Hur många procent?

En kvantitativ studie om högstadieelevers missuppfattningar av procentbegreppet

Charlie Wolfbrandt
Ämneslärarprogrammet med inriktning mot gymnasieskolan

Uppsats/Examensarbete: 15 hp
Kurs: LGMA2A
Nivå: Avancerad nivå
Termin/år: VT 2021
Handledare: Jan Stevens
Examinator: Anna Holmlund

Nyckelord: Procent, procenträkning, missuppfattningar av procent, percent, misconceptions with percent.

Abstract

This study aims to find student misconceptions when solving problems involving percent. The study involves students in 8th and 9th grade in Sweden. The purpose of the study is to find what misconceptions exists related to the percent concept and how common each of them are. It is a quantitative study where the misconceptions that are found are analyzed and discussed. The study shows that many students find it difficult to solve problems involving percent, in particular when there is multiple percentual changes taking place.

Förord

Jag vill börja med att rikta ett stort, stort tack till de lärare och elever som gjorde denna studie möjlig. Att ni under rådande omständigheter med delvis distansundervisning och allt vad det innebär tog er tid att delta i undersökningen är guld värt. Det hade aldrig varit möjligt utan er.

Tack också till min handledare Jan Stevens för dina kommentarer och tips på förbättringar av arbetet, det har varit till stor nytta.

Ett stort tack ska även riktas till min opponent Maria Karlsson Otterlin, för en bra granskning av mitt arbete och bra förslag på förbättringar.

Avslutningsvis vill jag också tacka min examinator Anna Holmlund för den feedback jag fick under och efter granskningen av mitt arbete. Tack för dina förslag på förbättringar, det har verkligen hjälpt mig att slutföra detta arbete.

Innehållsförteckning

1 Inledning

Procent dyker upp i kursplanen i matematik redan i årskurs 4–6 och följer sedan med hela vägen till gymnasiet. Det är därför en relativt stor del av matematiken och är dessutom någonting man ofta stöter på i vardagen. Allt från extrapriser i affärer till räntor på lån har med procenträkning att göra. Vi stöter ofta på statistik av olika slag där resultaten uttrycks i procent. Det är därför inte bara nödvändigt att behärska procenträkning för att klara av matematiken i skolan, det har även många användningsområden utanför skolan.

Under mina VFU-perioder har jag märkt att många elever har svårt för procenträkning. Ofta lär de sig de olika metoderna men vet inte när de ska använda vilken. Det tyder på att de inte har fått någon förståelse för vad det är de gör, utan bara har memorerat olika metoder som eventuellt skulle kunna fungera. De väljer en av metoderna och hoppas att det är rätt, ofta utan att reflektera över vad de gör eller om svaret är rimligt. Det som är lurigt med procenträkning är att man faktiskt kan komma fram till ganska rimliga (men felaktiga) resultat även om man har gjort på helt fel sätt.

Min förhoppning är att denna undersökning ska leda till en tydligare bild över vilka missuppfattningar som finns och vilka fel elever gör när de löser procentuppgifter. Den kunskap jag hoppas få kring detta blir väldigt nyttig att ta med till min framtida yrkesverksamhet. Förhoppningsvis kan man på ett bättre sätt förhindra dessa missuppfattningar om man redan på förhand känner till dem. Arbetar man på gymnasiet finns det en risk att eleverna har med sig missuppfattningar från grundskolan, men även då finns det en fördel i att vara förberedd på hur dessa missuppfattningar ser ut för att snabbt försöka bli av med dem.

1.1 Syfte och frågeställning

Syftet med denna studie är att undersöka vilka fel elever gör när de arbetar med procenträkning. Utifrån denna utgångspunkt ska jag försöka besvara följande frågeställningar:

- Vilka missuppfattningar visar högstadieelever vid procenträkning?
- Hur vanliga är dessa missuppfattningar?

1.2 Avgränsningar

Jag har valt att enbart fokusera på missuppfattningar som har med själva procentbegreppet att göra, alltså konceptuella missuppfattningar. Detta diskuteras i detalj i avsnitt 3.6.1.

2 Bakgrund

2.1 Historik procent

Romarna använde sig av bråktal som enkelt kan göras om till hundradelar redan för över 2000 år sedan. Även om de inte pratade om procent i sig tyder detta på att man såg värdet i att använda sig av hundradelar. Olika skatter gällande slavhandel låg på 1/20 eller 1/25, men det tydligaste exemplet är kejsare Augustus (runt år 0) som införde en skatt på 1/100 på allt som såldes på auktion.
På medeltiden blev det allt vanligare att talet 100 användes som bas. Uttryck som "20 p 100", "xp cento", och "vi p c°" dyker ofta upp i italienska manuskript från 1400-talet och motsvarar våra 20%, 10% respektive 6%. Den första primitiva formen av procenttecknet är c° och användes i formerna "per c°" eller "p c°", förkortningar av "per cento". Under mitten av 1600-talet ersatte man "cento" med två små cirklar åtskilda av en horisontell linje och kort därefter tog man bort "per" och använde sig enbart av detta tecken. Den diagonala variant av detta tecken som vi använder idag beskrivs av Smith som "modernt" (Smith, 1925).

2.2 Procenträkning i skolan

När man arbetar med procenträkning i skolan (Cederqvist m.fl., 2013) utgår man ifrån sambandet mellan delen, det hela och andelen:

$$\frac{\text{delen}}{\text{det hela}} = \text{andelen}$$

Man övar mycket på hur man räknar ut en av dessa tre när de andra två är kända. Exempel på de tre varianterna:

1) Beräkna andelen då delen och det hela är känt

Ex: Hur många procent är 10 av 40?

Lösning: $\frac{10}{40} = 0{,}25 = 25\%$

Det finns forskning som pekar på att detta är den enklaste varianten (Guiler, 1946), men olika undersökningar har gett olika resultat. Parker och Leinhardt (1995) fann i sin undersökning att det i stället var enklast att beräkna delen:

2) Beräkna delen då det hela och andelen är känt

Ex: Hur mycket är 10% av 80?

Lösning: $0{,}1 \times 80 = 8$

Parker och Leinhardt (1995) identifierar som sagt denna variant som den eleverna har enklast för. De motiverar det med att eleverna generellt har enklare för multiplikation än division, vilket man behöver använda sig av om man vill lösa de andra fallen med hjälp av en ekvation.

3) Beräkna det hela då delen och andelen är känt

Ex: 5 elever utgör 20% av klassen, hur många elever går det i klassen?

Lösning: $\frac{5}{0,2} = 25$

Ett alternativ är att man direkt ser att 20% är en femtedel och väljer att multiplicera med 5 i stället för att dividera, en metod som Lembke och Reys (1994) uppmärksammar.

När man lärt sig dessa tre varianter går man vidare till att beräkna ökningar och minskningar av olika slag, då även förändringsfaktorn introduceras.

4) Procenträkning i flera steg

Ex: En förening med 200 medlemmar ökar sitt medlemsantal med 5% varje år i tre år. Hur många medlemmar är det efter tre år?

Lösning: $200 \times 1{,}05 \times 1{,}05 \times 1{,}05 \cong 232$

Avslutningsvis introduceras även begreppet procentenheter.

5) Procentenheter

Ex: Ett parti ökar i opinionsmätningarna från 4% till 6%. Med hur många procentenheter har det ökat?

Lösning: $6 - 4 = 2$ procentenheter

Procentenheter är ett begrepp som kan röra till det för många elever, något som uppmärksammas i Omfors (examensarbete, 2004) undersökning. Särskilt svårt blir det när man frågar om både procentuell ökning och ökning i procentenheter i samma uppgift. Procentenheter är egentligen det absolut enklaste att räkna på av dessa fem exempel, men det gäller samtidigt att hålla koll på alla olika begrepp.

Dessa fem typer av problem är de som kommer undersökas i denna studie:

- Beräkna andelen då delen och det hela är känt
- Beräkna delen då det hela och andelen är känt
- Beräkna det hela då delen och andelen är känt
- Procenträkning i flera steg
- Procentenheter

2.3 Procent i styrdokumenten

Procent dyker upp i läroplanen redan för årskurs 4–6 (Skolverket, 2011a) och följer sedan med under resten av skoltiden.
I årskurs 4–6 förekommer procent på två ställen under det centrala innehållet för matematik. Först under ”Taluppfattning och tals användning”:

- Tal i procentform och deras samband med tal i bråk- och decimalform

Sedan även under ”Samband och förändring”:

- Proportionalitet och procent samt deras samband

För årskurs 7–9 finns procent återigen med i det centrala innehållet under ”Samband och förändring”:

- Procent för att uttrycka förändring och förändringsfaktor samt beräkningar med procent i vardagliga situationer och i situationer inom olika ämnesområden

I gymnasiet nämns procent endast i ämnesplanen för Matematik 1 (Skolverket, 2011b), återigen i det centrala innehållet under ”Samband och förändring”:

- Fördjupning av procentbegreppet: promille, ppm och procentenheter

I senare kurser i gymnasiet nämns inte procent specifikt, men området ”Samband och förändring” finns med hela vägen till Matematik 5. Även om inte de senare kurserna handlar om att lära sig procenträkning används det såklart ofta även här.

