



# Variationell Regularisering av Inversproblem med Tillämpning inom Skiktröntgen

## Variational Regularization of Inverse Problems with Application in Computed Tomography

*Examensarbete för kandidatexamen i matematik vid Göteborgs universitet  
Kandidatarbete inom civilingenjörsutbildningen vid Chalmers*

Louise Christensen

Sara Nilsson

Oskar Pauli

Gustav Svensson



# Variationell Regularisering av Inversproblem med Tillämpning inom Skiktröntgen

*Examensarbete för kandidatexamen i matematik vid Göteborgs universitet*

Louise Christensen

*Examensarbete för kandidatexamen i matematik inom Matematikprogrammet, inriktning Tillämpad matematik, vid Göteborgs universitet*

Gustav Svensson Sara Nilsson

*Kandidatarbete i matematik inom civilingenjörsprogrammet Teknisk matematik vid Chalmers*

Oskar Pauli

Handledare: Axel Ringh

Institutionen för Matematiska vetenskaper  
CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA  
GÖTEBORGS UNIVERSITET  
Göteborg, Sverige 2022



## **Förord**

Detta kandidatarbete är skrivet vid Göteborgs Universitet och Chalmers Tekniska högskola våren 2022. Arbetet är författat av Louise Christensen, Sara Nilsson, Oskar Pauli och Gustav Svensson. De individuella bidragen är dokumenterade i gruppens dagbok, samt i en individuell tidslogg och sammanfattas i bidragsrapporten nedan.

Louise och Sara har lagt störst fokus på teoridelen och har samarbetat genom hela processen. Oskar och Gustav har haft störst fokus på programmeringen och att ta fram resultat.

Slutligen vill vi tacka vår handledare Axel Ringh för all hjälp och stöd.

## **Bidragsrapport**

I bidragsrapporten är huvudförfattare angivet med fet stil, medan resterande namn är medförfattare. Bidragsrapporten ses på nästa sida.

## Bidragsrapport

Rapportskrivning		
Avsnitt	Titel	Namn
	Populärvetenskaplig text	<b>Gustav</b>
	Sammanfattning	<b>Sara</b>
	Abstract	<b>Oskar</b>
1	Inledning	<b>Louise, Sara</b>
2.1	Bakgrund för skiktröntgen	<b>Louise, Sara</b>
2.1.1	Modellering av absorption	<b>Louise</b>
2.2.1	Framåtproblem	<b>Louise, Sara</b>
2.2.2	Inversproblem	Louise, <b>Sara</b>
3.1	Optimeringsteori	Louise, <b>Sara</b>
3.1.1	Steepest descent-metoden	<b>Louise</b>
3.1.2	Gradientprojektionsmetoden	<b>Louise</b>
3.2	Variationell regularisering	<b>Louise, Sara, Gustav</b>
3.2.1	Tikhonovregularisering	<b>Louise, Gustav</b>
3.2.2	Total variationsregularisering	<b>Louise, Sara, Gustav</b>
3.3	Optimering av Tikhonovregularisering	<b>Louise</b>
3.4	Optimering av total variationsregularisering	<b>Louise, Sara</b>
4.1	Implementering av optimeringslösare	Louise, <b>Sara</b>
4.2	Analys av regulariseringsparametrar med hjälp av L-kurvmetoden	Sara, <b>Gustav</b>
4.2.1	L-kurvillustrationer	<b>Oskar</b>
5.1	Resultat	Louise, <b>Oskar</b>
5.2	Rekonstruktion genom bakåtprojektion	<b>Sara, Oskar</b>
5.2.1	Jämförelse av resultat med bakåtprojektion	<b>Oskar</b>
6.1	Utveckling	<b>Louise, Sara, Oskar</b>
6.2	Samhälleliga och etiska aspekter	Louise, Sara, Oskar
6.3	Slutsats	Louise, <b>Gustav</b>
	MATLAB-kod och övrigt	
	Tikhonovregularisering	Louise, <b>Oskar, Gustav</b>
	Total variationsregularisering	Louise, Sara, <b>Oskar, Gustav</b>
	L-kurvmetoden	Louise, <b>Oskar, Gustav</b>
	Sinogram	<b>Sara</b>
	Visning av weakly coercive	<b>Louise, Gustav</b>

## Populärvetenskaplig presentation

Vad är det som egentligen händer när vi tar röntgenbilder? Hur kan vi få fram bilder av skelett, muskler, fett med mera? Bakom detta finns det en rad olika matematiska verktyg och resultat som tillsammans gör det möjligt att få fram bilder på exempelvis en hjärna eller ett ben. I denna uppsats kommer vi beskriva matematikens roll inom röntgenbildtagning - mer specifikt inom skiktröntgen.

Röntgenstrålning upptäcktes redan 1895 av Wilhelm Röntgen. Han var ute efter att studera något som kallas elektriska urladdningsfenomen i lufttomt rum. Hans idé var att skjuta elektrisk ström genom ett rör som var täckt med en svart kartong så att inget ljus kunde ta sig igenom. I Röntgens labb fanns det en pappskiva med fosfor på. Fosfor har egenskapen att sända ut synligt ljus vid kontakt med vissa typer av strålning [ne.se1][humanprogress.org]. Efter att ha skjutit den elektriska strömmen genom röret märkte han att pappskivan glimrade till och började genast studera detta fenomen. Han läste till och med in sig själv i sitt laboratorium för att studera detta i sju veckor utan att prata med någon. Det var efter dessa veckor han tog världens första röntgenbild av handen på sin fru. På bilden kunde hennes vigselring ses hänga på skelettet [Kje17]. Denna nya upptäckt blev fort populär runt om i världen, och självklart även i Sverige. Här togs första röntgenbilden tre veckor efter att W. Röntgen hade föreläst om denna nya metod för första gången [ne.se3]. Han tog inget patent på tekniken då han insåg potentialen inom sjukvård och ville få ut den så fort som möjligt till allmänheten [Kje17].

Sedan 70-talet har det även tillkommit skiktröntgen, där strålningen skjuts in från flera olika vinklar och mäter absorptionen i dessa. Syftet med skiktröntgen är att kunna urskilja olika vävnader i kroppen utan att behöva göra medicinska ingrepp. Detta är en väldigt effektiv metod för att upptäcka exempelvis tumörer eller annan sjuk vävnad. [Bom08, s. 177-178]

Då återstår frågan, vad har matematik med detta att göra? Är det inte bara att skjuta strålningen genom kroppen och se vad som kommer ut på andra sidan? Jo, på sätt och vis. Men faktum är att matematiken spelar en stor roll i processen av att få fram en bild. Röntgenbilder kan ses som skuggbilder där skuggorna representerar mängden absorption av röntgenstrålningen när den rör sig genom vävnaden. Men att endast veta absorptionen i en vävnad säger inte så mycket om vad som kan gömma sig, exempelvis tumörer. Därför tas skuggbilder från flera olika vinklar inom skiktröntgen för att sedan kunna kombinera dessa för att se hur vävnaden ser ut. Det innebär att vi känner till utfallet, alltså absorptionen, men inte orsaken. Detta är vad vi kallar för ett inversproblem inom matematiken. Det kan uppstå inversproblem som är illaställda, vilket kan beskrivas som 'väldigt svåra att lösa', dock inte omöjliga. Med hjälp av matematiska verktyg som optimering och variationell regularisering kan vi hitta en lösning till vårt illaställda inversproblem, alltså återskapa röntgenbilden.

Optimering innebär att försöka hitta den bästa lösningen givet vissa förutsättningar. Det finns olika sätt att gå tillväga gällande optimering. I vårt arbete använder vi oss av en startgissning av röntgenbilden för att sedan förbättra denna i flera omgångar. Denna process upprepas till dess att vi inte längre ser någon förbättring.

Variationell regularisering använder sig av två termer - ett huvuduttryck och ett feluttryck. Vi vill ligga någorlunda vid samma ställe, alltså hålla oss så snarlik originalbilden som möjligt. Därför består feluttrycket oftast av någon typ av bestraffning, som i vårt fall beror på storleken av vår beräknade lösning. Den straffar oss om vi hittar lösningar som rör på sig för mycket. Lösningen blir därmed unik eftersom vissa lösningar till problemet förkastas när de rör sig för långt från tidigare observationer. [ne.se2]

Vi kan alltså med hjälp av dessa matematiska verktyg lösa det illaställda inversproblemet. Mer specifikt; vi kan med hjälp av matematiken ta fram exempelvis röntgenbilder av ett barns brutna arm eller skanningsbilder av ett kranium.

Denna uppsats använder en förbestämd bild som vi vill återskapa med matematiska verktyg. För att återskapa denna så bra så möjligt kommer vi att undersöka olika typer av regulariseringsmetoder och ta fram fyra olika röntgenbilder. Vi kommer att använda dessa för att kunna jämföra metoderna och göra en visuell jämförelse. Uppsatsens utvecklingspotential kommer även att undersökas.

## Sammanfattning

Detta kandidatarbete har fokuserat på lösning av illställda inversproblem vid rekonstruktion av data med hjälp av variationell regularisering. All programmering har skett i MATLAB. Data har simulerats från MATLAB:s Shepp-Loganfantom med upplösning  $256 \times 256$  pixlar. Fantomen har rekonstruerats med hjälp av optimering av olika regulariseringsmetoder. Optimeringsalgoritmer har implementerats för varje regularisering. Vi har använt Tikhonov- och total variationsregularisering, båda med och utan ett bivillkor för icke-negativitet, och jämfört dessa med varandra. Regulariseringarna har berott på olika parametrar, där en av dessa är regulariseringsparametern  $\lambda$ . Regulariseringsparametern har utvärderats genom testning och L-kurvmetoden. Resultaten har presenterats i form av fyra rekonstruerade bilder med respektive värden på regulariseringsparametern och jämförts med varandra. Det fanns tydliga skillnader mellan Tikhonov- och total variationsregularisering där vi särskilt ser en skillnad i hur de hanterar brus. Möjlig vidareutveckling av arbetet diskuterades.

## Abstract

The aim of this study was to solve ill-posed inverse problems when reconstructing data by using variational regularization theory. This problem was solved using MATLAB. Data was simulated from MATLAB's  $256 \times 256$  Shepp-Logan phantom, which also acted as our reference image. This phantom was reconstructed using Tikhonov regularization and total variation regularization, both with and without a non-negativity constraint. The regularization methods rely on a regularization parameter  $\lambda$  for which we used L-curves and testing to find appropriate values. Results was presented in the form of the reconstructions together with their respective values of the regularization parameter and compared against each other. There were clear differences between Tikhonov regularization and total variation regularization, mainly in how they handled noise. Further development was discussed.



# Innehåll

<b>1</b>	<b>Inledning</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Skiktröntgen och inversproblem</b>	<b>2</b>
2.1	Bakgrund kring skiktröntgen . . . . .	2
2.1.1	Modellering av absorption . . . . .	2
2.2	Introduktion till inversproblem . . . . .	3
2.2.1	Framåtproblem . . . . .	3
2.2.2	Inversproblem . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Optimerings- och variationell regulariseringsteori</b>	<b>5</b>
3.1	Optimeringsteori . . . . .	5
3.1.1	Steepest descent-metoden . . . . .	6
3.1.2	Gradientprojektionsmetoden . . . . .	6
3.2	Variationell regularisering . . . . .	7
3.2.1	Tikhonovregularisering . . . . .	8
3.2.2	Total variationsregularisering . . . . .	8
3.3	Optimering av Tikhonovregularisering . . . . .	10
3.4	Optimering av total variationsregularisering . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Implementering</b>	<b>11</b>
4.1	Implementering av optimeringslösare . . . . .	12
4.2	Analys av regulariseringsparametrar med hjälp av L-kurvmetoden . . . . .	13
4.2.1	L-kurvillustrationer . . . . .	14
<b>5</b>	<b>Resultat och jämförelse</b>	<b>14</b>
5.1	Resultat . . . . .	15
5.2	Rekonstruktion genom bakåtprojektion . . . . .	16
5.2.1	Jämförelse av resultat med bakåtprojektion . . . . .	16
<b>6</b>	<b>Utveckling och slutsats</b>	<b>17</b>
6.1	Utveckling . . . . .	17
6.2	Samhälleliga och etiska aspekter . . . . .	17
6.3	Slutsats . . . . .	18
	<b>Referenser</b>	<b>19</b>
<b>A</b>	<b>Appendix</b>	<b>20</b>
A.1	Bevis . . . . .	20
A.1.1	Sats 3.4 . . . . .	20
A.1.2	Sats 3.5 . . . . .	20
A.1.3	Normens konvexitet . . . . .	20
A.2	MATLAB-kod . . . . .	21
A.2.1	Sinogram . . . . .	21
A.2.2	Tikhonovregularisering med steepest descent, L-kurva . . . . .	22
A.2.3	Tikhonovregularisering med gradientprojektion, L-kurva . . . . .	24
A.2.4	Total variationsregularisering med steepest descent, L-kurva . . . . .	26
A.2.5	Total variationsregularisering med gradientprojektion, L-kurva . . . . .	28

# 1 Inledning

Inom många olika områden finns det ett behov av att ta fram bilder av otillgänglig information. Detta behov kan matematiken hjälpa till med. Baserat på mätdata är det önskvärt att ta fram det okända, det vill säga, baserat på en känd effekt ta fram en okänd orsak. Detta kan beskrivas som ett inversproblem. Det är viktigt för samhället att kunna lösa sådana problem då inversproblem dyker upp på många ställen, som exempelvis röntgen, ultraljud, ekolokalisering etc. Att lösa inversproblem är därför väldigt relevant.

