4) och om visualisering av bråk (se 4.4.3.5). Rekommendationerna avser sällan explicita lektionsplaneringar eller liknande, utan talar främst om principer.

4.4.3.1 Utgå från elevernas förförståelse och vardag

På olika sätt betonas att bråkundervisningen behöver kopplas till elevernas förförståelse och vardag, oavsett vilka grundidéer som anses prioriterade. Vikten av vardagskoppling betonas också i kursplanen (Lgr11, 2019; Matematik 2020).

Moss och Case (1999) menar att bråkundervisning i för liten utsträckning beaktar vad eleverna – rätt eller fel, fullständigt eller ofullständigt – förstår om bråk. De uppfattar att undervisningen istället utgår från ett vuxet (eller matematiskt) perspektiv kring vad som ska förstås och hur. De menar också att det i för stor utsträckning används representationer och illustrationer av bråk som riskerar att förstärka felaktig generalisering från heltalsförståelse, dvs. heltalsbias. Vidare hävdar de att lärare ignorerar de svårigheter som följer av bråknotationen och att lärare antar att eleverna förstår bråknotationen utifrån formella definitioner. Powell och Nelson (2020), Van Hoof et al. (2018) samt Vamvakoussi och Vosniadou (2010) menar att läraren måste anpassa undervisningen utifrån *hur* eleverna tänker kring bråk. De sistnämnda betonar dock att läraren inte alltid bör bygga på elevers tidigare erfarenheter. Som exempel på detta lyfter de samma exempel som Ni och Zhou (2005) (se 4.4.2.3): *Bråk som del/helhet* må vara lättillgänglig, men denna aspekt av bråk går inte att generalisera till all bråkförståelse eleverna behöver utveckla. Dock lyfter de att relaterbarhet kan leda till att eleverna tycker bråk är roligare. Enligt Nagy (2017) kan dock betydelsen från det vardagliga bli ett hinder för eleverna oavsett vilket stadium de är i sitt utvecklande av bråkförståelsen. Detta bl.a. eftersom eleverna kan låsa sig i hur bråk används i vardagliga situationer och få svårt att generalisera och med abstraktionen.

4.4.3.2 Kognitiva konflikter som väg till omkonstruerad förståelse

I flera studier antas att bråkrelaterade missuppfattningar och svårigheter är kopplade till kognitionen (se 4.3.1.3). De pekar på ett behov av kognitiva konflikter för att kunna konstruera bråkförståelse i relation till heltalsförståelse. Detta diskuteras först principiellt (se 4.4.3.2.1) och sedan hur det kan konkretiseras i undervisningen (se 4.4.3.2.2).

4.4.3.2.1 Kognitiva konflikter som väg till omkonstruerad förståelse

Kainulainen et. al (2017) noterar att det inte är vad eleven *inte kan* som sätter käppar i hjulet, utan vad eleven *tror sig kunna*. Enligt Vamvakoussi (2015) pekar forskning på att elever påverkade av heltalsbias inte upplever tveksamhet eller osäkerhet, varför de saknar anledning att själva ifrågasätta om de borde göra på annat sätt. Mycket forskning framhåller att undervisningen behöver tackla två saker för att eleverna ska utveckla konceptuell förståelse: Dels behöver eleverna få erfara relevanta kognitiva konflikter och bli missnöjda över bristen i nuvarande förståelse, och dels behöver de få hjälp att uppfatta att ny förståelse är relevant och möjlig att konstruera (t.ex. Depaepe, Van Roy, Torbeyns, Kleickmann, Van Dooren & Verschaffel, 2018; Kainulainen et al., 2017; McMullen et al., 2018; Prediger, 2008; Vamvakoussi, 2015; Vamvakoussi & Vosniadou, 2010; Van Dooren et al., 2015, Van Hoof et al., 2015b, 2021).

I flera studier konkluderas att omkonstruktionen som krävs för att inte påverkas av heltalsbias är en långsam, individuell och stegvis process (Vamvakoussi & Vosniadou, 2004; 2010; Van Hoof et al., 2015b, 2018). De menar att olika aspekter av biaset är olika svåra att konstruera bort. Utvecklad förståelse kring storleksordnande uppfattar de, relativt de andra aspekterna, som lättast att konstruera och förståelse kring tallinjens täthet som svårast.

4.4.3.2.2 Betonandet av skillnader mellan heltal och bråk

För att åstadkomma kognitiva konflikter behöver skillnaderna mellan heltal och bråk tydliggöras (Clarke & Roche, 2009; Depaepe et al., 2018; Kainulainen et al., 2017; McMullen et al., 2018; Ni, 2001; Prediger, 2008; Vamvakoussi, 2015; Vamvakoussi & Vosniadou, 2010; Van Dooren et al., 2015; Van Hoof et al., 2015b, 2021). Lärare gör inte detta i tillräcklig utsträckning menar Ni (2001) samt Vamvakoussi och Vosniadou (2010). Van Hoof et al. (2015b, 2018) pekar på att läromedel i väldigt liten utsträckning poängterar olikheter mellan heltal och bråk. Istället betonas likheter för mycket, vilket de menar kan stärka elevernas heltalsbias.

Kainulainen et al. (2017) menar att eleverna bör instrueras kring vad som är fel. De menar även att lärare bör utnyttja de fel som eleverna gör. Instruktionerna kan vara skriftliga s.k. *refutation texts*, som beskriver kända missuppfattningar och förklarar dem. Dock ifrågasätter de om just läsande av texter är en effektiv undervisningsform. Enligt Van Hoff et al. (2021) finns forskning som pekar på att elever riskerar att fokusera på endast missuppfattningarna i *refutation texts*. Trots detta och utfallet av sin studie uppfattar de att *refutation texts* kan vara lämpliga i bråkundervisningen. De studerade hur elevers heltalsbias påverkas av olika slags instruktioner genom att vid ett tillfälle studera belgiska elever i årskurs 4 genom digitala test med både kongruenta och inkongruenta uppgifter (n=84; ej angivet antal skolor) (se om sådana uppgifter i 4.3.1.4.1). Efter att ha gjort samma test fick hälften av eleverna *refutation texts*. Den andra hälften fick rent procedurinriktade instruktioner. Därefter gjordes testet om och Van Hoof et al. (2021) konstaterar generell förbättring mellan testtillfällena, särskilt på inkongruenta uppgifter. De förvånas dock över att eleverna som fick *refutation texts* förbättrade sig något mindre än de andra eleverna, primärt på kongruenta uppgifter. Van Hoof et al. (2021) spekulerar om detta kan förklaras av att förstnämnda grupp kom att uppleva osäkerhet kring de kongruenta uppgifterna på grund av kognitiva konflikter. De antar att eleverna kanske inte riktigt hunnit reda ut hur de nya erfarenheterna ska appliceras på dessa uppgifter.

Depaepe et al. (2018) konstaterar att det krävs mycket av läraren för att hjälpa eleverna till god bråkförståelse: Läraren måste ha egen god bråkförståelse. Och läraren måste veta hur hen kan undervisa för att möjliggöra omkonstruktion efter kognitiva konflikter. Depaepe et al. (2018) studerade detta genom en interventionsstudie av belgiska låg- och mellanstadielärarstudenter vid ett lärosäte. En grupp (n=135) fick bråkundervisning som poängterade likheter och skillnader mellan heltal och bråk. Undervisningen omfattade vanliga missuppfattningar. En annan grupp (n=138) fick istället traditionell bråkundervisning för lärarutbildningen. Utifrån utfallet på för- och eftertest konstaterar Depaepe et al. (2018) att förstnämnda grupp förbättrade sig väsentligen mer och tolkar därför interventionen som lyckad. De menar att den gruppen utvecklade förståelse kring både bråk och bråkundervisning på ett sätt som gör att de bättre än den andra gruppen kan hjälpa elever bort från bl.a. heltalsbias.

4.4.3.3 Hur pratar man med elever om bråk?

Clarke och Roche (2018) samt Nagy (2017) framhåller att ordvalet när läraren ställer en fråga, presenterar en uppgift eller förklarar något påverkar elevernas förståelse och också deras utveckling av vidare förståelse. Detta belyses på flera sätt i litteraturen, vilket utvecklas nedan

Ni och Zhou (2005) menar att elever har olika svårigheter med samma fråga beroende på hur den ställs. Att verbalt fråga *Vad är en tredjedel plus en tredjedel lika med?* uppfattar de betydligt enklare för elever än att lösa uppgiften utifrån bråknotationen $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$. I det senare fallet menar de att det är troligare att elever gör fel som att addera nämnarna så att svaret blir $\frac{2}{6}$.

Både Clarke och Roche (2018) samt Ni och Zhou (2005) betonar hur ordval kan påverka utvecklingen av heltalsbias. De senare uppfattar att bråk under tidig bråkundervisning ofta talas om som ett antal (heltal) av ett annat antal (heltal), exempelvis som *en av tre*, vilket de menar betonar likhet med heltal snarare än viktiga skillnader. Clarke och Roche (2018) betonar att lärare av denna anledning bör pratat om $\frac{2}{3}$ som *två tredjedelar* och inte som *två av tre*. De förordar även att lärare ska prata om bråknotationen som "*In the fraction* a/b, *b is the name or size of the part (e.g., fifths have this name because 5 equal parts can fill a whole) and a is the number of parts of that name size.*" (Clarke & Roche, 2018, s. 136). Genom att på det sättet bl.a. betona innebörden av de olika delarna och relationen till en helhet menar de att missuppfattningar kring notationen minimeras och generalisering möjliggörs.

Som redan nämnts finns forskning som menar att förståelsen av *bråk som kvot* utvecklas genom att uppfatta skillnaden mellan delningsdivision och innehållsdivision och utifrån det uppfatta att kvoten kan svara på olika frågor (se 4.3.3.2.3). Som också nämnts i samband med det, uppfattar Löwing (2016) att elever i för liten utsträckning får prata om bråk som innehållsdivision, exempelvis om $1/\frac{1}{3}$ utifrån *Hur många* $\frac{1}{3}$ *ryms i 1?* Hon menar att det är ett ensidigt fokus på delningsdivision som leder till att elever upplever uppgifter som $1/\frac{1}{3}$ och $\frac{3}{4}/\frac{1}{4}$ som mycket svåra. Även Flores et al. (2006) betonar vikten av att pratat om vad en bråkuppgift egentligen säger. Hon exemplifierar med att om tre personer ska dela på fyra pizzor så kan svaret $\frac{3}{4}$ uppfattas olika: Om man utgår från varje pizza som en helhet får varje person en fjärdedel av var och en av de tre pizzorna, dvs. tre kvartsbitar. Om man istället utgår från de tre pizzorna som helheten får varje person en tre-fjärdedels pizza. De pekar också på hur språket kring en fråga kan varieras så att svaret betonar antal, storlek eller andel. De exemplifierar med att uppgiften $\frac{3}{4}$= skulle kunna tolkas som exempelvis: *Hur mycket får en person om fyra ska dela lika på tre pizzor? Hur stor andel får en person om fyra ska dela lika på tre pizzor?* Eller *För att baka en sats går det åt 4 l, till hur mycket räcker 3 l?*

4.4.3.4 Vikten av variation

I litteraturen lyfts vikten av variation för utveckling av bråkförståelse. Variationen gäller både exempel som tas upp i undervisningen (se 4.4.3.4.1) och andra aspekter i undervisningen (se 4.4.3.4.2). Variation beträffande visualisering av bråk diskuteras i nästa avsnitt (se 4.4.3.5).

4.4.3.4.1 Variationsteori

Sveider (2021) framhåller att lärare bör variera utifrån variationsteori och dess koncept synkron variation och diakron variation. Vid *synkron variation* betonas enligt henne åtminstone två varianter av samma aspekt samtidigt. Hon exemplifierar med att utifrån $\frac{1}{4}$ och $\frac{1}{5}$ parallellt peka på nämnarnas betydelse vid storleksbestämmande. Hon menar att en sådan jämförelse ger eleverna möjlighet att uppfatta den specifika skillnaden bråken emellan och att fokusera på betydelsen av denna. Vid *diakron variation* behandlas varianterna istället efter varandra för att istället på det sättet ge eleverna möjlighet att uppfatta skillnaden (Sveider, 2021). Utifrån nämnda exempel innebär det att först resoneras kring storleken på $\frac{1}{4}$ och därefter görs samma sak kring $\frac{1}{5}$.

4.4.3.4.2 Annan variation

I det följande redovisas olika aspekter av variation i undervisningen kopplat till olika förståelser av bråkbegreppet.