2.4 Tidigare undersökningar om procent

Det finns mycket tidigare forskning om procenträkning i skolan. En stor del av den handlar om omvandlingar mellan decimal-, bråk- och procentform. Många resultat visar att elever har svårt för procentbegreppet. Vissa forskare menar att anledningen till att många elever har svårt för just procent är att man arbetar med decimal- och bråktal innan man lär sig om procent. Moss och Case (1999) genomförde en studie där man kastade om ordningen och hade en testgrupp som fick lära sig procent först. De jämfördes sedan med en kontrollgrupp som lärde sig ”i den vanliga ordningen”. Resultatet visade en klar förbättring hos testgruppen när det kom till omvandling mellan de olika formerna. Andra forskare menar helt enkelt att procentbegreppet är svårare att lära sig. Parker och Leinhardt (1995) menar att en anledning till att procent är så svårt är att det vid en första anblick kan se ut att betyda en mängd olika saker. Det är väldigt lätt att få en felaktig bild av procent som att det skulle vara ett decimal- eller bråktal. Ofta när man räknar med procent väljer man att först omvandla till decimalform för smidigare beräkningar. Detta kan leda till att man bara ser procent som ett annat sätt att skriva ett tal, ett sätt som dessutom verkar vara ganska dåligt eftersom man nästan alltid omvandlar det till någon annan form innan man räknar vidare. Svårigheterna kring omvandlingar är verkligen inget nytt, redan på 1930-talet forskades det kring varför elever har så svårt för detta (Brueckner, 1930, refererad i Parker och Leinhardt, 1995). Guiler (1946) undersökte bland annat de olika varianterna av delen, andelen och det hela (punkt 1–3 i avsnitt 2.2). Resultaten visar att det enklaste var att beräkna andelen följt av delen, men eleverna hade betydligt svårare för att beräkna det hela. Andra undersökningar har gett andra resultat – Parker och Leinhardt (1995) fann att eleverna har enklast för att beräkna delen och att de andra varianterna är ungefär lika svåra. De menar att detta beror på att man använder sig av multiplikation när man beräknar delen, medan man i de andra två fallen använder sig av division. I fallen med division är det viktigt att man ”gör rätt”, det vill säga att man måste veta vilket tal man ska dela med vilket. Det problemet slipper man vid multiplikation. Många elever får också problem när procenttalet är större än 100%. Exempelvis omvandlar elever 120% till 0,120 eller tror att 60 är 50% av 30. Samtidigt finns det annan forskning som visar helt andra resultat. Lembke och Reys (1994) intervjuade elever i olika åldrar och där menade eleverna i årskurs 9 att procent var enklare att förstå än decimal- och bråktal.

Wisenthal (1984) undersökte i sin mastersuppsats bland annat elevers förståelse för procentbegreppet och deras färdigheter när det kommer till att lösa problem med procent. Ett skriftligt test gjordes med över 200 elever med efterföljande intervjuer. Resultaten visade att många hade svårt med begreppet. Undersökningen visar att många elever har svårt för begreppet i sig och inte riktigt förstår vad %-tecknet betyder. Ofta svarar man i procent när man inte ska och vice versa.

Ex: Hur mycket är 80% av 100? Svar: 80%.

Ex: Hur många procent är 10 av 40? Svar: 25

Detta tyder på att eleverna vet hur de ska räkna men inte förstår vad de gör. Undersökningen visar även på problem när det är lite ”lurigare” tal. Bland annat har eleverna svårt för att räkna ut en viss procent x av ett tal N om x är större än N:

Ex: Vad är 70% av 50?

Många har även svårt när procenttalet är större än 100%, ett problem som vi känner igen från Parker och Leinhardt (1995). I Wisenthals undersökning tror de flesta att svaret måste bli mindre när man använder procent, oavsett hur många procent det är. Wisenthal kopplar samtliga dessa svårigheter till att eleverna saknar grundläggande kunskaper om att omvandla tal mellan olika former. Hennes undersökning visade att de flesta eleverna kunde göra om ett tvåsiffrigt procenttal till ett decimaltal, men problemet är att de inte vet vad de gör – de flyttar bara decimaltecknet till vänster om siffrorna. Det fungerar när det är två siffror men inte annars. När man i stället skulle göra om det till ett bråktal delar de flesta elever med 100 när det är tvåsiffriga tal, men vet inte hur de ska göra när det är tresiffriga tal. Många delar med 1000 och vissa även med 200, förmodligen för att de känner att de måste få ett tal som är mindre än 1 (Wisenthal, 1984).

Fler forskare har kommit fram till liknande resultat. Gay (1990) gjorde en undersökning med närmare 200 elever i årskurs 7 och 8 i USA och resultaten visar på liknande svårigheter som Wisenthal (1984) samt Parker och Leinhardt (1995) hittade. Det som sticker ut i denna undersökning är följande fråga:

- Är 87% av 10 större än, mindre än eller lika med 10? Förklara varför!

Att eleverna inte behöver räkna ut någonting gör att fokuset helt hamnar på förståelsen av begreppet. Många tror att det är större än 10, där de allra flesta motiverar det med olika förklaringar som alla bygger på att 87 är större än 10 och därför måste också 87% av 10 vara större än 10.

Omfors (2004) gjorde i sitt examensarbete en undersökning med 75 elever i årskurs 9 i Sverige där syftet bland annat var att ta reda på hur eleverna förstår de olika sätten att ange procent och vilka de vanligaste felen vid procentberäkning är. Resultaten visar att det finns svårigheter i att göra om procenttal till både bråk- och decimalform, vilket vi känner igen från flera av de andra undersökningarna ovan. De flesta löser uppgifter med ”enkla” bråk- eller decimaltal men många har svårt när det är ”svårare” tal. Det tyder på att eleverna inte vet hur de ska göra utan bara har lärt sig vissa omvandlingar, som att 50% är ½ eller 0,5. Ett annat vanligt fel eleverna gör är att de använder sig av fel bas när de ska jämföra priser. Eleverna har även generellt svårt för att räkna ut procentuell ökning i flera steg och för att använda sig av procentenheter.

2.5 Teorier om inlärning

En vanlig debatt kring matematikundervisning är den om procedurell och konceptuell kunskap, eller utförande och förståelse. Ofta ställs dessa mot varandra och tävlar om utrymmet i undervisningen. Behöver eleverna verkligen förstå hur och varför en algoritm fungerar, räcker det inte att kunna använda den? Å andra sidan, vad är det för mening med att lära sig en algoritm utantill om man inte förstår vad det är man gör? Jeremy Kilpatrick, Jane Swafford och Bradford Findell skrev 2001 *Adding it up: Helping Children Learn Mathematics* för National Research Council där de använder sig av liknande begrepp (*procedural fluency* och *conceptual understanding*). De menar att det krävs en viss grad av skicklighet i att använda procedurer för att förstå många matematiska begrepp, samtidigt som användningen av procedurer kan hjälpa till att stärka förståelsen. De menar alltså att man inte bör ställa begreppen mot varandra utan snarare se det som att de är sammanvävda och att båda är viktiga. (Kommer refereras till som Kilpatrick m.fl., 2001). Andra forskare problematiserar själva tolkningen av begreppen. Den definition av begreppen som de flesta utgår ifrån kommer från Hiebert och Lefevre (1986, refererad i Star, 2005). De definierar konceptuell kunskap på följande vis:

> *Kunskap som är rik på relationer. Det kan ses som ett sammanhängande nät av kunskap, ett nätverk i vilket de länkade relationerna är lika framträdande som de diskreta bitarna av information. Relationer genomsyrar individuella fakta och påståenden så att alla bitarna av information är länkade till något nätverk* (Hiebert och Lefevre, 1986, citerade i Star, 2005, s.406, egen översättning).

Procedurell kunskap definieras som:

> *En typ av procedurell kunskap är en bekantskap med de individuella symbolerna hos systemet och med de syntaktiska konventionerna för acceptabla konfigurationer av symboler. Den andra typen av procedurell kunskap består av regler eller procedurer för att lösa matematiska problem. Många av de procedurer studenter besitter är förmodligen kedjor av recept för att manipulera symboler* (Hiebert och Lefevre, 1986, citerade i Star, 2005, s.406, egen översättning).

Star (2005) menar att definitionerna gör att procedurell kunskap blir ytlig medan konceptuell kunskap blir djup och därmed ”bättre”. Han problematiserar detta och menar att även procedurell kunskap kan vara djup, exempelvis användning av heuristik. Detta är något som definitionerna inte tar hänsyn till, vilket Hiebert och Lefevre (1986, refererade i Star, 2005) även tar upp själva. Star ger exempel på ekvationer som går att lösa med standardalgoritmer, där det också finns andra metoder som inte alltid fungerar men som passar bättre i just det fallet. Att kunna välja metod utifrån hur uppgiften ser ut visar på flexibilitet, en egenskap som Star menar att man ofta bortser ifrån. Detta är exempel på en djup procedurell kunskap (Star, 2005).

När jag analyserar resultaten från denna studie kommer jag att utgå ifrån Kilpatrick m.fl. (2001) och deras begrepp som jag nämnde tidigare. De använder uttrycket *mathematical proficiency* för att beskriva vad de anser krävs för att lära sig matematik på ett framgångsrikt sätt. De delar upp begreppet i fem olika trådar som alla hänger ihop med varandra på ett eller annat sätt:

- Conceptual understanding – förståelse av matematiska koncept, operationer och relationer.

- Procedural fluency – förmåga att utföra procedurer flexibelt, noggrant, effektivt och på lämpligt sätt.

- Strategic competence – förmåga att formulera, representera och lösa matematiska problem.

- Adaptive reasoning – kapacitet för logiskt tänkande, reflektion, förklaring och rättfärdigande.

- Productive disposition – benägenhet att se matematik som vettig, användbar och meningsfull, tillsammans med en tro på arbetsamhet och sin egen effektivitet.

Även om Kilpatrick m.fl. (2001) är tydliga med att alla fem trådarna är sammanhängande kommer jag att fokusera på de första två. De övriga tre är inte på något sätt mindre viktiga och det är viktigt att komma ihåg att det finns inslag av dessa tre även när man pratar om de första två. Brister i *procedural fluency* kan naturligtvis hänga ihop med brister i *strategic competence*, och på samma sätt kan man koppla ihop *conceptual understanding* med *adaptive reasoning*, men jag har valt att fokusera på de förstnämnda då jag anser att de beskriver det jag är ute efter på ett bättre sätt. Jag menar att felaktiga svar på uppgifterna i min diagnos i huvudsak beror på två olika saker. Antingen vet eleverna inte vilken metod de ska använda sig av eller hur man använder den (*procedural fluency*) eller så saknar de förståelse för begreppet i sig (*conceptual understanding*). Det är också dessa begrepp som är motsvarigheten till konceptuell och procedurell kunskap som vi pratat om tidigare. Därför kommer dessa begrepp att användas för att analysera resultaten från undersökningen. De presenteras närmare nedan.

2.5.1 Konceptuell förståelse

I denna studie kommer jag referera till *conceptual understanding* som konceptuell förståelse eller bara förståelse. Konceptuell förståelse handlar om ett integrerat och funktionellt grepp om matematiska idéer:

- Man kan mer än isolerade fakta och metoder.
- Man förstår varför en matematisk idé är viktig och i vilka sammanhang den är användbar.
- Man har organiserat sin kunskap till en helhet som tillåter att man lär sig nya idéer genom att koppla samman dem med tidigare kunskap.