Skiktröntgen är ett sådant problem, där vi vill ta fram en bild av insidan av kroppen. Det är ett viktigt redskap för att diagnostisera olika sjukdomar, skador och kan minska andelen invasiva ingrepp. Inom skiktröntgen är det alltså relevant att kunna rekonstruera så bra och precisa bilder som möjligt. Vid röntgenprocessen skjuts röntgenstrålar genom en kropp med en viss ingångsintensitet, där vävnaden absorberar delar av röntgenstrålarna. Efter att röntgenstrålarna har passerat genom kroppen kan utgångsintensiteten mätas. Detta genererar en mängd data. Modelleringen av denna absorptionen ger ett förhållande mellan mätdata och absorptionen av data. Detta förhållande kan beskrivas som Radontransformen. Denna kommer vi att använda som vår framåtoperator under rekonstruktionen.

Målet är att rekonstruera en bild på insidan av kroppen som är så bra som möjlig. Dock är inversproblemet i detta fall illaställt, det vill säga att vi inte kan ta fram inversen med direkta beräkningar och därmed rekonstruera bilden. Istället måste vi använda oss av så kallad regularisering. Mer specifikt variationell regularisering som möjliggör lösning av det illaställda inversproblemet. Genom att använda olika regulariseringsmetoder kan vi göra det illaställda problemet välställt.

Detta arbete kommer att fokusera på fyra olika typer av regularisering - Tikhonovregularisering och total variationsregularisering, båda med och utan ett bivillkor för icke-negativitet. Vi kan med hjälp av optimering av kostnadsfunktionen för respektive regulariseringsmetod rekonstruera bilden. Regulariseringarna kommer undersökas och deras egenskaper kommer jämföras, dock vill vi enbart fokusera på att återskapa Shepp-Loganfantomen som finns inbyggd i MATLAB. Vi kommer därmed inte kunna generalisera vår optimeringslösare till andra typer av inversproblem. Arbetet fokuserar på en studie av dessa specifika metoder och inte på att göra en fullskalig utvärdering av alla typer av regulariseringar som lösning till inversproblem. Vidare innebär detta att utvärderingen av lösningarna blir begränsad till de framtagna regulariseringsmetoderna. Arbetet kommer inte att bidra med ny forskning, utan är en fokusstudie av dessa specifika metoder.

Under optimering av rekonstruktionsmetoder kan det uppstå olika samhälleliga och etiska aspekter som behöver tas i beaktande. Exempel på detta är integritetsaspekter, balansen mellan kvalitet på rekonstruktion och tidsåtgång och kostnadsaspekter. Detta diskuteras i avsnitt 6.2.

Detta kandidatarbete är skrivet till matematik- och ingenjörstudier som har matematiska förkunskaper inom linjär algebra och matematisk analys. Arbetets teoridel redogör för de teoretiska kunskaper som är nödvändiga för att förstå projektet. Arbetet är uppbyggt av en introduktion till inversproblem, grundläggande optimeringsteori och variationell regularisering som är nödvändig för förståelsen av implementering av optimeringslösaren. Avslutningsvis presenteras resultatet, en diskussion kring detta och utvecklingspotentialen för arbetet.

## 2 Skiktröntgen och inversproblem

Vi inleder med en genomgång av hur skiktröntgen fungerar och hur absorption av röntgenstrålning i ett material kan modelleras. Vidare beskrivs generell teori bakom inversproblem samt optimerings- och regulariseringsteori. Detta introduceras för att sedan tillämpa denna teori vid rekonstruktion av MATLAB:s Shepp-Loganfantom, se Figur 4 i kapitel 4.

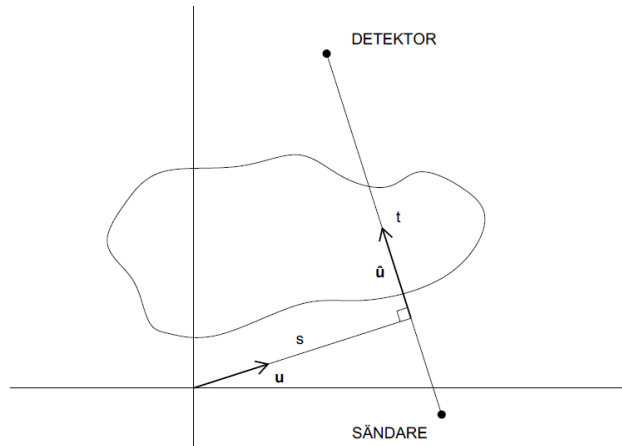
### 2.1 Bakgrund kring skiktröntgen

Skiktröntgen används bland annat inom sjukvården för att ta detaljerade bilder av kroppens organ. Denna typ av röntgen utförs genom att röntgenstrålar med en viss intensitet skjuts genom en kropp från flera olika vinklar och sedan mäts av en detektor på motsatt sida kroppen [1177.se]. När röntgenstrålar rör sig genom kroppen absorberas delar av strålningen vilket resulterar i en reducerad intensitet när strålarna har passerat genom kroppen. Detta genererar mätdata vilken kan användas till att återskapa bilden.

I följande sektion introducerar vi modelleringen av absorption, där vi får fram relationen mellan absorptionsintensiteten och mätdata. Denna relation visar sig vara *Radontransformen*.

#### 2.1.1 Modellering av absorption

För att modellera absorptionen vid skiktröntgen behöver vi ta fram relationen mellan intensiteten av strålningen  $I$  och absorptionsfunktionen  $f$ . Vid skiktröntgen skjuts det, som tidigare nämnts, ett antal röntgenstrålar linjärt genom objektet från olika vinklar. Vi kan parametriskisera varje enskild stråle med enhetsvektorn,  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ , dess ortogonal,  $\hat{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^2$ , och avståndet,  $s$ , från origo till en punkt  $\mathbf{x}$  på röntgenstrålen [Ker16, s. 21]. Detta illustreras i Figur 1.



Figur 1: Illustration av parametreringen av en stråle genom ett objekt.  $\mathbf{u}$  är enhetsvektorn,  $\hat{\mathbf{u}}$  dess ortogonal,  $s$  avstånd och  $t$  längd.

Värdet av  $f(\mathbf{x})$  i en given punkt,  $\mathbf{x}$ , beror på vävnaden och dess absorption. Olika vävnader absorberar olika mycket strålning. Betrakta exempelvis en kropp - denna består av olika vävnader med olika absorptionskoefficienter. Skelett har en högre absorption än exempelvis organ och framstår därmed tydligare på en röntgenbild [ne.se3]. Vi kan alltså återskapa en bild av objektet genom att bestämma absorptionsfunktionen  $f$ . Från [Ker16, s. 22] får vi följande ekvation för intensitetsdifferensen vid avståndet  $s$  från origo och vid längden  $t$  längs linjen i punkten  $s\mathbf{u} + t\hat{\mathbf{u}}$

$$\Delta I(s\mathbf{u} + t\hat{\mathbf{u}}) = -I(s\mathbf{u} + t\hat{\mathbf{u}})f(s\mathbf{u} + t\hat{\mathbf{u}})\Delta t.$$

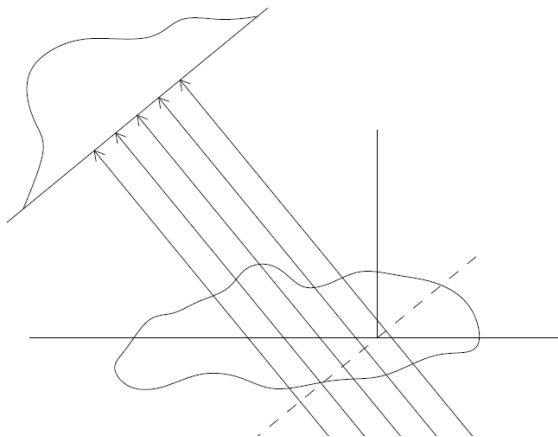
Låt  $\Delta t \rightarrow 0$ , vilket ger differentialekvationen

$$\frac{d}{dt}I(s\mathbf{u} + t\hat{\mathbf{u}}) = -I(s\mathbf{u} + t\hat{\mathbf{u}})f(s\mathbf{u} + t\hat{\mathbf{u}}).$$

Vi delar med intensiteten på båda sidor och löser differentialekvationen. Ingångs- och utgångsintensiteten betecknas med  $I_0$  respektive  $I_l$ , vilket ger oss relationen mellan intensiteten och absorptionsfunktionen

$$\ln \left( \frac{I_0(s, \mathbf{u})}{I_l(s, \mathbf{u})} \right) = \int_{\mathbb{R}} f(s\mathbf{u} + t\hat{\mathbf{u}}) dt, \quad (1)$$

som är givet av integration längs strålningslinjerna. Alltså är logaritmen av ingångsintensiteten dividerat med utgångsintensiteten lika med linjeintegralen av absorptionsfunktionen längs strålens linje. Ingångsintensiteten,  $I_0$ , är känd och utgångsintensiteten,  $I_l$ , mäts av en detektor och är därmed också känd, se Figur 1. Därför har vi de facto mätt linjeintegralen av den kvantitet vi är intresserade av. Vi har nu ett uttryck som förbinder mätdata med en absorptionsfunktion vilket ger oss möjligheten att ta fram en bild av insidan av objektet. Högerledet i ekvation (1) är precis Radontransformen [Fee15, s. 14]. All data vi får är genererad från integration längs alla individuella röntgenstrålar vi skjuter genom objektet. Vi kan alltså mäta värdet av integralen av absorptionsfunktionen, men inte av själva absorptionsfunktionen  $f$ . Detta är ett *inversproblem* vilket går igenom i nästa avsnitt.



Figur 2: Illustration av en geometri för skiktröntgen där parallella strålar används.

Som indikerat på Figur 2 ovan kommer vi att använda oss av parallella strålar när vi simulerar datan. I kapitel 6 kommer vi även att nämna möjligheten att använda fan-beam strålar till simuleringen av mätdata.

## 2.2 Introduktion till inversproblem

För att kunna rekonstruera en bild av ett givet objekt måste vi förstå den bakomliggande teorin kring inversproblem och den möjliga problematiken vid lösning av dessa. Som namnet antyder är inversproblemet motsatsen till ett annat problem. Det senare kallas ofta för *framåtproblem*, och innan vi kan ge oss på inversproblemet måste vi först förstå detta.

### 2.2.1 Framåtproblem

Informellt handlar framåtproblemet om att beräkna effekten baserat på en given och känd orsak. Mer formellt: framåtproblemet är att givet framåtoperatören  $A : X \rightarrow Y$  och vektorn  $\mathbf{f} \in X$ , beräkna  $\mathbf{b} \in Y$ , [LLM16, s. 52], det vill säga

$$A\mathbf{f} = \mathbf{b}.$$

Framåtproblemet inom skiktröntgen är att givet framåtoperatören,  $A$ , och absorptionsfunktionen,  $f$ , beräkna data  $b$ . I vårt arbete är  $A$  och  $b$  kända, men  $f$  saknas. Alltså har vi ett så kallat inversproblem.

## 2.2.2 Inversproblem

Vid inversproblem, motsatt framåtproblem, är effekten given, men orsaken är okänd. Det vill säga, givet operatoren  $A : X \rightarrow Y$  och vektorn  $\mathbf{b} \in Y$  vill vi bestämma  $\mathbf{f} \in X$  sådan att  $A\mathbf{f} = \mathbf{b}$  [LLM16, s. 122].

För att bestämma en exakt lösning av inversproblemet behöver problemet vara *välställt*. Enligt [Had1923] är ett problem välställt om följande krav är uppfyllda;

- a) en lösning existerar för alla  $\mathbf{b} \in Y$ ;
- b) lösningen är unik;
- c) lösningen är kontinuerligt beroende av data.

Den första punkten, att en lösning existerar, innebär att operatoren  $A$  är surjektiv. Andra punkten innebär att  $A$  är injektiv, alltså att det enbart finns en lösning till problemet. Om både krav a) och b) är uppfyllda så är  $A$  bijektiv, och inversoperatoren,  $A^{-1}$ , kan definieras på ett entydigt sätt [LLM16, s. 130]. Det tredje kravet, att lösningen är kontinuerlig, innebär att  $A^{-1}$  är kontinuerlig. Om problemet är välställt kan vi bestämma  $\mathbf{f}$  genom  $\mathbf{f} = A^{-1}\mathbf{b}$ . Ett problem som inte uppfyller dessa krav sägs vara *illställt*.

### Exempel 1

Betrakta följande ekvationssystem,  $A\mathbf{f} = \mathbf{b}$ , med  $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ;

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Här ser vi tydligt att kolumnvektorerna i  $A$  är linjärt beroende då exempelvis tredje kolumnen kan skrivas som en linjär kombination av de två första och andra kolumnen som en multipel av första,

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Detta innebär att  $\text{rang}(A) = 1$ , och att lösningen ej är unik. Alltså är problemet illställt.

Inom skiktröntgen är Radontransformen framåtoperatoren  $A$ , medan matrisen  $b$  är den mätdata som skanningen producerar. I vårt arbete har vi ett inversproblem som är illställt då Radontransformens invers inte är kontinuerlig, vilket inte uppfyller det tredje kravet för ett välställt problem enligt [Had1923]. Att denna inte är kontinuerlig innebär att det inte är möjligt att hitta en tillfredsställande lösning på inversproblemet, oavsett numerisk metod [Ker16, s. 5].