Gabriel et al. (2013) uppfattar att elever i för stor utsträckning får arbeta med enkla, välkända bråk. Han betonar att elever behöver få arbeta med många olika slags bråk, såväl större och mindre som lika med 1, för att utveckla förståelsen

Behr et al. (1984) och Nagy (2017) framhåller att elever som är duktiga på att växla mellan olika representationsformer av samma bråk, såsom olika visuella bilder utifrån *bråk som del/helhet* och skriftlig notation, ofta klarar sig bättre i bråksammanhang än elever som fastnar i en viss representationsform. Nagy (2017) betonar också faran med motsatsen: Genom ensidiga bilder av bråk kan eleverna komma att dra felaktiga slutsatser om bråk som kan vara svåra att förändra. Van Hoof et al. (2018) menar dock att undervisningen bör fokuseras på ett mindre antal konceptuella aspekter av bråk och inte samtidigt på många olika. De menar detta utifrån att processen att utveckla god bråkförståelsen är individuell och tar lång tid (se 4.3.1.4.7).

Som redan nämnts menar Yopp (2018) att elever utifrån formella definitioner kan bygga upp missuppfattningar kring växlingen mellan tal i bråk- och decimalform (se 4.3.3.2.6). Han konstaterar dock utifrån sin studie (som innefattade en utvecklande dialog med den intervjuade eleven) att missuppfattningarna kan övervinnas genom att elever får erfara att definitionen av rationella tal tillåter att tal skrivs som heltal eller i decimalform. Han menar att detta bör ske genom systematiskt arbeta med växling mellan bråk- och decimalform.

Smith (1995) lyfter fram att *hur* läromedel pekar ut strategier inte öppnar upp för eleverna att utveckla egna lösningsstrategier. Han rekommenderar att lärare *inte* mäter elevers kunskap baserat på hur väl de applicerar kända generella metoder. Utifrån sin studie konstaterar han bl.a. att elever med hög lösningsfrekvens var mer effektiva (behövde använda färre steg) genom att använda flera olika strategier än andra elever och också prövade med egna strategier innan undervisade generella strategier användes. Detta jämfört med andra elever i studien, som mer genomgående använde en eller ett fåtal strategier som undervisats. Smith (1995) uppfattar därför att elevers alternativa strategier måste tillåtas i klassrummet för att bibehålla och utveckla elevernas egna tänkande. Han menar att det bör ske genom att alternativa lösningar lyfts i helklass och på något vis valideras. Han studerade vilka lösningsstrategier elever använder vid lösning av ekvationer och olikheter med bråk genom att vid ett tillfälle studera amerikanska elever i årskurs 5–6 och 8–9 och gymnasiets år 1–3 som under enskilda intervjuer fick göra test och redovisa lösningsstrategier (total n=30; ej angivet antal, men olika skolor). Även Clarke och Roche (2009) samt Moss och Case (1999) framhåller vikten av att lyfta fram elevernas spontana lösningar. De förstnämnda menar bl.a. att många olika strategier för storleksjämförelser bör lyftas fram i undervisningen, inklusive sådana färgade av heltalsbias eller andra missuppfattningar. De menar att de bör ställas mot varandra, diskuteras med eleverna och förankras genom olika typer av visualiseringar. De föreslår bl.a. att följande strategier, som framkom i deras studie, bör lyftas fram som exempel på fruktbara strategier:

- Att omvandla till samma täljare och resonera att antalet delar är lika i båda bråken men storleken på delarna olika, varför $\frac{3}{7}$ är större än $\frac{3}{8}$.

- Att uppfatta när bråk är ekvivalenta, varför $\frac{2}{3}$ och $\frac{6}{9}$ är lika stora.
- Att jämföra bråkens avstånd till en referenspunkt som 0 eller 1, varför $\frac{6}{8}$ är större än $\frac{2}{3}$ eftersom $\frac{2}{3}$ har $\frac{1}{3}$ kvar till 1, vilket är mer än $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ som $\frac{6}{8}$ har kvar till 1.
- Att jämföra hur bråken förhåller sig till en referenspunkt som $\frac{1}{2}$, varför $\frac{5}{8}$ är större än $\frac{3}{7}$ eftersom det förra bråket är större än $\frac{1}{2}$ medan det senare är mindre än $\frac{1}{2}$.

Marmur, Yan och Zazkis (2020) pekar på att det kan vara svårt för åtminstone oerfarna lärare att undervisa på sätt som krävs för utveckling av konceptuella förståelse. De studerade vilka lösningsstrategier och vilka bilder av bråk som grundskollärarstudenter har genom att vid ett tillfälle studera kanadensiska sådana studenter under deras sista termin (n=33; ett lärosäte). Studenterna fick skriva en matematikdidaktisk inlämning. I den fick de beskriva en möjlig klassrumsdialog kring om det finns några tal mellan $\frac{1}{6}$ och $\frac{1}{7}$, exempelvis $\frac{1}{6,5}$. Utifrån studien konstaterar Marmur et al. (2020) bl.a. att det inte var självklart för flera av studenterna hur många tal som finns mellan de båda bråken eller hur förkortning och förlängning kan användas för att skapa ekvivalenta bråk. De noterar särskilt att studenterna i princip genomgående förkastade elevförslag som $\frac{1}{6,5}$ genom *Så kan man inte skriva!* eller liknande. I huvudsak visade inte heller studenterna att $\frac{1}{6,5}$ är ekvivalent med den mer vedertagna notationen $\frac{2}{13}$. Marmur et al. (2020) konstaterar också att bara en student lyckades skapa en meningsfull bild av $\frac{1}{6,5}$; genom att utgå från en diskret mängd innehållandes sex hela och en halv karamell. Övriga studenter utgick från *bråk som del/helhet* och fick då konstatera att man inte kan dela upp en helhet i 6,5 lika delar.

4.4.3.5 Vikten av att visualisera bråk

Litteraturen framhåller att bråk bör undervisas med hjälp av konkret material och olika visualiseringar (bl.a. Aliustaoğlu et al., 2018; Gabriel et al., 2013; Kleve, 2010; Patahuddin et al., 2018; Sveider, 2021; Yanik et al., 2008). Några sätt att göra det på diskuteras här.

Aliustaoğlu et al. (2018) menar att sådant konkret material kan motverka missuppfattningar vid bl.a. storleksordning och operationer med bråk. Kleve (2010), Moss och Case (1999) och Patahuddin et al. (2018) pekar på att lärarens intention med att visualisera bråk på ett visst sätt, t.ex. som skuggad del av en geometrisk figur, inte alltid står klar för eleverna. De menar att elevernas förståelse därigenom kan begränsas. De framhåller därför att läraren måste tydliggöra sina intentioner.

4.4.3.5.1 Delar av geometriska figurer

Utifrån sin studie framhåller Sveider (2021) att konkret material i undervisning tydligt positivt påverkar elevernas bråkförståelse. I syfte att skapa förståelse för lärares undervisning om bråk på mellanstadiet studerade hon användningen av olika bråkrepresentationer genom att i en delstudie analysera 20 videofilmade lektioner om bråk för svenska elever i årskurs 4–6 (n=anges ej; 9 skolor). Och i en annan delstudie analysera 13 sådana lektioner i samma årskurser (n=anges ej; 7 skolor). Som ett gott exempel utifrån sin studie nämner hon att använda rektanglar för att göra uppdelning som visualiserar t.ex. $\frac{1}{3}$: I två lika rektanglar kan uppdelningen göras med hjälp av lodräta eller vågräta streck. Genom att visa båda sätten samtidigt kan eleverna upptäcka att nämnaren styr antalet delar men inte hur uppdelningen ritas (Sveider, 2021). Hon menar att eleverna utvecklar förståelse kring att delen är precis lika stor (har samma area) i båda fallen utifrån denna typ av variation. Hon framhåller också vikten av att eleverna får förståelse för att storleken på ett bråk inte ändras utifrån olika sätt att dela en geometrisk figur i ett visst antal lika delar.

Kleve (2010) betonar vikten av att lärare noggrant väljer hur bråk ska lyftas fram i olika undervisningssituationer och inte ständigt illustrerar bråk som delar av cirkelskivor.

4.4.3.5.2 Kort med tal i bråk, procent och decimalform

Utifrån sin studie beskriver Sveider (2021) hur elevernas förståelse av hur bråk hänger samman med tal i procent- och decimalform kan utvecklas med hjälp av egentillverkade spelkort. På varje kort skrivs ett tal i bråk-, procent- eller decimalform och eleverna får sedan arbeta med att samla kort som anger samma tal, som $\frac{1}{10}$, 0,1 och 10%. Vikten av att koppla ihop begreppen lyft även i läroplanen (Lgr11, 2019; Matematik 2020).

4.4.3.5.3 Stambråksbitar

När det gäller hur *stambråk* kan fokuseras på i undervisningen menar Flores et al. (2006), Sveiders (2021) och Yanik et al. (2008) att elever bl.a. bör få lägga fysiska stambråksbitar på en tallinje för att uppfatta bråks storlek. Stambråksbitar är rätblock i olika storlek beroende på vilket *stambråk* av samma helhet de representerar. Sveider (2021) exemplifierar med hur eleverna med hjälp av stambråksbitar fick ange hur många sjättedelar som är lika med en tredjedel. Eleverna kom fram till svaret genom att pröva sig fram med stambråksbitar för bl.a. $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$ och $\frac{1}{8}$ tills de såg att $\frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$. Yanik et al. (2008) betonar att användningen av stambråksbitar även kan stärka elevernas förståelse av tallinjen. Det förekommer även digitala stambråksbitar, vilket noteras i nästa avsnitt om datorspel och applikationer.

4.4.3.5.4 Datorspel och applikationer

Olive (1999) framhåller att bråk kan läras ut på ett klassiskt sätt, t.ex. som skuggade delar av en geometrisk figur, men också med hjälp av matematikspel och andra digitala hjälpmedel, som är designade för att utveckla konceptuell förståelse.

Olive (1999) framhåller ett spel där elever får leka fram sin bråkförståelse. För att studera effekten av spelet genomförde han en interventionsstudie av amerikanska elever i årskurs 3 där eleverna fick arbeta med spelet under lärares eller forskares överinseende 45 minuter i veckan över en treårsperiod (n=12; en skola). Särskilt studerades effekten hos två elever genom analys av videoinspelningar av deras arbete med spelet. Hos dessa konstaterar han att bråkförståelsen utvecklas betydligt, bl.a. utifrån hur deras resonemang kring mer komplexa bråkuppgifter förändrades och utvecklades över tid. Han exemplifierar med hur andel av en andel beräknades och hur de dra nytta av inversa förhållanden.

Ett annat digitalt sätt att utveckla bråkförståelse förordas av Braithwaite och Siegler (2021) utifrån deras undervisningskoncept *PFT* (se 4.4.2.5). För att studera potentialen i *PFT* genomförde de en interventionsstudie av amerikanska elever i årskurs 4–5 där eleverna i olika omgångar fick spela ett *PFT*-baserat spel (n=104, n=91; en skola). I spelet fick de bl.a. placera ut bråk på tallinjen med och utan hjälp av digitala stambråksbitar. Utifrån utfallet av tester uppfattar Braithwaite och Siegler (2021) att *PFT* ger tydligt positiva effekter på utvecklingen av bråkförståelsen. De konstaterar att eleverna som fick träna på att placera ut summor av bråk på tallinjen presterade bättre än de som bara fick placera ut enskilda bråk. De förstnämnda eleverna var också bättre på att avgöra om en summa var större eller mindre än 1. Det senare var inget som specifikt tränades, varför Braithwaite och Siegler (2021) uppfattar att dessa elever fått en bredare bråkförståelse med hjälp av *PFT*-spelet och att deras koncept därmed är effektivt.

Även Bush (2020) kommer fram till att didaktiskt relevanta digitala hjälpmedel verkar lovande som undervisningsform. Hans forskning bestod av en interventionsstudie av amerikanska elever i årskurs 4–5 (total n=297; åtta skolor).

4.4.4 Från när bör bråkundervisning påbörjas?

I några fall berörs i litteraturen från när undervisning om bråk bör ske, varvid det genomgående föreslås tidig introduktion. Behr et al. (1984) noterar att en del elever ganska snabbt konstruerar utvecklad bråkförståelse medan andra tar längre tid på sig. De, samt Ni och Zhou (2005), föreslår att bråk ska undervisas redan från motsvarande svensk årskurs 3. Hecht och Vagi (2010) menar också att bråk bör introduceras tidigt och noterar att både konceptuell förståelse och procedurkunskap utvecklas med ålder (skolerfarenhet). Yang (2012) belyser att i Taiwan undervisas bråk redan från motsvarande svensk årskurs 1 och noterar att elever från Taiwan presterar mycket bra i internationella kunskapsjämförelser. Slutligen argumenterar Van Dooren et al. (2015), som även lyfts i 4.3.1.4.7, att heltalsbias minskar med ålder/ökad erfarenhet vilket implicerar att om eleverna börjar tidigare så försvinner även vissa problem tidigare.

