



GÖTEBORGS UNIVERSITET
HANDELSHÖGSKOLAN

Metoder för biaskorrigering vid punktskattning av
populationsstandardavvikelsen
- En jämförande simuleringsstudie vid normalfördelad population

Av: Omid Raisi & Yohanes Wolde-Senbet

Kandidatuppsats i Statistik (15 hp)
Institutionen för nationalekonomi med statistik, Göteborgs universitet
Handledare: Mattias Sundén
Den 15 februari 2021

Förord

Vi önskar att tacka vår handledare Mattias Sundén. Han har varit behjälplig under alla moment av studien och därigenom varit ett oundgängligt stöd för oss. Vidare önskar vi rikta ett tack till våra kurskamrater; Tim Emanuelsson, Sofia Hartelius och Lukas Ma. Deras insiktsfulla kommentarer har kommit väl till hands vid framarbetningen av denna studie.

Abstract

There are several different methods that aim to correct bias when estimating the population standard deviation for a normally distributed population. It is a topic that over time has been dealt with in a number of different statistical journals. The question of how different methods for bias correction perform in relation to each other is not dealt with to the same extent in the statistical literature. Especially not when the sample size is small. The study aims to answer the question: How well, in terms of bias and mean square errors, is the population standard deviation estimated by: Brugger's formula, jackknife and non-parametric bootstrap? This is done using Monte Carlo simulations that approximate the expected value and variance for bias correcting stochastic variables that constitute estimators in the study. The conclusion is that the population standard deviation is best estimated by Brugger's formula. In addition, the study produces a number of interesting results in the context of standard error and the distribution of the sample standard deviation. Results show that the positive skew for the distribution of the sample standard deviation decreases with increasing sample size. The standard error of the sample standard deviation is well approximated by both jackknife and by an approximation method which goes back to C.R Rao.

Sammanfattning

Det finns flera olika metoder som har till syfte att korrigera bias vid estimering av populationsstandardavvikelsen för en normalfördelad population. Det är ett ämne som över tid har behandlats i en rad olika statistiska journaler. Frågan om hur olika metoder för biaskorrigering presterar i förhållande till varandra är inte i samma utsträckning avhandlad i den statistiska litteraturen. Särskilt inte vid liten stickprovsstorlek. Studien syftar till att besvara frågeställningen: Hur väl, avseende bias samt medelkvadratfel, estimeras populationsstandardavvikelsen av metoderna: Bruggers formel, jackknife och icke-parametrisk bootstrap? Detta görs med hjälp av Monte Carlo-simuleringar som approximerar väntevärde och varians för biaskorrigerande stokastiska variabler som utgör estimatorer i studien. Slutsatsen är att populationsstandardavvikelsen estimeras bäst av Bruggers formel. Dessutom frambringar studien ett antal intressanta resultat i kontexten av medelfel samt samplingfördelning för stickprovsstandardavvikelsen. Resultaten visar att den positiva skevheten för samplingfördelningen minskar vid ökad stickprovsstorlek. Medelfelet för stickprovsstandardavvikelsen approximeras väl av både jackknife samt av en approximationsmetod som härrör från C.R Rao.

Förkortningar

S	Stickprovsstandardavvikelse
σ	Populationsstandardavvikelse
σ^2	Populationsvarians
S^2	Stickprovsvarians
n	Stickprovsstorlek
C_N	Korrektionsfaktor väntevärdesriktig
c	Korrektionsfaktor icke-väntevärdesriktig
θ	Populationsparameter
MSE	Medelkvadratfelet för en estimator
$\hat{\theta}$	Punktskattare
θ^*	Punktskattare
μ	Populationsmedelvärde
k	kvantiteter som baseras på C_N
$\hat{\sigma}$	Väntevärdesriktig estimator för σ
$\hat{\sigma}_c$	Icke-väntevärdesriktig estimator för σ
\widehat{se}_B	Bootstrap estimator för medelfelet för $\hat{\theta}$
$\hat{\theta}^*(\mathbf{b})$	Estimat från bootstrap-stickprov
$\hat{\theta}^*(\cdot)$	Medelvärdet av $\hat{\theta}^*(\mathbf{b})$
$\bar{\theta}$	Biaskorrigerat estimat för θ
B	Antal bootstrap-stickprov
\widehat{se}_{jack}	Jackknife estimator för medelfelet för $\hat{\theta}$
$\hat{\theta}_i$	Estimat från jackknife-stickprov
$\hat{\theta}_{(\cdot)}$	Medelvärdet av $\hat{\theta}_i$
$\hat{\theta}_{boot}$	Biaskorrigerande estimator vid bootstrap
$\hat{\theta}_{jack}$	Biaskorrigerande estimator vid jackknife
$se(S)$	Estimator för medelfelet för S
MC	Monte Carlo-simuleringar
s	Värdet för S för det ursprungliga stickprovet vid bootstrap
\bar{x}	Stickprovsmedelvärde

Innehållsförteckning

1	Introduktion	1
1.1	Tidigare studier	1
1.2	Problemformulering	2
1.3	Frågeställning	3
1.4	Avgränsning	3
2	Teoretiskt ramverk	4
2.1	Estimator	4
2.2	Stickprovsstandardavvikelse	7
2.3	Bruggers formel	10
2.4	Bootstrap	14
2.5	Jackknife	17
2.6	Medelfel	18
2.7	Samplingfördelningen för stickprovsstandardavvikelsen	19
2.8	Monte Carlo-simuleringar	19
3	Metod	21
3.1	Bootstrap och stickprovsstandardavvikelse	21
3.2	Jackknife	26
3.3	Bruggers formel	28
3.4	Metoden för att besvara studiens frågeställning	29
4	Resultat	30
4.1	Bootstrap och stickprovsstandardavvikelse	30
4.1.1	Stickprovsstandardavvikelse	30
4.1.2	Icke-parametrisk bootstrap	33
4.1.3	Parametrisk bootstrap	35
4.2	Jackknife	36
4.3	Bruggers formel	39
4.4	Estimering av medelfelet för stickprovsstandardavvikelsen	40
4.5	Studiens frågeställning	42
5	Diskussion	44
5.1	Viktigaste resultaten	44
5.2	Kritik	44
5.3	Förslag till vidare studier	45
	Referenser	46
	Bilaga	48

1 Introduktion

Ett välkänt spridningsmått som är vedertaget inom statistiken är standardavvikelse. Det är ett mått på den genomsnittliga avvikelsen från medelvärdet och uttrycks i samma enhet som mätvärdena (Djurfeldt, Larsson & Stjärnhagen, 2010, s. 65). Standardavvikelse härleds från avvikelsemättet varians. Man kan matematiskt härleda en väntevärdesriktig estimator för populationsvariansen (σ^2). Stickprovsstandardavvikelse (S) är i sin tur en funktion av denna estimator. Det har dock förekommit att man i litteraturen underlåter att understryka att S är en estimator med bias (Holtzman, 1950).

Det finns flera olika metoder som har till syfte att korrigera bias vid estimering av en populationsstandardavvikelse (σ). Det är ett ämne som över tid har avhandlats i en rad olika statistiska publikationer. Återkommande är antagandet att den bakomliggande populationen är normalfördelad. Frågan om hur olika metoder för biaskorrigering presterar i förhållande till varandra är inte i samma utsträckning avhandlad i den statistiska litteraturen. Vidare finns det inte en vedertagen metod för att reducera bias. Med det sagt har statistiker i olika utsträckning och med olika angreppssätt behandlat ämnet i fråga.