Datan  $b$  beror på absorptionen genom objektet, vilket ger oss ett antal mätvärden för varje inskjutningsvinkel. När vi skjuter röntgenstrålar genom ett objekt är mätdata påverkad av en viss mängd brus,  $\epsilon$ . Vi beskriver därför problemet som

$$b = Af + \epsilon,$$

där  $\epsilon \sim N(0, \delta)$ . Då röntgenstrålar består av fotoner, [arpana.gov.au], kan en diskret brusfördelning som Poissonfördelningen vara ett annat alternativ för att modellera bruset. Vi väljer dock att använda oss av normalfördelningen då vårt fokus i tillämpningen ligger på jämförelse av regulariseringsmetoder. Bruset används också för att säkerställa att vi vid lösningen av inversproblemet inte begär ett så kallat *inversbrott*. Ett inversbrott innebär att den teoretiska och syntetiska datan är för lika varandra, vilket kan medföra att rekonstruktionerna har för hög artificiell kvalitet [MS12, s. 7]. Denna kvalitet kan vara bättre än vad som fås vid användning av riktig mätdata.

För att lösa vårt illaställda inversproblem behöver vi göra det välställt. En metod för detta är variationell regularisering som med hjälp av optimering säkerställer att en lösning uppfyller de tre tidigare nämnda kraven. I följande kapitel redogör vi först för optimeringsteori, för att sedan gå vidare med teorin av olika former av variationell regularisering som vi kommer att använda oss av för rekonstruktion av fantombilden.

### 3 Optimerings- och variationell regulariseringsteori

För att kunna göra lösa det illaställda problemet kommer vi att använda oss av optimerings- och variationell regulariseringsteori. I de följande avsnitten går vi igenom teori kring optimering och variationell regularisering, för att sedan redogöra för hur vi implementerar och tillämpar denna teori.

#### 3.1 Optimeringsteori

Optimering är ett område inom matematiken som handlar om att hitta en funktions maximala eller minimala värde, alltså att hitta ett optimum till en målfunktion. Optimeringen av en sådan målfunktion kan vara med eller utan bivillkor. Ett standardproblem inom optimering är på formen

$$\begin{aligned} \min F(\mathbf{x}) \\ \text{s.a. } \mathbf{x} \in S, \end{aligned} \tag{2}$$

där  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  är en icke-tom mängd och  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . [AEP17, s. 3-18]

Inom optimeringsteori existerar ett viktigt begrepp som vi kommer att använda oss av, nämligen konvexitet. En konvex funktion kan definieras enligt följande.

**Definition 3.1.** [AEP17, Definition 3.39, s. 65] (Konvex funktion) Antag att  $S \subseteq \mathbb{R}^n$ . En funktion  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  är konvex i  $\mathbf{y} \in S$  om

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{x} \in S \\ \lambda \in (0, 1) \\ \lambda \mathbf{y} + (1 - \lambda) \mathbf{x} \in S \end{array} \right\} \implies F(\lambda \mathbf{y} + (1 - \lambda) \mathbf{x}) \leq \lambda F(\mathbf{y}) + (1 - \lambda) F(\mathbf{x}).$$

Funktionen  $F$  är konvex på  $S$  om den är konvex för varje  $\mathbf{y} \in S$ .

En funktion är alltså konvex om en linjär interpolation av funktionsvärdena aldrig är mindre än själva funktionen mellan punkterna. Vi kan då, för två godtyckliga punkter i den konvexa mängden, alltid rita en linjär interpolation mellan två punkter i mängden  $S$  som är större eller lika med funktionen  $F(\mathbf{x})$ .

För att gå vidare behöver vi fler verktyg och definierar begreppen *globalt minimum* och *lokalt minimum*. För den senare definitionen använder vi den öppna Euklidiska bollen  $B_\epsilon(\mathbf{x}^*) := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n; \|\mathbf{y} - \mathbf{x}^*\|_2 < \epsilon\}$ , med radie  $\epsilon$  och med centrum i  $\mathbf{x}^*$  [AEP17, s. 82].

**Definition 3.2.** [AEP17, Definition 4.1, s. 82] (Globalt minimum) Betrakta standardproblemet (2). Låt  $\mathbf{x}^* \in S$ . Vi säger att  $\mathbf{x}^*$  är ett *globalt minimum* av  $F$  på  $S$  om  $F$  uppnår sitt lägsta värde på  $S$  i  $\mathbf{x}^*$ . Med andra ord,  $\mathbf{x}^* \in S$  är ett *globalt minimum* av  $F$  på  $S$  om

$$F(\mathbf{x}^*) \leq F(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in S$$

håller.

**Definition 3.3.** [AEP17, Definition 4.2, s. 82] (Lokalt minimum) Betrakta standardproblemet (2). Låt  $\mathbf{x}^* \in S$ .

a) Vi säger att  $\mathbf{x}^*$  är ett *lokalt minimum* av  $F$  på  $S$  om det existerar en tillräckligt liten boll som skär  $S$  runt  $\mathbf{x}^*$  så att  $\mathbf{x}^*$  är en *globalt optimal lösning* i den mindre mängden. Med andra ord,  $\mathbf{x}^* \in S$  är ett *lokalt minimum* av  $F$  på  $S$  om

$$\exists \epsilon > 0 \text{ s.a. } F(\mathbf{x}^*) \leq F(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in S \cap B_\epsilon(\mathbf{x}^*). \tag{3}$$

b) Vi säger att  $\mathbf{x}^* \in S$  är ett strikt lokalt minimum av  $F$  på  $S$  om, i (3), det råder strikt olikhet då  $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^*$ .

Dessa definitioner använder vi i följande satser.

**Sats 3.4.** [AEP17, Theorem 4.3, s. 82] (Fundamentalsatsen för Global Optimalitet) Betrakta standardproblemet (2) och anta att  $S$  är en konvex mängd och att  $F$  är konvex på  $S$ . Då är varje lokalt minimum av  $F$  på  $S$  även ett globalt minimum.

Sats 3.4 innebär att om vi hittar ett lokalt minimum av  $F$  på den konvexa mängden  $S$  har vi även hittat funktionens globala minimum. För att hitta minimum kan vi använda oss av följande sats om nödvändiga och tillräckliga krav för global optimalitet.

**Sats 3.5.** [AEP17, Theorem 4.18, s. 94] (Nödvändiga och Tillräckliga Krav för Global Optimalitet) Antag att  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  är konvex och är  $C^1$  på  $\mathbb{R}^n$ . Då gäller

$$\mathbf{x}^* \text{ är ett globalt minimum av } F \text{ på } \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \nabla F(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}^n.$$

Denna sats säger att om gradienten  $\nabla F(\mathbf{x}^*) = 0$  i en viss punkt  $\mathbf{x}^*$  så är  $\mathbf{x}^*$  ett globalt minimum av  $F$ , och vice versa. Vi kan med hjälp av Sats 3.4 och Sats 3.5 hitta den optimala lösningen till standardproblemet (2). Bevis för Sats 3.4 och Sats 3.5 kan ses i appendix A.1.1 respektive A.1.2.

Det finns många olika typer av optimeringsalgoritmer som kan användas till att hitta en optimal lösning. Vi kommer att använda oss av två iterativa optimeringsalgoritmer, *steepest descent-metoden*<sup>1</sup> och *gradientprojektionsmetoden*, för att ta fram minimum. Steepest descent-metoden används för optimering utan bivillkor, medan gradientprojektionsmetoden hanterar bivillkor på lösningen.

### 3.1.1 Steepest descent-metoden

För att minimera standardproblemet (2) utan bivillkor använder vi oss av den iterativa metoden steepest descent. Denna metod bygger på en algoritm som söker efter en nedstigningsriktning<sup>2</sup>  $\mathbf{p}_k$  från en given punkt  $\mathbf{x}_k$ . Från denna punkt tar vi ett steg,  $\alpha_k > 0$ , i nedstigningsriktningen och uppdaterar positionen,

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha \mathbf{p}_k.$$

För att säkerställa att en riktning är nedstigande måste  $F(\mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{p}_k) < F(\mathbf{x}_k)$  gälla. Det finns flera olika metoder för att bestämma nedstigningsriktningen. Steepest descent-metoden definierar  $\mathbf{p}_k = -\nabla F(\mathbf{x}_k)$ . Efter uppdateringen av positionen undersöker vi om ett *termineringskrav* är uppfyllt. Termineringskravet är oftast definierat som en minsta toleransgräns mellan position  $\mathbf{x}_k$  och  $\mathbf{x}_{k+1}$  [AEP17, s. 291]. Om termineringskravet inte är uppfyllt börjar algoritmen om från position  $\mathbf{x}_{k+1}$  med att söka efter en ny nedstigningsriktning.

Med steepest descent-metoden är vår tillåtna mängd  $\mathbb{R}^{n \times n}$ . Vi visar sedan i avsnitt 3.2.2 att det finns ett optimum i denna mängd och vi vet därmed att algoritmen konvergerar.

### 3.1.2 Gradientprojektionsmetoden

Vid optimering har vi behov av en algoritm som kan hantera bivillkor, mer specifikt bivillkoret  $\mathbf{x} \geq 0$ . Vi använder oss därför av optimeringsmetoden gradientprojektion som kan hantera detta villkor. Gradientprojektionsmetoden liknar steepest descent-metoden och använder motsvarande den negativa gradienten,  $-\nabla F(\mathbf{x}_k)$ , som nedstigningsriktning. Vid uppdatering av lösningen använder gradientprojektion sig av projektionen av  $\mathbf{x}_k - \alpha_k \nabla F(\mathbf{x}_k)$ , enligt [AEP17, s. 332]

$$\mathbf{x}_{k+1} = \text{Proj}_X[\mathbf{x}_k - \alpha_k \nabla F(\mathbf{x}_k)], \quad k = 1, \dots,$$

där  $\alpha > 0$ .  $\text{Proj}_X(\mathbf{y}) = \arg \min_{\mathbf{x} \in X} \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$ , det vill säga punkten  $\mathbf{x} \in X$  som ligger närmast punkten  $\mathbf{y}$ . Vid en position utanför den tillåtna mängden projiceras punkten tillbaka in på mängden. Förtydligat innebär detta att om  $\mathbf{x}_k - \nabla F(\mathbf{x}_k)$  ovan är en tillåten lösning uppdateras positionen på

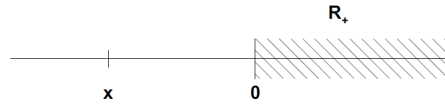
<sup>1</sup>Direkt översättning är 'brantaste nedstigningen'. Vi kommer att använda oss av den engelska termen steepest descent.

<sup>2</sup>Direkt översättning av den engelska termen, descent direction. Vi kommer att använda oss av nedstigningsriktning.

samma sätt som steepest descent-metoden. Om  $\mathbf{x}_k - \alpha \nabla F(\mathbf{x}_k)$  ligger utanför mängden projiceras punkten till närmaste punkt i den tillåtna mängden.

Betrakta det 1-dimensionella fallet med  $\mathbb{R}_+$  som den tillåtna mängden. Om  $x$  ligger utanför  $\mathbb{R}_+$  projiceras denna till närmaste punkt i den tillåtna mängden. Av Figur 3 framgår det tydligt att närmaste punkten är exakt 0.

I vårt fall är den tillåtna mängden  $\mathbb{R}_+^{n \times n}$ . Detta innebär att inga element i vår lösning får vara mindre än 0. Ett element i  $\mathbf{x}$  som är mindre än 0 projiceras till närmaste punkten i den tillåtna mängden  $\mathbb{R}_+$ . Som med steepest descent-metoden visar vi i avsnitt 3.2.2 att ett optimum i  $\mathbb{R}_+^{n \times n}$  existerar och att gradientprojektionsmetoden därmed konvergerar.



Figur 3: Illustration av gradientprojektion i 1-dimension med  $\mathbb{R}_+$  som tillåten mängd.

### 3.2 Variationell regularisering

Variationell regularisering är en metod för att göra ett illaställt problem välställt och bygger på minsta kvadratmetoden. Kort beskrivet formuleras rekonstruktionsproblemet som ett minimeringsproblem som sedan optimeras. Mer specifikt, målet är att hitta matrisen  $g \in \mathbb{R}^{n \times n}$  som ger den optimala lösningen  $f$  i minimeringsproblemet

$$f = \arg \min_g \|Ag - b\|_2^2 + \lambda G(g).$$

Första termen är en datamatchningskomponent som matchar given data  $b$  mot data genererad av framåtoperatoren,  $A$ , och ett givet  $g$ .  $G(g)$  är en regulariseringsfunktional och  $0 < \lambda < \infty$  är en regulariseringsparameter. Regulariseringsfunktionalen och regulariseringsparametern säkerställer att problemet är bijektivt och att inversen är kontinuerlig. Vi har därmed ett välställt problem enligt [Had1923]. Vi definierar kostnadsfunktionen som

$$H(g) := \|Ag - b\|_2^2 + \lambda G(g). \quad (4)$$

Vi kommer att använda oss av två typer av variationell regularisering - *Tikhonovregularisering* och *total variationsregularisering*. Dessa består av likadana datamatchningskomponenter, men med olika regulariseringsfunktionaler  $G(g)$ . Framåtoperatoren  $A$  är Radontransformen, medan  $A^T$  är bakåtprojektion utan filter. Det senare finns inbyggt i MATLAB som `iradon.m` [Niev1986, s. 80] och används när vi går igenom optimering av de olika regulariseringsmetoderna i avsnitt 3.3, respektive avsnitt 3.4.