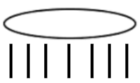
5 Bråk i gamla Egypten

5.1 Behov av matematik och källor till egyptiernas kunnande

Att vara civiliserad medför enligt Imhausen (2006) behov av matematik för att beskriva, organisera och underlätta livet, exempelvis för att kontrollera mängden säd i förråd. Egypten är en av de äldsta civilisationerna och hade ett sådant behov. Imhausen (2006) nämner att det är svårt att med exakthet fastställa hur och till vad egyptierna använde sin matematik. Detta eftersom deras texter, som skrevs på vattenkänslig papyrus, har förstörts, inte minst eftersom egyptiernas stora städer låg nära floden Nilen. Han nämner dock att några texter som beskriver matematiken har överlevt och bl.a. återfunnits i öknen. Två av de mest kända är Rhind- och Moskva-papyrusarna, som båda beskriver en samling matematiska problemuppgifter inom bl.a. geometri och aritmetik (Hollings & Parkinson, 2020). Dessa papyrusar är några av de äldsta dokument som explicit visar på egyptiernas användning av matematik och Imhausen (2006) menar att de har använts som undervisningsmaterial ca 1600 f.Kr. Han uppfattar dock att egyptiernas matematikkunnande fanns betydligt tidigare, för att möjliggöra den kulturella blomning som skedde redan 2686 f.Kr., men noterar att det inte finns några bindande bevis för att så var fallet.

5.2 Egyptisk syn på bråk och bråknotation

Thompson (1996) hämtar exempel från Rhindpapyrusen och enligt honom påminner mycket av egyptiernas matematik om dagens aritmetik, såsom att använda 10-bassystem. Egyptierna hade unika symboler för varje 10-potens och aritmetiken var additiv till sin natur, vilket bl.a. innebär att positionen en viss symbol har inte påverkar talens värden (Thompson, 1996). Istället är det viktiga hur många av varje symbol som används; se som exempel de sju strecken i figur 1 som motsvarar talet 7.

 $= \frac{1}{7} = \overline{7}$

Figur 1. En sjundedel skrivet med först egyptisk notation, sedan nutida notation och sist på neugebauerskt vis (efter Thompson, 1996).

Thompson (1996) nämner fördubbling som ett viktigt inslag i den egyptiska aritmetiken och som förblev relevant fram till medeltiden, vilket han noterar som särskilt imponerande då egyptisk aritmetik som tidigare nämnts kan dateras tillbaka till åtminstone 1600 år f.Kr.

Utöver det additiva räknesättet använde egyptierna bråk på ett annorlunda sätt än vad som är norm idag. Det beskrivs av Michalowicz (1996) samt Hollings och Parkinson (2020) utifrån hur bråk beskrivs och används i Rhindpapyrusen: Egyptierna använde sig bara av stambråk och skrev därför exempelvis inte $\frac{2}{7}$. Imhausen (2006) menar att detta berodde på att egyptierna bara såg bråk som inverser av heltal (jmf. *bråk som invers till heltal* enligt Elias et al. [2019]; se 4.3.3.1.3), vilket förklarar varför det inte var möjligt att skriva exempelvis $\frac{2}{7}$, vars invers $\frac{7}{2}$ ej är ett heltal. I stället skrevs bråk som $\frac{2}{7}$ som addition av stambråk, t.ex. som $\frac{1}{4} + \frac{1}{28}$, dock utan additionstecken eller liknande tecken emellan då additionen verkar ha varit implicit. Hur egyptierna beräknade $\frac{2}{7}$ till $\frac{1}{4} + \frac{1}{28}$ förklaras i 5.3. Enda undantaget från stambråksregeln verkar ha varit $\frac{2}{3}$ som behandlades på samma vis som stambråken men hade ett eget tecken som skiljde sig från de andra.

Ur ett nutida synsätt kan man fråga sig om det inte vore enklare att skriva $\frac{2}{7}$ som $\frac{1}{7}$ och $\frac{1}{7}$ (i stället för $\frac{1}{4}$ och $\frac{1}{28}$)? Eller helt enkelt tillåta skrivandet av $\frac{2}{7}$? Den andra frågan verkar kunna förklaras av ovannämnda idé om att bråk är inverser av heltal. Den första frågan förklaras enligt Imhausen (2006) av faktumet att matematik är kulturellt utvecklat och att det därmed är svårt att bryta mot traditioner även om det skulle effektivisera räknandet. Thompson (1996) menar dock att det finns vissa fördelar med det egyptiska sättet, vilket utvecklas nedan (se 5.3). Oliver (2002) menar att just skrivsättet med stambråk varit en kulturell bromskloss för utvecklingen av matematikämnet. Användandet av stambråk fortsatte dock, enligt historiska fynd presenterade av Knorr (1982), i över 2000 år.

För att indikera ett *stambråk* använde egyptierna en elliptisk figur med siffror under; se figur 1. I det följande kommer dock för enkelhets skull nutida siffror att användas kombinerade med streck för att på samma sätt som Thompson (1996) skriva på egyptiskt vis; se exemplet i figur 1. Detta skrivsätt är bl.a. enklare att skriva med datorer och introducerades enligt Imhausen (2006) samt Hollings och Parkinson (2020) först av Otto Neugebauer, som enligt Hollings och Parkinson (2020) var pionjärer inom inte bara egyptisk matematikhistoria utan även matematikhistoria i allmänhet. I modern tid har Neugebauers vetenskapsmetodik kritiserats, men han är trots detta alltjämt ett stort namn inom matematikhistoria som ämne. En dubblering av ett stambråk såsom $\frac{2}{7}$ skrivs på neugebauerskt vis som $\overline{\overline{7}}$.

5.3 Metoder för egyptisk division

Här redovisas först grundmetoden för division på egyptiskt vis (för division utan rest) och sedan två metoder för division med rest. Sist visas några egyptiska räkneregler.

Utifrån beräkningen av $\frac{45}{9}$ beskriver Thompson (1996) grundmetoden för att utföra division på egyptiskt vis, vilket utvecklas här och sammanfattas i figur 2. Först skrivs två kolumner. I den vänstra skrivs alltid 1. I den högra skrivs talet i nämnaren; i detta fall 9. På efterföljande rad skrivs talen dubblerade (dvs. först 2 och 18) och dubblering fortsätter sedan på efterföljande rader tills dess talet i högerkolumnen överstiger hälften av täljaren. Vid beräkning av $\frac{45}{9}$ avslutas proceduren med 36 i högerkolumnen då 36 är mer än hälften av 45. Därefter identifieras vilka tal i högerkolumnen som kan summeras för att ge talet i täljaren. Dessa tal markeras (i figur 2 med snedstreck) och de korresponderande talen i vänsterkolumnen adderas för att ge svaret på divisionen. Eftersom 45 erhålls genom additionen 9+36 är $\frac{45}{9} = 1 + 4 = 5$.

1	9	/
2	18	
4	36	/ = 45

Figur 2. Uppställning för beräkning av divisionen $\frac{45}{9}$ i det gamla Egypten (efter Thompson, 1996).

Eftersom egyptierna enligt vad som sagts ovan kräver att bråk alltid ska skrivs som en summa av stambråk (inverser av heltal) och/eller heltal accepteras inte att svaret på divisionsuppgiften $\frac{19}{8} =$ skrivs som $\frac{19}{8}$. Detta skiljer sig från nutida synsätt, men som nämnts i 4.3.3.2.3 är det nutida synsättet, att en divisionsuppgift och dess resultat kan uttryckas med samma bråk, något som kan uppfattas förvirrande för elever. När en division resulterar i en kvot som inte är ett heltal räcker inte grundmetoden. Thompson (1996) beskriver hur metoden utvecklas för att beräkna $\frac{19}{8}$, vilket utvecklas i det följande och sammanfattas i figur 3. Till en början följs grundmetoden och 1 och 8 skrivs som start i varsin kolumn och nästkommande rader dubbleras. Proceduren avslutas med 16 i högerkolumnen då 16 är mer än hälften av 19. Eftersom det i högerkolumnen nu inte finns tal som kan summeras till 19 dras ett streck och istället för dubbleringar utförs halveringar. Hälften av 1 är ekvivalent med inversen av 2 och skrivs därmed som $\overline{2}$ och hälften av 8 är 4. Hälftendelningen fortsätter tills 19 kan erhållas genom att summera tal i högerkolumnen, varvid korresponderande tal i vänsterkolumnen summeras för att ge svaret. Eftersom 19 erhålls genom 16+2+1 är $\frac{19}{8}$ lika med 2 $\overline{4}$ $\overline{8}$. En nutida tolkning av detta är att $\frac{19}{8} = 2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$. Detta kan förlängas till $\frac{16}{8} + \frac{2}{8} + \frac{1}{8} = \frac{19}{8}$, vilket var bråket vi utgick från.

1	8	
2	16	/
$\overline{2}$	4	
$\overline{4}$	2	/
$\overline{8}$	1	/ = 19

Figur 3. Uppställning för beräkning av divisionen $\frac{19}{8}$ i det gamla Egypten (efter Thompson, 1996).

Att bara räkna och svara med stambråk kan från ett nutida synsätt uppfattas som omständligt och opraktiskt men Thompson (1996) argumenterar för att det har sina fördelar när bråkuppgiften är av praktisk karaktär. Han exemplifierar med att sju personer ska dela på två brödkakor och ger två förslag på hur uppgiften kan lösas. Varje brödkaka kan delas i sju delar så att varje person får två sjundedelar, vilket han menar är ett mer nutida sätt att lösa uppgiften. Alternativt kan varje brödkaka delas i fyra delar, vilket ger åtta fjärdedelar som distribueras på de sju personerna. Sedan delas den återstående fjärdedelen i sju delar, dvs. $\frac{\frac{1}{4}}{7} = \frac{1}{28}$, som distribueras på de sju personerna. Detta är enligt honom det egyptiska sättet att lösa uppgiften på och också ett mer praktiskt sätt då det är lättare att dela en brödkaka i hälften och sedan i fjärdedelar än att direkt dela i sjundedelar. Uppgiften är av typen $\frac{2}{n}$, dvs. en dubblering av stambråket $\frac{1}{n}$, som enligt Thompson (1996) var ett vanligt tema för egyptiska matematikproblem.

Brödkakeuppgiften är extra intressant då den exemplifierar division med ojämn nämnare, vilket kräver utveckling av ovannämnda metod. Thompson (1996) beskriver denna utvecklade metod utifrån beräkningen av $\frac{2}{7}$, vilket utvecklas nedan och sammanfattas i figur 4. Den första halveringen (av 1 och 7) inkluderar halvering av ett ojämnt tal (7). Därför skrivs 7 som 6 + 1, då båda dessa tal är delbara enligt den egyptiska räknekonsten. Halvering av 6 och 1 leder till 3 och $\overline{2}$, där trean behöver skrivas om för att kunna halveras. Thompson (1996) redovisar inte rad 4 och 5 i figur 4 explicit, men för tydlighetens skull skriver vi ut även de stegen. Av talen i högerkolumnen kan trippeln 1 $\overline{2}$ $\overline{4}$ adderas med $\overline{4}$ till summan 2, vilket är lika med täljaren i uppgiften. Addition av korresponderande tal i vänsterkolumnen, $\overline{4}$ och $\overline{28}$, ger då svaret varför $\frac{2}{7} = \overline{4}\ \overline{28}$. En nutida tolkning av detta är att $\frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28}$.

1	7		(7 = 6 + 1)
$\overline{2}$	3 $\overline{2}$		(3 = 2 + 1)
$\overline{4}$	1 $\overline{2}$ $\overline{4}$	/	
$\overline{7}$	1		
$\overline{14}$	$\overline{2}$		
$\overline{28}$	$\overline{4}$	/	

Figur 4. Uppställning för beräkning av divisionen $\frac{2}{7}$ i det gamla Egypten (delvis efter Thompson, 1996).