1.1 Tidigare studier

Holtzman (1950) angriper frågan om bias genom att ta ansats från stickprovsvariansen (S^2). Han ger en definition av vad som kan betraktas som en väntevärdesriktig estimator. Vidare påvisar han att S^2 är en väntevärdesriktig estimator för σ^2 . I kontexten av detta klargör han att S däremot är en icke-väntevärdesriktig estimator för σ . Förvisso understryker han att man vid en stickprovsstorlek (n) större än 10 får en försumbar bias men han poängterar att man, obeaktat storleken på bias, kan eliminera den i fallet med en normalfördelad population. Han bevisar matematiskt att en korrektionsfaktor (C_N), med givna värden beroende på n , medför att man kan få fram en väntevärdesriktig estimator för σ . Vidare upprättar han en tabell med olika värden för C_N . Det ska dock poängteras att härledningen av C_N inte kan tillskrivas Holtzman. Det ska snarare attribueras matematikern Carl Friedrich Gauss (Cureton, 1968a). Med det sagt så definierar Holtzman C_N med tre decimaler, vilket medför mer precisa värden vid estimering av σ . Vidare var det hans artikel som föranledde ytterligare studier i ämnet som sedermera utmynnade i ett förslag på en simpel metod för biaskorrigering, utifrån ovannämnda metod för biaseliminering (Brugger, 1969).

Brugger (1969) konstruerar en ny korrektionsfaktor (c) som till skillnad från C_N syftar till att reducera bias snarare än att eliminera bias när n är att anses vara liten. Brugger (1969) hävdar att man vid $n \geq 6$, adekvat kan reducera bias med följande formel:

$$\hat{\sigma}_c = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n - 1.5}} \quad (1.1)$$

Där $\hat{\sigma}_c$ är en icke-väntevärdesriktig estimator för σ .

Till skillnad från elimineringsmetoden som förordas av Holtzman (1950), syftar denna formel till att endast reducera bias, primärt vid $6 \leq n \leq 10$. Bruggers formel medför en standardiserad formel som inte fordrar att man behöver slå upp värdet för någon korrektionsfaktor. Formeln är därmed ett praktiskt alternativt till formeln för S . Framförallt utgör den en metod för att reducera bias som inte kräver djup förankring inom statistisk. Med andra ord kan den anses vara hanterbar för personer med bakgrund inom andra vetenskapliga fält än statistik.

Englund (2000) ger ingående redogörelser för datorintensiva metoder inom matematisk statistik. Han ger flera exempel på hur återsamlingsmetoden jackknife kan användas som statistisk metod. Däribland påvisar han hur man kan få fram biaskorrigerade punktskattningar med hjälp av jackknife (Englund, 2000, s. 114). I kontexten av datorbaserade statistiska beräkningsmetoder ger Efron och Tibshirani (1993) en detaljerad redogörelse av icke-parametrisk bootstrap, som är en återsamlingsmetod med återläggning. Vidare redogör Efron och Tibshirani (1993, s. 138) för hur man inom ramarna för bootstrap kan estimerar en populationsparameter (θ) med en metod som är biaskorrigerande.

1.2 Problemformulering

Det finns under vissa förutsättningar möjlighet att eliminera bias vid punktskattning av σ . Det är dock en emellanåt mödosam process som kräver stringenta metoder, som inte alltid är åtkomliga för noviser inom statistik. Man ska ta i beaktande att statistiska metoder samt programvara inte sällan används av individer med rudimentära kunskaper inom statistisk. Följaktligen finns det ett behov av att särskilt studera metoder för biaskorrigerering som är lätta att hantera för personer som inte har en bakgrund inom den statistiska vetenskapen. Man kan argumentera för att Bruggers formel, jackknife och icke-parametrisk bootstrap uppfyller detta kriterium. I valet mellan nämnda metoder finns det ett behov av att veta vilken som bäst estimerar σ . Det saknas uttömmande och etablerad data om detta i nuläget. Följaktligen finns det ett behov av att studera hur väl dessa metoder reducerar bias. Att studera frågan och

därmed uppdaga ämnet, är ett första steg för att på sikt kunna ge rekommenderade standardval av metoder för biaskorrigering när σ estimeras.

1.3 Frågeställning

Syftet med studien är att undersöka hur väl Bruggers formel, jackknife och icke-parametrisk bootstrap estimerar σ . Genom simuleringsstudier ska primärt bias och medelkvadratfel för respektive metod jämföras. Detta mynnar ut i följande frågeställning.

Hur väl, avseende bias samt medelkvadratfel, estimeras σ av metoderna: Bruggers formel, jackknife och icke-parametrisk bootstrap?

1.4 Avgränsning

För att uppnå syftet med studien finns det ett antal avgränsningar med hänsyn till bl.a. datorkapacitet, teoretisk referensram samt eftersträvad omfattning.

Enbart stickprov från en normalfördelad population undersöks. Vidare ska endast en metod för biaskorrigering inom ramarna för jackknife respektive icke-parametrisk bootstrap studeras. Detta för att begränsa omfattningen av studien.

Ett led i att utvärdera icke-parametrisk bootstrap, kommer att vara att jämföra den med parametrisk bootstrap. Detta i syfte att kunna ge väl underbyggda förslag på vidare studier inom fältet. För att avgränsa denna del, som inte är central för studien, kommer endast bias och medelkvadratfelet för en estimator (MSE) att jämföras. Vidare kommer vi att undersöka hur väl medelfelet för S estimeras av C.R Raos approximation, icke-parametrisk bootstrap och jackknife.

Slutligen studeras endast små stickprov, $6 \leq n \leq 10$. Detta med bakgrund i att Bruggers formel är lämplig att använda vid $n \geq 6$ (Brugger, 1969) samt att bias av S är försumbar vid $n > 10$ (Holtzman, 1950).

2 Teoretiskt ramverk

I detta kapitel presenteras de teoretiska perspektiv som är anknutna till studien. I avsnitten 2.1–2.2 ges en teoretisk beskrivning av de för studien centrala statistiska termerna estimator och S. I avsnitten 2.3–2.5 ges en redogörelse för de metoder för biaskorrigering som kommer att undersökas i studien. Slutligen presenteras övriga relevanta statistiska teorier och begrepp i avsnitten 2.6–2.8.

2.1 Estimator

En estimator är en metod, i regel uttryckt som en formel, som används för att få ett estimat av en estimand, givet värden från ett stickprov (Wackerly, Mendenhall & Scheaffer, 2008, s. 391). Det är viktigt att särskilja begreppen för att undvika otydligheter. Estimator är en stokastisk variabel som beror på stickprovsvärden. Det är alltså en estimeringsfunktion som används i syfte att få ett talvärde som utgör ett estimat av en estimand. En estimand behöver inte nödvändigtvis vara en θ (SBU, 2016, s. 31), men är vanligtvis det i statistiska sammanhang. Med andra ord är en estimator, brukligen i statistisk kontext, en metod som används i syfte att få en skattning av en θ . Begrepp som fortsättningsvis kan komma att användas synonymt för estimator och estimat är skattare respektive skattning.

Det finns olika typer av estimatorer. Punktskattare ($\hat{\theta}$), benämns dock oftast i litteraturen som punktskattning, är som det låter en estimator som genererar ett punktvärde som estimat av θ . Det förekommer dock andra beteckningar i litteraturen, däribland används θ^* , istället för $\hat{\theta}$, för att beteckna en punktskattare. Det realiserade värdet vid punktskattning kan på motsvarande sätt betecknas som θ_{obs}^* istället för $\hat{\theta}_{obs}$, där subindex "obs" står för att värdet beräknats ur mätdata (Blom, Enger, Englund, Grandell & Holst, 2017, s. 242). En definition av θ_{obs}^* ges av Blom m.fl. (2017):

"En punktskattning $\theta_{obs}^ = \theta^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$ av en parameter θ är en funktion av mätdata x_1, x_2, \dots, x_n . Dessa mätdata ses som utfall av stokastiska variabler X_1, X_2, \dots, X_n vilkas fördelning beror av parametern θ . Punktskattningen θ_{obs}^* är ett utfall av stickprovsvariabeln $\theta^* = \theta^*(X_1, X_2, \dots, X_n)$ " (s. 244).*

En annan typ av estimator är intervallskattning. Den vanligaste benämningen för denna estimator är konfidensintervall. Det är en estimator som använder stickprovsvärden i syfte att beräkna konfidensintervall. Med denna metod kan man enligt Wackerly m.fl. (2008, s. 406-407) beräkna sannolikheten för att ett stokastiskt konfidensintervall innesluter θ enligt följande:

$$P(\hat{\theta}_L \leq \theta \leq \hat{\theta}_U) = 1 - \alpha \quad (2.1)$$

där $\hat{\theta}_L$ och $\hat{\theta}_U$ står för den undre respektive övre gränsen för intervallet. Intervallet är en stokastisk variabel som beroende på stickprovsvärden kan ge olika skattningar för konfidensintervallet. $1 - \alpha$ står för konfidensgraden, d.v.s. den förväntade andelen av gånger ett stokastiskt konfidensintervall innesluter θ vid upprepade stickprovstagningar med identisk estimator.