För att säkerställa att den tillåtna mängden för matrisen  $g$  i regulariseringsmetoderna har ett optimum måste vi visa att kostnadsfunktionen (4) är *weakly coercive*<sup>3</sup> enligt definition 3.6. Om kostnadsfunktionen är weakly coercive vet vi att det finns en kompakt mängd i  $\mathbb{R}^n$  av globala optimum från Weierstrass Sats 3.7.

**Definition 3.6.** [AEP17, Definition 4.4, s. 84] (*Weakly coercive*) Antag att  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  är en icke-tom och sluten mängd, och  $F : S \rightarrow \mathbb{R}$  en given funktion.

Vi säger att  $F$  är *weakly coercive* om

$$\lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty, \mathbf{x} \in S} F(\mathbf{x}) = \infty$$

håller.

**Sats 3.7.** [AEP17, Theorem 4.6, s. 86] (*Weierstrass Sats*)

Antag att  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  är en icke-tom och sluten mängd, och  $F : S \rightarrow \mathbb{R}$  en nedre semi-kontinuerlig funktion på  $S$ . Om  $F$  är *weakly coercive* på  $S$  existerar det en icke-tom, sluten och begränsad (kompakt) mängd av globala optimum till standardproblemet (2).

<sup>3</sup>Vi har ej hittat något etablerat svenskt uttryck och därför kommer vi att använda det engelska.



För att kunna tillämpa optimeringsteorin och säkerställa att det finns en lösning till våra regulariseringsmetoder måste vi visa att det finns optimum i de tillåtna mängderna. Mer specifikt måste vi visa att både Tikhonov- och total variationsregulariseringen är weakly coercive och konvexa. Först redogör vi för Tikhonovregularisering för att sedan gå igenom total variationsregularisering.

### 3.2.1 Tikhonovregularisering

Vanligtvis är Tikhonovregularisering första valet för illaställda linjära problem. Denna regularisering ger en viss utjämning [MS12, s. 63]. Tikhonovregulariseringen ges av

$$f_{\lambda,\epsilon} = \arg \min \|Ag - b\|_2^2 + \lambda \|g\|_2^2. \quad (5)$$

Först observerar vi att uttrycket (5) består av Euklidiska normer vilket innebär att funktionen är konvex då normen alltid är konvex. Det senare kan visas med hjälp av triangelolikheten  $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ , se appendix A.1.3. Vidare är Tikhonovregulariseringen weakly coercive då datamatchningstermen är större eller lika med noll för alla  $g \in \mathbb{R}^{n \times n}$  och regulariseringsfunktionalen går mot oändligheten då  $\|g\|_2 \rightarrow \infty$ . Det finns alltså en kompakt delmängd i den tillåtna mängden som innehåller åtminstone ett globalt optimum enligt Sats 3.7.

Vi kan nu applicera optimeringsteorin och hitta en optimal lösning  $f$ . Lösningen av denna kan dock innehålla negativa element, vilket fysikaliskt skulle innebära att vävnaden i dessa positioner avger strålning och inte absorberar. För att skapa en fysikaliskt korrekt lösning lägger vi till bivillkoret  $g \geq 0$

$$f_{\lambda,\epsilon} = \arg \min_{g \geq 0} \|Ag - b\|_2^2 + \lambda \|g\|_2^2. \quad (6)$$

På samma sätt som för uttrycket i (5) kan vi analogt visa med hjälp av Sats 3.7 att det existerar ett optimum för (6).

Trots att regularisering utan bivillkor inte är fysikaliskt möjligt löser vi problemet med och utan bivillkoret  $g \geq 0$  för att kunna jämföra bivillkorets påverkan och jämföra kvaliteten av resultaten.

### 3.2.2 Total variationsregularisering

En annan form av regularisering är total variationsregularisering (TV-regularisering), där regulariseringsfunktionalen innehåller den diskretiserade differentieringsoperatorn  $L$  och definieras med 2,1-normen. 2,1-normen är en 1-norm av en 2-dimensionell vektor och beräknas genom att ta 1-normen av 2-normen av vektorn. Till skillnad från Tikhonovregularisering är denna regularisering kantbevarande, vilket innebär att den filtrerar bort brus samtidigt som den behåller skarpa kanter [MS12, s. 83]. Följande uttryck för TV-regulariseringen ges av [MS12, s. 90]

$$f_{\lambda,\epsilon} = \arg \min \|Ag - b\|_2^2 + \lambda \|Lg\|_{2,1}. \quad (7)$$

Motsvarande Tikhonovregularisering kan vi även här lägga till bivillkoret  $g \geq 0$

$$f_{\lambda,\epsilon} = \arg \min_{g \geq 0} \|Ag - b\|_2^2 + \lambda \|Lg\|_{2,1}. \quad (8)$$

Regulariseringsfunktionalen  $\|Lg\|_{2,1}$  är definierad genom avståndet mellan pixlarna. [BLS16, s. 9] ger oss att  $\|Lg\|_{2,1}$  kan uttryckas

$$\|Lg\|_{2,1} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n | \|\nabla_s g_{i,j}\|_2 |,$$

där  $\nabla_s g_{i,j} = (g_{i,j+1} - g_{i,j}, g_{i+1,j} - g_{i,j})$  är en 2-dimensionell vektor och 1-normen är summan av absolutbeloppen. Detta är den spatiella gradienten som uttrycks av spatiella derivator vilket ger uttryck för de fysikaliska ändringarna i rummet.  $| \|\nabla_s g_{i,j}\|_2 |$  är 2,1-normen som uttrycks

$$\begin{aligned} | \|\nabla_s g_{i,j}\|_2 | &= | \|(g_{i,j+1} - g_{i,j}, g_{i+1,j} - g_{i,j})\|_2^2 | \\ &= | \sqrt{(g_{i,j+1} - g_{i,j})^2 + (g_{i+1,j} - g_{i,j})^2} |. \end{aligned}$$

Detta ger oss att

$$\|Lg\|_{2,1} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |\sqrt{(g_{i,j+1} - g_{i,j})^2 + (g_{i+1,j} - g_{i,j})^2}|. \quad (9)$$

Denna funktional är dock inte differentierbar då derivatan ej är kontinuerlig kring origo. För att hantera detta approximerar vi absolutbeloppet i ekvation (9) med

$$|t|_\beta := \sqrt{t^2 + \beta}, \quad (10)$$

där  $\beta > 0$  är ett godtyckligt litet tal som säkerställer kontinuitet och differentierbarhet. När vi använder approximation (10) i ekvation (9) får vi

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sqrt{\left(\sqrt{(g_{i,j+1} - g_{i,j})^2 + (g_{i+1,j} - g_{i,j})^2}\right)^2 + \beta} = \\ & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sqrt{(g_{i,j+1} - g_{i,j})^2 + (g_{i+1,j} - g_{i,j})^2 + \beta}. \end{aligned}$$

TV-regulariseringen kan då skrivas som

$$f_{\lambda,\epsilon} = \arg \min \|Ag - b\|_2^2 + \lambda \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sqrt{(g_{i,j+1} - g_{i,j})^2 + (g_{i+1,j} - g_{i,j})^2 + \beta}. \quad (11)$$

För att hantera randen kommer vi att använda oss av ett periodiskt randvillkor, det vill säga att vi på randen definierar  $g_{i,n+1} = g_{i,1}$  respektive  $g_{n+1,j} = g_{1,j}$ . TV-regulariseringen med approximationen av 1-normen kommer att implementeras med och utan bivillkoret  $g \geq 0$ .

Som med Tikhonovregularisering är kostnadsfunktionen för TV-regularisering konvex och weakly coercive. Datamatchningstermen är en Euklidisk norm och regulariseringstermen,  $\|Lg\|_{2,1}$ , är en 2,1-norm vilken är konvex. För att visa att kostnadsfunktionen till TV-regulariseringen (7) är weakly coercive använder vi oss av definitionen av nollrummet  $Ker(C) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | C\mathbf{x} = 0\}$  [LLM16, s. 217]. Vi vill visa att  $Ker(A) \cap Ker(L) = \{0\}$ . Om detta gäller så går åtminstone en av termerna i kostnadsfunktionen mot oändligheten då  $\|g\|_2 \rightarrow \infty$  och är därmed weakly coercive.

Vi antar att det existerar ett  $g \in Ker(A) \cap Ker(L)$ ,  $g \neq 0$ . Vi vet att

$$Lg = [(g_{i+1,j} - g_{i,j}, g_{i,j+1} - g_{i,j})],$$

och eftersom  $L$  är en linjär operator

$$\begin{aligned} L : \mathbb{R}^{n \times n} &\rightarrow \mathbb{R}^{n \times n \times 2} \\ g &\mapsto [(g_{i+1,j} - g_{i,j}, g_{i,j+1} - g_{i,j})]_{i,j=1}^n, \end{aligned}$$

vet vi att nollrummet till  $L$  existerar och är definierat som  $Ker(L) = \{g \in \mathbb{R}^{n \times n} | Lg = 0\}$ . Nollrummet  $Ker(L)$  är när  $g_{i+1,j} = g_{i,j}$  och  $g_{i,j+1} = g_{i,j}$ . Det vill säga att varje element i  $g$  har samma värde för alla index  $(i, j)$  och eftersom att vi har antagit att  $g \neq 0$ , är  $g_{i,j} \neq 0$  för alla  $(i, j)$ . Nollrummet till  $L$  är alltså det linjära delrummet av alla bilder med konstant pixelvärde i hela bilden. Detta vill säga att vi får en konstant  $n \times n$  matris

$$g = \alpha \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (12)$$

där  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Vi har sedan tidigare antagit att  $g \in \text{Ker}(A)$ ,  $g \neq 0$ . Då framåtoperatoren  $A$  är Radontransformen (1) och  $g$  definierat som (12) är  $Ag$  linjeintegralen över den konstanta matrisen  $g$ . Diskretiseringen av Radontransformen ger en summation över alla strålar som skickas genom pixlarna i bilden  $g$ . En summation av ett ändligt antal positiva tal är strikt positiva, analogt för ett ändligt antal negativa tal. Alltså kan det  $g \in \text{Ker}(L)$  inte ligga i  $\text{Ker}(A)$ , med andra ord  $g \notin \text{Ker}(A)$ . Därmed har vi en motsägelse och det gäller att  $\text{Ker}(A) \cap \text{Ker}(L) = \{0\}$ , vilket skulle visas. Eftersom snittet av nollrummen är  $\{0\}$ , innebär detta att båda, eller åtminstone en av termerna i TV-regulariseringen går mot oändligheten när  $\|g\|_2 \rightarrow \infty$ . Detta betyder att TV-regulariseringen (7) är weakly coercive och utifrån Sats 3.7 vet vi att det finns en kompakt delmängd som består av globala optimum till funktionen.

Analogt med uttrycket i (7) kan vi med hjälp av Sats 3.7 visa att det existerar ett optimum för uttryck (8).

I följande sektioner kommer vi att redogöra för optimeringen av de två regulariseringsmetoderna och hur vi tar fram gradienterna av kostnadsfunktionerna.

### 3.3 Optimering av Tikhonovregularisering

Baserat på teori kring de två optimeringsmetoderna steepest descent och gradientprojektion kan vi använda Tikhonovregularisering för att rekonstruera fantombilden. För att kunna implementera optimeringsmetoderna måste vi bestämma gradienten av kostnadsfunktionen för Tikhonovregulariseringen,  $H_T(g)$ . Genom att differentiera ekvation (5) med avseende på  $g$  tar vi fram gradienten till  $H_T(g)$ .

Vi gör en omskrivning av regulariseringsfunktionalen

$$\|g\|^2 = \sum_{i=1}^n g_i^2 = g^T g.$$

På motsvarande sätt kan datamatchningstermen skrivas som

$$\|Ag - b\|^2 = (Ag - b)^T (Ag - b) = g^T A^T Ag - 2b^T Ag + b^T b.$$

Kostnadsfunktionerna i (5) och (6) definieras, i enlighet med (4), som

$$H_T(g) = g^T A^T Ag - 2b^T Ag + b^T b + \lambda \|g\|^2. \quad (13)$$

För att få fram gradienten differentierar vi ekvation (13) och får

$$\begin{aligned} \nabla H_T(g) &= 2A^T Ag - 2A^T b + 2\lambda g \\ &\Leftrightarrow \\ \nabla H_T(g) &= 2(A^T A + \lambda I)g - 2A^T b. \end{aligned}$$

Med hjälp av denna gradient som nedstigningsriktning har vi nu möjligheten att hitta den optimala lösningen och därmed absorptionsfunktionen  $f$ .