Thompson (1996) beskriver även ett flertal räkneregler som används i Rhindpapyrusen, såsom $1 = \overline{2}\ \overline{3}\ \overline{6}$. Dessa regler ska enligt honom ha använts flitigt av egyptierna likt hur multiplikationstabellen utnyttjas i nutid. Enligt honom har nyss nämnda räkneregel utnyttjats vid beräkningen av exempelvis $\overline{\overline{101}}$ (dvs. $\frac{2}{101}$ i nutida notation) där 1 först adderas till båda sidor i regeln, vilket ger $2 = 1\ \overline{2}\ \overline{3}\ \overline{6}$. Därefter har allt divideras med 101 för att ge $\overline{\overline{101}} = \overline{101}\ \overline{202}\ \overline{303}\ \overline{606}$. Knorr (1982) menar att den egyptiska räknemästaren här har gjort en tråkig beräkning och utvecklar att svaret skulle ha skrivits med färre termer men med större nämnare om beräkningen gjorts utan hjälp av räkneregel, nämligen $\overline{60}\ \overline{404}\ \overline{1515}$. Knorr (1982) uppfattar att egyptierna gjorde sina beräkningar även utifrån estetiska överväganden och att vad som uppfattades vara ett korrekt svar på en given bråkuppgift därför inte bara avgjordes utifrån matematiska överväganden. Samma metod kunde därför inte alltid appliceras, vilket Knorr (1982) menar är en anledning till varför den egyptiska bråkräkningen ses som primitiv.

6 Diskussion

Här diskuteras resultatet av litteraturstudien utifrån frågeställningarna. Först vilka vanliga missuppfattningar och svårigheter elever i svensk skola har under högstadietiden (se 6.1). Därefter varför de föreligger (se 6.2) och vad svenska högstadielärare kan göra för att motverka och inte befästa dem (se 6.3). Aspekter som knyter samman nutid med det egyptiska sättet att se på och hantera bråk (se 5) noteras i sistnämnda avsnitt. Avslutningsvis reflekterar vi över hur resultatet av detta arbete påverkar hur vi kommer bedriva vår bråkundervisning (se 6.4).

6.1 Vanliga missuppfattningar och svårigheter beträffande bråk

I det inledande kapitlet nämner vi, utifrån bl.a. McIntosh (2008), de aspekter som vi tycker utgör god bråkförståelse (se 1). I det här avsnittet knyter vi samman dessa aspekter med de missuppfattningar och svårigheter som beskrivs i litteraturen (se 4.3). Vi menar att lärare bör utgå från att elever som börjar i svenskt högstadium kan ha missuppfattningar och svårigheter beträffande alla aspekter av god bråkförståelse. Vi menar även att lärare måste vara uppmärksamma på att sådana missuppfattningar och svårigheter kan uppstå under högstadietiden. Vi instämmer med Powell och Nelson (2020), att lärare bör utgå från att elever <u>inte</u> har utvecklad bråkförståelse.

I litteraturen är det bara Löwing (2016) som behandlar missuppfattningar och svårigheter hos svenska elever både före och under högstadietiden. Hon drar slutsatser kring bråkförståelsen utifrån lösningsfrekvens på Skolverkets Diamantdiagnoser (se 4.3.1.4.2). Hon sätter fingret på typen av uppgifter som har låg lösningsfrekvens. Tyvärr förklarar hon inte vari missuppfattningarna och svårigheterna ligger, förutom när hon återger några elevresonemang.

En aspekt av god bråkförståelse är att kunna operera med bråk. Löwing (2016) berör detta och noterar att lösningsfrekvensen varierar mycket för samma elevgrupp beroende på typ av bråk och typ av operation (se 4.3.4.2). Hon pekar på att addition och subtraktion med liknämniga bråk är lättast, multiplikation med bråk svårare, addition och subtraktion som kräver förkortning eller förlängning också svårare samt division med bråk mycket svårt. För mellanstadiet konstaterar hon att andelen elever med godtagbar bråkförståelse (avspeglat som godtagbar lösningsfrekvens) är relativt oförändrad i slutet av årskurs 5 och 6; bara omkring hälften. För högstadiet konstaterar hon att nästan 90% av eleverna i årskurs 8 har för låg lösningsfrekvens vid multiplikation och division och mer än 60% av eleverna vid addition och subtraktion. Hon noterar vidare att ca 60% av eleverna i början av gymnasiet generellt uppvisar för låg lösningsfrekvens. Hennes analys bygger på resultat från flera olika elevgrupper vid olika tillfällen. Observerade lösningsfrekvenser är huvudsakligen desamma över kommungränser (se 4.3.1.4.2 och 4.3.4.2). Studier avseende jämnåriga och äldre elever i några andra länder pekar på liknande svårigheter att operera med bråk (se 4.3.1 och 4.3.4). Mot denna bakgrund tycker vi att det är rimligt att generalisera Löwings (2016) slutsatser. Vi menar därför att lärare bör utgå från dels att flertalet som börjar svenskt högstadium har svårigheter att operera med bråk, förutom när det gäller enklare addition och subtraktion, och dels att dessa svårigheter fortgår under högstadietiden.

Andra aspekter av god bråkförståelse är att kunna avgöra vilket bråk som är störst/minst samt förstå att bråk är en kontinuerlig företeelse och att multiplikation och division med bråk både kan förstora och förminska. Den förstorande/förminskande effekten rör förståelse av den del av bråkbegreppet Kieren (1980) kallar *bråk som operator* (se 4.3.3.1.1). Alla nyss nämnda aspekter av god bråkförståelse berörs av studier om heltalsbias (se 4.3.1). Flera sådana pekar på att elever, i flera europeiska länder, i slutet av mellanstadiet och under högstadietiden begår misstag när de har med bråk att göra. Detta genom att omedvetet anta att det som gäller för heltal också gäller för bråk; heltalsbias. Fyra aspekter av heltalsbias lyfts fram (se 4.3.1):

- Biaset kan medföra att täljare adderas med täljare och nämnare med nämnare som om täljare och nämnare vore separata heltal.
- Vid storleksordnande kan biaset medföra att störst nämnare eller samtidigt störst täljare och nämnare avgör vilket bråk som är störst. A&Ws *Third-Pound Burger* tycks ha ratas som mindre än McDonald's *Quarter Pounder* (se 1) utifrån ett sådant tankemönster.
- Eftersom multiplikation med heltal alltid förstorar (och division med heltal alltid förminskar) kan heltalsbias medföra att multiplikation med bråk alltid antas förstora (och division med bråk alltid antas förminska).
- Eftersom heltal är en diskret företeelse kan biaspåverkade elever uppfatta att även bråk är det. Mellan två bråk på tallinjen skulle det därför inte finnas oändligt många andra bråk.

Studierna pekar på att de två sistnämnda aspekterna är frekventa eller mycket frekventa hos elever under högstadiet men något avtagande med ålder. De två förstnämnda aspekterna uppfattas mer framträdande i lägre åldrar, men förekommer ändå hos en relativt stor andel på högstadiet. Studier avseenden elever på andra kontinenter pekar på samma sak. Förekomsten av heltasbias hos svenska elever belyses inte i litteraturen. De svårigheter med addition och subtraktion som Löwing (2016), enligt ovan, pekar på tror vi dock beror på biaset. Detta eftersom lösningsfrekvensen är låg utifrån samma mönster som den är låg hos biaspåverkade elever. Även om studierna om biaset inte avser stora elevgrupper och bara några länder, uppfattar vi att de sammantaget pekar på ett mönster. Detta mönster innebär att heltalsbias är en generellt viktig faktor, som negativt påverkar elevers bråkförståelse. Vi menar därför att lärare bör anta att elever som börjar i svenskt högstadium kan vara påverkade av heltalsbias, särskilt när det gäller att förstå effekten av multiplikation och division och att bråk är ett kontinuerligt fenomen. Vi menar vidare att högstadielärare måste vara uppmärksamma på att de inte etablerar eller förstärker heltalsbias genom undervisningen.

En studie pekar på att elever vid storleksordnande istället för heltalsbias kan agera utifrån skillnadstänkande eller omvänd bias, vilket underbyggs av två andra studier (se 4.3.2). Vid skillnadstänkande antas bråket med minst skillnad mellan nämnare och täljare vara störst. Vid omvänd bias antas bråket med minst nämnare vara störst. Studien pekar på att skillnadstänkande ökar under högstadietiden samtidigt som heltalsbias minskar. Trots att detta bara belyses av enstaka studier kan det vara relevant för svenska högstadielärare att vara uppmärksamma på denna typ av missuppfattningar och inte bidra till att de etableras.

Ytterligare aspekter av god bråkförståelse är att kunna förlänga och förkorta bråk samt förstå att det inte förändrar storleken och att bråk kan skrivas på oändligt många olika sätt (ekvivalenta bråk). Detta är enligt Kieren (1980) förståelse av att bråk speglar ett förhållande mellan två storheter; *bråk som förhållande* (se 4.3.3.1.1). Missuppfattningar och svårigheter angående dessa aspekter behandlas mindre i litteraturen. Löwing (2016) pekar på att lösningsfrekvensen vid förlängning under mellanstadiet sjunker från hög till låga 10% när täljarna inte uppfattas komma i nummerordning, som i uppgiften $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{}{15} = \frac{}{18}$. En studie av kinesiska mellanstadieelever pekar på att förståelsen av ekvivalenta bråk utvecklas sent under mellanstadiet (se 4.3.3.2.2). Sveider (2021) framhåller att heltalsbias kan försvåra förståelsen av ekvivalenta bråk. Detta eftersom biaset kan medföra att ekvivalenta bråk uppfattas olika stora. Här vill vi framhålla att även skillnadstänkande och omvänd bias skulle kunna försvåra förståelsen av ekvivalenta bråk på samma sätt. Trots avsaknad av tydligt litteraturstöd uppfattar vi att svenska högstadielärare bör vara uppmärksamma på missuppfattningar kring vad som är ekvivalenta bråk och hur det genom förlängning och förkortning kan avgöras om bråk är ekvivalenta.

Ännu en aspekt av god bråkförståelse är att kunna placera bråk på en tallinje. Detta avser förståelse av det Kieren (1980) kallar *bråk som mätning* (se 4.3.3.1.1). Studier avseende primärt elever på senare delen av mellanstadiet pekar på flera missuppfattningar och svårigheter i denna del. De pekar bl.a. på att elever genom att tänka utifrån *bråk som del/helhet,* snarare än *bråk som mätning,* utgår från att tillhandahållen tallinje i sin helhet ska delas upp när ett bråk ska utplaceras; inte bara avståndet mellan 0 och 1 (se 4.3.3.2.4). Detta primärt när bara ytterpunkterna är talsatta. Detta kan medföra att $\frac{1}{2}$ placeras på platsen för 2,5 på en tallinje med bara 0 och 5 markerat. Utifrån observationer av svenska elever i bl.a. årskurs 9 noterar Nagy (2017) att elever inte verkar uppfattar aktiviteten som ett tal att placera ut, utan som en (tal-)linje att dela upp. Studier pekar även på missuppfattningar kring täljare och nämnares betydelse vid utplaceringen och hur avstånd mellan flera bråk ska bestämmas (se 4.3.3.2.4). Trots avsaknad av tydligt stöd i litteraturen, uppfattar vi att svenska högstadielärare bör vara uppmärksamma på bråkrelaterade svårigheter med tallinjen.

När det gäller förståelse av det Kieren (1980) kallar *bråk som kvot* (se 4.3.3.1.1), menar Löwing (2016) att en orsak till elevers svårighet med bråkdivision är att de alltid tycks betrakta division som delningsdivision (se 4.3.3.2.3). Enligt henne är lösningsfrekvensen på $\frac{3}{4}/\frac{1}{4}$ extremt låg, även på gymnasiet, eftersom elever inte tolkar uppgiften som innehållsdivision. Detta innebär att högstadielärare bör anta att elever generellt har svårt att uppfatta innehållsdivision. Lärare bör därför betona denna tolkning av division.

Utöver de aspekter av bråkbegreppet som redan nämns återstår Kierens (1980) *bråk som del/helhet* (se 4.3.3.1.1). Utifrån den aspekten speglar bråk ett förhållande mellan ett visst antal lika stora delar och en diskret eller kontinuerlig helhet delad i sådana delar. I litteraturen pekas inte på några missuppfattningar och svårigheter kopplat till detta hos elever i högstadieålder, utan mer hos yngre elever (se 4.3.3.2.1). Det diskuteras därför inte närmare här. Dock framhålls att elever ofta har en stereotyp bild av hur bråk kan illustreras (utifrån skuggade cirkelskivor) och kan ha svårare att navigera kring diskreta än kontinuerliga helheter (se 4.3.3.2.1). Vi uppfattar litteraturen som att elever utgår från *bråk som del/helhet* när förståelsen utvecklas kring andra aspekter av bråkbegreppet, vilket kan leda fel. Nagy (2017) pekar på forskning som menar att elever även i högstadieålder kan ha en inre bild av bråk inte som ett tal utan som en skuggad del av en cirkelskiva. Allt som sagts i detta stycke uppfattar vi som delförklaringar till svårigheterna att opererar med bråk, vilket högstadielärare bör vara uppmärksamma på.