Enligt Blom m.fl. (2017, s. 287) är det oftast lämpligare att använda intervallskattning istället för $\hat{\theta}$, eftersom $\hat{\theta}$ inte ger tillräcklig information om θ som ska estimeras. Med detta sagt så är inte intervallskattning alltid ett lämpligt val av estimator. Enligt Newcombe (1998, s.191) kan man vid intervallskattning riskera att konfidensintervallet innesluter populationsparametern med en högre eller lägre faktisk konfidensgrad än den nominella konfidensgraden; ett så kallat ”konservativt” respektive ”anti-konservativt” intervall. Detta är ett känt problem vid binomialfördelning. Brown, Cai och DasGupta (2001) föreslår metoder för att minska avvikelserna mellan den faktiska och den nominella konfidensgraden när man använder intervallskattning vid binomialfördelning. Vid andra fördelningar föreligger det dock en risk att konfidensintervallet centreras kring väntevärdet för en estimator, snarare än väntevärdet för θ , när en estimator är icke-väntevärdesriktig. Det kan eventuellt medföra att den nominella konfidensgraden inte överensstämmer med den faktiska konfidensgraden, vilket kan uttryckas på följande sätt:

$$P(\hat{\theta}_L \leq \theta \leq \hat{\theta}_U) \neq 1 - \alpha \quad (2.2)$$

Man kan använda olika estimatorer för att estimeras en och samma θ . För att bedöma hur bra olika $\hat{\theta}$ är i förhållande till varandra, kan man enligt Wackerly m.fl. (2008, s. 391) använda sig av olika metoder för att utvärdera dem. Föresättningsvis används begreppet estimator synonymt för $\hat{\theta}$.

En primär metod för att utvärdera en estimator är att studera dess bias. Det är differensen mellan väntevärdet för $\hat{\theta}$ och värdet för θ som ska estimeras. Väntevärdet för $\hat{\theta}$, kan enligt Dahmström (2005, s. 239) definieras på följande sätt:

$$E(\hat{\theta}) = \sum_{i=1}^k \hat{\theta}_i \cdot P(\hat{\theta} = \hat{\theta}_i) \quad (2.3)$$

Wackerly m.fl. (2008, s. 393) definierar bias på följande sätt:

$$B(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta \quad (2.4)$$

där $B(\hat{\theta})$ står för bias av $\hat{\theta}$ och $E(\hat{\theta})$ står för väntevärdet för $\hat{\theta}$. När det finns en differens mellan $\hat{\theta}$ och θ säger man att det föreligger bias, alternativt kan man uttrycka det som att $\hat{\theta}$ är icke-väntevärdesriktig. I fallet:

$$E(\hat{\theta}) = \theta \quad (2.5)$$

kan man enligt Blom m.fl. (2017, s. 247) fastslå att $\hat{\theta}$ är väntevärdesriktig.

Utöver att ta hänsyn till bias när man utvärderar en $\hat{\theta}$, studerar man även dess varians. Variansen för $\hat{\theta}$, kan enligt Dahmström (2005, s. 239) definieras på följande vis:

$$V(\hat{\theta}) = E[\hat{\theta} - E(\hat{\theta})]^2 = \sum_{i=1}^k [\hat{\theta}_i - E(\hat{\theta})]^2 \cdot P(\hat{\theta} = \hat{\theta}_i) \quad (2.6)$$

I fallet då man har två estimatorer, $\hat{\theta}$ och θ^* , som är väntevärdesriktiga, väljer man enligt Wackerly m.fl. (2008, s. 391) att använda den estimator med lägst varians av dem båda. Blom m.fl. (2017, s. 249) uttrycker det som att θ^* är effektivare än $\hat{\theta}$, i fallet då båda är väntevärdesriktiga men θ^* har lägre varians:

$$V(\theta^*) < V(\hat{\theta}) \quad (2.7)$$

Ett avvikelsemått som tar i beaktande både bias och varians för en $\hat{\theta}$ är MSE. Enligt Wackerly m.fl. (2008, s. 393) definieras MSE på följande sätt:

$$\text{MSE}(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - \theta)^2] = V(\hat{\theta}) + [B(\hat{\theta})]^2 \quad (2.8)$$

Dahmström (2005, s. 240) beskriver MSE som ett mått på avvikelsen till θ som ska estimeras.

Enligt Blom m.fl. (2017, s. 248) kan en estimator anses vara konsistent om fördelningen av den i allt större utsträckning koncentreras kring det rätta värdet för θ som ska estimeras, när n ökar. Konsistens är en vanlig egenskap hos estimatorer. Wackerly m.fl. (2008, s. 450) anger att en estimator är konsistent om följande gäller:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\hat{\theta}_n - \theta| \leq \varepsilon) = 1 \quad (2.9)$$

vilket är ekvivalent med:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\hat{\theta}_n - \theta| > \varepsilon) = 0 \quad (2.10)$$

Där ε är ett positivt tal. Gränsvärdet för sannolikheten att absolutvärdet för bias av $\hat{\theta}$ överstiger ε , när n går mot oändligheten, är noll. Då anses konsistens föreligga.

2.2 Stickprovsstandardavvikelse

Enligt Oxford College (2021) definieras populationsvariansen (σ^2) som:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{N} \quad (2.11)$$

där μ står för populationsmedelvärdet. X_i är observationerna från populationen. N står för populationsstorleken.

Enligt Oxford College (2021) är stickprovsvariansen en estimator för σ^2 , som inte är väntevärdesriktig när den definieras på följande sätt:

$$S_{bias}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n} \quad (2.12)$$

Där S_{bias}^2 är stickprovsvariansen som inte är väntevärdesriktig. \bar{X} är en stokastisk variabel som ges av medelvärdet av ett stickprov. X_i är stokastiska variabler som är oberoende och

likafördelade, vilket innebär att de är oberoende av varandra och att de kommer från samma sannolikhetsfördelning.

Väntevärdet av denna estimator är:

$$E[S_{bias}^2] = \left(\frac{n-1}{n}\right) \sigma^2 \quad (2.13)$$

Genom att ta inversen av $\left(\frac{n-1}{n}\right)$ kan man få fram en ny definition av stickprovsvariansen (S^2):

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} \quad (2.14)$$

Istället för att endast ha n i nämnaren, har S^2 frihetsgraden, $n - 1$. Detta kallas för Bessels korrektion och ger den vedertagna definitionen av stickprovsvariansen (Oxford College, 2021).

Enligt Blom m.fl. (2017, s. 251) är S^2 en väntevärdesriktig estimator för σ^2 . Det kan matematiskt uttryckas på följande vis:

$$E(S^2) = E\left[\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2\right] = \sigma^2 \quad (2.15)$$

S är en estimator för σ . Man kan härleda S genom att ta kvadratroten av S^2 :

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1}} \quad (2.16)$$

Enligt Blom m.fl. (2017, s. 252) är S till skillnad från S^2 , en estimator med bias. Holtzman (1950) bevisar detta på följande vis:

$$\begin{aligned} S^2 &= [\sigma^2 / (n-1)] X_{n-1}^2 \\ S &= [\sigma / (n-1)^{1/2}] X_{n-1} \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$E[S] = [\sigma / (n-1)^{1/2}] E[X_{n-1}] = [\Gamma(n/2)] / [\Gamma[(n-1)/2] [(n-1)/2]^{1/2}] \sigma$$

där X_{n-1}^2 har frihetsgraden $n - 1$. Med andra ord har S en biasfaktor som utgörs av $[\Gamma(n/2)] / [\Gamma[(n-1)/2] [(n-1)/2]^{1/2}]$. Inversen av denna faktor definieras av Holtzman (1950) som C_N , som har följande värde som beror på n :

$$C_N = \Gamma[(n-1)/2] [(n-1)/2]^{1/2} / \Gamma(n/2) \quad (2.18)$$

Av detta följer att:

$$E[C_N S] = \sigma \quad (2.19)$$

Vilket kan tolkas som att produkten $C_N S$ är väntevärdesriktig, med andra ord kan σ estimeras utan bias, med hjälp av C_N .