### 3.4 Optimering av total variationsregularisering

Analogt med Tikhonovregularisering definierar vi kostnadsfunktion av TV-regularisering som  $H_{TV}(g)$ , vilken vi behöver bestämma gradienten av

$$H_{TV}(g) = \|Ag - b\|_2^2 + \lambda \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sqrt{(g_{i,j+1} - g_{i,j})^2 + (g_{i+1,j} - g_{i,j})^2} + \beta,$$

alltså

$$\nabla H_{TV}(g) = \nabla \|Ag - b\|_2^2 + \lambda \nabla_s \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sqrt{(g_{i,j+1} - g_{i,j})^2 + (g_{i+1,j} - g_{i,j})^2} + \beta \right). \quad (14)$$

Gradienten av datamatchningstermen är likadan som tidigare, nämligen  $2A^T Ag - 2A^T g$ . Vi vill beräkna gradienten i index  $(k, l)$  vilket motsvarar pixel  $(k, l)$

$$\frac{\partial}{\partial g_{k,l}} \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sqrt{(g_{i,j+1} - g_{i,j})^2 + (g_{i+1,j} - g_{i,j})^2 + \beta} \right).$$

Vi får ett uttryck som består av tre termer när vi deriverar över en dubbelsumma med avseende  $(k, l)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial g_{k,l}} & \left( \sqrt{(g_{k,l+1} - g_{k,l})^2 + (g_{k+1,l} - g_{k,l})^2 + \beta} \right. \\ & + \sqrt{(g_{k,l} - g_{k,l-1})^2 + (g_{k+1,l-1} - g_{k,l-1})^2 + \beta} \\ & \left. + \sqrt{(g_{k,l} - g_{k-1,l})^2 + (g_{k-1,l+1} - g_{k-1,l})^2 + \beta} \right). \end{aligned}$$

Gradienten av regulariseringsfunktionalen beräknas genom att använda kedjeregeln. Derivatnan av första termen blir då

$$\frac{2g_{k,l} - g_{k,l+1} - g_{k+1,l}}{\sqrt{(g_{k,l+1} - g_{k,l})^2 + (g_{k+1,l} - g_{k,l})^2 + \beta}} = \frac{2g_{k,l} - g_{k,l+1} - g_{k+1,l}}{\|\nabla_s g_{k,l}\|_2 |\beta|}.$$

Andra termen blir

$$\frac{g_{k,l} - g_{k,l-1}}{\sqrt{(g_{k,l} - g_{k,l-1})^2 + (g_{k+1,l-1} - g_{k,l-1})^2 + \beta}} = \frac{g_{k,l} - g_{k,l-1}}{\|\nabla_s g_{k,l-1}\|_2 |\beta|},$$

och tredje termen

$$\frac{g_{k,l} - g_{k-1,l}}{\sqrt{(g_{k,l} - g_{k-1,l})^2 + (g_{k-1,l+1} - g_{k-1,l})^2 + \beta}} = \frac{g_{k,l} - g_{k-1,l}}{\|\nabla_s g_{k-1,l}\|_2 |\beta|}.$$

Vi får en gradient som innehåller fyra förskjutningar där första termen representerar en förskjutning nedåt och till höger, andra termen representerar en förskjutning åt vänster och den tredje termen representerar en förskjutning uppåt. Som tidigare nämnts kommer vi att använda oss av ett periodiskt randvillkor där sista indexet i en rad jämförs mot första indexet i samma rad. Vi gör motsvarande för kolumnerna. TV-regulariseringens gradient, (14), med approximationen av 1-normen blir

$$\nabla H_{TV}(g) = 2A^T Ag - 2A^T b + \lambda \left[ \frac{2g_{k,l} - g_{k,l+1} - g_{k+1,l}}{\|\nabla_s g_{k,l}\|_2 |\beta|} + \frac{g_{k,l} - g_{k,l-1}}{\|\nabla_s g_{k,l-1}\|_2 |\beta|} + \frac{g_{k,l} - g_{k-1,l}}{\|\nabla_s g_{k-1,l}\|_2 |\beta|} \right]_{k,l=1}^n.$$

Baserat på gradienterna för Tikhonov- respektive TV-regularisering kan vi nu tillämpa optimeringsteorin för att hitta minimum för de fyra olika regulariseringsmetoderna. Vi har därmed möjligheten att lösa vårt inversproblem och ta fram en rekonstruktion av fantombilden. I nästa kapitel går vi igenom hur vi har implementerat metoderna i MATLAB, och vilka antaganden om parametrarna vi har gjort för att få fram lösningar. Efter att vi har redogjort för implementeringen kommer vi att presentera våra resultat i kapitel 5.

## 4 Implementering

I detta kapitel går vi igenom implementeringen av optimeringslösarna, val av parametervärde och presenterar en analys av regulariseringsparametrarna med hjälp av *L-kurvmotoden*. Alla parametrar som har introducerats i teoridelen har implementerats under programmeringen.

## 4.1 Implementering av optimeringslösare

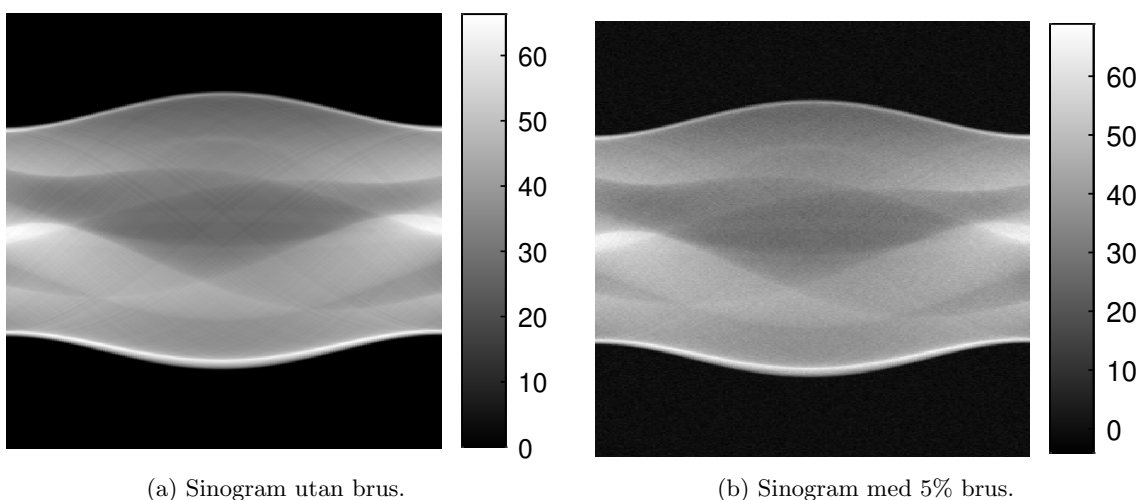
Implementering av optimeringslösarna har gjorts med hjälp av programmeringsspråket MATLAB. All kod kan ses i appendix. Vi har använt oss av Shepp-Loganfantomen som ursprungsfigur, se Figur 4. Denna är inbyggd i MATLAB och ger bättre förutsättningar för att kunna testa och jämföra våra resultat med den. Utifrån denna fantombild med upplösningen  $256 \times 256$  pixlar simulerar vi mätdata. Bilden har representerats av en matris med samma dimensioner som bildens upplösning, nämligen en  $256 \times 256$  matris.



Figur 4: MATLAB:s Shepp-Loganfantom. Fantombilden används för simulering av data och som referensfigur.

Vi har programmerat optimeringslösare som använder sig av MATLAB:s befintliga funktioner `radon.m` och `iradon.m` för rekonstruktion. Radontransformen har använts som framåtoperator, medan  $A^T$  är ofiltrerad bakåtprojektion som tas fram med hjälp av `iradon.m` [mathworks.com].

Mätdata har genererats utifrån fantombilden med funktionen `radon.m` som skickar 367 parallella strålar genom bilden. Detta görs för varje vinkel över  $180^\circ$ . Startvinkeln är  $1^\circ$ . Vidare är vinklarna likformigt fördelade med  $1^\circ$  mellan varje par av vinklar. För att undvika inversbrott i regulariseringen har vi förskjutit startpunkten med  $0,5^\circ$ , vilket innebär att  $0,5^\circ$  är startpunkten och vinklarna fördelar sig med  $1^\circ$  mellan varje par upp till  $179,5^\circ$ .



Figur 5: En representation av simulerad data från Shepp-Loganfantomen, utan och med 5% brus.

Vi har lagt till normalfördelat brus,  $\epsilon \sim N(0, \delta)$ , där  $\delta$  motsvarar 5% av standardavvikelsen från den simulerade mätdata. Mängden brus är valt baserat på kvaliteten av rekonstruktionsbilderna.

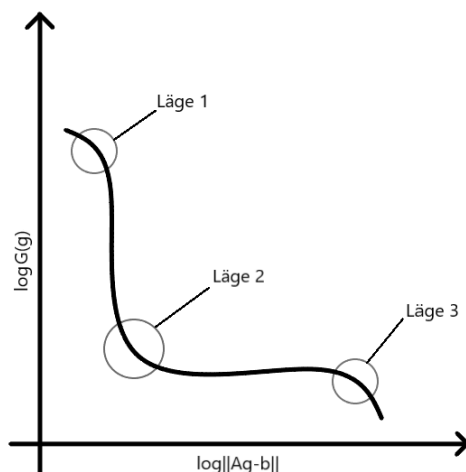
Bruset läggs till för att imitera det faktiska brus som finns på riktig mätdata. Mätdata har sammanställts i ett så kallat *sinogram*, se Figur 5.

Fyra regulariseringar har tillämpats - Tikhonovregularisering och TV-regularisering, båda med och utan bivillkoret  $g \geq 0$ . En approximation av  $\|Lg\|_{2,1}$  och ett periodiskt randvillkor har tillämpats för TV-regularisering. Optimeringsalgoritmerna är beroende av steglängden  $\alpha$ . Vi har valt steglängden  $\alpha = \frac{1}{1000}$ . Denna är vald tillräckligt liten för att säkerställa konvergens. TV-regulariseringens approximationsparameter  $\beta$  säkerställer differentierbarhet kring origo. Den är vald så att den inte påverkar negativt och är implementerad med värdet  $\beta = \frac{1}{2000}$ . Vi har implementerat ett termineringsvillkor för optimeringslösarna i form av en toleransgräns på  $10^{-3}$ . Detta innebär att om  $\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k\|_2$  är mindre än  $10^{-3}$  termineras programmet.

Alla regulariseringar är beroende av en regulariseringsparameter  $\lambda$ . Regulariseringsparametrarna har tagits fram med hjälp av en kombination av testning och L-kurvmetoden, som går igenom i nästa avsnitt.

## 4.2 Analys av regulariseringsparametrar med hjälp av L-kurvmetoden

Det finns flera olika metoder för att få fram ett bra värde på regulariseringsparameteren  $\lambda$ , men ingen av dessa garanterar en optimal lösning [MS12, s. 72-76]. Vi har valt att utvärdera regulariseringsparametrarna med hjälp av L-kurvmetoden som baseras på att hitta en balans mellan logaritmen av datamatchningstermen och logaritmen av regulariseringsfunktionalen. Denna metod är ej konvergent utan ger endast en indikation för vad det optimala värdet av  $\lambda$  borde vara. Med lämpliga parametervärden ger metoden en L-formad kurva med ett mjukt hörn där det optimala värdet bör ligga nära hörnet. Valet av detta parametervärde kan beskrivas som följer: om  $\lambda > 0$  är litet ges en lösning som mestadels är påverkad av logaritmen av datamatchningstermen,  $\log\|Ag - b\|_2^2$ , eftersom lösningen blir straffad om den är för långt ifrån den exakta lösningen. Vid stora  $\lambda$  blir minimeringsproblemet straffat om  $\log G(g)$  ökar. Vi kan därmed gå miste om en bra lösning till optimeringsproblemet, då regulariseringsparameteren inte tillåter en liten ökning av  $g$ . [CMRS00, s. 425]

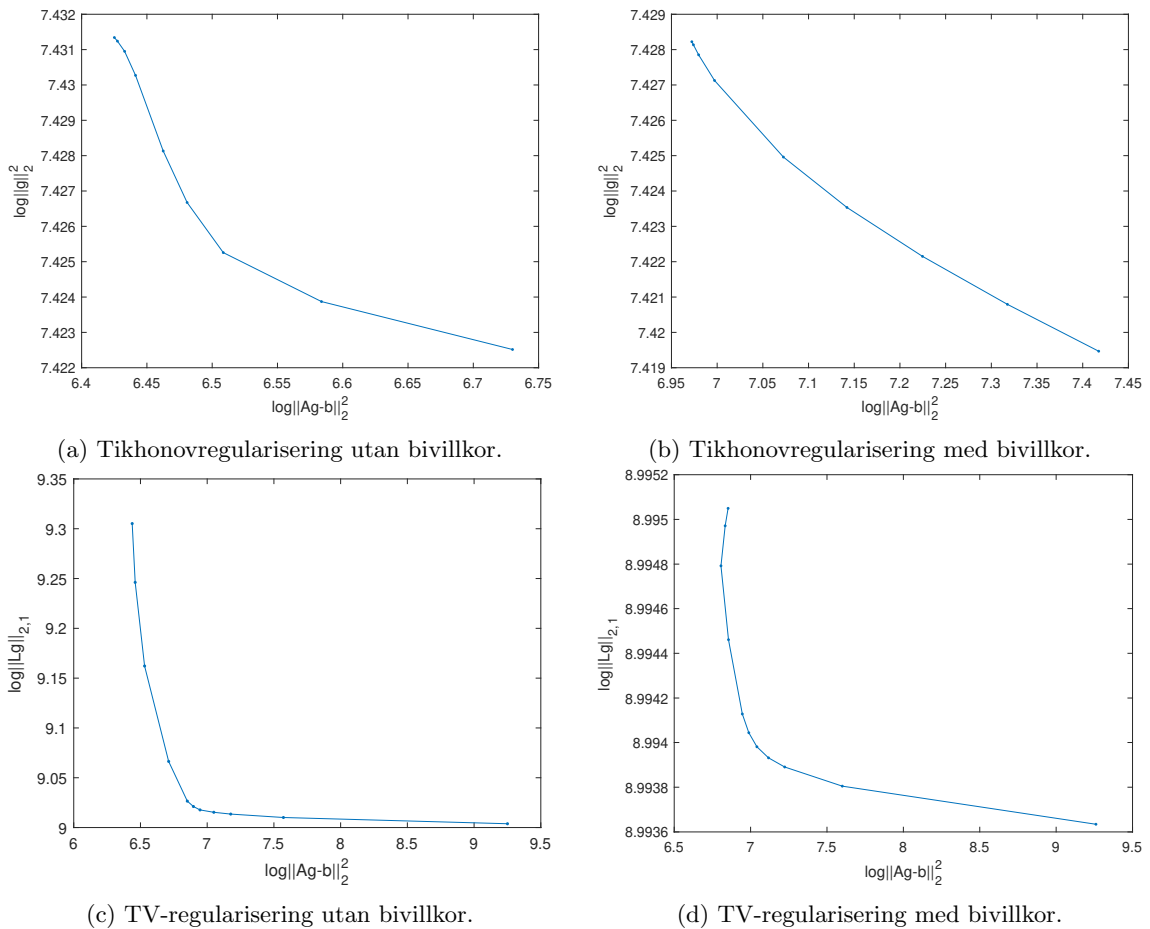


Figur 6: Illustration av en idealiserad L-kurva. Läge 1 representerar underregularisering, läge 3 representerar överregularisering och läge 2 indikerar en bra balans.