En sista aspekt av god bråkförståelse är att förstå att ett bråk även kan skrivas i decimal- eller procentform. En utländsk studie pekar på att elever i högstadieålder uppfattar bråk och decimaltal som obesläktat (se 4.3.3.2.6). En studie menar därtill att elever intuitivt uppfattar $0{,}333\ldots \neq \frac{1}{3}$ (se 4.3.3.2.6). Den studien menar att elever begränsas av den formella definitionen av rationella tal och på grund av denna uppfattar skillnader mellan bråk och andra rationella tal. I litteraturen pekas inte på att sådana här missuppfattningar och svårigheter skulle förekomma hos svenska högstadieelever. Löwing (2016) pekar istället på motsatsen. Hon nämner att elever tycks föredra att subtrahera bråk efter omskrivning till decimaltal. Det tycker vi tyder på förståelse av kopplingen representationerna emellan. Möjligen kan en förklaring till den ovannämnda låga lösningsfrekvensen för bråksubtraktionsuppgifter vara att bråken inte lätt låtit sig skrivas om i decimalform. Utifrån Löwings (2016) observation är det värt för högstadielärare att följa upp om elever löser bråkuppgifter i bråk- eller decimalform.

Givet att en heltäckande bild av missuppfattningar och svårigheter hos svenska högstadieelever inte kan tecknas utifrån litteraturen, uppfattar vi att studier kring detta är påkallat. Inte minst för att klargöra i vilken utsträckning svenska elever är påverkade av heltalsbias, skillnadstänkande och omvänd bias.

6.2 Varför föreligger de?

Den korta förklaringen till varför ovannämnda missuppfattningar och svårigheter föreligger är att elevernas konceptuella förståelse är ofullständig och deras procedurkunskap bristfällig (se 4.3.4.2 och 4.4.1.2). Det förra avser förståelse av bråkbegreppets betydelser. Det senare avser lösningsstrategier och hur de verkställs steg-för-steg för att leda till ett korrekt svar (se 4.3.4.1). Varför den konceptuella förståelsen är ofullständig och procedurkunskapen bristfällig är en mer komplex fråga att besvara.

I litteraturen framhålls att den konceptuella förståelsen är ofullständig eftersom undervisningen för mycket fokuserar på procedurer (se 4.3.4.2 och 4.4.1.2). För specifikt svenska elever framhåller Löwing (2016) att hennes analys pekar på just detta (se 4.3.4.2). Samtidigt pekar hon på bristfällig procedurkunskap. Hon nämner bl.a. att elever inte kommer ihåg algoritmer eller felaktigt tillämpar det som memorerats. Även utländska studier pekar på sådana brister i procedurkunskapen (se 4.3.4.2). Dessa observationer kan bero på att konceptuell förståelse kring procedurerna saknas. Ni (2001) betonar att procedurkunskap inte automatiskt medför förståelse av *hur* procedurerna kan nyttjas. I några studier betonas dock att konceptuell förståelse och procedurkunskap kanske utvecklas parallellt (se 4.4.1). I bråkundervisningen i Taiwan, som Yang (2012) uppfattar framgångsrik, har procedurer en framskjuten roll. Där sägs dock procedurer fokuseras parallellt med anknytande konceptuell förståelse (se 4.4.1.2). Inga studier belyser hur och i vilken utsträckning procedurkunskap betonas i svensk eller annan undervisning. Vi kan därför inte ta ställning till om procedurkunskap fokuseras på bekostnad av konceptuell förståelse i svensk skola. Anekdotiskt, från erfarenheter från VFUer och som lärarvikarier och läxhjälpare, uppfattar vi dock ett stort procedurfokus.

Att utveckla konceptuell förståelse kring bråk är komplext eftersom bråkbegreppet har flera matematiskt och kognitivt delvis överlappande, delvis kompletterande betydelser. Varje sådan betydelse är ett konstrukt, som används när individen konstruerar sin förståelse; specifikt för att sortera, förstå och förklara (se 4.3.3.1). I litteraturen används de konstrukt Kieren (1980) föreslaget, med eller utan modifiering av Behr et al. (1983). De tycks även ha fått störst genomslag i forskningen generellt (se 4.3.3.1). Kierens konstrukt – bl.a. *bråk som del/helhet* – har noterats i föregående avsnitt (se 6.1). Det finns olika idéer om vilka konstrukt som bäst ringar in bråkbegreppet. Vi uppfattar att de modifieringar Behr et al. (1983) gör av Kierens konstrukt är relevanta. Detta eftersom de betonar aspekter som är viktiga i undervisningen och som Kieren inte adresserar. Det gäller särskilt kopplingen mellan bråk och decimaltal och att bråk kan spegla en förändringstakt (se 4.3.3.1.2). Samtidigt uppfattar vi att Elias et al. (2020) betonar ytterligare aspekter av bråkbegreppet som förtjänar att tydliggöras i undervisningen. Det gäller särskilt att ett bråk kan illustreras på många olika sätt, det inversa förhållandet mellan heltal och stambråk och att bråk används i mindre exakta betydelser i vardagen (se 4.3.3.1.3). Vilken uppsättning konstrukt läraren bör utgå från kan uppfattas som en akademisk fråga. För att kunna stödja utvecklingen av elevernas förståelse uppfattar vi det viktigt att läraren har en bred egen förståelse kring bråkbegreppet. I en sådan förståelse tycker vi det bl.a. ingår att kunna förklara och belysa viktiga skillnader och likheter mellan konstrukt, både för sig själv och för elever. Vi förstår att detta kan låta övermäktigt. Anekdotiskt upplever vi dock att många lärare är på det klara med att det finns olika betydelser. Deras svårighet tycks vara att kunna sätta ord på skillnaderna och därigenom synliggöra dem för eleverna.

I litteraturen betonas det återkommande att *hur* det undervisas är avgörande för elevernas bråkförståelse (se 4.4). Det kan vara så att konceptuell förståelse i och för sig står i fokus i undervisningen, men på ett kvalitativt mindre bra sätt. Inte heller kring det finns det underlag för att dra annat än anekdotiska slutsatser. Olika studier antyder bristfällig bråkförståelse eller bristfällig variation i undervisningen och att lärare mer ensidigt anknyter till en betydelse av bråk (ofta *bråk som del/helhet*) och ett sätt att visualisera bråk (ofta som skuggad del av cirkelskiva). Hur lärare bör göra i kvalitativ bråkundervisning diskuteras i nästa avsnitt (se 6.3).

När det gäller orsaken till heltalsbias föreligger inte konsensus (se 4.3.1.3). De som i litteraturen studerat biaset uppfattar dock inte biaset som medfött, utan orsakat av bristfällig undervisning (se 4.3.1.3). I litteraturen påpekas att undervisningen i för liten grad belyser *varför* det som gäller för heltal inte gäller för bråk. Det framhålls också att elever inte får erfara nödvändiga kognitiva konflikter kring detta. (se 4.3.1.3 och 4.4.3.2). Istället sägs det att läromedel och lärare betonar likheterna mellan heltal och bråk. De skulle därigenom kunna sägas (omedvetet) förleda eleverna att felaktigt generalisera bråkförståelen utifrån sin heltalsförståelse. Påverkan av heltalsbias är omedveten. Vamvakoussi (2015) nämner att elever påverkade av biaset inte upplever tveksamhet eller osäkerhet, varför de saknar anledning att själva ifrågasätta om de borde göra på annat sätt. Det är därför viktigt att läraren hjälper eleverna att inse detta. Hur det förhåller sig med allt detta i svensk skola belyses inte av litteraturen. Det står dock klart att det är angeläget att lärare agerar för att motverka heltalsbias.

När det gäller skillnadstänkande och omvänd bias pekar González-Forte et al. (2020) på att dessa kan vara orsakade av omkonstruktion av förståelsen när heltalsbias överges, men att bråkförståelsen då alltjämt är ofullständig. Det är därför angeläget att lärare är uppmärksam på att dessa tankemönster kan uppkomma genom undervisningen.

6.3 Vad kan och bör göras att motverka och inte befästa missuppfattningarna och svårigheterna?

Det finns få studier om svenska högstadieelevers förståelse av bråk. Samtidigt finns flera studier om utländska elevers förståelse. Vi ser ingen anledning till varför svenska elever skulle fungera annorlunda än de elever som studerats i andra länder. Detta då forskningen ofta pekar på landsöverskridande problematik (se 6.1). När det kommer till ålder avser de flesta studierna kring bråkundervisning låg- och mellanstadiet. Vi erkänner att elever i högstadiet i stort fungerar annorlunda än yngre elever, men om en elev på högstadiet uppvisar samma missuppfattning/avsaknad av förståelse som en yngre elev, t.ex. heltalsbias, så bedömer vi att undervisning med syfte att få bort missuppfattningen hos den äldre eleven i stort bör likna rekommenderad undervisning för den yngre. Lite som att ge samma vaccin till personer i olika åldrar för samma sjukdom (men med anpassad dos). Med det sagt tror vi inte att undervisningen för en högstadieklass som helhet kan vara identisk med undervisningen för en yngre klass, bland annat pga. skillnader i kognitiv utveckling och generell matematikförståelse. Fråga vad högstadielärare i Sverige kan och bör göra för att motverka och inte befästa bråkrelaterade missuppfattningar och svårigheter, kommer nu diskuteras utifrån ovanstående resonemang.

Baserat på det som redovisas i 4.4.1 verkar det onekligen som att lärare behöver lägga mer fokus på konceptuell förståelse i undervisningen, vilket ligger i linje med våra egna uppfattningar. Som Powell och Nelson (2020) nämner kan en del procedurer uppfattas som rena magitrick. Utan konceptuell förståelse om varför tricken fungerar, är det inte konstigt att eleverna blandar ihop eller glömmer bort hur tricken ska användas. Vi tänker själva bl.a. på metoden att multiplicera med inversen av nämnaren vid division med bråk, som vi bedömer att många elever får lära sig men sällan förstår. Att procedurer har *en* plats i undervisningen tycker vi är självklart. Stöd för detta finns bl.a. hos Hecht och Vagi (2010), som uttrycker att konceptuell förståelse stärks av procedurkunskap. Dessutom, hur ska elever annars använda sin konceptuella förståelse? Fokuset på procedurer behöver dock tonas ner, så att läraren kan fokusera mer på konceptuell förståelse av bråk, som verkar svårt och långsamt att utveckla.

För att utveckla konceptuell förståelse presenterar litteraturen en mängd olika, ofta överlappande, grundidéer som lärarna kan utgå från (se 4.4.2). Forskningen verkar lägga stort fokus på vilka grundidéer som bör prioriteras. *Dela lika* verkar vara den grundidé som elever lär sig utifrån först och som sedan enkelt övergår i *bråk som del/helhet*. I litteraturen finns det argument både för och emot huruvida detta "naturliga" sätt att tänka på, som är kopplat till elevernas vardag, ska byggas vidare på av läraren eller inte. Detta då det i forskningen råder osäkerhet kring om vardagskopplingar i allmänhet är bra. Å ena sidan gör det undervisningen mindre abstrakt och mer relaterbar för eleverna, vilket ses som positivt. Men å andra sidan kan eleverna hamna i kognitiva återvändsgränder, bl.a. när delen helt plötsligt är större än helheten (Ni & Zhou, 2005). Som alternativ föreslås tidigt fokus på *bråk som mätning*, som inte har samma begränsning men som riskerar att inte ha samma relaterbarhet för eleverna. Yanik et al. (2008) påstår att även om *bråk som mätningar* verkar fördelaktigt att fokusera på, så går det inte att undervisa om det innan *bråk som del/helhet* undervisats. Vi tror dock, baserat på Patahuddin et al. (2018), att eleverna mycket väl kan börja direkt med *bråk som mätning*, exempelvis genom att ta en pinne, dela den i bitar och sedan använda den för att mäta olika ting. Man skulle då kunna komma fram till att ett bord är $\frac{8}{3}$ pinne långt. Alternativt kan rätblock i form av stambråksbitar användas som liknande metafor (se 4.4.3.5.3). Om elever på högstadiet har bristfällig bråkförståelse så har därför *bråk som mätning* kapacitet att vara elevernas första förståelse av bråk. Sammanfattningsvis bedömer vi att lärare i svenskt högstadium bör lägga mer fokus än tidigare på *bråk som mätning* (hellre än *bråk som del/helhet*). Detta dels för att detta konstrukt inte är lika begränsande för elevernas fortsatta utveckling av sin bråkförståelse. Och dels för att vi tror att dessa äldre elever är mer mottagliga för detta något mer abstrakta tankesätt då de är mer kognitivt utvecklade och lättare kopplar till tallinjen utan att problem, såsom var $\frac{1}{2}$ ska placeras på en tallinje som inte endast går från 0 till 1, uppstår (se 4.3.3.2.4). Effekterna av sådan undervisning skulle vi vilja se mer forskning kring.