Detta stöder också bevarande av kunskap. Eftersom kunskapen är sammanhängande är det enklare att minnas och använda de kunskaper man har. Det är också enklare att återskapa kunskap som glömts bort. Om man verkligen har förstått en metod är det inte troligt att man minns den felaktigt. Ett stort tecken på god konceptuell förståelse är att kunna representera en matematisk situation på olika sätt och att veta hur olika representationer kan vara användbara för olika syften. Det är viktigt att kunna se hur de olika representationerna hänger ihop, hur de är lika och hur de skiljer sig. Kunskap som man lärt sig genom förståelse utgör en grund för att få mer kunskap och lösa nya och annorlunda problem. När eleven har uppnått konceptuell förståelse inom ett område i matematiken ser de sambanden mellan koncepten och procedurerna och kan argumentera för varför vissa fakta är konsekvenser av andra (Kilpatrick m.fl., 2001).

2.5.2 Procedurell fluency

I denna studie kommer jag referera till *procedural fluency* som procedurell fluency. Procedurell fluency handlar om kunskap om procedurer, när och hur de bör användas, och förmågan att utföra dem på ett flexibelt och effektivt sätt. Elever behöver vara effektiva och exakta när de utför grundläggande beräkningar med heltal utan att alltid behöva ta hjälp av tabeller eller andra hjälpmedel. De behöver också kunna addera, subtrahera, multiplicera och dividera flersiffriga tal på en rimlig nivå, både i huvudet och med papper och penna. Procedurell fluency hänger ihop med kunskap om att kunna uppskatta resultaten av en procedur. Nu för tiden är det inte lika viktigt att eleverna lär sig att göra beräkningar med stora tal för hand, men det finns många situationer i vardagen som kräver kunskap om algoritmer för att beräknas.

Utöver att ge verktyg för beräkningar är vissa algoritmer viktiga som koncept i sig själva, vilket visar på sambandet mellan konceptuell förståelse och procedurell fluency. Elever behöver inse att procedurer kan utvecklas till att lösa hela klasser av problem, inte bara enstaka uppgifter. Genom att studera algoritmer som ”generella procedurer” kan eleverna få insikt i att matematiken är välstrukturerad och att en noggrant utvecklad procedur kan vara ett kraftfullt verktyg för att lösa rutinuppgifter.
Det är viktigt att en procedur är effektiv, används på rätt sätt och resulterar i korrekta svar. Effektiviteten och att det används på rätt sätt kan förbättras genom att öva, men eleverna behöver också kunna använda procedurerna flexibelt. Alla situationer är inte likadana. Att exempelvis använda papper och penna för en algoritm till att lösa alla multiplikationer är varken nödvändigt eller effektivt (Kilpatrick m.fl., 2001).

3 Metod

I detta avsnitt kommer jag att diskutera hur jag tog fram uppgifterna till diagnosen. Urval, genomförande, forskningsetik och trovärdighet kommer diskuteras samt en beskrivning av hur jag analyserat det insamlade materialet.

3.1 Kvantitativ studie

Jag har valt att använda mig av en diagnos med åtta uppgifter som eleverna besvarar.

Utgångspunkten för uppgifterna har varit de fem punkter som nämns i avsnitt 2.2:

- Beräkna andelen då delen och det hela är känt
- Beräkna delen då det hela och andelen är känt
- Beräkna det hela då delen och andelen är känt
- Procenträkning i flera steg
- Procentenheter

Jag har utgått ifrån en lärobok för årskurs 8 (Cederqvist m.fl., 2013) för att få bättre koll på vilken typ av uppgifter eleverna arbetar med samt för att kunna göra uppgifter med rimlig svårighetsgrad. Utifrån det har jag sedan omformulerat uppgifter från boken, med målet att uppgifterna ska leda till att eventuella missuppfattningar visar sig. Missuppfattningar kring procentbegreppet i sig behöver inga särskilda uppgifter. Det räcker att uppgifterna handlar om procenträkning för att dessa missuppfattningar ska visa sig. Det jag framför allt har märkt från mina VFU-perioder är att elever väldigt sällan ställer upp ekvationer när de löser problem. Anledningen kan vara att de helt enkelt inte vet hur de ska göra, men det kan också vara att eleverna tycker att uppgiften är tillräckligt enkel för att lösa utan någon ekvation. Detta kan ofta leda till att enkla misstag görs för att man räknar ut fel sak. Av det jag har sett tidigare är det vanligaste alternativet att använda sig av enprocentmetoden i stället för att ställa upp en ekvation. Det leder till att det blir fler steg man behöver beräkna och ibland leder det till att man glömmer bort vad det egentligen är man vill göra. Framför allt uppgift 5–8 i diagnosen är formulerade så att detta problem skulle kunna dyka upp.
Den enda missuppfattningen som jag inte kände igen från de tidigare undersökningarna jag läst är den som handlar om när procenttalet är större än det hela. Wisenthal (1984), Gay (1990) samt Parker och Leinhardt (1995) har alla uppmärksammat denna missuppfattning och även om jag aldrig märkt av den själv har jag valt att formulera uppgift 1 så att detta problem skulle kunna komma fram.
De åtta uppgifterna är fördelade så att 1–2 frågor berör var och en av de fem punkter som listats ovan.

3.2 Urval

Studien genomfördes på en högstadieskola i Västra Götaland. Totalt 64 elever från tre olika klasser har deltagit i studien, en årskurs 8 och två årskurs 9. En grundförutsättning för resultatens trovärdighet har varit att eleverna som gör diagnosen ska vara på plats i skolan, och på grund av rådande omständigheter där många klasser har distansundervisning i kombination med en relativt kort tidsram för när studien behöver genomföras har urvalet begränsats. Distansundervisningen påverkar även på så vis att de flesta klasserna har många prov i andra ämnen när de väl är i skolan. För att resultaten från denna undersökning inte ska påverkas av sådana faktorer som att eleverna helt enkelt är trötta från andra prov har de tre klasserna valts för att resultatet ska bli så trovärdigt som möjligt utifrån den utgångspunkten. Slutligen gör ovan nämnda förutsättningar att det i princip har begränsats till ett tillfälle för varje klass att genomföra studien, så det är de elever som varit närvarande vid den lektion diagnosen genomfördes som deltagit. Inga elever har deltagit vid senare tillfälle.

3.3 Genomförande

En pilotstudie genomfördes där fem elever från samma klass deltog. Eleverna går i årskurs 9 på samma skola som studien senare genomfördes. Deras klass deltog inte senare i studien utan gjorde enbart pilotstudien. Resultaten från pilotstudien visade att uppgifterna låg på en rimlig nivå rent svårighetsmässigt, de fem eleverna låg mellan 5–7 korrekta svar av 9 möjliga och det var ingen fråga som stack ut som varken för svår eller för enkel. Dessutom var det flera missuppfattningar som visade sig på flera olika uppgifter. Jag valde därför att inte ändra någonting från pilotstudien till den diagnos som sedan användes. Pilotstudien var alltså densamma som den diagnos som finns bifogad i detta arbete.

Studien genomfördes med elever som var på plats i skolan och fick diagnosen på ett papper. Utrymme för svar och lösningar fanns på samma papper och samtliga elever har svarat på detta papper. Till sin hjälp hade eleverna tillgång till miniräknare.
Jag själv var inte på plats i skolan när diagnosen genomfördes. Eleverna gjorde den under en matematiklektion med sina ordinarie lärare. De lärarna samlade sedan in svaren och när alla tre klasserna genomfört diagnosen åkte jag till skolan och hämtade materialet.

3.4 Forskningsetik

Eleverna som deltagit i studien har informerats om vad deras roll i studien är och att det är frivilligt att delta i undersökningen. Alla svar jag samlat in har varit anonyma så inga personuppgifter har samlats in. De svar som samlats in har endast jag tagit del av och kommer endast att användas till denna studie. Skolans namn nämns inte och klasserna nämns inte vid sina riktiga namn.

3.5 Trovärdighet

Resultatens trovärdighet beror på hur hög undersökningens validitet och reliabilitet är. Begreppen kommer förklaras och diskuteras här.

3.5.1 Validitet

Enkelt sammanfattat handlar validitet om att mäta rätt sak (Barmark & Djurfeldt, 2015). I denna studie blir det en fråga om vad som egentligen är en missuppfattning och vad som är något annat. När resultaten redovisas kommer de felaktiga svaren vara uppdelade i två

kategorier, missuppfattningar och andra typer av fel. Frågeställningarna som jag ska försöka besvara i denna studie påverkas därför av vad jag väljer att klassa som en missuppfattning och vad jag klassar som en annan typ av fel. Det påverkar inte den andra frågeställningen, ”Hur vanliga är dessa missuppfattningar?”, men det påverkar den första frågeställningen, ” Vilka missuppfattningar visar högstadieelever vid procenträkning?”. Vilka missuppfattningar som finns blir helt och hållet beroende av vad jag anser vara en missuppfattning eller inte, vilket gör att andra kanske inte håller med. De svar som jag har klassat som andra typer av fel kommer nämnas i diskussionsdelen.
Att några elever har besvarat uppgifter felaktigt utan att redovisa sin lösning påverkar den andra frågeställningen, den om hur vanliga missuppfattningarna är. Beroende på hur eleverna har svarat har jag ibland tolkat det som missuppfattningar och ibland inte. Jag diskuterar detta närmare i avsnitt 3.6.1. Även de fall där eleverna valt att inte svara på en uppgift kan naturligtvis grunda sig i missuppfattningar som även de faller bort. Detta leder tyvärr till att validiteten kring den frågeställningen inte blir så hög som jag hade önskat.