En idealiserad L-kurva är illustrerad i Figur 6. Läge 1 i Figur 6 representerar lösningen när  $\lambda$  är litet, alltså är lösningen underregulariserad vilket gör att regulariseringsfunktionalen blir obetydlig, och vice versa för läge 3. Där är  $\lambda$  stort och lösningen blir mestadels påverkad av regulariseringsfunktionalen medan datamatchningstermen istället blir obetydlig. Därav kan vi dra slutsatsen att en bra balans av värdet på regulariseringsparameteren bör hittas vid läge 2 i Figur 6.

### 4.2.1 L-kurvillustrationer

Teorin om L-kurvor tillämpas här på våra regulariseringsmetoder. I Figur 7 sammanställs L-kurvor för de olika regulariseringsmetoderna. Vid observation av de fyra L-kurvorna ser vi att Figur 7d, som representerar TV-regularisering med gradientprojektionsmetoden, liknar mest en typisk L-kurva. Därför tros en bra regulariseringsparameter för denna regularisering ligga nära hörnet på kurvan. Vi valde den fjärde punkten från höger på Figur 7d, vilket motsvarar  $\lambda = 0.6$ . Även i Figur 7c, TV-regularisering med steepest descent-metoden, ser vi en L-kurvstruktur där ett värde runt den sjunde punkten från höger,  $\lambda = 0.3$ , indikerar en bra balans mellan logaritmen av datamatchningstermen och logaritmen av regulariseringsfunktionalen. L-kurvorna för Tikhonovregularisering är presenterade i Figur 7a och 7b, där syns inte lika tydliga L-kurvor. Om vi istället observerar värdena på axlarna ser vi att datamatchningstermen förändras mer i proportion mot regulariseringsfunktionalen på lösningen i Figur 7b. Av denna anledning väljer vi ett parametervärde som ligger till vänster om mitten, vilket i detta fall motsvarar  $\lambda = 0.1$ . I Figur 7a resonerar vi på liknande sätt oss fram till punkt fyra från höger,  $\lambda = 0.15$ .



Figur 7: L-kurvor för respektive regulariseringsmetod. Ett bra parametervärde bör ligga i hörnet på kurvan.

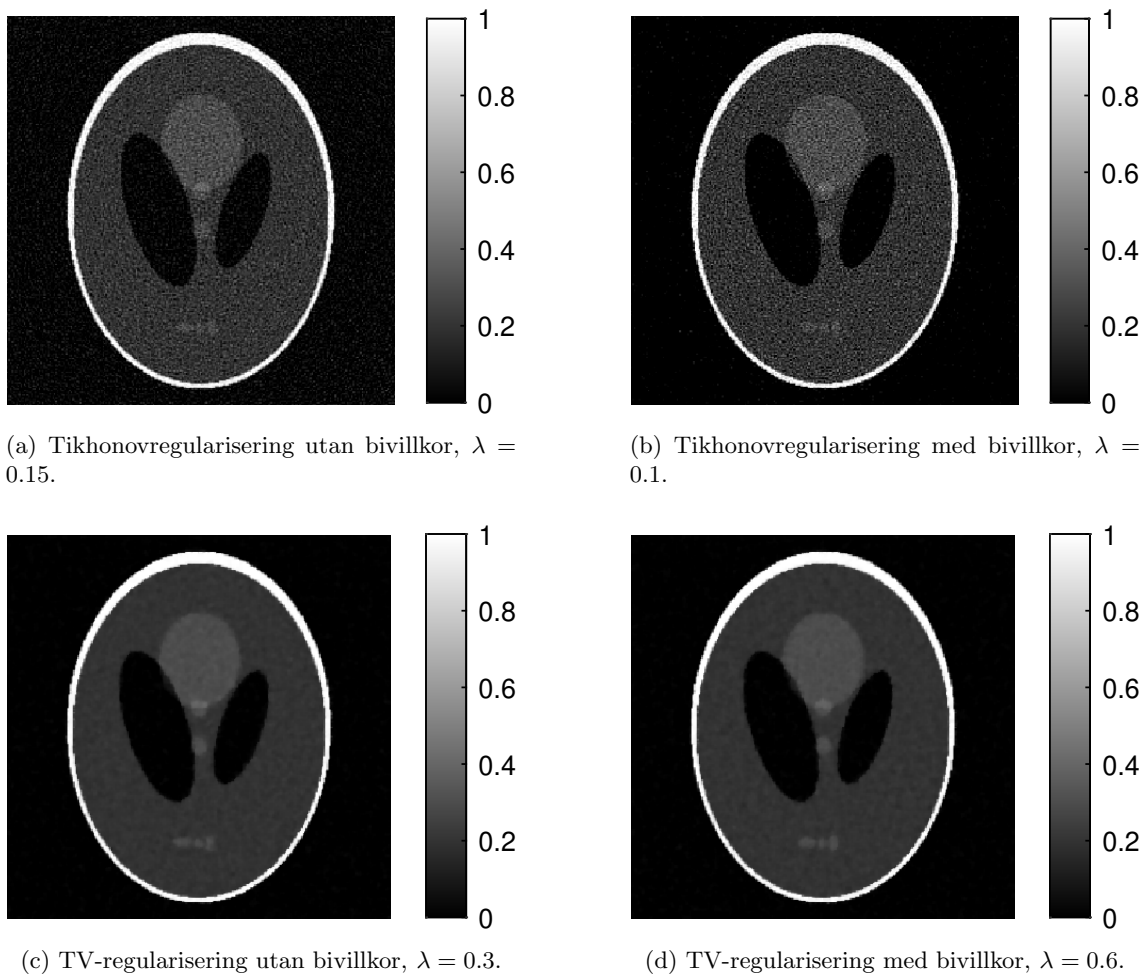
## 5 Resultat och jämförelse

I detta kapitel presenterar vi resultaten av rekonstruktionerna som tagits fram med de olika regulariseringsmetoderna. Alla bilder presenteras med varje methods individuella regulariseringsparameter  $\lambda$ .

## 5.1 Resultat

Varje rekonstruerad bild presenteras med en färgskala från 0 till 1, vilket indikerar värdet på pixlarna, och därmed absorptionen. Fantombilden i Figur 4 representerar en bild av ett huvud. Den vita delen representerar skelettet vilken har en hög absorptionskoefficient. De grå och svarta delarna indikerar mjukare vävnad med en lägre absorptionskoefficient. Färgskalan indikerar alltså hur mycket en given vävnad absorberar. Det framgår inte av bilderna, men både Tikhonov- och TV-regularisering utan bivillkor innehåller små negativa pixelvärden. De negativa värdena framgår därför inte av färgskalan som har ett minsta värde 0. I Figur 8 nedan ses de fyra olika rekonstruktionerna av Shepp-Loganfantomen.

I översta raden i Figur 8 nedan presenteras rekonstruktionerna med Tikhonovregularisering. Bilden till vänster, 8a, är rekonstruerad med hjälp av steepest descent-metoden och bilden till höger, 8b, är rekonstruerad med hjälp av gradientprojektionsmetoden. Motsvarande uppdelning gäller för rekonstruktionerna med TV-regularisering på nedre raden.



Figur 8: Presentation av rekonstruktioner av Shepp-Loganfantomen framtaget med Tikhonov- och TV-regularisering, båda med och utan bivillkor, samt respektive metods regulariseringsparameter  $\lambda$ .

I Figur 8a ses rekonstruktionen av bilden med Tikhonovregularisering utan bivillkor. Rekonstruktionen har tydliga konturer och olika typer av vävnad syns. Bilden är kornig vilket gör det svårt att tyda konturerna av de tre små ljusa ovalerna i nederdelen av fantomen. Bilden är tydligt påverkad av brus, vilket vid närmare inspektion kan ses även i de svarta områdena. Vidare så har Tikhonovregulariseringen med bivillkor i Figur 8b ett liknande beteende som Figur 8a. Tydliga konturer ses, men bruset i bilden finns fortfarande kvar, även om det är något mildare än

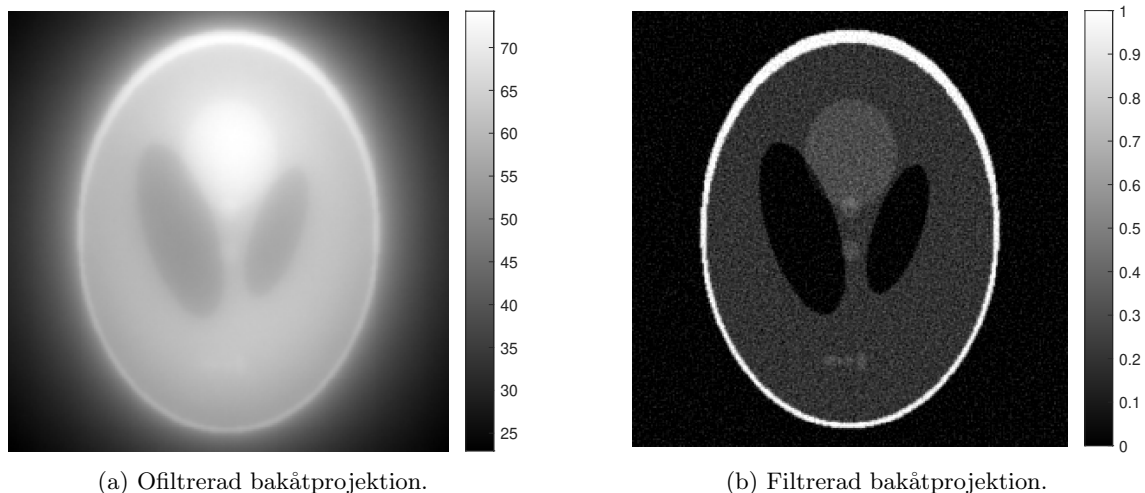


rekonstruktionen utan bivillkor. I det svarta området verkar bivillkoret ha sorterat bort en större mängd brus. Denna förändring gör det lättare att avgöra form och storlek på mindre områden. Om vi kollar på TV-regulariseringen utan bivillkor i Figur 8c skiljer sig denna jämfört med tidigare rekonstruktioner. Konturerna framstår tydligare och kanterna är skarpere och vitare. Brusigheten i bilden har även reducerats så att bilden upplevs slätare. Slutligen kan vi konstatera att TV-regulariseringen med bivillkor i Figur 8d är mycket lik Figur 8c, framförallt om vi ser till skärpan i kanterna. Brusnivån inuti fantomen är något lägre och upplevs som den bästa rekonstruktionen.

Sammanfattningsvis lyckas alla fyra rekonstruktioner återskapa fantombilden med olika kvalitet av konturer och hantering av brus. De stora skillnaderna är skärpan i kanter och brusighet inuti fantomen. Detta beteende kan förklaras med hur regulariseringarna är konstruerade. I TV-regularisering används en spatiell gradient som jämför intilliggande pixlar med varandra. Denna metod minimerar alltså med avseende på avstånden till andra pixlar vilket påverkar den slutgiltiga bilden där rekonstruktionen har slätat ut övergången mellan olika vävnader.

## 5.2 Rekonstruktion genom bakåtprojektion

En standardmetod för rekonstruktion av data från parallella strålar är *bakåtprojektion*, [Her09, s. 157], som antingen kan vara ofiltrerad eller filtrerad. Bakåtprojektionens fördel är att den kan beräknas fort, men nackdelen är att den inte kan hantera fall när datan innehåller en stor mängd brus. De två metoderna skiljer sig åt då filtrerad bakåtprojektion använder ett spatialfilter som läggs på sinogrammet innan bakåtprojektion genomförs [Sch 20, s. 222]. Detta filter filtrerar bort höga frekvenser och behåller låga frekvenser, vilket gör rekonstruktionen mindre brusig. Vi kommer inte att gå in djupare på teorin bakom denna metod, utan använder den för jämförelse av våra rekonstruktionsresultat. I Figur 9 illustreras rekonstruktionen av Shepp-Loganfantomen med 5% brus genom ofiltrerad respektive filtrerad bakåtprojektion med *iradon.m*.