Från Holtzman (1950) följer det att C_N alltid större än 1. Detta härrör från att S i egenskap av estimator, undervärderar σ . Detta säger vi är ekvivalent med följande:

$$E[\sqrt{S^2}] < \sqrt{E[S^2]} = \sigma \quad (2.20)$$

Väntevärdet av S är alltså lägre än värdet av σ . Enligt Holtzman (1950) minskar denna bias i takt med att n ökar och den kan anses vara försumbar vid $n > 10$. Denna koncentration av $E[S]$ kring det rätta värdet av σ då n växer, gör att S kan anses vara en konsistent estimator.

Utifrån de beräknade värdena av C_N härleder vi väntevärdet för S på följande vis:

$$\begin{aligned} E[C_N S] &= \sigma \\ C_N E[S] &= \sigma \\ E[S] &= \frac{\sigma}{C_N} \end{aligned} \quad (2.21)$$

Bolch (1968) har definierat värdet av C_N mer precist än Holtzman (1950), genom att ha använt sig av fem decimaler istället för endast tre decimaler. Med hjälp av ekvation (2.21) och med värden för C_N från Bolch (1968), upprättar vi en tabell som ger väntevärdet för S givet $\sigma = 1$:

Stickprovsstorlek	$E[S \mid \sigma = 1]$
6	0.9515291073
7	0.9593706529
8	0.9650274068
9	0.9693115949
10	0.9726585677

Tabell 2.1 Väntevärden för S

Enligt Weba (1993, s. 374) kan man för S beräkna MSE på följande vis:

$$E[(S_n - \sigma)^2] = \frac{c_1}{n} + \frac{b_1^2 + c_2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (2.22)$$

Där o står för lilla ordo som generellt används för att ge en övre gräns för en funktion. Koefficienterna b_1 , c_1 och c_2 står för värden som beror på högre moment av en stokastisk variabel X med känd gammafördelad täthetsfunktion. Enligt Weba (1993, s. 374) är koefficientvärdena i praktiken svåra att beräkna och därför är värdena för koefficienterna generellt okända. Således har vi i litteraturstudierna inte funnit korresponderande talvärden för MSE för S , givet olika n .

2.3 Bruggers formel

Som nämnt härledde Holtzman (1950) C_N i syfte att eliminera bias när σ estimeras. Cureton (1968b) byggde vidare på Holtzmans ansträngningar. Han konstruerade kvantiteter, k , som baseras på C_N :

$$k = (n - 1)/C_n^2 = 2[\Gamma(\frac{n}{2})]^2 / [\Gamma(\frac{n-1}{2})]^2 \quad (2.23)$$

Vi skriver om ekvation (2.19) till:

$$E[\hat{\sigma}] = \sigma \quad (2.24)$$

Där $\hat{\sigma}$ är en väntevärdesriktig estimator för σ , under förutsättning att stickprovet samlats från en population som är normalfördelad.

Cureton (1968b) definierade $\hat{\sigma}$ på följande sätt:

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{k}} \quad (2.25)$$

Utifrån ekvation (2.19) definierar vi $\hat{\sigma}$ på följande sätt:

$$\hat{\sigma} = C_N \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n - 1}} \quad (2.26)$$

Cureton (1968b) upprättade även en tabell för olika k värden beroende på n:

Stickprovsstorlek	k
6	4.527
7	5.522
8	6.519
9	7.517
10	8.515

Tabell 2.2 Värden för k

Slutligen visade Cureton (1968b) att k konvergerar mot $n - 1.5$ när n ökar. Brugger (1969) tog fasta på denna notering och föreslog att k kunde ersättas med värdet $n - 1.5$ när $n \geq 6$. Utifrån detta samt ekvation (2.25) kunde han härleda Bruggers formel:

$$\hat{\sigma}_c = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n - 1.5}} \quad (2.27)$$

där $\hat{\sigma}_c$ är en icke-väntevärdesriktig estimator för σ . $\hat{\sigma}_c$ kan skrivas om till:

$$\hat{\sigma}_c = c \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n - 1}} \quad (2.28)$$

Där c till skillnad från C_N är en korrektionsfaktor som inte eliminerar bias. Vi kan visa att det följer av att:

$$E[\hat{\sigma}_c] \neq \sigma \quad (2.29)$$

Av ekvation (2.28) ser man att $\hat{\sigma}_c$ kan definieras som:

$$\hat{\sigma}_c = cS \quad (2.30)$$

vilket innebär att:

$$E[cS] \neq \sigma \quad (2.31)$$

Brugger (1969) lät upprätta en tabell med olika värden för c och C_N beroende på n :

Stickprovsstorlek	c	C_N
6	1.05409	1.05094
7	1.04447	1.04235
8	1.03775	1.03624
9	1.03280	1.03166
10	1.02899	1.02811

Tabell 2.3 Värden för korrektionsfaktorer

Vi noterar av tabell 2.3 att:

$$\frac{c}{C_N} > 1 \quad (2.32)$$

Det gäller även när n går mot oändligheten. Det följer av att k konvergerar mot $n - 1.5$ när n ökar (Cureton, 1968b). Vi ser utifrån tabell 2.2, ekvation (2.25) och ekvation (2.27) att oavsett n så är:

$$\hat{\sigma}_c > \hat{\sigma} \quad (2.33)$$

eftersom:

$$k > n - 1.5 \quad (2.34)$$

Utifrån ekvation (2.33) samt ekvation (2.24), kan vi skriva om ekvation (2.29) till:

$$E[\hat{\sigma}_c] > \sigma \quad (2.35)$$

Detta kan sammanfattas i att Bruggers formel medför att tillhörande estimator, $\hat{\sigma}_c$, har bias som övervärderar θ :

$$E(\hat{\sigma}_c) - \theta = B(\hat{\sigma}_c) > 0 \quad (2.36)$$

Utifrån ekvation (2.19), ekvation (2.31) samt ekvation (2.33) kan vi härleda väntevärdet för $\hat{\sigma}_c$ när $\sigma = 1$ på följande vis:

$$E[\hat{\sigma}_c | \sigma = 1] = \frac{c \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1}}}{C_N \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1}}} \cdot \sigma = \frac{c}{C_N} \quad (2.37)$$

Utifrån ekvation (2.37) och tabell 2.3 kan vi upprätta följande tabell för väntevärdet av $\hat{\sigma}_c$ givet $\sigma = 1$:

Stickprovsstorlek	$E[\hat{\sigma}_c \sigma = 1]$
6	1.002997317
7	1.002033866
8	1.001457191
9	1.001105015
10	1.00085594

Tabell 2.4 Väntevärden för $\hat{\sigma}_c$

Vi kan av tabell 2.4 se att bias avtar med ökat n , vilket visar att $\hat{\sigma}_c$ är en estimator som är konsistent. Det ska poängteras att benämningen Bruggers formel inte härrör från litteraturen. Formeln har inget särskilt namn. Den tillskrivs dock till den framlidne statistikern Richard M. Brugger, eftersom han var först med att föreslå metoden. En metod som förvisso inte eliminerar bias men som adekvat lyckas reducera bias när $n \geq 6$. Det bör dock nämnas att det finns andra algebraiska metoder för att reducera bias. Gurland och Tripathi (1971) påvisar att man kan få lägre bias än för Bruggers formel, om σ istället estimeras med följande metod:

$$\hat{\sigma}_g = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{(n-1.5) + \frac{1}{8(n-1)}}} \quad (2.38)$$

Man kan argumentera för att Bruggers formel är både mer intuitiv och lätthanterlig. Om syftet är att eliminera bias, finns det elimineringsmetoder att tillgå när populationen är normalfördelad. Om man bara önskar att reducera bias vid normalfördelad population, kan man argumentera för att Bruggers formel är lämplig. Just för att den inte fordrar särskilt

avancerade beräkningar. Därmed kan den anses vara hanterbar även för individer som inte har särskilt djup matematisk förankring.