Ovan nämnde vi några sätt att visualisera bråk; dels med stambråksbitar, dels med tallinjen i form av en pinne. Detta är några alternativ på visualiseringar som läraren kan använda sig av. Visualiseringar i sig verkar forskningen mena underlättar elevernas utveckling av förståelse. Oavsett vilken visualisering som används behöver läraren vara tydlig gentemot eleverna vad som läraren vill synliggöra. Detta eftersom eleverna lätt kan göra en annan tolkning än vad läraren avsett (se 4.4.3.5). Även sambanden mellan bråk-, procent- och decimalform kan visualiseras med hjälp av konkret material såsom olika kort som ska paras ihop (se 4.4.3.5.2). Detta för oss vidare till vilken representationsform som bör introducera först.

Ett stort fokus när det gäller rationella tal verkar vara tal i bråkform, men vissa menar att decimaltal eller procent vore en bättre ingång (se 4.4.2.6). Detta utifrån att procentform skulle vara mer intuitivt och erfarenhetskopplat för elever samt att elever lättare skulle förstå sig på decimaltalens kontinuitet än bråkens kontinuitet. Forskningen om det första påståendet må vara över 20 år gammal, men vi uppfattar tanken relevant och aktuell då exempelvis batteri på mobilen ofta uttrycks i procent samt att många spel berör procent på olika sätt. Att använda decimalform som en brygga till bråkförståelse ser vi också som relevant och spekulerar kring om detta kan underlätta eftersom eleverna redan lärt sig om positionssystemet för heltal och att steget till decimaltal därmed inte är så stort. Dock pekar viss forskning på att heltalsbias är en utmaning även beträffande decimaltal (se 4.4.2.6.2). Vi bedömer att mer forskning behövs för att kunna dra slutsatser kring i vilken ordning representationsformerna bör undervisas, vilket även framhålls i litteraturen.

Forskning om elevernas bristande förståelse om tallinjens täthet, och därmed bråkens kontinuitet, innefattar sällan undervisningsförslag. Vi bedömer denna brist på forskning som ett problem då elever har denna bristande förståelse även i högre åldrar (se 4.3.1.4.6). Ett förslag från oss är att arbeta med olika exempel såsom $\frac{3}{8}$ och $\frac{5}{8}$ och ge eleverna i uppgift att komma fram till så många förslag på bråk mellan dessa som de kan, och sedan placera ut bråken på tallinjen. Detta kan även kombineras med samma fråga fast mellan två decimaltal, eftersom forskning pekar på att det är en svårare fråga (se 4.3.3.2.6 och 4.4.2.6.2).

Vi ser det som underförstått att eleverna behöver en grundläggande förståelse av naturliga tal innan de börjar med bråk. Van Hoof et al. (2017) studerade elever i åk. 5 och uppfattar att extra fokus på naturliga tal, utöver det eleverna redan får, inte verkar förbättra elevernas bråkförståelse förutom när det gäller procedurkunskap, vilken enligt ovan ändå inte ska stå i fokus. Att då lägga extra krut på undervisning om naturliga tal i högstadiet för att stärka bråkförståelsen bedömer vi därför som slöseri med tid. Att istället lägga stort fokus på bråks storlek verkar stärka inte bara storleksförståelsen utan även procedurkunskap och förståelse kring bråks position på tallinjen (se 4.4.2.3).

Ett sätt att börja undervisa om bråks storlek, som kan användas för både *bråk som del/helhet* och *bråk som mätning,* är att frekvent använda *stambråk*. Detta genom att relatera storleken på *stambråk* gentemot varandra (se 4.4.2.5). Braithwaite och Siegler (2021) talar om sitt koncept *PFT* (*Putting Fraction Together*), vars huvudpoäng är att om eleverna får träna på att bryta ner bråk till *stambråk* så kommer de bli bättre på att förstå storleken på bråken själva men också på att addera och subtrahera bråk då de lättare förstår varför bråken behöver ha samma nämnare. Att fortsätta storleksordna *stambråk* även i högstadiet ser vi som relevant bl.a. då Löwing (2016) konstaterar att nästan 40% av eleverna i åk. 5 ej klarar detta.

I litteraturen uttrycker sig ingen negativt om att fokusera på *stambråk*. Det är därmed intressant att den egyptiska idén om bråkräkning kretsar runt just *stambråk* (se 5). Det egyptiska sättet att tänka kring bråk ses av flera forskare som ineffektivt när det kommer till själva räknandet (se 5), men att betrakta bråk som summor av stambråk verkar ligga i linje med bl.a. *PFT* (se 4.4.3.5.4). Huruvida den egyptiska idén om att se bråk som inverser av heltal vore lämplig att använda i nutida undervisning, belyses inte i litteraturen. Vi tycker att det vore intressant att undersöka vilken ingång till bråk som lättats möjliggör utvecklad bråkförståelse*; invers av heltal, bråk som del/helhet* eller *bråk som mätning*. Utifrån forskningen om egyptiska stambråk (se 5.2) kan vi identifiera en tydlig begränsning med *invers av heltal* när man ställer sig frågan *Hur ska vi tolka bråk som inte är inverser av heltal?* Begränsningen kan liknas vid den som påpekats ovan gällande *dela lika* och *bråk som del/helhet* när delen blir större än helheten. Dock tycker vi att det vore rimligt att anta en viss fördel med detta tankesätt när det kommer till att förklara varför multiplikation kan ske med inversen av nämnaren för att få svaret vid division med bråk.

I samband med *stambråk* tycker vi det är relevant att relatera till skillnadstänkande, som påtalats ovan och som tycks bli mer frekvent under högstadietiden samtidigt som heltalsbias avklingar (se 6.1). Uppenbarligen bedrivs undervisning som leder till minskad påverkan av heltalsbiaset vid storleksordnande. I litteraturen framgår det inte hur denna undervisning varit utformad. Vi spekulerar kring att den *kan* ha varit procedurfokuserad, på sätt som mycket bråkundervisning kritiseras för att vara enligt ovan. Om undervisningen lär eleverna proceduren att göra bråk liknämniga vid storleksordnande, varefter bråket med störst täljare är störst, eller göra bråk liktäljiga, varefter bråket med minst nämnare är störst, skulle det kunna vara en förklaring till att skillnadstänkande utvecklas när heltalsbias överges då det kan appliceras på båda fallen. Ur ett elevperspektiv kan skillnadstänkandet därför framstå som en enklare väg eftersom skillnadstänkande leder till korrekt svar i båda fallen; det bråk med minst skillnad mellan nämnare och täljare är störst. För att slå fast denna anekdotiska slutsats krävs dock forskning. Mot bakgrund av det vi nu diskuterat uppfattar vi också att det finns en risk att skillnadstänkande förstärks av överdrivet mycket arbete med *stambråks* storlek. Det är därmed extra viktigt att eleverna får stöta på uppgifter där skillnadstänkande inte fungerar genom att även arbeta med mer komplicerade bråk att storleksordna. Den sistnämnda typen av variation betonas särskilt av Gabriel et al (2013) (se 4.4.3.5.4) och vi bedömer det som särskilt viktigt i svenskt högstadium. Möjligen kan undervisning utifrån *PFT* vara en väg att kringgå risken för skillnadstänkande. Sådant arbete skulle kunna ske med digitala hjälpmedel (se 4.4.3.5.4).

Oavsett om grundidén är *stambråk* eller någon annan aspekt av bråk, verkar det som att lärare i alltför liten utsträckning utgår från vad eleverna redan kan och vilka eventuella missuppfattningar de har (se 4.4.3.1.1). Om en elev exempelvis är påverkad av skillnadstänkande eller heltalsbias så behöver eleven hamna i situationer där hen får erfara kognitiva konflikter utifrån sitt tankesätt. Detta för att eleven ska kunna omkonstruera sin förståelse (se 4.2 och 4.4.3.2.1). Denna process menar vi utifrån litteraturen behöver utföras med stöd av läraren så att eleven får syn på sin missuppfattning och framförallt upplever ny förståelse som möjlig att uppnå. Om sistnämnda förutsättning saknas, finns risk att eleven istället avlär det den redan kan (se 4.2). Med andra ord: kognitiva konflikter är viktiga i undervisningen för utvecklingen av bråkförståelsen, men kan också slå fel.

I 4.4.3.2.2 problematiseras hur läraren bör betona skillnaderna mellan heltal och bråk för att därigenom undvika missuppfattningar såsom heltalsbias. Många framhåller vikten av detta, men Van Hoof et al. (2021) som faktiskt studerat hur elever svarar upp på denna form av undervisning, fick konkludera att undervisning med fokus på information om missuppfattningar kopplade till heltalsbias och att försöka ge elever kognitiva konflikter, inte gav lika bra effekt som att bara fokusera på procedurkunskap. De är dock skeptiska till sina egna resultat och vi bedömer att mer forskning krävs för entydiga slutsatser. Utöver att eleverna var unga (åk. 4) och därför kan ha haft svårt att självständigt ta till sig skriftlig information, uppfattar vi att man inte särskilt beaktat mängden komplex information som skulle processas under kort tid och heller inte hjälpt eleverna att omkonstruera sin förståelse genom att t.ex. få diskutera med klasskamrater. Att detta kan vara aspekter som påverkat utfallet uppfattar vi utifrån en liknande studie av Depaepe et al. (2018). De undersökte samma sak fast för låg- och mellanstadielärarstudenter. De visade att de studenter som fick lägga fokus på likheter och skillnader mellan heltal och bråk samt missuppfattningar fick bättre resultat än de som primärt fokuserade på bl.a. procedurer. Vi tror, baserat på resonemanget ovan, att denna undervisningsform skulle fungera bra på högstadiet. Specifikt bör då läraren lyfta missuppfattningar samt likheter och skillnader i diskussioner och inte bara låta eleverna läsa om det. Hur detta kan ske konkret tycker vi vore intressant att undersöka i nästa examensarbete.

Att få diskutera olika aspekter av bråk uppfattar vi som viktigt för att utveckla konceptuell förståelse, men hur diskussionen sker och vilka ord läraren väljer att använda påverkar elevernas förståelse. I 4.4.3.3 lyfts bland annat att läraren måste vara medveten om att vissa ordval, såsom att benämna $\frac{2}{3}$ som *två av tre* istället för *två tredjedelar*, kan förstärka heltalsbias. Läraren måste därmed vara uppmärksam på hur hen talar om bråk. Att tala om bråk på rätt sätt förutsätter att läraren har en egen utvecklad bråkförståelse och insikter kring bl.a. heltalsbias och prioriterar det didaktiska över vad som går snabbast att säga rent verbalt.

Att vara noga med ordvalet gäller även när läraren ställer frågor. Ni och Zhou (2005) lyfter att elever kan ha olika svårigheter med samma fråga beroende på hur frågan ställs. Att verbalt fråga *vad en tredjedel plus en tredjedel är lika* med uppfattar de som lättare för eleverna att lösa än den skriftliga uppgiften $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$. I det senare fallet menar de att det är mer troligt att elever gör fel som att addera nämnarna så svaret blir $\frac{2}{6}$. Eleverna ska såklart klara av att svara på båda frågorna, men läraren behöver vara medveten om denna svårighet och belysa den på ett konstruktivt sätt. Läraren behöver också vara medveten om huruvida orden som används implicerar innehållsdivision eller delningsdivision, som båda är viktiga aspekter för förståelsen av bråk (se 4.4.3.3).