Figur 9: Ofiltrerad och filtrerad bakåtprojektion vid rekonstruktion av Shepp-Loganfantom med 5% brus.

### 5.2.1 Jämförelse av resultat med bakåtprojektion

Skalorna på de två olika typerna av bakåtprojektion är olika. Den ofiltrerade bakåtprojektion har värden mellan 25 och 75 medan den filtrerade bakåtprojektionens rekonstruktion har pixelvärden mellan 0 och 1. Vit färg i fantomen och de fyra bilderna i Figur 8 motsvarar värde 1, vilket innebär att Figur 9a hade varit helt vit i denna skalan.

Rekonstruktionen med ofiltrerad bakåtprojektion i Figur 9a skiljer sig tydligt från rekonstruktionerna i Figur 8 då det inte går att urskilja konturer vilket gör den oanvändbar.

I Figur 9b, filtrerad bakåtprojektion, ser vi ett resultat som omedelbart liknar rekonstruktionen av Tikhonovregularisering utan bivillkor. Bilden är tydligt brusig med tydliga konturer kring

absorptionen av skelettet. Filtrerad bakåtprojektion hanterar inte bruset lika bra som Tikhonovregularisering med bivillkor, samt TV-regularisering med och utan bivillkor, då det förekommer brus i den svarta delen av rekonstruktionen.

## 6 Utveckling och slutsats

I detta kapitel diskuterar vi möjliga vidareutvecklingar av vårt arbete och avslutar med en slutsats.

### 6.1 Utveckling

Vårt arbete har varit begränsat till fyra olika typer av variationell regularisering som vi har optimerat med två olika metoder. För vidare undersökning hade det varit intressant att ta in fler typer av regularisering och jämföra dessa för att få en mer övergripande förståelse för kvaliteten och skillnaden hos de olika typerna av regularisering. Detta skulle medföra en bredare förståelse kring regularisering vid rekonstruktion av bilder. En möjlighet är också att lägga ett större fokus på valet av parametrar och känslighetsanalys av dessa.

En annan fråga som kan vara intressant att undersöka är hur snabbt de olika lösningarna konvergerar. Om vi skulle fokusera på att optimera lösningarna med avseende på tid kan kvaliteten bli lidande. Det hade då varit viktigt att hitta en bra balans mellan kvalitet och snabbhet.

Vi har också i vårt projekt valt att enbart fokusera på data från en fantombild. Det kan därför vara relevant att utöka arbetet till att inkludera flera och olika fantombilder för större komplexitet. Dessutom undersöka hur vår optimeringslösare skulle kunna hantera detta och undersöka vilken påverkan detta skulle ha på resultatet.

All vår data har, som tidigare nämnts, simulerats utifrån parallella strålar. För framtida undersökningar kan det vara relevant att skapa rekonstruktioner av bilder med hjälp av exempelvis fan-beam strålar. Användning av fan-beam strålar kräver en annan uppställning av framåtoperatoren då strålningsgeometrin är annorlunda. I praktiken kräver skiktröntgen med fan-beam strålar färre rotationer när röntgenstrålarna skjuts in. Detta innebär att processen går fortare, men är mer kostsam än vid användning av parallella strålar. [Her09, s. 47-49]

Brus har lagts till på all data, men vi kan inte garantera att det är representativt för riktiga data. Det kan därför vara intressant att undersöka andra former av brus för modelleringen av data, exempelvis Poissonfördelat brus.

### 6.2 Samhälleliga och etiska aspekter

Som tidigare nämnts i inledningen kan det uppstå olika samhälleliga och etiska aspekter när det kommer till optimering av rekonstruktionsmetoder, exempelvis kostnad för tagning av röntgenbilder, både för den enskilda personen men även för samhället. Vidare kan kontroll av sprickor i broar och pelare också ses som ett inversproblem och vi kan även där prata om för- och nackdelar med detta. Ytterligare situationer där inversproblem kan uppstå är vid dekryptering där en fråga om integritet kan förekomma.

Metoderna behöver ha en bra balans mellan kvaliteten på rekonstruktionen och tidsåtgången. En högre kvalitet kan medföra längre skannings- och rekonstruktionstid vilket kan leda till att färre människor får tillgång till denna teknik på grund av kö eller kostnadsaspekter. Om skannings- och rekonstruktionskvalitet istället väljs med fokus på att minimera tidsåtgång och kostnad kan det innebära att fler människor har tillgång, men att kvaliteten istället blir lidande. Arbetet har använt simulerad data från MATLAB och har på så sätt ej använt någon data som innehåller personuppgifter.

Optimeringsområdet är i ständig utveckling, där metoderna för rekonstruktion förbättras och skapar bilder av högre kvalitet. Exempelvis är ultraljud också ett inversproblem där det kan uppstå en relevant diskussion kring utvecklingspotentialen och konsekvenserna av denna utveckling. I takt med att det finns möjlighet att generera ultraljudsbilder av bättre kvalitet kan större information ges om exempelvis foster.

### 6.3 Slutsats

Vi har studerat områden inom inversproblem, optimering och regularisering. Utifrån de resultat vi har fått fram kan vi dra slutsatsen att våra optimeringslösningar konvergerar. Efter att ha undersökt, med hjälp av L-kurvor, vilket  $\lambda$  som ger en bra balans mellan datamatchningstermen och regulariseringsfunktionalen har vi kunnat ta fram rekonstruktioner av fantombilden. Rekonstruktionerna lyckas till viss grad efterlikna fantombilden.

Vi har lyckats att ta fram fyra rekonstruktioner av fantombilden, vilket var syftet med detta arbete. Det är därmed möjligt, baserat på de uppställda regulariseringsmetoderna, att lösa inversproblemet och ta fram absorptionsfunktionen  $f$  med hjälp av optimering.

## Referenser

- [1177.se] <https://www.1177.se/Halland/behandling-hjalpmedel/undersokningar-och-provtagning/bildundersokningar-och-rontgen/datortomografi/> , 2022-03-03, 14:50.
- [AEP17] N. Andréasson, A. Evgrafov, M. Patriksson *An Introduction to Continuous Optimization*, Studentlitteratur AB, 3rd edition, (2017)
- [arpansa.gov.au] <https://www.arpansa.gov.au/understanding-radiation/what-is-radiation/ionising-radiation/x-ray>, 2022-05-02, 10:24
- [BLS16] B. Bajic, J. Lindblad, N. Sladoje, *Restoration of images degraded by signal-dependent noise based on energy minimization: an empirical study*, Journal of Electronic Imaging, Vol. 25(4), (Jul/Aug 2016)
- [Bom08] J. Boman, *Datortomografins matematik Om en matematisk teori med många nya tillämpningar*, Matematiska Institutionen Stockholms Universitet, (2008), s. 177-186
- [CMRS00] D. Calvetti, S. Morigi, L. Reichel, F. Sgallari, *Tikhonov regularization and the L-curve for large discrete ill-posed problems*, Journal of Computational and Applied Mathematics 123, (2000), s. 423-446
- [Fee15] T. G. Feeman, *The Mathematics of Medical Imaging*, Springer International Publishing, (2015), s. 1-35
- [Her09] G. T. Herman, *Fundamentals of Computerized Tomography*, Springer International Publishing, (2009)
- [Had1923] J. Hadamard, *Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations*, Dover Publications, New York, edition anno 1952, (1923)
- [humanprogress.org] <https://www.humanprogress.org/heroes-of-progress-pt-26-wilhelm-rontgen/> , 2022-05-09, 14:15
- [Ker16] M. Kern, *Numerical Methods for Inverse Problems*, John Wiley & Sons, NY, 1st edition (2016)
- [Kje17] T. Kjellström, *Medicinhistoria Röntgen genom tiderna*, <https://www.doktorn.com/artikel/medicinhistoria-r%C3%B6ntgen-genom-tiderna/>, 2022-05-06, 12:30
- [LLM16] D. C. Lay, S. R. Lay, J.J. McDonald, *Linear Algebra and its Applications*, Pearson Education Limited, 5th edition, (2016)
- [mathworks.com] <https://se.mathworks.com/help/images/ref/radon.html> , 2022-03-22, 13:07
- [mathworks.com] <https://se.mathworks.com/help/images/ref/iradon.html>, 2022-05-02, 11:34
- [MS12] J. L. Mueller, S. Siltanen, *Linear an Nonlinear Inverse Problem with Practical Applications*, SIAM, (2012)
- [ne.se1] Nationalencyklopedin, lysämne. <https://www.ne.se/uppslagsverk/ordbok/svensk/lys%C3%A4mne>, 2022-05-09, 13:50
- [ne.se2] Nationalencyklopedin, regularisering. <http://www.ne.se/uppslagsverk/encyklopedi/lång/regularisering>, 2022-05-03, 10:10
- [ne.se3] Nationalencyklopedin, röntgenstrålning. <http://www.ne.se/uppslagsverk/encyklopedi/lång/röntgenstrålning>, 2022-05-02, 15:45
- [Niev1986] Y. Nievergelt, *Elementary inversion of Radon's Transform*, Society for Industrial and Applied Mathematics, SIAM review vol. 28 No. 1, (1986), s. 79-84
- [Sch 20] R. Schofield et. al, *Image reconstruction: Part 1 understanding filtered back projection, noise and image acquisition*, Journal of Cardiovascular Computed Tomography 14, (2020), s. 219-225

## A Appendix

### A.1 Bevis

#### A.1.1 Sats 3.4

*Bevis av sats 3.4.* [AEP17, s. 82]

Antag att  $\mathbf{x}^*$  är ett lokalt minimum, men inte ett globalt. Betrakta en vektor  $\mathbf{x} \in S$  med egenskapen att  $f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{x}^*)$ . Låt  $\lambda \in (0, 1)$ . Då  $S$  och  $f$  är konvexa gäller det att  $\lambda\mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{x}^* \in S$ , och  $f(\lambda\mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{x}^*) \leq \lambda f(\mathbf{x}) + (1 - \lambda)f(\mathbf{x}^*)$ . Genom att välja  $\lambda > 0$  tillräckligt liten får vi en motsägelse om lokal optimalitet av  $\mathbf{x}^*$ .  $\square$

#### A.1.2 Sats 3.5

*Bevis av sats 3.5.* , [AEP17, s.91-94]

$\Rightarrow$ )

Antag att  $\mathbf{x}^*$  är ett lokalt minimum, men att  $\nabla f(\mathbf{x}^*) \neq \mathbf{0}^n$ . Låt  $\mathbf{p} := -\nabla f(\mathbf{x}^*)$ , och undersök Taylorexansionen runt  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$  i  $\mathbf{p}$ 's riktning:

$$f(\mathbf{x}^* + \alpha\mathbf{p}) = f(\mathbf{x}^*) + \alpha\nabla f(\mathbf{x}^*)^T\mathbf{p} + o(\alpha),$$

där  $o: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  är sådan att  $o(s)/s \rightarrow 0$  när  $s \rightarrow 0$ . Vi får

$$f(\mathbf{x}^* + \alpha\mathbf{p}) = f(\mathbf{x}^*) - \alpha\|\nabla f(\mathbf{x}^*)\|^2 + o(\alpha) < f(\mathbf{x}^*)$$

för alla  $\alpha > 0$  små nog, då  $\|\nabla f(\mathbf{x}^*)\| \neq 0$ . Detta avslutar första delen av beviset.