2.4 Bootstrap

Enligt Chernick och LaBudde (2011, s. 1) så kan bootstrap-metoden tillskrivas statistikern Brad Efron, som publicerade den första artikeln inom ämnet år 1979. Bootstrap mottogs med stor entusiasm inom den statistiska vetenskapen och är idag en vida använd datorbaserad metod. Englund (2000, s. 2) sammanfattar den mest kända varianten av bootstrap, som en metod där man slumpar ny data genom dragning med återläggning från ett ursprungligt stickprov. Det kan även uttryckas som en återsamlingsmetod med återläggning (Chernick & LaBudde, 2011, s. 5). Användningsområden för bootstrap är flera, däribland biaskorrigering vid estimering av θ och skattning av medelfelet för $\hat{\theta}$ (Englund, 2000, s. 42). Det finns olika bootstrap-metoder.

Icke-parametrisk bootstrap är den mest kända varianten av bootstrap. Den inleds med att man tar ett stickprov från den population θ tillhör. Utifrån observationerna från detta ursprungliga stickprov, använder man $\hat{\theta}$ för att få ett estimat av θ (Englund, 2000, s. 37). Man plockar nya stickprov med återläggning, s.k. bootstrap-stickprov, från det ursprungliga stickprovet (Englund, 2000, s. 42). Man fortsätter att använda samma $\hat{\theta}$ som ovan för att estimeras, vilket medför att varje bootstrap-stickprov ger ett estimat av θ . Därefter kan man exempelvis beräkna medelvärdet och S för alla estimat som härrör från bootstrap-stickproven (Englund, 2000, s. 43).

Just S av alla bootstrap-estimat är av särskilt intresse eftersom det ger en approximation av medelfelet för $\hat{\theta}$ ovan. Det är ett primärt syfte med bootstrap och Efron och Tibshirani (1993, s. 47) definierar denna approximation av medelfelet på följande sätt:

$$\widehat{se}_B = \left\{ \sum_{b=1}^B [\hat{\theta}^*(b) - \hat{\theta}^*(\cdot)]^2 / (B - 1) \right\}^{1/2} \quad (2.39)$$

där $\hat{\theta}^*(b)$ står för alla estimat från bootstrap-stickproven ($b = 1, 2, \dots, B$). $\hat{\theta}^*(\cdot)$ är medelvärdet av alla $\hat{\theta}^*(b)$ och kan skrivas:

$$\hat{\theta}^*(\cdot) = \sum_{b=1}^B \hat{\theta}^*(b) / B \quad (2.40)$$

Enligt Efron och Tibshirani (1993, s. 47) är gränsvärdet för \widehat{se}_B , när B går mot oändligheten, medelfelet för $\hat{\theta}$. Englund (2000, s. 42) uttrycker det som att man erhåller en skattning av medelfelet för $\hat{\theta}$ med hjälp av bootstrap.

B står alltså för antalet bootstrap-stickprov. Enligt Englund (2000, s. 43) kan man välja att ha 10000 stycken B. Enligt Englund (2000, s. 47) är antalet distinkta B $\binom{2n-1}{n}$ om alla observationer i det ursprungliga stickprovet är distinkta. Detta följer av satsen för dragning med återläggning utan hänsyn till ordning. Med formeln $\binom{2n-1}{n}$ kan vi upprätta följande tabell:

Stickprovsstorlek	Antalet distinkta B (givet att alla observationer i det ursprungliga stickprovet är distinkta)
6	462
7	1716
8	6435
9	24310
10	92378

Tabell 2.5 Antalet distinkta B

Utifrån tabell 2.5 kan man välja ett lämpligt antal B, beroende på n. På så vis kan man minska beräkningsbördan. Vi förmodar att man i teorin kan härleda antalet B som fordras för att få ett väntat antal distinkta B, i fallet då alla observationer i det ursprungliga stickprovet är distinkta. Denna eventuella härledning ligger dock utanför ramarna för denna studie.

Enligt Englund (2000, s. 41-42) är essensen av bootstrap-hypotesen att den empiriska fördelningen, som ges av stickprovet, ganska väl avspeglar den sanna fördelningen. Den empiriska fördelningen konvergerar mot den sanna fördelningen när $n \rightarrow \infty$. Det innebär att icke-parametrisk bootstrap inte uppfyller bootstrap-hypotesen vid liten n. Detta kan få följden att den bakomliggande fördelningen inte approximeras väl av bootstrap (Englund, 2000, s. 46). Följaktligen är icke-parametrisk bootstrap, i regel, inte en pålitlig estimeringsmetod när n är liten. Detta eftersom data som reproduceras i icke-parametrisk bootstrap, då riskerar att inte spegla den sanna fördelningen.

Parametrisk bootstrap särskiljer sig från den icke-parametriska varianten. Den centrala skillnaden mellan dessa bootstrap-varianter, är att den parametriska använder det ursprungliga

stickprovet till att generera en ny population med särskild fördelning, vars parametrar är baserade på observationerna i det ursprungliga stickprovet (Englund, 2000, s. 46). Förenklat kan man säga att man vid den parametriska varianten plockar bootstrap-stickproven från den, av det ursprungliga stickprovet, skapade populationen. Detta istället för att göra dragningarna från det ursprungliga stickprovet, som är fallet vid icke-parametrisk bootstrap (Chalmers, 2021, s. 14-15). Parametrisk bootstrap är inte robust, eftersom den vilar starkt på antagandet att man vet fördelningen av populationen som det ursprungliga stickprovet tas från. Och oftast känner man inte till fördelningen av den bakomliggande populationen (Englund, 2000, s. 41). Med andra ord är parametrisk bootstrap en vanskelig metod eftersom antagandet är svårt att uppfylla. I de fall man uppfyller antagandet, är parametrisk bootstrap ett lämpligt alternativ när n är liten. Detta härrör från att den empiriska fördelningen konvergerar mot den sanna fördelningen när $n \rightarrow \infty$. I parametrisk bootstrap baseras den empiriska fördelningen i första hand på ett antagande om distributionen som det ursprungliga stickprovet kommer från. Det gör att parametrisk bootstrap kan uppfylla bootstrap-hypotesen även när n är liten.

För att använda bootstrap för biaskorrigering vid estimering av θ , kan man enligt Efron och Tibshirani (1993, s. 138) använda sig av följande algebraiska metod:

$$\bar{\theta} = 2\hat{\theta} - \hat{\theta}^*(\cdot) \quad (2.41)$$

där värdet av $\bar{\theta}$ är menat att ge ett biasreducerat estimat av θ . Vi kallar denna $\bar{\theta}$ för $\hat{\theta}_{boot}$ fortsättningsvis.

Denna enkla metod kan förenklat sägas härröra från antagandet att:

$$\hat{\theta} - \theta \approx \hat{\theta}^*(\cdot) - \hat{\theta} \quad (2.42)$$

I händelse av att $(\hat{\theta} - \theta)$ är liten i jämförelse med \widehat{se}_B , menar Efron och Tibshirani (1993, s. 138) att det är säkrare att välja $\hat{\theta}$ än $\hat{\theta}_{boot}$, för att estimeras θ .