3.5.2 Reliabilitet

En hög grad av reliabilitet innebär att vi får samma resultat om vi upprepar mätningarna. Om samma undersökning görs med samma deltagare vid ett senare tillfälle bör vi få samma svar, förutsatt att vi kan anta att elevernas kunskaper inte har förändrats mellan tillfällena (Barmark & Djurfeldt, 2015). Bristande reliabilitet handlar ofta om att frågor eller svarsalternativ är otydliga eller svåra att besvara, som att flera alternativ passar bra men man får bara välja ett. I min studie har jag i efterhand märkt att uppgift 4 inte blev så bra som jag hade tänkt mig (mer om det i avsnitt 3.6.1). Reliabiliteten för den uppgiften är därför låg. I övrigt anser jag uppgifterna i diagnosen vara tydliga och några svarsalternativ finns inte. Alltså har studien hög reliabilitet om vi bortser från uppgift 4.

3.6 Analys

Jag har rättat diagnoserna uppgift för uppgift, klass för klass. Jag började med årskurs 8, uppgift 1 och fortsatte sedan med 9A uppgift 1 och 9B uppgift 1. Sedan gjorde jag likadant med uppgift 2 och så vidare. Detta gjorde jag för att det inte skulle bli någon skillnad i hur jag bedömer olika svar på samma uppgift. Samtidigt som jag rättade fyllde jag i svaren i tabeller med rätta svar, missuppfattningar, andra typer av fel samt hur många som inte svarat på uppgiften. I de fall där eleverna svarat fel skrev jag ner deras lösning oavsett om jag klassade det som en missuppfattning eller en annan typ av fel. När jag rättat klart alla svar på en uppgift gick jag sedan igenom de felaktiga lösningarna och analyserade dem innan jag gick vidare till nästa uppgift.

Jag har övervägt att ta med de svar jag inte kan tolka samt de elever som valt att inte svara på vissa uppgifter i beräkningen av hur vanliga missuppfattningarna är. Det skulle innebära att förekomsten av varje missuppfattning hade presenterats i ett intervall, exempelvis att missuppfattning A förekommer hos 9–22% av eleverna. Fördelen med det hade varit att det skulle ge en bättre bild av verkligheten. Dels eftersom man kan anta att många av de som inte svarat har någon missuppfattning kring begreppet, dels eftersom det är svårt att generalisera resultaten från denna studie om det mäts exakt. Nackdelen är att det blir väldigt stora intervall som kanske inte säger så mycket, framför allt för ovanligare missuppfattningar. Jag har därför valt att bara utgå ifrån de svar jag faktiskt kan tolka. Det innebär att de flesta missuppfattningarna förmodligen är något vanligare än vad resultaten från denna studie visar.

3.6.1 Vad är en missuppfattning?

En stor del av resultaten bygger på mina tolkningar av vad en missuppfattning är. Från början var tanken att dela upp det i konceptuella och procedurella missuppfattningar, men jag insåg snabbt att det blir väldigt svårt att prata om procedurella missuppfattningar. Är det en missuppfattning om man använder fel metod? Är det en missuppfattning om man använder en metod på fel sätt? Båda fallen visar en bristande procedurell fluency, men kan man kalla det för missuppfattningar? Det blev för svårt att hitta en modell för hur jag skulle avgöra detta och därför har jag valt att avgränsa frågeställningarna till att endast handla om konceptuella missuppfattningar. Svaren kommer fortfarande att analyseras utifrån de två begreppen, men svar som brister i procedurell fluency har jag tolkat som ”annat fel” och ingen missuppfattning. Jag redogör här för hur jag har resonerat:

1) Svar i fel form

När eleverna har angett ett svar i fel form har jag klassat det som en missuppfattning. Exempel på detta är från uppgift 1 där flera elever har löst uppgiften på rätt sätt men svarat 28% när svaret ska vara 28. Ett annat exempel är från uppgift 3 där flera elever har svarat 0,52 när svaret ska vara 52%.

2) Orimliga svar

Svar som jag anser vara orimliga har jag valt att klassa som en missuppfattning. Ofta saknar dessa svar en lösning och det är svårt att veta hur eleverna har kommit fram till sina svar. I många fall kan man ändå sätta någon slags gräns för vad som är rimligt. Som exempel kan vi ta uppgift 1, ”Vad är 70% av 40”. Har man förstått procentbegreppet inser man då att svaret måste vara mindre än 40 och samtidigt större än 20, då jag förutsätter att eleverna vet att hälften av 40 är 20. Svar som inte ligger i detta intervall klassar jag som orimliga och därmed även som en missuppfattning. På andra uppgifter är det svårare att dra en tydlig gräns, vilket leder till att det kan uppstå gränsfall. De svar som är gränsfall diskuteras närmare i avsnitt 5.

3) Rimliga svar

Svar som är felaktiga men ändå rimliga har jag klassat som ”annat fel” och alltså inte som missuppfattningar. Exempel på detta är uppgift 8, där rätt svar är 27,1%. Elever som svarat 25% utan att skriva ned sin lösning hamnar under ”annat fel”.

4) Fel metod

Min tolkning är att det inte är en missuppfattning i sig att använda fel metod, i alla fall inte en konceptuell missuppfattning. Beroende på hur svaret ser ut kan det ändå ha klassats som en missuppfattning. Samma resonemang som ovan gäller även när eleverna skrivit ned sina lösningar – orimliga svar tolkas som missuppfattningar, rimliga svar tolkas som ”annat fel”. Den tolkning jag känner störst behov av att motivera är den jag har gjort i de fall där eleverna har använt sig av fel metod och sen valt att inte skriva något svar. Ett exempel på detta är från uppgift 3, ”Hur många procent är 13 av 25?”. En elev har då skrivit $13 \times 0{,}25 =$ men inte skrivit något svar. Detta tolkar jag inte som en missuppfattning utan snarare tvärtom. Min tolkning är att anledningen till att ett svar saknas är att eleven inser att svaret inte kan stämma, vilket tyder på en bra förståelse för begreppet. Procedurell fluency saknas, men det är ingen konceptuell missuppfattning.

5) Räknefel

När eleverna har använt rätt metod men räknat fel har jag utgått från samma princip som ovan. Det är fortfarande rimligheten i svaret som i första hand avgör om jag klassat det som en missuppfattning eller inte. Här har jag dock gjort ett undantag som är värt att nämna. På uppgift 2 har några elever svarat 200 och 20,000 när det rätta svaret är 2000. De har använt sig av rätt metod men skrivit ut en nolla för lite/mycket. Det gör att svaren egentligen hamnar utanför gränsen för vad som är ett rimligt svar, men min tolkning här är att de helt enkelt har skrivit fel. Det är slarvigt, men inget jag kan tolka som en missuppfattning.

6) Svarar på fel sak

På uppgift 7 ska man räkna ut hur många procent priset på en tröja har sänkts med. Vissa elever har i stället vänt på frågan och svarat hur många procent av ursprungspriset tröjan kostar nu. Detta tolkar jag som att eleverna helt enkelt inte har läst frågan ordentligt. Även här är det slarvigt och svaret blir fel, men det är ingen missuppfattning och klassas därför som ”annat fel”.

4 Resultat

I detta avsnitt presenteras resultaten för varje klass där svaren är uppdelade i rätta svar, missuppfattningar samt andra typer av fel. Uppgifterna presenteras och felaktiga svar presenteras kort innan de diskuteras närmare i avsnitt 5.

4.1 Sammanställning

I tabellerna nedan presenteras svaren från de olika klasserna. Jag har valt att kalla klasserna för 8, 9A och 9B. I och med att det är högstadieklasser skulle jag kunna slå ihop niorna till en grupp och presentera deras resultat i en gemensam tabell, eftersom det inte finns olika programval att ta hänsyn till. På så sätt hade jag kunnat jämföra åttornas resultat med niornas för att se hur stor skillnaden är. Det visade sig dock att det skiljde nästan lika mycket mellan de två niorna som det gjorde mellan åttorna och en ”gemensam grupp” nior, så jag har valt att presentera varje klass för sig ändå. Slutligen presenteras det sammanlagda resultatet för samtliga 64 elever samt ett diagram där jag delat in missuppfattningarna i olika grupper.

Uppgift 4 blev inte som jag hade tänkt mig. Det diskuteras närmare i avsnitt 5.2.4, men det bör nämnas redan här att resultaten från uppgift 4a) och 4b) inte är trovärdiga.

Klass 8				
Uppgiftsnummer:	Rätt svar	Missuppfattning	Annat fel	Inget svar
1	16 (62%)	7 (27%)	1 (4%)	2 (8%)
2	19 (73%)	1 (4%)	4 (15%)	2 (8%)
3	16 (62%)	4 (15%)	1 (4%)	5 (19%)
4a	22 (85%)	0	0	4 (15%)
4b	4 (15%)	5 (19%)	0	17 (65%)
5	17 (65%)	3 (12%)	1 (4%)	5 (19%)
6	16 (62%)	0	4 (15%)	6 (23%)
7	17 (65%)	0	4 (15%)	5 (19%)
8	7 (27%)	10 (38%)	5 (19%)	4 (15%)

Tabell 1: Resultat klass 8

Klass 9A				
Uppgiftsnummer:	Rätt svar	Missuppfattning	Annat fel	Inget svar
1	15 (88%)	2 (12%)	0	0
2	12 (71%)	2 (12%)	3 (18%)	0
3	10 (59%)	4 (24%)	2 (12%)	1 (6%)
4a	14 (82%)	0	3 (18%)	0
4b	11 (65%)	3 (18%)	0	3 (18%)
5	17 (100%)	0	0	0
6	13 (76%)	0	2 (12%)	2 (12%)
7	12 (71%)	0	3 (18%)	2 (12%)
8	3 (18%)	8 (47%)	3 (18%)	3 (18%)