Litteraturen visar att lärare ofta är benägna att presentera endast *ett* sätt att se och tänka kring bråk och undervisa utifrån det. I 4.4.3.4.2. lyfts vikten av att förstå olika aspekter av bråk, samt kapaciteten att växla mellan olika representationsformer, som tecken på god bråkförståelse. Elevernas förståelse stärks generellt av att få erfara hur mångfacetterat bråk är. Litteraturen pekar på att elever som är kapabla till olika lösningar (och därmed olika tolkningar) av uppgifter om bråk lyckas bättre på dessa uppgifter. Med det sagt vill vi inte invagga läsaren i tron att all mångfacetterad undervisning leder till mångfacetterad förståelse; exempel på motsatsen ges i litteraturen (se 4.4.3.2.2). Utvecklingen av mångfacetterad förståelse tar tid så det är inte konstigt att många lärare, av upplevd tidsbrist eller egen otillräcklig förståelse, kan välja att lära eleverna endast *ett* sätt att tänka och sedan går vidare. Det sättet utgår ofta i för stor utsträckning från ett vuxet och matematiskt sätt att tänka kring bråk, som kanske ignorerar elevernas förförståelse. Tidsbrist och brist i egen kunskap kan också medföra att lärare är obenägna att tillmötesgå när elevers egna lösningsstrategier går utanför normen. Att undervisa på ett sådant sätt kanske upplevs som mindre resurskrävande för läraren då den slipper individanpassa. Dock tror vi att en liten investering tidigt sparar resurser i långa loppet. På samma sätt som Smith (1995) uppfattar vi därför att lärare behöver uppmuntra elevers egna lösningar och fånga upp det elever säger, dels för att kunna motverka eventuella missuppfattningar, dels för att inte träna bort elevernas kreativa tänkande. Detta, som mycket annat, ser vi som allmändidaktiskt och inte bara kopplat till bråk. Från att fokusera på bara *en* bråkförståelse och att ignorera ”udda” elevlösningar, är steget kort till att bara lära ut procedurer.

Eleverna som börjar på högstadiet förväntas kunna en hel del om bråk. Det framhålls i litteraturen att det är viktigt att ta hänsyn till förförståelsen vid utformningen av undervisningen (se 4.4.3.1.1). Förslagsvis bör läraren initialt ge eleverna en diagnos med kongruenta och inkongruenta bråkuppgifter (se 4.3.1.4.2) för att fastställa förståelsen och vilka missuppfattningar som eventuellt finns. Sedan kan läraren avgöra om det räcker med punktinsatser mot missuppfattningar eller om helklassundervisning behövs. Det finns dock litteratur som pekar på att det kan vara svårt att få syn på missuppfattningar med hjälp av bara skriftliga diagnoser (se 4.3.1.4.1). Vi tror därför att lärare kan uppfatta att elever har en mer utvecklad bråkförståelse än vad de faktiskt har utifrån hur effektivt eleverna applicerar procedurer i diagnosen. Det är därför viktigt att få syn på *hur* eleverna faktiskt resonerar och inte bara deras svar. Detta kan exempelvis ske genom verbala resonemangsuppgifter eller genom att be eleverna skriftligt förklara hur de tänkt.

Vi har i detta avsnitt flera gånger nämnt att forskningen är otillräcklig och dessutom dras ibland väldigt långtgående slutsatser från ett mycket begränsat underlag, såsom djupintervjun i Yopp (2018) med en elev. Även bland annat McMullen et al. (2018) samt Ni och Zhou (2005) är av uppfattningen att mer gedigen forskning behövs. Ni och Zhou (2005) må ge undervisningsrekommendationer utifrån sin forskning, men gör det med reservationen att mer forskning behövs för att kunna dra slutsatser om vilket sätt som är bäst och poängterar att det kanske inte ens är något av deras förslag. I den forskning som finns återkommer dock snarlika tankar. Vi tycker därför att det är rimligt att ge de rekommendationer vi gör för kvalitativ bråkundervisning.

6.4 Didaktiska konsekvenser

Genom detta arbete – inte minst genom de diskussioner vi haft med varandra under arbetets gång – har vi fått många nya insikter, som vi tar med oss till vår framtida bråkundervisning. Vi har kommit till insikt att bråkbegreppet är betydligt mer komplext än vi uppfattade sedan tidigare. Vi inser nu att heltalsbias, skillnadstänkande eller omvänd bias kan uppstå hos elever på grund av tidigare, eller vår egen, undervisning. Vi har även fördjupat vår förståelse kring bråkbegreppets olika konstrukt.

Vi kommer utgå från att en rad missuppfattningar och svårigheter föreligger hos stora delar av elevgruppen, snarare än att utgå från att de har god bråkförståelse med sig från mellanstadiet. Vi tar med oss hur diagnostisering kan ske med hjälp av kongruenta och inkongruenta uppgifter, men också betydelsen av att få syn på *hur* eleverna resonerar, vilket inte alltid enkelt kan avspeglas i en diagnos. Elevernas resonemang, oavsett om de speglar förståelse eller missuppfattningar, kommer att få ta stor plats i undervisningen, bl.a. genom klassrumsdialog med stort fokus på *varför då?* och att utgångspunkt tas i de resonemang som eleverna har.

Även om vi tidigare insåg betydelsen av fokus på konceptuell förståelse snarare än procedurkunskap, känner vi oss nu mer övertygade om detta. Vi kommer sträva efter att eleverna får erfara och utforska de olika betydelserna av bråk (de olika konstrukten), med särskilt fokus på *bråk som mätning*. Vi kommer därtill vara tydliga med likheter och skillnader dels mellan konstrukten, dels mellan heltal och bråk. Det sistnämnda för att inte leda in mot heltalsbias. Särskilt kommer storleken på bråk och att placera ut bråk på tallinjen stå i fokus. Vi har särskilt inspirerats av *PFT*-metoden och vikten av att först säkerställa förståelse kring det grundläggande, som hur heltal och bråk byggs upp av stambråk. Tallinjen och stambråksbitar kommer därför vara viktiga delar i undervisningen.

Vi har också kommit till insikt kring vikten av att eleverna får erfara kognitiva konflikter, men har stor respekt för hur komplext det är att göra det på ett bra sätt och fånga upp elevernas "förvirring" så att förståelse kan utvecklas. Detta är en förmåga som vi upplever att vi särskilt behöver utveckla. Detta är särskilt viktigt för oss då vi upplever att många elever hamnar i sådana konflikter men inte får hjälp därifrån. Vi tror att det kan vara en viktig anledning till varför många får en negativ upplevelse av matematik.

På ett mer konkret plan tar vi också med oss flera saker: Vi har fått viktiga insikter kring hur vi bör (och inte bör) tala om bråk och bråkuppgifter, inklusive att kontrastera delningsdivision och innehållsdivision mot varandra. Och vi kommer mer medvetet använda oss av variationsteori vid illustrationer, i exempel samt i arbetsuppgifter.

7 Slutsats

I 6.1 har det konstaterats att lärare bör utgå från att elever som börjar i svenskt högstadium har missuppfattningar och svårigheter beträffande alla de aspekter som enligt oss innefattas i god bråkförståelse, och att dessa kan vara uthålliga. Risken för heltalsbias och skillnadstänkande har särskilt framhållit, vilka riskerar att utvecklas utifrån hur bråkundervisningen bedrivs.

I 6.2 har det konstaterats att missuppfattningarna och svårigheterna föreligger eftersom elevernas konceptuella förståelse är ofullständig och deras procedurkunskap bristfällig. Detta skulle kunna förklaras av ett för stort procedurfokus i undervisningen. Men också av att undervisningen mot konceptuell förståelse är kvalitativt mindre bra. I dessa delar kan dock mest anekdotiska slutsatser dras. Studier pekar dock på att lärare mer ensidigt anknyter till *en* betydelse av det mångfacetterade bråkbegreppet (ofta *bråk som del/helhet*), visualiserar bråk på *ett* sätt (ofta som skuggad del av cirkelskiva) och inte tillräckligt tydliggör skillnader mellan heltal och bråk och varför heltalsförståelsen inte kan generaliseras att gälla för bråk.

I 6.3 har det konstaterats att lärare i svenska högstadium bör fokusera på utvecklingen av elevernas konceptuella förståelse, snarare än på deras procedurkunskap, och då särskilt lägga fokus på bråks storlek. Tidigt bör undervisningen specifikt handla om storleken av *stambråk* och att visualisera dessa på olika sätt. Förslagsvis genom att använda fysiska eller digitala stambråksbitar och belysa bråks position på tallinjen med hjälp av dessa.

I både Sverige och stora delar av världen verkar undervisningsfokuset primärt vara *bråk som del/helhet*, men vi skulle vilja se en förskjutning, åtminstone på högstadiet, till undervisning mer om *bråk som mätning*. Detta då mätning lättare kopplar till tallinjen, som är viktig för bråkförståelsen, och då *bråk som mätning* inte har samma begränsning som *bråk som del/helhet* för elevernas generalisering av sin bråkförståelse. Att se bråk som *inverser av heltal* likt hur de gamla egyptierna gjorde ser vi inte som ett primärt fokus, även om deras stora fokus på *stambråk* är något som lärare borde inspireras av. Vi konkluderar också att lärare i högstadiet borde fokusera mer på likheter och skillnader mellan heltal och bråk (och decimaltal) än vad lärare för yngre åldrar tycks göra idag.

Utöver dessa allmänna riktlinjer för kvalitativ bråkundervisning behöver lärare ta hänsyn till, och anpassa sin undervisning utifrån, den förförståelse som eleverna har. Om elever visar på missuppfattningar såsom heltalsbias eller skillnadstänkande behöver läraren sätta dessa elever i situationer där de får syn på sina missuppfattningar och får möjlighet att omstrukturera förståelsen via kognitiva konflikter. Om läraren inte skapar sådana situationer riskerar eleverna att aldrig utveckla god bråkförståelse. Ett sätt för läraren att kartlägga elevernas missuppfattningar är genom diagnoser med kongruenta och inkongruenta uppgifter. Det som nu sagts skulle kunna uppfattas resurskrävande för lärarna, men vi är övertygande om att det i det långa loppet sparar resurser.

Forskningen verkar främst fokusera på *vilka* missuppfattningar och svårigheter elever har och i vilka åldrar och utifrån sina resultat diskutera möjlig undervisning. Det finns betydligt mindre forskning som undersöker specifika sätt att undervisa om bråk vilket vi, liksom många forskare i litteraturen, vill se mer av. Sådant forskningsbaserat underlag kan bidra till att höja kvaliteten på bråkundervisningen.

Referenslista

Aliustaoğlu, F., Tuna, A. & Biber, A. C. (2018). Misconceptions of sixth grade secondary school students on fractions. I*nternational Electronic Journal of Elementary Education,* 10(5), 591–599. https://doi.org/10.26822/IEJEE.2018541308

A&W Restaurants, Inc. (u.å.). *The truth about A&W's Third-Pound Burger and the major math mix-up.* Hämtad 2022-03-09 från: https://awrestaurants.com/blog/aw-third-pound-burger-fractions

Behr, M., Lesh, R., Post, T. & Silver E. (1983). Rational number concepts. I R. Lesh & M. Landau (red.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* (s. 91–125). New York: Academic Press. https://www.researchgate.net/profile/Edward-Silver-2/publication/258510439_Rational_number_concepts/links/57598dc808aed884620b0d82/Rational-number-concepts.pdf

Behr, M. J., Wachsmuth, I., Post, T. R., & Lesh, R. (1984). Order and equivalence: A clinical teaching experiment. *Journal for Research in Mathematics Education,* 15(5), 323–341. https://doi-org.ezproxy.ub.gu.se/748423

Blandad form. (2017, 23 februari). *Wikipedia.* Hämtad 2022-02-04 från: https://sv.wikipedia.org/wiki/Blandad_form

Braithwaite, D. W. & Siegler, R. S. (2021). Putting fractions together. *Journal of Educational Psychology,* 113(3), 556–571. http://dx.doi.org/10.1037/edu0000477

Bush, J. B. (2021). Software-based intervention with digital manipulatives to support student conceptual understandings of fractions. *British Journal of Educational Technology,* 52, 2299–2318. https://doi-org.ezproxy.ub.gu.se/10.1111/bjet.13139

Clarke, D. M. & Roche, A. (2009). Students' fraction comparison strategies as a window into robust understanding and possible pointers for instruction. *Educational Studies in Mathematics,* 72, 127–138. https://doi.org/10.1007/s10649-009-9198-9

Conradt, S. (2016). *Why no one wanted A&W's Third-Pound Burger.* Mental Floss. Hämtad 2022-03-09 från: https://www.mentalfloss.com/article/76144/why-no-one-wanted-aws-third-pound-burger?fbclid=IwAR3eZkiIkTkriA_6hGUIs_4vURSF_k79Ksl6v_ShrClAZypiV-VZdSjoFVoQ