2.5 Jackknife

Jackknife är, precis som bootstrap, en återsamlingsmetod som syftar till att skatta medelfelet för $\hat{\theta}$ och korrigera bias vid estimering av θ (Englund, 2000, s. 41). Enligt Chernick och LaBudde (2011, s. 6) introducerades jackknife av Maurice Quenouille men det var John Tukey som vidgade dess användningsområde och populariserade metoden i slutet av 1950-talet.

Den vanligaste varianten av jackknife inleds med att man tar ett stickprov med $n = x$ från den population θ tillhör. Utifrån observationerna från detta ursprungliga stickprov använder man $\hat{\theta}$ för att få ett estimat av θ . Man plockar x nya stickprov utan återläggning, s.k. jackknife-stickprov, från det ursprungliga stickprovet. I varje jackknife-stickprov, plockar man systematiskt bort precis en av de ursprungliga observationerna i taget (Englund, 2000, s. 110-111). Man fortsätter att använda samma $\hat{\theta}$ som ovan för att estimeras, vilket medför att varje jackknife-stickprov ger ett estimat av θ . Därefter kan man exempelvis beräkna medelvärdet för alla estimat som härrör från jackknife-stickproven (Englund, 2000, s. 114). Det ska poängteras att det finns andra varianter av jackknife, däribland deleted-d jackknife (Efron & Tibshirani, 1993, s. 149). I denna studie är dock endast den vanliga jackknife-metoden av intresse.

Ett primärt syfte med jackknife är att ge en skattning av medelfelet för $\hat{\theta}$. Efron och Tibshirani (1993, s. 141) definierar denna approximation av medelfelet på följande sätt:

$$\widehat{se}_{jack} = \left\{ \frac{n-1}{n} \sum_{i=1}^n [\hat{\theta}_i - \hat{\theta}_{(\cdot)}]^2 \right\}^{1/2} \quad (2.43)$$

där $\hat{\theta}_i$ står för alla estimat från jackknife-stickproven ($i = 1, 2, \dots, n$). $\hat{\theta}_{(\cdot)}$ är medelvärdet av alla $\hat{\theta}_i$ och kan skrivas som:

$$\hat{\theta}_{(\cdot)} = \sum_{i=1}^n \hat{\theta}_i / n \quad (2.44)$$

För att använda jackknife för biaskorrigering vid estimering av θ , kan man enligt Englund (2000, s. 114) använda sig av följande algebraiska metod:

$$\bar{\theta} = \hat{\theta} - (n-1)(\hat{\theta}_{(\cdot)} - \hat{\theta}) \quad (2.45)$$

där värdet av $\bar{\theta}$ är menat att ge ett biasreducerat estimat av θ . Vi kallar denna $\bar{\theta}$ för $\hat{\theta}_{jack}$ fortsättningsvis.

Även om jackknife har vissa likheter med bootstrap särskiljer den sig i en del avseenden, utöver ovannämnda skillnader i återsamlingsmetod. \widehat{se}_{jack} är mer konservativ än \widehat{se}_B , vilket ger ett högre estimat av medelfelet för $\hat{\theta}$ (Efron & Tibshirani, 1993, s. 143). Jackknife är, till skillnad från icke-parametrisk bootstrap, lämplig att använda när n är liten (Chernick & LaBudde, 2011, s. 1). Vidare är den oftast, beroende på n , inte en lika datorintensiv metod som bootstrap (Englund, 2000, s.112). En betydande nackdel med jackknife är att den inte är robust. Enligt Efron och Tibshirani (1993, s. 148), vilar den starkt på antagandet att $\hat{\theta}$ är ”smooth”. Att $\hat{\theta}$ är smooth är ekvivalent med att små ändringar i sticksprovsobservationerna medför små ändringar av estimatet.

2.6 Medelfel

Enligt Wackerly m.fl. (2008, s. 397) är medelfelet för $\hat{\theta}$, detsamma som standardavvikelsen för dess samplingfördelning. Det definieras på följande sätt:

$$\sigma_{\hat{\theta}} = \sqrt{\sigma_{\hat{\theta}}^2} \quad (2.46)$$

där $\sigma_{\hat{\theta}}^2$ står för variansen av $\hat{\theta}$. I fallet med stickprovsmedelvärdet, fordras att man känner till σ , för att få fram medelfelet. Det är sällan man känner till σ . Samtidigt som det i praktiken är omöjligt att få fram hela samplingfördelningen. Detta eftersom man måste ta alla möjliga stickprov, givet n , exakt en gång. Således brukar man approximera medelfelet. (Cortinhas & Black, 2012, s. 249–250).

Det är viktigt att poängtera att medelfelet för S , inte härleds på samma sätt som medelfelet för stickprovsmedelvärdet. Framförallt kan man inte härleda ett exakt värde för medelfelet, utan att ha hela samplingfördelningen, vilket som nämnt bara är möjligt i teorin. Av Rao (1973, s. 438) och av Wilks (1943, s. 199), kan man vid normalfördelning få fram exakta medelfelet för S^2 :

$$se(S^2) = \sqrt{\frac{2\sigma^4}{n-1}} \quad (2.47)$$

Av Rao (1973, s. 386) framgår att:

$$\text{se}(g(X)) \approx |g'(X)| \cdot \text{se}(X) \quad (2.48)$$

Om man ser S som en funktion av S^2 , kan man ersätta funktionen $g(X)$ med S . Vidare kan man ersätta $\text{se}(X)$ med $\text{se}(S^2)$. Detta ger oss följande slututtryck för detta Rao approximerade medelfelet för S ($\text{se}(S)$):

$$\text{se}(S) \approx \frac{1}{2\sigma} \text{se}(S^2) \quad (2.49)$$

där $\frac{1}{2\sigma}$ härleds som första derivatan av \sqrt{X} . X i sin tur ges av värdet för σ^2 .

Det ska dock påpekas att denna approximation av medelfelet för S , vilar på antagandet att n är stor (Rao, 1973, s. 382).

2.7 Samplingfördelningen för stickprovsstandardavvikelsen

Samplingfördelningen för stickprovsmedelvärde, är normalfördelat när n är liten, om den bakomliggande populationen är normalfördelad (Cortinhas & Black, 2012, s. 248-249). Detta är känt för de flesta statistiker och påpekas brukligen i kontexten av den centrala gränsvärdesatsen.

Vad som kan förmodas vara mindre känt är samplingfördelningen för S , när den bakomliggande populationen är normalfördelad. Croucher (1988) angriper denna fråga genom att härleda täthetsfunktionen för S , när $\sigma = 1$. Den ser ut på följande sätt:

$$g(S) = \frac{2^{\frac{(n-1)}{2}(n-1)/2}}{\Gamma^{(n-1)-2}} \exp\left[-\frac{(n-1)S^2}{2}\right] S^{n-2} \quad (2.50)$$

Enligt Croucher (1988) kan samplingfördelningen för S uppfattas vara normalfördelad, trots att den i själva verket inte har någon särskild fördelning. Den har en positiv skevhet, som är svår att notera när n är stor.

2.8 Monte Carlo-simuleringar

Enligt Blom m.fl. (2017, s. 206) bygger Monte Carlo-simuleringar (MC) på stora talens lag, som säger att medelvärdet av ett antal oberoende observationer, går mot väntevärdet när antalet observationer går mot oändligheten. Detta under förutsättning att observationerna har

samma väntevärde och varians. Feltermen i estimatet minskar ju fler simuleringar man använder.

Det finns dock olika varianter av MC. Vid exempelvis Markov Chain Monte Carlo, kan utfallen vara beroende (Englund, 2000, s. 219). Vad de olika MC-varianterna har gemensamt är att de är datorbaserade metoder som kan vara praktiska alternativ till konventionell matematisk analys (Kroese, Brereton, Taimre & Botev, 2014, s. 386). När man exempelvis har en komplex integral som är svår att beräkna, kan MC komma väl tillhands för att ge en approximation av värdet för integralen (Chalmers, 2021, s. 40).