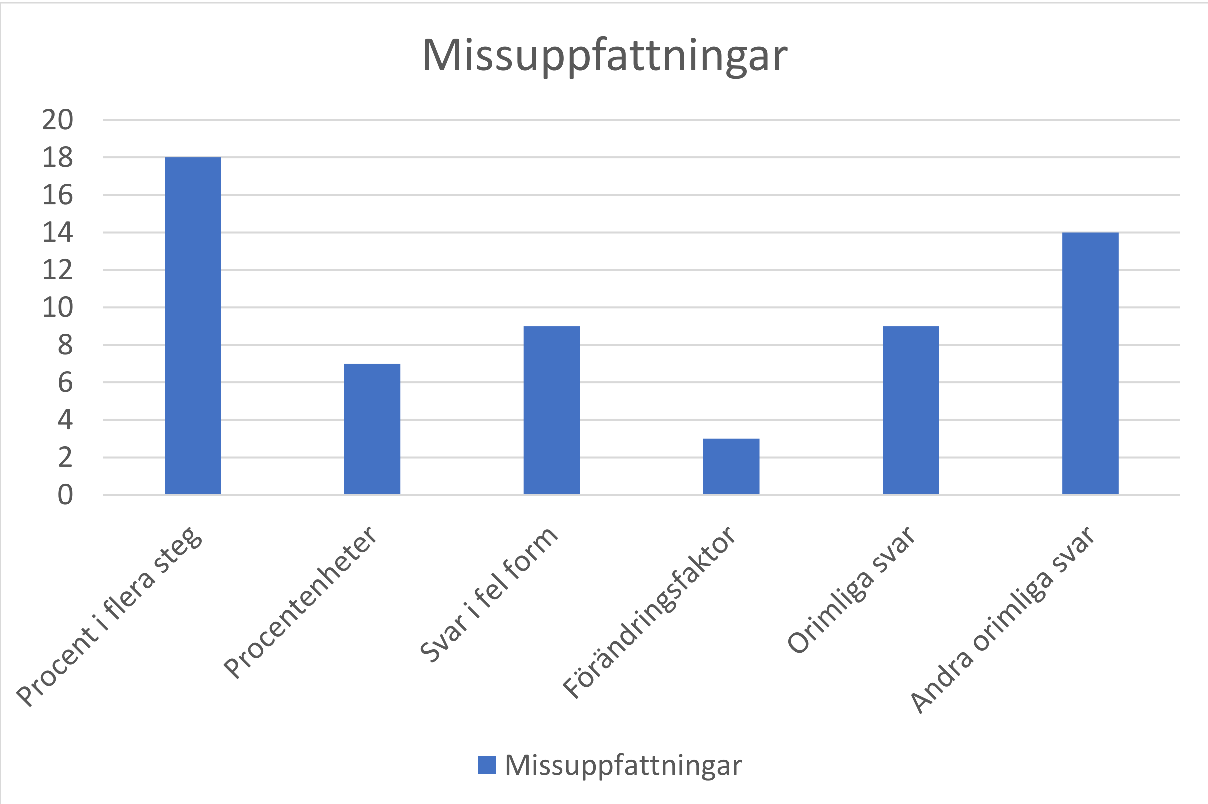
Tabell 2: Resultat klass 9A

Klass 9B				
Uppgiftsnummer:	Rätt svar	Missuppfattning	Annat fel	Inget svar
1	21 (100%)	0	0	0
2	16 (76%)	1 (5%)	3 (14%)	1 (5%)
3	18 (86%)	1 (5%)	0	2 (10%)
4a	15 (71%)	0	1 (5%)	5 (24%)
4b	10 (48%)	4 (19%)	0	7 (33%)
5	18 (86%)	1 (5%)	2 (10%)	0
6	15 (71%)	0	2 (10%)	4 (19%)
7	11 (52%)	0	5 (24%)	5 (24%)
8	7 (33%)	5 (24%)	6 (29%)	3 (14%)

Tabell 3: Resultat klass 9B

Alla 64 elever				
Uppgiftsnummer:	Rätt svar	Missuppfattning	Annat fel	Inget svar
1	52 (81%)	9 (14%)	1 (2%)	2 (3%)
2	47 (73%)	4 (6%)	10 (16%)	3 (5%)
3	44 (69%)	9 (14%)	3 (5%)	8 (13%)
4a	51 (80%)	0	4 (6%)	9 (14%)
4b	25 (39%)	12 (19%)	0	27 (42%)
5	52 (81%)	4 (6%)	3 (5%)	5 (8%)
6	44 (69%)	0	8 (13%)	12 (19%)
7	40 (63%)	0	12 (19%)	12 (19%)
8	17 (27%)	23 (36%)	14 (22%)	10 (16%)

Tabell 4: Sammanlagt resultat



Figur 1: Missuppfattningar

4.2 Presentation av uppgifter och felaktiga svar

4.2.1 Uppgift 1

Vad är 70% av 40? (Rätt svar 28)

Fem elever gör rätt men svarar i procent (28%).
En elev svarar $\frac{40}{0,7} = 57$ och en elev beräknar $\frac{70}{40} = 1,75$ och svarar 17,5%.
Två elever har kommit fram till 28 på korrekt sätt men sen tagit $40 - 28 = 12$.
En elev har gjort rätt men räknat fel, $4 \times 7 = 21$.

4.2.2 Uppgift 2

3% är 60 kronor. Hur mycket är 100%? (Rätt svar 2000kr)

Tre elever har gjort på rätt sätt men räknat fel, två av dem har svarat 200 och en har svarat 20,000.
En elev har försökt addera ihop till 100% genom att beräkna vad 30% är och sedan ta 30%+30%+30%+10%. Eleven gör rätt men räknar fel och får svaret 2200.
En elev har beräknat $60 \times 0,3 \times 100 = 1800$.
Fyra elever har beräknat $60 \times 0,03 \times 100$.
Tre elever har svarat utan lösning, två av dem har svarat 60 och en har svarat 5820.

4.2.3 Uppgift 3

Hur många procent är 13 av 25? (Rätt svar 52%)

Tre elever gör på rätt sätt men svarar 0,52.
Tre elever beräknar $\frac{25}{13} = 1,92$. En av dem svarar 1,92 medan de andra omvandlar till procent, en av dem till 19% och en 190%.
Två elever beräknar $25 \times 0,13 = 3,25$ och en elev $13 \times 0,25$.
En elev beräknar $\frac{12}{25} = 0,48$ och svarar 48%.
Två elever har svarat utan lösning, en av dem svarar 12 och den andra svarar 55%.

4.2.4 Uppgift 4

På en skola går det 350 elever. En dag har 20% av eleverna svarta tröjor på sig. Nästa dag har 30% av eleverna svarta tröjor på sig. Hur stor är ökningen i
a) Procentenheter (Rätt svar 10)
b) Procent (Rätt svar 50%)

Här kommer jag bara att redovisa svar från fråga b). Mer om det i avsnitt 5.2.4.

En elev beräknar $\frac{10}{350} = 0,03$ och svarar 3%.

Elva elever svarar utan att skriva lösning. Åtta av dem svarar 10%, två svarar 100%, en svarar 110% och en svarar 6%.

4.2.5 Uppgift 5

En chokladkaka som väger 200 gram innehåller 60% kakao. Hur många gram kakao innehåller den? (Rätt svar 120 gram)

En elev gör på rätt sätt men svarar i procent (120%).
En elev beräknar $0{,}4 \times 200 = 80$, en elev beräknar $\frac{200}{60} = 3{,}33$ och en elev beräknar $\frac{60}{200} = 0{,}3$ och svarar 30 gram.
Tre elever svarar utan att skriva lösning. De svarar 60, 110 samt 125.

4.2.6 Uppgift 6

På en skola är det 84 elever som har husdjur. Det är 40% av alla elever på skolan. Hur många elever går det på skolan? (Rätt svar 210)

Två elever beräknar $\frac{84}{40} \times 84$.
En elev försöker addera 60% av 84, alltså $84 + 84 \times 0{,}6$.
Två elever försöker addera ihop till 100% genom att ta 40%+40%+20%. Båda gör räknefel och får svaren 190 samt 230.
Två elever svarar utan att skriva lösning. De svarar 134 samt 214.

4.2.7 Uppgift 7

En tröja kostar 350 kronor när det är rea. I vanliga fall kostar tröjan 500 kronor. Med hur många procent har man sänkt priset? (Rätt svar 30%)

Åtta elever har vänt på uppgiften och svarat 70%.
Fyra elever svarar utan att skriva lösning. Två av dem svarar 25%, två svarar 35%.

4.2.8 Uppgift 8

Du köper en bil för 10,000 kronor. Varje år minskar värdet på bilen med 10%. Med hur många procent har värdet minskat efter 3 år? (Rätt svar 27%)

Arton elever svarar att minskningen är 30%.
Fyra elever försöker sig på att ta $(\text{förändringsfaktorn})^3$ men väljer fel faktor, tre av dem använder 0,1 och en använder 0,99.
En elev gör på rätt sätt men räknar fel.
En elev svarar 50% utan lösning.
En elev svarar 25% utan lösning.

5 Diskussion

5.1 Metod

Valet mellan att göra en kvantitativ studie i form av en diagnos eller en kvalitativ studie i form av intervjuer bestäms av vad det är man är ute efter. Då syftet med denna studie är att ta reda på vilka missuppfattningar som finns blir det naturligt att välja en kvantitativ studie för att få så mycket underlag som möjligt. Hade möjligheten funnits att göra både en diagnos och intervjuer hade det varit ännu bättre, men den begränsade tiden gör att det blir väldigt svårt att hinna med det. Framför allt hade jag velat intervjua de elever som svarat fel men inte redovisat sina lösningar och de elever som inte svarat alls.
När det kommer till felaktiga svar utan lösningar går det ibland att dra vissa slutsatser, ibland inte. I de fall där eleverna inte svarat alls kan inga slutsatser dras. Svaret på frågeställningen ”Hur vanliga är dessa missuppfattningar?” blir därmed eventuellt något missvisande.

5.2 Resultat

Resultaten från studien diskuteras här utifrån begreppen från Kilpatrick m.fl. (2001). Diskussionen är indelad i de fem typer av problem som presenteras i avsnitt 2.2. En stor del av diskussionen kommer handla om hur jag valt att tolka olika svar, något som diskuteras i detalj i avsnitt 3.6.1.

5.2.1 Räkna ut andelen

De uppgifter som handlar om att räkna ut andelen är uppgift 3 och 7.