$\Leftarrow$ )

Då  $f$  är konvex gäller det för varje  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  att,

$$f(\mathbf{y}) \geq f(\mathbf{x}^*) + \nabla f(\mathbf{x}^*)^T(\mathbf{y} - \mathbf{x}^*) = f(\mathbf{x}^*),$$

där likheten följer från att  $\nabla f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}^n$ . Beviset klart.  $\square$

#### A.1.3 Normens konvexitet

*Bevis normens konvexitet.* Vi har från triangelolikheten att

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|.$$

Då kan vi skriva

$$\|\lambda\mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y}\| \leq \|\lambda\mathbf{x}\| + \|(1 - \lambda)\mathbf{y}\| = \lambda\|\mathbf{x}\| + (1 - \lambda)\|\mathbf{y}\|.$$

$\square$

## A.2 MATLAB-kod

### A.2.1 Sinogram

```
% Sinogram utan och med 5% brus
clf ; clear ; clc ;

xd = 256; % Bildens upplösning.
obj = phantom(xd); % Fantombilden med dimension
                256x256
angle = 1:1:180; % Inskjutningsvinklar.
data = radon(obj, angle); % Radontransformen av obj.

v = 0.05*std(data(:)); % 5% brus.
datarad = data + v*randn(367, 180); % Tillagt 5% brus.

% Plot sinogram utan brus
subplot(1, 2, 1)
imshow(data, []), axis('square')
colorbar

% Plot sinogram med 5% brus
subplot(1, 2, 2)
imshow(datarad, []), axis('square')
colorbar
```

## A.2.2 Tikhonovregularisering med steepest descent, L-kurva

```
%% Steepest Descent
clf;clear;clc;

xd = 256; % Dimensioner bild
alpha = 1/1000; % Steglängden
object = phantom(xd); % Fantombilden 256x256
angle = 1:1:180; % Inskjutningsvinklar simulerad data
rec_angle = 0.5:1:179.5; % Inskjutningsvinklar rekonstruktion
data = radon(object,angle); % Simulerad data fra fantom
noise = 0.05*std(data(:)); % Genererar brus
data = data + noise*randn(367,180); % Simulerad data med brus
tol = 1e-3; % Tolerans terminering

% Varden pa regulariseringsparametern som testas
lambda = [10^-3 3*10^-3 10^-2 3*10^-2 10^-1 1.5*10^-1 2*10^-1
          2.5*10^-1 3*10^-1];

% Gradient som bestammer stegriktning
grad = @(x, angle, data, lambda) 2*(iradon(radon(x,angle)-data,
      angle,'none',xd) + lambda*x);

% Initierar tomma vektorer och celler som sedan lagrar resultat
Lg_norm = zeros(1,length(lambda));
Ag_b_norm = zeros(1,length(lambda));
saved_pics = cell(1,length(lambda));

for i = 1:length(lambda)

    pic = zeros(xd); % Skapa bild med startpunkt 0

    while true

        % Stegriktning
        df = grad(pic,rec_angle,data,lambda(i));

        tmp_pic = pic - alpha*df; % Ny lösning

        % Kollar om normen av skillnaden mellan x_k+1 - x_k
        % ar mindre an toleransnivan
        pic_diff = sqrt(sum((tmp_pic(:)-pic(:)).^2));
        if pic_diff < tol
            pic = tmp_pic;
            break
        end

        % Uppdaterar och sparar var nya lösning
        pic = tmp_pic;
        saved_pics{i} = pic;
    end

    %Log av reg.funktional
    Lg_norm(i) = log(norm(pic)^2);

    %Log av datamatchning
```

```
    Ag_b_norm(i) = log(norm(radon(pic, rec_angle)-data)^2);  
end  
  
plot(Ag_b_norm', Lg_norm', '.-')           %Plot L-kurva  
xlabel("log||Ag-b||_2^2")                 %x-label  
ylabel("log||g||_2^2")                     %y-label
```



### A.2.3 Tikhonovregularisering med gradientprojektion, L-kurva

```
%% Gradientprojektion
clf;clear;clc;

xd = 256; % Dimensioner bild
alpha = 1/1000; % Steglängden
object = phantom(xd); % Fantombilden 256x256
angle = 1:1:180; % Inskjutningsvinklar simulerad data
rec_angle = 0.5:1:179.5; % Inskjutningsvinklar rekonstruktion
data = radon(object,angle); % Simulerad data fra fantom
noise = 0.05*std(data(:)); % Genererar brus
data = data + noise*randn(367,180); % Simulerad data med brus
tol = 1e-3; % Tolerans terminering

% Varden pa regulariseringsparametern som testas
lambda = [10^-3 3*10^-3 10^-2 3*10^-2 10^-1 0.15 0.2 0.25 3*10^-1];

% Gradient som bestammer stegriktning
grad = @(x, angle, data, lambda) 2*(iradon(radon(x,angle)-data,
    angle,'none',xd) + lambda*x);

% Initierar tomma vektorer och celler som sedan lagrar resultat
Lg_norm = zeros(1,length(lambda));
Ag_b_norm = zeros(1,length(lambda));
saved_pics = cell(1,length(lambda));

for i = 1:length(lambda)

    pic = zeros(xd); % Skapa bild med startpunkt 0

    while true

        % Stegriktning
        df = grad(pic,rec_angle,data,lambda_test);

        % Uppdaterar positionen ( bilden )
        tmp_pic = pic - alpha*df;

        % Projicerar alla bilder med negativt varde till 0
        tmp_pic(tmp_pic < 0) = 0;

        % Kollar om normen av skillnaden mellan x_k+1 - x_k
        % ar mindre an toleransnivan
        pic_diff = sqrt(sum((tmp_pic(:)-pic(:)).^2));
        if pic_diff < tol
            pic = tmp_pic;
            break
        end

        % Uppdaterar och sparar var nya losning
        pic = tmp_pic;
        saved_pics{i} = pic;
    end

    % Log av reg.funktional
```

```

Lg_norm(i) = log(norm(pic)^2);

% Log av datamatchning
Ag_b_norm(i) = log(norm(radon(pic, rec_angle)-data)^2);
end

plot(Ag_b_norm,Lg_norm,'.-') % Plot L-kurva
xlabel("log||Ag-b||_2^2") % x-label
ylabel("log||g||_2^2") % y-label

```

#### A.2.4 Total variationsregularisering med steepest descent, L-kurva

```
% TV Gradient Projection, L-curve

clf;clear;clc;

xd = 256; % Dimensioner bild
beta = 0.0005; % Approximeringsparameter
alpha = 1/1000; % Steglängden
object = phantom(xd); % Fantombilden 256x256
angle = 1:1:180; % Inskjutningsvinklar simulerad data
rec_angle = 0.5:1:179.5; % Inskjutningsvinklar rekonstruktion
data = radon(object,angle); % Simulerad data fra fantom
noise = 0.05*std(data(:)); % Genererar brus
data = data + noise*randn(367,180); % Simulerad data med brus
tol = 1e-3; % Tolerans terminering

% TV-regularisering gradient
grad_data = @(x, angle, data) 2*iradon(radon(x,angle)-data,angle, 'none',xd);
grad_spec_norm = @(x, y, beta) ((x.^2 + y.^2 + beta).^(1/2));

% Olika lambda till undersokning
lambda = [3*10^-3 10^-2 3*10^-2 10^-1 3*10^-1 4*10^-1 5*10^-1
          6*10^-1 7*10^-1 1 3];

% Tomma vektorer och cella for att spara undan information
Lg_norm = zeros(1,length(lambda));
Ag_b_norm = zeros(1,length(lambda));
saved_pics = cell(1,length(lambda));
tmp_left_shift = zeros(xd);
tmp_right_shift = zeros(xd);
tmp_up_shift = zeros(xd);
tmp_down_shift = zeros(xd);
tmp_up_right_shift = zeros(xd);
tmp_left_down_shift = zeros(xd);

for i = 1:length(lambda)

    pic = zeros(xd); % Skapa bild med startpunkt 0

    while true

        % Forskjutning, left
        tmp_left_shift(:,1:end-1) = pic(:,2:end);
        tmp_left_shift(:,end) = pic(:,1);

        % Forskjutning, right
        tmp_right_shift(:,2:end) = pic(:,1:end-1);
        tmp_right_shift(:,1) = pic(:,end);

        % Forskjutning, up
        tmp_up_shift(1:end-1,:) = pic(2:end,:);
        tmp_up_shift(end,:) = pic(1,:);

        % Forskjutning, down
```

```

tmp_down_shift(2:end,:) = pic(1:end-1,:);
tmp_down_shift(1,:) = pic(end,:);

% Forskjutning, left down
tmp_left_down_shift(2:end,:) = tmp_left_shift(1:end-1,:);
tmp_left_down_shift(1,:) = tmp_left_shift(end,:);

% Forskjutning, up right
tmp_up_right_shift(1:end-1,:) = tmp_right_shift(2:end,:);
tmp_up_right_shift(end,:)= tmp_right_shift(1,:);

% Implementerar forskjutningarna
left_shift = pic - tmp_left_shift;
right_shift = pic - tmp_right_shift;
up_shift = pic - tmp_up_shift;
down_shift = pic - tmp_down_shift;
left_down_shift= tmp_left_down_shift - tmp_left_shift;
up_right_shift = tmp_up_right_shift - tmp_up_shift;

% Berakna gradienten
grad_tot = grad_data(pic, rec_angle, data) + lambda(i)*((
    right_shift + down_shift)./(grad_spec_norm(down_shift,
    right_shift, beta)) + up_shift./(grad_spec_norm(up_shift
    , up_right_shift, beta)) + left_shift./(grad_spec_norm(
    left_shift, left_down_shift, beta)));

% Uppdaterar positionen (bilden)
tmp_pic = pic - alpha*grad_tot;

% Beraknar normen av den nya och gamla position
pic_diff = sqrt(sum((tmp_pic(:)-pic(:)).^2));

% Kollar toleransen, om mindre an toleransgrans terminer
if pic_diff < tol
    pic = tmp_pic;
    iterationer = iterationer + 1;
    break
end

% Uppdaterar och sparar var nya losning
pic = tmp_pic;
saved_pics{i} = pic;

end
Lg_norm(i) = log(sum(sum(abs(pic)))); % Log av reg.funktional
Ag_b_norm(i) = log(norm(radon(pic, rec_angle)-data)^2); % Log
datamatchning

end
plot(Ag_b_norm,Lg_norm,'.-') % Plot L-kurva
xlabel("log||Ag-b||_2^2") % x-label
ylabel("log||Lg||_{2,1}") % y-label

```

## A.2.5 Total variationsregularisering med gradientprojektion, L-kurva

```
% TV Gradient Projection, L-curve

clf;clear;clc;

xd = 256; % Dimensioner bild
beta = 0.0005; % Approximeringsparameter
alpha = 1/1000; % Steglängden
object = phantom(xd); % Fantombilden 256x256
angle = 1:1:180; % Inskjutningsvinklar simulerad data
rec_angle = 0.5:1:179.5; % Inskjutningsvinklar rekonstruktion
data = radon(object,angle); % Simulerad data fra fantom
noise = 0.05*std(data(:)); % Genererar brus
data = data + noise*randn(367,180); % Simulerad data med brus
tol = 1e-3; % Tolerans terminering

% TV-regularisering gradient
grad_data = @(x, angle, data) 2*iradon(radon(x,angle)-data,angle, 'none',xd);
grad_spec_norm = @(x, y, beta) ((x.^2 + y.^2 + beta).^(1/2));

% Olika lambda till undersokning
lambda = [3*10^-3 10^-2 3*10^-2 10^-1 3*10^-1 4*10^-1 5*10^-1
          6*10^-1 7*10^-1 1 3];

% Tomma vektorer och celler for att spara undan information
Lg_norm = zeros(1,length(lambda));
Ag_b_norm = zeros(1,length(lambda));
saved_pics = cell(1,length(lambda));
tmp_left_shift = zeros(xd);
tmp_right_shift = zeros(xd);
tmp_up_shift = zeros(xd);
tmp_down_shift = zeros(xd);
tmp_up_right_shift = zeros(xd);
tmp_left_down_shift = zeros(xd);

for i = 1:length(lambda)

    iterationer = 0; % Antal iterationer = 0
    pic = zeros(xd); % Skapa bild med startpunkt 0

    while true

        % Forskjutning, left
        tmp_left_shift(:,1:end-1) = pic(:,2:end);
        tmp_left_shift(:,end) = pic(:,1);

        % Forskjutning, right
        tmp_right_shift(:,2:end) = pic(:,1:end-1);
        tmp_right_shift(:,1) = pic(:,end);

        % Forskjutning, up
        tmp_up_shift(1:end-1,:) = pic(2:end,:);
        tmp_up_shift(end,:) = pic(1,:);
```

```

% Forskjutning, down
tmp_down_shift(2:end,:) = pic(1:end-1,:);
tmp_down_shift(1,:) = pic(end,:);

% Forskjutning, left down
tmp_left_down_shift(2:end,:) = tmp_left_shift(1:end-1,:);
tmp_left_down_shift(1,:) = tmp_left_shift(end,:);

% Forskjutning, up right
tmp_up_right_shift(1:end-1,:) = tmp_right_shift(2:end,:);
tmp_up_right_shift(end,:)= tmp_right_shift(1,:);

% Implementerar forskjutningarna
left_shift = pic - tmp_left_shift;
right_shift = pic - tmp_right_shift;
up_shift = pic - tmp_up_shift;
down_shift = pic - tmp_down_shift;
left_down_shift= tmp_left_down_shift - tmp_left_shift;
up_right_shift = tmp_up_right_shift - tmp_up_shift;

% Berakna gradienten
grad_tot = grad_data(pic, rec_angle, data) + lambda(i)*((
    right_shift + down_shift)./(grad_spec_norm(down_shift,
    right_shift, beta)) + up_shift./(grad_spec_norm(up_shift
    , up_right_shift, beta)) + left_shift./(grad_spec_norm(
    left_shift, left_down_shift, beta)));

% Uppdaterar positionen (bilden)
tmp_pic = pic - alpha*grad_tot;

% Projicerar alla bilder med negativt varde till 0
tmp_pic(tmp_pic < 0) = 0;

% Beraknar normen av den nya och gamla position
pic_diff = sqrt(sum((tmp_pic(:)-pic(:)).^2));

% Kollar toleransen, om mindre an toleransgrans terminer
if pic_diff < tol
    pic = tmp_pic;
    break
end

pic = tmp_pic;
iterationer = iterationer + 1; % Iterationer
saved_pics{i} = pic;         % Sparar undan bild for
    lambda(i)

end

Lg_norm(i) = log(sum(sum(abs(pic)))); % Log av reg.funktional
Ag_b_norm(i) = log(norm(radon(pic, rec_angle)-data)^2); % Log
    datamatchning

end
plot(Ag_b_norm,Lg_norm,'.-') % Plot L-kurva
xlabel("log||Ag-b||_2^2")    % x-label
ylabel("log||Lg||_{2,1}")   % y-label

```