Avseende antalet simuleringar som fordras för att få ett pålitligt estimat, finns det inget entydigt svar. En konservativ rekommendation är att använda sig av åtminstone 100000 simuleringar (VRC, 2021). Det förekommer dock i studier, att man endast har använt sig av 1000 simuleringar (Heijungs, 2019). Antalet simuleringar man väljer, är i mångt och mycket en avvägning mellan felmarginalen och tiden det tar att simulera.

3 Metod

I detta kapitel redovisas metoderna som ligger till grund för vår studie. Det som avhandlas är vedertaget inom statistiken. Det innebär att om man har tillräcklig teoretisk förankring i ämnet, bör man kunna regenerera resultaten i fulla drag med enbart hjälp av beskrivningarna i detta kapitel. I de fall ytterligare information fordras, hänvisar vi till det teoretiska ramverket i föregående kapitel. I det teoretiska ramverket finns procedurer samt beräkningsformler specificerade för respektive metod för biaskorrigering som ska utvärderas. Det ska dock påpekas att viss information som förekommer i det teoretiska ramverket upprepas i detta kapitel. Detta i syfte att underlätta för läsaren och för att betona aspekter av särskilt intresse.

I teorin är det möjligt att kunna besvara studiens frågeställning utan en simuleringsstudie. Detta är dock förenat med stora svårigheter, särskilt med beaktande att det i vissa fall hade behövts beräkningar av flerdimensionella integraler. Vidare är det oklart huruvida det ens är möjligt att med konventionell matematisk analys besvara frågeställningen utan en simuleringsstudie. Således kommer vi, mot bakgrund av det teoretiska ramverket, att använda oss av MC.

Vi kommer i detta kapitel ta i beaktande studiens avgränsningar. Det finns ytterligare analyser som kan göras med hjälp av datan som ackumuleras. Vi lägger dock tyngdpunkten på det som är centralt för studien och som är inom dess ramar. Primärt vill vi besvara frågeställningen som lyder: ”Hur väl, avseende bias samt medelkvadratfel, estimeras σ av metoderna: Bruggers formel, jackknife och icke-parametrisk bootstrap?” För att kunna göra detta fordras att var och en av de biaskorrigerande metoderna utvärderas för sig. Först därefter är det möjligt att påvisa eventuella skillnader och därmed kunna besvara frågeställningen.

I avsnitt 3.1 ges en beskrivning av metoden för att utvärdera bootstrap och S . I avsnitt 3.2 ges en redogörelse för metodiken som är relaterad till utvärderingen av jackknife. Vidare presenteras metoden för att bedöma Bruggers formel i avsnitt 3.3. Slutligen presenteras i avsnitt 3.4 metoden för att besvara studiens frågeställning.

3.1 Bootstrap och stickprovsstandardavvikelse

I detta avsnitt kommer vi att redogöra för hur vi både kommer att generera och analysera de resultat i studien som är relaterade till icke-parametrisk bootstrap, parametrisk bootstrap samt S . Vidare kommer vi med hänvisning till studiens syfte samt frågeställning motivera tillvägagångssättet för analysen. Dessförinnan kommer vi att ge en bakgrund till varför S inkluderas i resultatet, trots att S inte är av primärt intresse för studien.

Av tabell 2.1 får vi värden för $E[S \mid \sigma = 1]$ för olika n . Dessa värden kan jämföras med våra simulerade värden för S . Detta i syfte att ge en indikation om validiteten av vår MC-studie. Vidare vet vi mot bakgrund av det teoretiska ramverket, hur samplingfördelningen för S bör se ut. Genom att jämföra den teoretiska samplingfördelningen med den MC-genererade, får vi ytterligare en indikation om studiens validitet. Det primära syftet med att inkludera S är dock att få medelfelet för S . Det förekommer inte i litteraturen en härledning som ger ett exakt värde för detta medelfel. Således kommer vi approximera det sanna värdet med hjälp av MC. Denna approximation av medelfelet för S kommer utgöra en estimand som kommer att estimeras av skattningarna för $se(S)$, \widehat{se}_B och \widehat{se}_{jack} . Vi får därmed ett svar på hur väl icke-parametrisk bootstrap samt jackknife estimerar medelfelet för $\hat{\theta}$, när $\hat{\theta} = S$. Vidare får vi en uppfattning om hur väl $se(S)$ estimerar medelfelet för S , när n är liten.

Icke-parametrisk bootstrap genomförs i enlighet med förfarandet, teorierna och beräkningsformlerna som finns beskrivna i det teoretiska ramverket. Det praktiska genomförandet ser ut på följande vis:

Steg 1. Ett s.k. ursprungligt stickprov med $n = x$ samplas slumpmässigt från en distribution som är normalfördelad, där $\mu = 0$ och $\sigma = 1$. Med andra ord ska $\sigma = 1$ estimeras, vilket fortsättningsvis kommer att gälla i studien. Variablerna för stickprovet är oberoende och likafördelade. x har ett bestämt värde genom hela denna procedur. Värdet av x beror av vilken n man undersöker för stunden.

Steg 2. S beräknas för detta ursprungliga stickprov. Värdet av detta kallar vi för s .

Steg 3. Vi har $B = 10000$. Med andra ord samplar vi slumpmässigt 10000 bootstrap-stickprov med återläggning från det ursprungliga stickprovet. Varje bootstrap-stickprov har $n = x$.

Steg 4. Vi tar S av varje bootstrap-stickprov. Detta ger oss 10000 stycken $\hat{\theta}^*(b)$.

Steg 5. Utifrån värdena för $\hat{\theta}^*(b)$ beräknar vi $\hat{\theta}^*(\cdot)$.

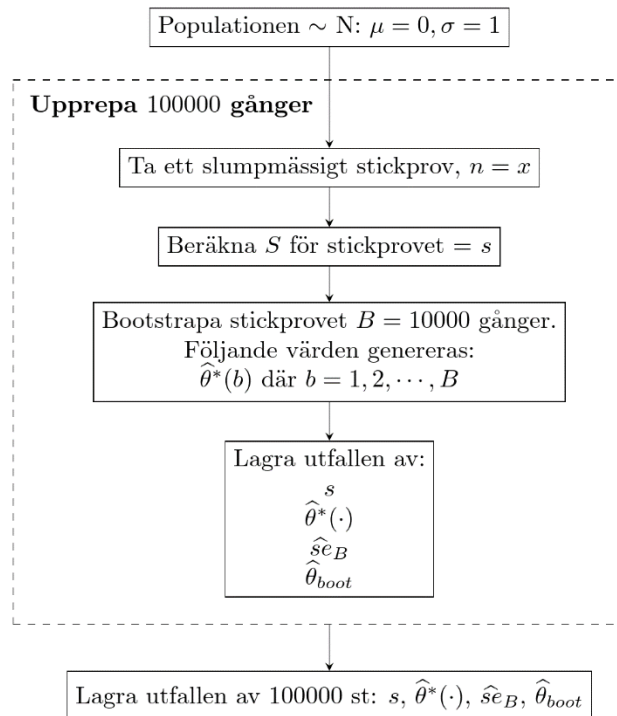
Steg 6. Utifrån värdet för $\hat{\theta}^*(\cdot)$ och värdena för $\hat{\theta}^*(b)$ beräknar vi \widehat{se}_B .

Steg 7. Utifrån värdet för s och $\hat{\theta}^*(\cdot)$ beräknar vi $\hat{\theta}_{boot}$.

Steg 8. Vi lagrar värdena som vi får av s , \widehat{se}_B , $\hat{\theta}^*(\cdot)$ och $\hat{\theta}_{boot}$. Vi lagrar alltså 4 värden.

Steg 9. Här inleds vår MC. Vi upprepar steg 1-8, 100000 gånger. Vi lagrar alltså totalt 400000 värden.