På uppgift 3 är det tre elever som löser uppgiften korrekt men svarar 0,52 i stället för 52%. Eleverna lär sig att man beräknar andelen genom att ta $\frac{\text{delen}}{\text{det hela}}$, i det här fallet $\frac{13}{25} = 0{,}52$. Om man då inte riktigt förstår vad det är man gör utan bara har lärt sig metoden är det lätt att man tror att man är klar där. De här tre eleverna visar att de har procedurell fluency när det kommer till att beräkna andelen, men saknar konceptuell förståelse kring begreppet.
Tre elever vänder på problemet och beräknar $\frac{25}{13} = 1{,}92$ vilket tyder på bristande procedurell fluency. En av dem svarar 1,92 medan de andra svarar 19% och 190%. Eleven som svarar 190% visar förståelse för hur man omvandlar tal från decimalform till procent, samtidigt som svaret tyder på att förståelsen för procentbegreppet inte finns där. Finns förståelsen inser man att inget av svaren är rimliga.
Två elever beräknar $25 \times 0{,}13 = 3{,}25$ och även här tolkar jag det som att eleverna inte riktigt förstår procentbegreppet.
En elev har skrivit $13 \times 0{,}25 =$ men sen inte skrivit något svar. Detta är ett ganska sällsynt exempel där jag menar att eleven visar konceptuell förståelse men inte har procedurell fluency. Eleven förstår begreppet tillräckligt bra för att inse att svaret blir orimligt, men vet inte hur man löser uppgiften och väljer därför att inte svara. Detta tolkar jag alltså inte som en missuppfattning.

Tre elever har gjort andra typer av fel. En av dem har beräknat $\frac{12}{25} = 0{,}48$ och svarat 48%. Det tolkar jag som att eleven har läst eller skrivit fel och är därför ingen missuppfattning. De andra två har bara skrivit svar. En av dem har svarat 12, vilket jag har tolkat som en missuppfattning. Den andra har svarat 55%, vilket eventuellt kan grundas i en missuppfattning men ingen slutsats kan dras när lösningen saknas.

På uppgift 7 kan jag inte tolka några av de felaktiga svaren som missuppfattningar.
Tolv elever har besvarat uppgiften felaktigt. Åtta elever har gjort på rätt sätt men svarat 70% i stället för 30%, alltså svarat på fel sak. Detta tolkar jag som att de missförstått uppgiften eller inte läst den ordentligt, men inte som att det finns en missuppfattning kring begreppet. Övriga fyra redovisar inte sin lösning utan skriver bara svar, två skriver 25% och två skriver 35%. Man kan, precis som i alla uppgifterna, anta men inte veta att detta grundar sig i en missuppfattning.

5.2.2 Räkna ut delen

De uppgifter som handlar om att räkna ut delen är uppgift 1 och 5.

På uppgift 1 är det fem elever som rör ihop det med begreppet och löser uppgiften korrekt men svarar i procent (28%, korrekt svar 28). Jämfört med uppgift 3, där tre elever svarade i decimalform när de skulle svarat i procent, är det alltså fler som gör detta liknande misstag här. Precis som i det fallet tyder detta på att eleverna behärskar metoden och har procedurell fluency, men har missuppfattningar kring begreppet och alltså saknar den konceptuella förståelsen.
En elev har gjort beräkningen $\frac{70}{40} = 1{,}75$ och sen svarat 17,5%. En elev har gjort beräkningen $\frac{40}{0{,}7} = 57$. Båda lösningar visar på missuppfattningar kring begreppet och brister i metoden.

Två elever har först löst uppgiften på rätt sätt och kommit fram till 28 men sedan tagit $40 - 28 = 12$. Detta tolkar jag som missuppfattningar kring både begrepp och metod.
En elev har löst uppgiften på rätt sätt men räknat fel, $4 \times 7 = 21$. Detta ser jag som ett slarvfel och klassar det som annan typ av fel.

Som jag tidigare nämnt valde jag att formulera denna uppgift utifrån en av de missuppfattningar som var vanligt förekommande i Wisenthals (1984) och Gays (1990) undersökningar, att eleverna har svårt för när procenttalet är större än det hela. Även om detta var en av de uppgifterna med flest missuppfattningar beror det till största delen på att många anger svaret i procent. Det är en annan typ av missuppfattning som inte har någon koppling till det problemet. Man kan argumentera för att eleven som svarat 57 faller in under den kategorin och det är i så fall 1/64 elever (2%) som visar denna missuppfattning. Vi kan inte veta om den förekommer hos några av de elever som inte svarat på uppgiften, men samtidigt gäller det för de andra missuppfattningarna också.

I uppgift 5 är det totalt sju elever som svarat fel. En elev löser uppgiften på rätt sätt men svarar i procent (120%). Eleven visar att procedurell fluency finns, men svaret tyder på att den konceptuella förståelsen saknas.

En elev beräknar $0{,}4 \times 200 = 80$ gram och en elev beräknar $\frac{60}{200} = 0{,}3$ och svarar 30 gram. Båda saknar procedurell fluency för denna typ av uppgift, men de orimliga svaren tyder också på att den konceptuella förståelsen inte finns där.
En elev beräknar $\frac{200}{60} = 3{,}33$ och slutar sedan. Precis som i uppgift 3 har jag valt att inte tolka detta som en missuppfattning. Jag menar att eleven insett att det är fel metod eftersom svaret blir orimligt. Det är alltså procedurell fluency som saknas här och inte konceptuell förståelse. Därför klassar jag det inte som en missuppfattning.
Tre elever har skrivit ett felaktigt svar utan lösning. En av dem har svarat 60 gram, vilket jag tolkar som en missuppfattning i och med hur uppgiften är formulerad. De två andra har svarat 110 och 125 gram, vilket jag inte kan tolka.

5.2.3 Räkna ut det hela

De uppgifter som handlar om att räkna ut det hela är uppgift 2 och 6.

I uppgift 2 är det tre elever som gör löser uppgiften på rätt sätt men räknar fel. Två elever svarar 200 och en elev svarar 20,000 (rätt svar 2000), vilket jag tolkar som slarvfel.
En elev har räknat ut att 30% är 600 och försöker sedan räkna 30%+30%+30%+10% men gör ett räknefel på vägen och får svaret 2200, vilket jag klassar som annan typ av fel. Valet av metod tyder på bristande procedurell fluency.
En elev gör beräkningen $60 \times 0{,}3 \times 100 = 1800$. Metoden är fel och procedurell fluency saknas, men det är ett rimligt svar vilket gör att jag inte kan tolka detta som en missuppfattning kring begreppet.
Fyra elever har i stället gjort beräkningen $60 \times 0{,}03 \times 100$, vilket på ett sätt är bättre än eleven ovan då de har omvandlat procenttalet till decimalform på rätt sätt. Men det är fortfarande fel metod och visar på bristande procedurell fluency. Räknar man ut vad det blir får man svaret 180, vilket är ett orimligt svar. Två av dessa fyra elever har svarat 180 medan de två andra inte har svarat alls. Återigen tolkar jag det som att de som svarat har missuppfattat begreppet, men att de som valt att inte svara har gjort de för att de insett att svaret är orimligt och därför visar konceptuell förståelse.
Två elever har svarat 60 utan lösning, vilket jag tolkar som missuppfattningar.
En elev har svarat 5820 utan lösning och det har jag valt att klassa som en annan typ av fel. Jag tycker inte det är tillräckligt högt för att vara ett orimligt svar vilket gör att jag inte kan tolka detta som en missuppfattning.

I uppgift 6 har två elever har använt enprocentmetoden men sen multiplicerat med 84 i stället för 100. Svaret blir ändå ganska rimligt och jag har därför valt att inte tolka detta som en missuppfattning, men procedurell fluency saknas.
En elev har försökt addera 60%, alltså beräknat $84 + 84 \times 0{,}6 = 134$. Detta är verkligen ett gränsfall angående om svaret är rimligt eller inte (rätt svar 210), men jag landar i att det inte är helt orimligt och klassar det därför som annan typ av fel. Metoden fungerar inte och procedurell fluency saknas men jag kan inte säga något om den konceptuella förståelsen.
Två elever har försökt addera sig fram till 100% genom att ta $40\% + 40\% + 20\%$. Båda två har gjort rätt men räknat fel, vilket jag tolkar som slarvfel. Även om det finns smidigare metoder för att lösa uppgiften fungerar det att göra på det här sättet. Men procedurell fluency handlar både om att välja rätt metod och att kunna utföra den på rätt sätt, så även om det är en metod som fungerar och att det troligtvis är ett felaktigt knapptryck på miniräknaren som

ställt till det kan man anmärka på detta. Den konceptuella förståelsen kan jag inte dra några slutsatser om då svaren blir rimliga (190 och 230).
En elev har svarat 214 utan lösning och en elev har svarat 190 utan lösning. Rimliga svar som jag inte kan dra några slutsatser om mer än att det inte är rätt svar.
En elev har svarat 134 utan lösning. Jag antar att även denna elev försökt addera 60%. Min tolkning blir därför samma som i fallet ovan, svaret är inte helt orimligt och därför kan jag inte klassa det som en missuppfattning.

5.2.4 Procent och procentenheter

Det är bara uppgift 4 som behandlar procentenheter. Den är uppdelad i två delfrågor a) och b), och jag har i efterhand insett att detta inte blev bra. Under pilotstudien uppstod inte detta problem, men det är många som bara har skrivit ett svar utan att ange vilken av frågorna de svarat på. Fråga a) är hur många procentenheter det ökat med och rätt svar är 10. I de fall där eleverna bara skrivit ett svar och inte angett vilken fråga de svarat på har jag därför valt att ge rätt när de har skrivit 10, men inte när de har skrivit 10%. Problemet är att fråga b) är hur många procent det har ökat med, där rätt svar är 50% men frågan medvetet är ställd så att man ska kunna tro att svaret är 10%. Det leder till att jag kan ha klassat ett svar som rätt på fråga a) som egentligen är ett felaktigt svar på fråga b). Osäkerheten kring vad eleverna faktiskt har svarat på i denna uppgift gör att resultatet inte har någon reliabilitet över huvud taget och därför kan vara helt missvisande. Jag har ändå valt att ta med uppgiften och diskutera de fall som faktiskt går att analysera. Men notera att resultaten i tabellerna för fråga 4a) och 4b) inte har någon trovärdighet.

De fall som går att analysera är de där eleverna har svarat på båda frågorna. Samtliga elever som svarat på båda frågorna har rätt svar på a). Av de tolv elever som svarat rätt på a) och fel på b) är det bara en som skrivit sin lösning. Eleven har beräknat $\frac{10}{350} = 0{,}03$ och svarat 3%. Det visar på bristande procedurell fluency och svaret tyder på att konceptuell förståelse också saknas. I övrigt har sju elever svarat 10%, två svarat 100%, en svarat 110% och en svarat 6%. Jag tolkar samtliga som missuppfattningar.