Depaepe, F., Van Roy, P., Torbeyns, J., Kleickmann, T, Van Dooren, W. & Verschaffel, L. (2018). Stimulating pre-service teachers' content and pedagogical content knowledge on rational numbers. *Educational Studies in Mathematics,* 99, 197–216. https://doi.org/10.1007/s10649-018-9822-7

Egidus, H. (u.å.). Konstrukt. I *Natur & Kulturs Psykologilexikon*. Hämtad 2022-02-04 från: https://www.psykologiguiden.se/psykologilexikon/?Lookup=Konstrukt

Elias, H.R., Ribeiro, A.J. & Savioli, A.M.P.d. (2020). Epistemological matrix of rational number: A look at the different meanings of rational numbers. *International Journal of Science and Mathematics Education,* 18, 357–376. https://doi.org/10.1007/s10763-019-09965-4

Flores, A., Samson, J. & and Yanik, H. B. (2006). Quotient and measurement interpretations of rational numbers. *Teaching Children Mathematics,* 13(1), 34–39. https://www.jstor.org/stable/41198840

Gabriel, F., Coché, F., Szucs, D., Carette, V., Rey, B. & Content, A. (2013). A componential view of children's difficulties in learning fractions. *Frontiers in Psychology,* 4(715), 1–12. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2013.00715

González-Forte, J. M., Fernández, C., Van Hoof, J. & Van Dooren, W. (2020). Various ways to determine rational number size: An exploration across primary and secondary education. *European Journal of Psychology of Education,* 35, 549–565. https://doi.org/10.1007/s10212-019-00440-w

Hecht, S. A. & Vagi, K. J. (2010). Sources of group and individual differences in emerging fraction skills. *Journal of Educational Psychology,* 102(4), 843–859. https://doi.org/10.1037/a0019824

Hollings, C., & Parkinson, R. (2020). Two letters from Otto Neugebauer to Thomas Eric Peet on ancient Egyptian mathematics. *Historia Mathematica,* 52, 66–98. https://doi.org/10.1016/j.hm.2020.05.00

Imhausen, A. (2006). Ancient Egyptian mathematics: New perspectives on old sources. *The Mathematical Intelligencer,* 28(1), 19–27. https://doi.org/10.1007/BF02986998

Kainulainen, M., McMullen, J. & Lehtinen, L. (2017). Early developmental trajectories toward concepts of rational numbers. *Cognition and Instruction,* 35(1), 4–19. https://doi.org/10.1080/07370008.2016.1251287

Khan Academy (u.å.). *Whole numbers & integers.* Hämtad 2022-02-17 från: https://www.khanacademy.org/math/cc-sixth-grade-math/cc-6th-factors-and-multiples/whole-numbers-integers/a/whole-numbers-integers

Kieren, T. E. (1980). The rational number construct – Its elements and mechanisms. I T. E. Kieren (red.), *Recent Research on Number Learning* (s. 125–150). Columbus, Ohio: ERIC Clearinghouse for Science, Mathemathics and Environmental Education, The Ohio State University College of Education. https://eric.ed.gov/?id=ED212463

Kiselman, C. & Mouwitz, L. (2008). *Matematiktermer för skolan.* Göteborg: Nationellt Centrum för Matematikutbildning.

Kleve, B. (2010). Current report: Contingent moments in a lesson on fractions. *Research in Mathematics Education,* 12(2), 157–158. http://dx.doi.org/10.1080/14794802.2010.496984

Knorr, W. (1982). Techniques of fractions in ancient Egypt and Greece. *Historia Mathematica,* 9(2), 133–171. https://doi.org/10.1016/0315-0860(82)90001-5

Kullberg, A. & Runesson, U. (2013). Learning about the numerator and denominator in teacher-designed lessons. *Mathematics Education Research Journal,* 25, 547–567. http://dx.doi.org/10.1007/s13394-013-0080-9

Lenz, K., Dreher, A., Holzäpfel, L. & Wittmann, G. (2020). Are conceptual knowledge and procedural knowledge empirically separable? The case of fractions. *British Journal of Educational Psychology,* 90, 809–829. https://doi.org/10.1111/bjep.12333

Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet: Reviderad 2019. (2019). Skolverket. https://www.skolverket.se/publikationer?id=4206

Löwing, M. (2016). *Diamant - diagnoser i matematik. Ett kartläggningsmaterial baserat på didaktisk ämnesanalys.* (Gothenburg Studies in Educational Sciences, 392)

[Doktorsavhandling, Göteborgs universitet]. Gothenburg University Publications Electronic Archive. http://hdl.handle.net/2077/47607
Marmur, O., Yan, X. & Zazkis, R. (2020). Fraction images: The case of six and a half. *Research in Mathematics Education,* 22(1), 22–47. https://doi.org/10.1080/14794802.2019.1627239
Matematik [kursplan] (2020). Skolverket. https://www.skolverket.se/download/18.645f1c0e17821f1d15c2d8d/1632771985373/Matematik.pdf
McIntosh, A. (2008). *Förstå och använda tal - en handbok.* Göteborg: Nationellt Centrum för Matematikutbildning.
McMullen, J., Van Hoof, J., Degrande, T., Verschaffel, L. & Van Dooren, W. (2018). Profiles of rational number knowledge in Finnish and Flemish students – A multigroup latent class analysis. *Learning and Individual Differences,* 66, 70–77. https://doi.org/10.1016/j.lindif.2018.02.005
Michalowicz, K. D. (1996). Fractions of Ancient Egypt in the Contemporary Classroom. *Mathematics Teaching in the Middle School,* 1(10), 786–789. https://doi.org/10.5951/MTMS.1.10.0786
Moss, J. & Case, R. (1999). Developing children's understanding of the rational numbers: A new model and an experimental curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education,* 30(2), 122–147. https://www.jstor.org/stable/749607
Nagy, C. (2017). *Fler bråk i matematikundervisning. En aktionsforskningsstudie där lärare lär om progression.* [Licentiat-uppsats, Göteborgs universitet]. Gothenburg University Publications Electronic Archive. http://hdl.handle.net/2077/54705
Ni, Y. (2001). Semantic domains of rational numbers and the acquisition of fraction equivalence. *Contemporary Educational Psychology,* 26, 400–417. https://doi.org/10.1006/ceps.2000.1072
Ni, Y. & Zhou, Y-D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist,* 40(1), 27–52. https://doi-org.ezproxy.ub.gu.se/10.1207/s15326985ep4001_3
Olive, J. (1999). From fractions to rational numbers of arithmetic: A reorganization hypothesis. *Mathematical Thinking and Learning,* 1(4), 279-314. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0104_2
Oliver, J. (2002). Fractions in ancient Egyptian times. *Australian Mathematics Teacher,* 58(3), 6. http://www.jstor.org/stable/30212227
Patahuddin, S. M., Usman, H. B. & Ramful, A. (2018). Affordances from number lines in fractions instruction: Students' interpretation of teacher's intentions. *International Journal of Science and Mathematics Education,* 16, 909–928. https://doi.org/10.1007/s10763-017-9800-z
Powell, S.R., & Nelson, G. (2020). University students' misconceptions about rational numbers: Implications for developmental mathematics and instruction of younger students. *Psychology in the Schools,* 58, 307–331. https://doi.org/10.1002/pits.22448
Prediger, S. (2008). The relevance of didactic categories for analysing obstacles in conceptual change: Revisiting the case of multiplication of fractions. *Learning and Instruction,* 18, 3–17. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2006.08.001

Siegler, R. S. & Pyke, A. A. (2013). Developmental and individual differences in understanding of fractions. *Development Psychology,* 49(10), 1994–2004. https://doi.org/10.1037/a0031200
Skolverket. (2017). *Kommentarmaterial till kursplanen i matematik. Reviderad 2017.* https://www.skolverket.se/publikationer?id=3794
Skolverket. (2021). *Kommentarmaterial till kursplanen i matematik. Grundskolan.* https://www.skolverket.se/publikationer?id=7840
Skott, J., Jess, K., Hansen, H.C. & Lundin, S. (2010). *Matematik för lärare. Delta Didaktik.* Malmö: Gleerups Utbildning.
Smith, J. P., III. (1995). Competent reasoning with rational numbers. *Cognition and Instruction,* 13(1), 3–50. https://doi.org/10.1207/s1532690xci1301_1
Sveider, C. (2021). *Representationer av tal i bråkform: En studie om matematikundervisning på mellanstadiet.* (Linköping Studies in Behavioural Science, 230) [Doktorsavhandling, Linköpings universitet]. Linköping University Electronic Press. https://doi.org/10.3384/diss.diva-178048
Säljö, R. (2017). Den lärande människan - teoretiska traditioner. I U.P. Lundgren, R. Säljö & C. Liberg (red.), *Lärande, skola, bildning. Grundbok för lärare* (4 u.) (s. 203–264). Stockholm: Natur & Kultur.
Thompson, J. (1996). *Matematiken i historien.* Lund: Studentlitteratur.
Tian, J. & Siegler, R. S. (2018). Which type of rational numbers should students learn first? *Educational Psychology Review,* 30, 351–372. https://doi.org/10.1007/s10648-017-9417-3
Vamvakoussi, X. (2015). The development of rational number knowledge: Old topic, new insights. *Learning and Instruction,* 37, 50–55. http://dx.doi.org/10.1016/j.learninstruc.2015.01.002
Vamvakoussi, X. & Vosniadou, S. (2004). Understanding the structure of the set of rational numbers: A conceptual change approach. *Learning and Instruction,* 14, 453–467. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2004.06.013
Vamvakoussi, X. & Vosniadou, S. (2010). How many decimals are there between two fractions? Aspects of secondary school students' understanding of rational numbers and their notation. *Cognition and Instruction,* 28(2), 181–209. https://doi.org/10.1080/07370001003676603
Van Dooren, W., Lehtinen, E. & Verschaffel, L. (2015). Unraveling the gap between natural and rational numbers. *Learning and Instruction,* 37, 1–4. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2015.01.001
Van Hoof, J., Degrande, T., Ceulemans, E., Verschaffel, L. & Van Dooren, W. (2018). Towards a mathematically more correct understanding of rational numbers: A longitudinal study with upper elementary school learners. *Learning and Individual Differences,* 61, 99–108. https://doi.org/10.1016/j.lindif.2017.11.010
Van Hoof, J., Engelen, A-S. & Van Dooren, W. (2021) How robust are learners' misconceptions of fraction magnitude? An intervention study comparing the use of refutation and expository text. *Educational Psychology,* 41(5), 524–543. https://doi.org/10.1080/01443410.2021.1908521
Van Hoof, J., Janssen, R, Verschaffel, L. & Van Dooren, W. (2015a). Inhibiting natural knowledge in fourth graders: towards a comprehensive test instrument. *ZDM Mathematics Education,* 47, 849–857. http://dx.doi.org/10.1007/s11858-014-0650-7

Van Hoof, J., Verschaffel, L. & Van Dooren, W. (2015b). Inappropriately applying natural number properties in rational number tasks: Characterizing the development of the natural number bias through primary and secondary education. *Educational Studies in Mathematics,* 90(1), 39–56. http://dx.doi.org/10.1007/s10649-015-9613-3
Van Hoof, J., Verschaffel, L. & Van Dooren, W. (2017). Number sense in the transition from natural to rational numbers. *British Journal of Educational Psychology,* 87, 43–56. https://doi.org/10.1111/bjep.12134
Vretblad, A. & Ekstig, K. (2006). *Algebra och geometri.* Malmö: Gleerups Utbildning.
Whole number. (2021, 13 december). *Wikipedia.* Hämtad 2022-02-17 från: https://en.wikipedia.org/wiki/Whole_number
Yang, K-J. (2012). Teaching fractions operations with different denominators: A Taiwanese perspective. *National Teacher Education,* 5(1), 5–12. https://search-ebscohost-com.ezproxy.ub.gu.se/login.aspx?direct=true&db=ehh&AN=85343795&site=ehost-live
Yanik, H. B., Helding, B. & Flores, A. (2008). Teaching the concept of unit in measurement interpretation of rational numbers. *Elementary Education Online,* 7(3), 693–705, 2008. http://ilkogretim-online.org.tr
Yopp, D. A. (2018). When an argument is the content: Rational number comprehension through conversions across registers. *Journal of Mathematical Behavior,* 50, 42–56. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2018.01.001