5.2.5 Procent i flera steg

Den enda uppgiften som behandlar procent i flera steg är uppgift 8. Här är det tolv elever som har svarat 73% (rätt svar 27%). De har alla gjort på rätt sätt men svarat på fel sak. Precis som i uppgift 7 beror detta troligen på att de inte har läst uppgiften ordentligt. De visar procedurell fluency och jag kan inte tolka det som en missuppfattning, vilket gör att de hamnar under andra typer av fel.
Arton elever har svarat 30%. De visar att de inte har konceptuell förståelse när det kommer till upprepade förändringar. Alla har inte skrivit svar men jag tolkar detta svar som att samtliga har tagit $10 \times 3 = 30$ och missat att basen förändras efter varje år. En elev har svarat 50% utan att skriva lösning och även det klassar jag som en missuppfattning.
En elev har svarat 25% utan lösning. Det kan vara ett tecken på konceptuell förståelse men att procedurell fluency saknas. Jag tolkar det svaret som att eleven vet att det blir lite mindre än 30%, men kommer inte ihåg hur man ska beräkna det. Därför har jag klassat detta som annat fel.

Fyra elever använder sig av förändringsfaktorn men väljer fel faktor. Tre av dem använder 0,1 och en använder 0,99 (det ska vara 0,9) vilket gör att svaren blir helt fel. Jag klassar dessa svar som orimliga och därmed missuppfattningar.
En elev gör rätt men räknar fel i sista steget. Svaret blir rimligt och det är ett tydligt slarvfel vilket gör att det inte finns någon missuppfattning i det fallet.

5.3 Svar på frågeställningar

5.3.1 Vilka missuppfattningar förekommer?

När delen ska beräknas i uppgift 1 svarar vissa elever i procent, exempelvis att 70% av 40 är 28%. Detta tyder på att förståelsen för procentbegreppet inte finns där – det är bara ett tecken som är med när man pratar om procent. Eleverna kan metoden för att lösa uppgiften, men förstår inte riktigt vad det är dem gör. På samma tema svarar vissa i decimalform på uppgift 3, där svaret ska vara i procent. Även här vet eleverna hur de ska göra till en början, men de förstår inte att de måste omvandla svaret till procent utan svarar 0,52. Båda varianterna tyder på att eleverna har svårt för att avgöra när svaret ska anges i procent eller inte. Jag kallar detta för ”svar i fel form”. Problemet med omvandlingar är något som förekommer även i tidigare forskning från bland annat Parker och Leinhardt (1995) och Gay (1990).

En annan typ av missuppfattning är den jag kallar för ”orimliga svar”. Ibland använder eleverna sig av fel metod och ibland skriver de ingen lösning, men oavsett bör man inse när ett svar är orimligt om man förstår procentbegreppet. Jag tycker att jag har satt ganska generösa gränser för vad som är rimligt. Exempelvis i uppgift 5 bör man direkt se att eftersom 60% är mer än 50% måste svaret vara större än 100. Har man då svarat något som är mindre än 100 är svaret inte rimligt och kan inte förklaras genom att man räknat fel. Alla eleverna vet att hälften av 200 är 100, och tror man då att 60% av 200 är mindre än 100 är det ett tydligt tecken på att förståelsen inte finns där. Några av svaren följer detta tema, att procenttalet är mellan 50–100 men svaret är antingen mindre än hälften eller större än det hela. Även detta är problem som dyker upp i tidigare forskning (Parker & Leinhardt, 1995, Gay, 1990).

Vissa uppgifter är formulerade så att jag inte kan utgå ifrån samma ”hälften/hela”-bedömning för att avgöra om svaret är rimligt, exempelvis uppgift 2. Vissa svar är ändå utan tvekan orimliga, bland annat har en elev svarat 60 (rätt svar är 2000). Jag har valt att slå ihop alla dessa felaktiga svar som inte direkt följer något mönster till det jag kallar ”andra orimliga fel”. Jag diskuterar det närmare i nästa avsnitt.
Uppgift 4 visade att vissa elever stöter på problem när man blandar in både ökning i procentenheter och procentuell ökning i samma uppgift. Hade uppgiften bara handlat om procentenheter eller bara om procentuell ökning tror jag att betydligt fler hade löst den korrekt. Det tyder på att eleverna inte riktigt har koll på begreppet och rör ihop det när man frågar om flera saker ”samtidigt”.
Avslutningsvis visade uppgift 8 på två olika missuppfattningar. Många elever tror att det räcker att addera procenttalen med varandra och glömmer bort att värdet ändras efter varje år, något som diskuteras närmare i avsnitt 5.6. Några elever rör också ihop det med förändringsfaktorn. 10% i decimalform är mycket riktigt 0,1 men det är ju inte samma sak som att förändringsfaktorn är 0,1 när det sker en minskning med 10%. Därför ser jag inte

detta som ett omvandlingsfel – omvandlingen är ju helt rätt. Det är i stället förståelsen för förändringsfaktorn som saknas i dessa fall.

5.3.2 Hur vanliga är missuppfattningarna?

Tittar vi på diagrammet i avsnitt 4.1 ser vi att ”procent i flera steg” är vanligast, där 18/64 elever (28%) tror att det vid upprepade procentuella förändringar räcker att addera procenttalen. Denna missuppfattning kommer diskuteras närmare i avsnitt 5.6, men vi noterar att det är den klart vanligaste missuppfattningen.

Många elever får problem när man frågar om både förändring i procentenheter och procentuell förändring i samma uppgift. Det vanligaste felet som görs är att eleverna tror att det blir ”samma” svar på båda frågorna i uppgift 4, om det ökar med 10 procentenheter måste det ha ökat med 10% också. Sju elever (11%) visar denna missuppfattning.
Tre elever (5%) rör ihop det med förändringsfaktorn och tror att en minskning med 10% ger en förändringsfaktor på 0,1. Detta kommer diskuteras i avsnitt 5.6 tillsammans med de som adderat procenttalen.

Totalt nio elever (14%) svarar i fel form. Av dessa är det tre elever (5%) som svarar i decimalform när det ska vara i procent och sex elever (9%) som svarar i procent när svaret ska vara ett antal.

Vi ser också att nio elever (14%) har skrivit ”orimliga svar” och att 14 elever (22%) skrivit ”andra orimliga svar”. Skillnaden mellan dem diskuteras i avsnitt 5.3.1. De svar som klassats som ”andra orimliga svar” hade kanske egentligen passat bättre som 14 olika staplar, men samtidigt hade jag lika gärna kunnat slå ihop de båda staplarna som finns i diagrammet nu. Diagrammet kan tolkas som att orimliga svar är det vanligaste felet, vilket på ett sätt stämmer. Men eftersom det är så många olika varianter av missuppfattningar är ändå ”procent i flera steg” den klart vanligaste – det är ju samma missuppfattning hos alla 18.
Av de nio i ”orimliga svar” är den klart vanligaste att eleverna har kommit fram till ett svar som är mindre än hälften av det hela, när procenttalet är högre än 50%. Sex elever (9%) visar denna missuppfattning. De övriga tre är tre olika varianter på samma tema, svar som inte klarar ”hälften/hela”-bedömningen jag pratar om i avsnitt 5.3.1.

När man sammanfattar det hela behöver vi ta hänsyn till att samma elev kan ha visat upp flera olika missuppfattningar. Vi landar till slut i att totalt 36 elever (56%) visar tecken på missuppfattningar på minst en uppgift.

5.4 Didaktiska konsekvenser

Många av de fel elever gör när de löser uppgifter med procenträkning handlar om att de använder sig av fel metod. Detta tolkar jag inte som att det beror på missuppfattningar kring procentbegreppet. Eleverna har lärt sig ett antal olika metoder för att lösa olika typer av problem och testar en av dem. Väljer de fel metod tyder det snarare på bristande procedurell fluency, de kan de olika metoderna men de vet inte när de ska använda vilken. Har de då inte heller tillräcklig konceptuell förståelse inser de inte att svaret blir orimligt, men det är inte det som ligger till grund för att det blev fel.

Samtidigt beror många andra fel på att förståelsen inte finns. De två vanligaste missuppfattningarna i denna studie är av denna typ. Där väljer eleverna metod utifrån sin förståelse – eller snarare brist på förståelse – och därefter blir metoden väldigt enkel, men felaktig. I dessa fall finns det inte någon mening med att reflektera över svaret. Tror eleverna att det är så man ska lösa uppgiften stämmer svaret överens med missuppfattningen.

Precis som Kilpatrick m.fl. (2001) skriver behöver man inte välja mellan procedurell fluency och konceptuell förståelse, båda är viktiga för att lära sig matematik. Jag tror det är viktigt som lärare att tänka på att det inte finns något motsatsförhållande mellan de två begreppen utan snarare tvärtom. Båda två är ganska meningslösa om man helt saknar den andra. Svårigheten ligger i hur man lär eleverna båda delarna. Om eleverna först lär sig metoderna för att lösa olika typer av problem utan att förstå vad det är de gör är det ofta väldigt svårt att få dem att lära sig det i efterhand. Många elever vill ha det på det sättet, de vill bara att läraren berättar för dem hur de ska göra och så länge det fungerar är de nöjda. Problemet är att om förståelsen inte finns där vet inte eleverna hur de ska göra om uppgifterna inte ser ut precis som de brukar. Detta problem känner jag igen från mina VFU-perioder och är även något som Kilpatrick m.fl. (2001) pratar om. Å andra sidan är det väldigt svårt att förstå någonting som man inte klarar av att räkna på, vilket gör att lösningen inte är så enkel som att man arbetar med förståelsen först. Det blir hela tiden en balansgång och jag tror att man måste försöka arbeta med båda bitarna samtidigt, att både förklara hur man gör och varför man gör det. Det kan vara svårt att ”stå emot” när allt eleverna vill är att man förklarar hur de ska göra, framför allt som nyutbildad lärare, men man måste försöka ha med sig i bakhuvudet att det faktiskt är för deras skull man gör det. Det är inte för att vara elak eller för att man inte vill berätta för eleverna hur de ska göra, det är för att de ska få en bättre förståelse.

Procent är som jag tidigare nämnt ett viktigt begrepp som man ofta stöter på i vardagen. Jämfört med övrig matematik man lär sig i skolan kan jag tycka att procent får ett ganska litet utrymme i förhållande till hur ofta man faktiskt har nytta av att kunna det utanför skolan. Det gör att det blir ännu viktigare att ta vara på den tiden man lägger på det. Som med alla missuppfattningar är det svårare att bli av med dem ju längre man burit på dem. Det är därför viktigt att så tidigt som möjligt börja arbeta med förståelsen och inte bara metoderna. Det är mycket enklare att träna på och bli bättre på att använda de olika metoderna än vad det är att lära om någonting man missuppfattat. Detta är mest relevant för högstadielärare men även på gymnasiet är det viktigt att så tidigt som möjligt börja arbeta mer med förståelsen än vad jag upplever att många gör idag.

Kanske är det till och med så att man måste börja ännu tidigare. Moss och Case (1999) testade att ”byta ordning” på hur man lär sig de olika talformerna och introducerade procent tidigare. Resultatet från deras studie visade att detta förbättrade elevernas förståelse. Det kan vara ett sätt att komma bort från uppfattningen att procent är ”ett annat sätt att skriva tal”, som jag upplevt att vissa elever har. Å andra sidan kanske man bara vänder på problemet och decimaltal blir ”det nya procent”. Mer om det i nästa avsnitt, men det blir ju i så fall relevant framför allt för mellanstadielärare.

5.5 Fortsatt forskning

Hade möjligheten funnits hade jag förutom diagnosen gärna intervjuat några elever också för att få en bättre bild av hur de tänker. Jag tror att många av de elever som valt att inte svara på alla uppgifter ändå har försökt lösa dem och det hade varit intressant att veta hur de tänkt. Denna studie syftar främst till att ta reda på vilka missuppfattningar som finns och nästa naturliga steg är att ta reda på mer om dem. Jag tänker då främst på att försöka ta reda på var missuppfattningarna kommer ifrån i syfte att bättre förstå hur man kan förhindra att de uppstår från början. Det hade också varit intressant att göra en liknande studie bland gymnasieelever och jämföra resultaten.

Det hade varit intressant att se mer forskning på samma tema som Moss och Case (1999). Hjälper det förståelsen att introducera procent tidigare? Det bör ju öka förståelsen för procent, men hur påverkar det allt annat? Blir det som jag nämnde i föregående avsnitt att man bara vänder på problemet, eller är det enklare att förstå både procent och decimaltal om man lär sig det i en annan ordning?

5.6 Slutsatser

I denna studie har vi hittat en hel del olika missuppfattningar, vissa betydligt vanligare än andra. Mer än var fjärde elev gör samma fel när det kommer till upprepade procentuella förändringar. Det är svårt att avgöra om det är mycket jämfört med andra missuppfattningar inom andra områden i matematiken, men här sticker den ut som den klart vanligaste. Jag tror att problemet kan vara att eleverna använder sig för lite av förändringsfaktorn. Eleverna lär sig enprocentmetoden först, vilket är helt rimligt. Det är enklare att förstå vad man gör när man använder den. Problemet är att när förändringsfaktorn sedan introduceras blir det bara ett nytt sätt att räkna ut samma sak. Eleverna har redan tränat på att använda sig av enprocentmetoden och känner sig ganska bekväma med den, de är inte intresserade av att lära sig en ny metod. Det leder till att många fortsätter använda enprocentmetoden, vilket man kan se på svaren från denna undersökning. De allra flesta som har löst uppgift 8 har gjort det med just den metoden. Det är inget fel med det, även om det tar mycket längre tid och det blir många fler beräkningar som måste göras fungerar det och man kommer fram till rätt svar. Men jag menar att man får ett annat ”tänk” när man jobbar med förändringsfaktorn, man ser problemet på ett annat sätt. Jag tror att många av dem som svarat 30% utan lösning har tänkt att ”det här kan jag lösa med enprocentmetoden, men det kommer ta lång tid och jag ser ju redan vad svaret kommer bli”. Det är där problemet ligger – är du van vid att jobba med förändringsfaktorn ”ser du” att svaret inte blir 30%. Det går också snabbt att räkna ut det med förändringsfaktorn då eleverna hade tillgång till miniräknare, vilket gör att även om man tror att svaret är 30% kan man snabbt kontrollera att det inte stämmer.

Det är svårare att svara på vad man kan göra åt detta. Jag tror inte man kan introducera det tidigare, då skulle man behöva ta bort enprocentmetoden och det tycker jag inte man ska göra. Det är som sagt en bra metod för att lära sig grunderna och för att samtidigt få en förståelse för vad man gör. Det är också en bra metod för huvudräkning, även om det inte behövs så ofta nu för tiden då de flesta har en miniräknare i telefonen. Ett alternativ är då att lära sig förändringsfaktorn ännu senare, när det är en uppenbar fördel att använda den. Då kanske man slipper problemet med att eleverna inte ser något värde i metoden. Ett annat alternativ är att ”tvinga” eleverna att träna på att använda den, exempelvis genom att formulera uppgifter som ”lös detta med hjälp av förändringsfaktorn”. Förhoppningsvis leder det till att eleverna blir mer bekväma och väljer att använda sig av förändringsfaktorn även när de inte ”måste”.

I övrigt har vi sett att det finns en hel del missuppfattningar kring procentbegreppet. Även om ingen av dem är särskilt vanlig är det ändå över hälften av eleverna som visar någon typ av missuppfattning. Det är svårt att prata om specifika lösningar till varje enskild missuppfattning, jag tror snarare att man måste arbeta mer med förståelse generellt för att undvika övriga missuppfattningar. Kanske behöver man prata om procent tidigare på mellanstadiet, eller kanske behöver man jobba mer med förståelsen på högstadiet.

Referenslista

Barmark, M., & Djurfeldt, G. (2015). *Statistisk verktygslåda – att förstå och förändra världen med siffror*. Studentlitteratur.

Brueckner, L. J. (1930). *Diagnostic and remedial teaching in arithmetic*. Philadelphia: John C. Winston Company.

Cederqvist, K., Larsson, S., Gustafsson, P., & Szabo, A. *Prio 8 Matematik*. Sanoma Utbildning.

Gay, A.S. (1990). *A study of middle school students' understanding of number sense related to percent*. (Dissertation, Oklahoma State University). Hämtad 2021-04-06, från: https://hdl.handle.net/11244/20835

Guiler, W. (1946). Difficulties in Percentage Encountered by Ninth-Grade Pupils. I *The Elementary School Journal*, *46*(10), 563-573. Hämtad från http://www.jstor.org/stable/998710

Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. I J. Hiebert (Red.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 1-27). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Lembke, L., & Reys, B. (1994). The Development of, and Interaction between, Intuitive and School-Taught Ideas about Percent. I *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(3), 237-259. https://doi.org/10.2307/749337

Moss, J. & Case, R. (1999). Developing Children's Understanding of the Rational Numbers: A New Model and an Experimental Curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*, *30*, 122-147. Hämtad från https://www.semanticscholar.org/paper/Developing-Children's-Understanding-of-the-Rational-Moss/f2b82f651ad4cba81aba2832ee335a15cc9def7c

National Research Council. (2001). *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics*. Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (Red.), Washington, DC: The National Academies Press. https://doi.org/10.17226/9822

Omfors, R. (2004). *Procentförståelse årskurs 9.* (Examensarbete, Malmö högskola/Lärarutbildningen). Hämtad 2021-04-04, från: http://urn.kb.se/resolve?urn=urn:nbn:se:mau:diva-35477

Parker, M., & Leinhardt, G. (1995). Percent: A Privileged Proportion. *Review of Educational Research, 65*(4), 421-481. https://doi.org/10.3102/00346543065004421

Skolverket (2011a) Ämne – Matematik. Hämtad 2021-04-01, från: https://www.skolverket.se/undervisning/grundskolan/laroplan-och-kursplaner-for-grundskolan/laroplan-lgr11-for-grundskolan-samt-for-forskoleklassen-och-fritidshemmet?tos=GR&subjectCode=GRGRMAT01

Skolverket (2011b) Ämne – Matematik. Hämtad 2021-04-01, från:

https://www.skolverket.se/undervisning/gymnasieskolan/laroplan-program-och-amnen-i-gymnasieskolan/gymnasieprogrammen/amne?url=1530314731%2Fsyllabuscw%2Fjsp%2Fsubject.htm%3FsubjectCode%3DMAT%26tos%3Dgy&sv.url=12.5dfee44715d35a5cdfa92a3

Smith, D.E. (1958). *History of Mathematics*. Volume II. New York: Dover Publications Inc. Hämtad 2021-04-02, från: https://archive.org/details/historyofmathema031897mbp/

Star, J.R. (2005). Reconceptualizing Procedural Knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, *36*(5), 404-411. https://doi.org/10.2307/30034943

Wisenthal, E. (1984). *High school students' understanding of percent.* (Master thesis, Concordia University). Hämtad 2021-04-02, från: https://spectrum.library.concordia.ca/5670/

Bilaga

Diagnos procenträkning

Tänk på att skriva upp både uträkningar och svar!

1. Vad är 70% av 40?

2. 3% är 60 kronor. Hur mycket är 100%?

3. Hur många procent är 13 av 25?

4. På en skola går det 350 elever. En dag har 20% av eleverna svarta tröjor på sig. Nästa dag har 30% av eleverna svarta tröjor på sig. Hur stor är ökningen i
   a) Procentenheter
   b) Procent

5. En chokladkaka som väger 200 gram innehåller 60% kakao. Hur många gram kakao innehåller den?

6. På en skola är det 84 elever som har husdjur. Det är 40% av alla elever på skolan. Hur många elever går det på skolan?

7. En tröja kostar 350 kronor när det är rea. I vanliga fall kostar tröjan 500 kronor. Med hur många procent har man sänkt priset?

8. Du köper en bil för 10000 kronor. Varje år minskar värdet på bilen med 10%. Med hur många procent har värdet minskat efter 3 år?