Metoden för icke-parametrisk bootstrap



Figur 3.1 Metoden för icke-parametrisk bootstrap

Parametrisk bootstrap genomförs i enlighet med förfarandet, teorierna och beräkningsformlerna som finns beskrivna i det teoretiska ramverket. Det praktiska genomförandet ser ut på följande vis:

Steg 1. Ett s.k. ursprungligt stickprov med $n = x$ samplas slumpmässigt från en distribution som är normalfördelad, där $\mu = 0$ och $\sigma = 1$. Variablerna för stickprovet är oberoende och likafördelade. x har ett bestämt värde genom hela denna procedur. Värdet av x beror av vilken n man undersöker för stunden.

Steg 2. S beräknas för detta ursprungliga stickprov. Värdet av detta kallar vi för s .

Steg 3. Medelvärdet beräknas för detta ursprungliga stickprov.

Steg 4. Vi genererar en distribution som är normalfördelad, med $\mu =$ värdet som ges av steg 3, $\sigma = s$.

Steg 5. Vi har $B = 10000$. Med andra ord samplar vi slumpmässigt 10000 bootstrap-stickprov från distributionen som skapats i steg 4. Varje bootstrap-stickprov har $n = x$.

Steg 6. Vi tar S av varje bootstrap-stickprov. Detta ger oss 10000 stycken $\hat{\theta}^*(b)$.

Steg 7. Utifrån värdena för $\hat{\theta}^*(b)$ beräknar vi $\hat{\theta}^*(\cdot)$.

Steg 8. Utifrån värdet för $\hat{\theta}^*(\cdot)$ och värdena för $\hat{\theta}^*(b)$ beräknar vi \hat{se}_B .

Steg 9. Utifrån värdet för s och $\hat{\theta}^*(\cdot)$ beräknar vi $\hat{\theta}_{boot}$.

Steg 10. Vi lagrar värdena som vi får av s , \hat{se}_B , $\hat{\theta}^*(\cdot)$ och $\hat{\theta}_{boot}$. Vi lagrar alltså 4 värden.

Steg 11. Här inleds vår MC. Vi upprepar steg 1-10, 5000 gånger. Vi lagrar alltså totalt 20000 värden.

Det ska noteras att antalet MC är mindre för parametrisk bootstrap jämfört med icke-parametrisk bootstrap. Detta härrör från att parametrisk bootstrap inte är central för vår studie. Följaktligen har vi inte samma behov av att minska felmarginalen av approximationerna genom ett ökat antal MC. Ett led i att utvärdera icke-parametrisk bootstrap, kommer att vara att jämföra den med den parametrisk bootstrap. Detta i syfte att kunna ge väl underbyggda förslag på vidare studier inom fältet. För att avgränsa denna del, som inte är central för studien, kommer endast bias samt MSE att jämföras.

För att utvärdera S , beräknas stickprovsmedelvärde (\bar{x}), S^2 , S , median och skevhet av de lagrade värdena s . De härrör från MC av icke-parametrisk bootstrap. Anledningen till att de lagrade värdena betraktas som stickprovsvärden är för att vi inte har samplat varje möjligt variabelvärde. Samma princip gäller fortsättningsvis i detta kapital avseende analys av lagrad data, om inte annat anges.

\bar{x} av s ger oss en approximation av $E[S \mid \sigma = 1]$, på så vis kan vi beräkna en skattning för bias av S vid estimering av σ med ekvation (2.4). Tillsammans med värdet för S^2 av s kan vi beräkna en skattning för MSE för S med ekvation (2.8). S av s ger oss en approximation av medelfelet för S . Denna approximation av medelfelet för S kommer, som redan nämnt, utgöra en estimand som kommer att estimeras av skattningarna för $se(S)$, \hat{se}_B och \hat{se}_{jack} . Medianen av s kommer att beräknas i syfte att få en approximation av skevheten för samplingfördelningen för S . Detta är relaterat till att vi vill se huruvida studiens resultat överensstämmer med teorin om positiv skevhet i samplingfördelningen för S . Slutligen

kommer vi att studera en simulerad samplingfördelning för S , genom att skapa ett histogram av de lagrade s värdena.

För att utvärdera icke-parametrisk bootstrap, beräknas \bar{x} och S^2 av de lagrade värdena av utfallen från $\hat{s}_{\hat{e}_B}$, och $\hat{\theta}_{\text{boot}}$. De härrör från MC av icke-parametrisk bootstrap. \bar{x} av $\hat{\theta}_{\text{boot}}$ utfallen ger oss en approximation av $E[\hat{\theta}_{\text{boot}} | \sigma = 1]$, på så vis kan vi beräkna en skattning för bias av $\hat{\theta}_{\text{boot}}$ vid estimering av σ . Tillsammans med värdet för S^2 av $\hat{\theta}_{\text{boot}}$ utfallen, kan vi approximera MSE för $\hat{\theta}_{\text{boot}}$. \bar{x} av $\hat{s}_{\hat{e}_B}$ utfallen ger oss en approximation av $E[\hat{s}_{\hat{e}_B} | \sigma = 1]$, på så vis kan vi beräkna en skattning för bias av $\hat{s}_{\hat{e}_B}$ vid estimering av medelfelet för S . Tillsammans med värdet för S^2 av $\hat{s}_{\hat{e}_B}$ utfallen kan vi approximera MSE för $\hat{s}_{\hat{e}_B}$.

För att vidare utvärdera icke-parametrisk bootstrap, beräknas \bar{x} av de lagrade värdena av utfallen från $\hat{\theta}^*(\cdot)$. \bar{x} av $\hat{\theta}^*(\cdot)$ utfallen ger oss en approximation av $E[\hat{\theta}^*(\cdot) | \sigma = 1]$. Detta värde kan användas i syfte att verifiera att våra resultat överensstämmer med ekvation (2.41). Vi uttrycker denna verifikation på följande sätt:

$$\hat{E}[\hat{\theta}_{\text{boot}} | \sigma = 1] = 2\hat{E}[S | \sigma = 1] - \hat{E}[\hat{\theta}^*(\cdot) | \sigma = 1] \quad (3.1)$$

För att utvärdera parametrisk bootstrap, beräknas \bar{x} och S^2 av de lagrade värdena av utfallen från $\hat{\theta}_{\text{boot}}$. De härrör från MC av parametrisk bootstrap. \bar{x} av $\hat{\theta}_{\text{boot}}$ utfallen ger oss en approximation av $E[\hat{\theta}_{\text{boot}} | \sigma = 1]$, på så vis kan vi beräkna en skattning för bias av $\hat{\theta}_{\text{boot}}$ vid estimering av σ . Tillsammans med värdet för S^2 av $\hat{\theta}_{\text{boot}}$ utfallen, kan vi approximera MSE för $\hat{\theta}_{\text{boot}}$. Med dessa värden kan vi slutligen jämföra bias samt MSE vid icke-parametrisk bootstrap och parametrisk bootstrap.

3.2 Jackknife

I detta avsnitt kommer vi att redogöra för hur vi både kommer att generera och analysera de resultat i studien som är relaterade till jackknife. Vidare kommer vi med hänvisning till studiens syfte samt frågeställning, motivera tillvägagångssättet för analysen.

Jackknife genomförs i enlighet med förfarandet, teorierna och beräkningsformlerna som finns beskrivna i det teoretiska ramverket. Det praktiska genomförandet ser ut på följande vis:

Steg 1. Ett s.k. ursprungligt stickprov med $n = x$ samplas slumpmässigt från en distribution som är normalfördelad, där $\mu = 0$ och $\sigma = 1$. Variablerna för stickprovet är oberoende och likafördelade. x har ett bestämt värde genom hela denna procedur. Värdet av x beror av vilken n man undersöker för stunden.

Steg 2. S beräknas för detta ursprungliga stickprov. Värdet av detta kallar vi för s .

Steg 3. Vi plockar x nya stickprov utan återläggning, s.k. jackknife-stickprov, från det ursprungliga stickprovet. I varje jackknife-stickprov plockar vi systematiskt bort precis en av de ursprungliga observationerna i taget. Varje jackknife-stickprov har $n = x - 1$.

Steg 4. Vi tar S av varje jackknife-stickprov. Detta ger oss x stycken $\hat{\theta}_i$.

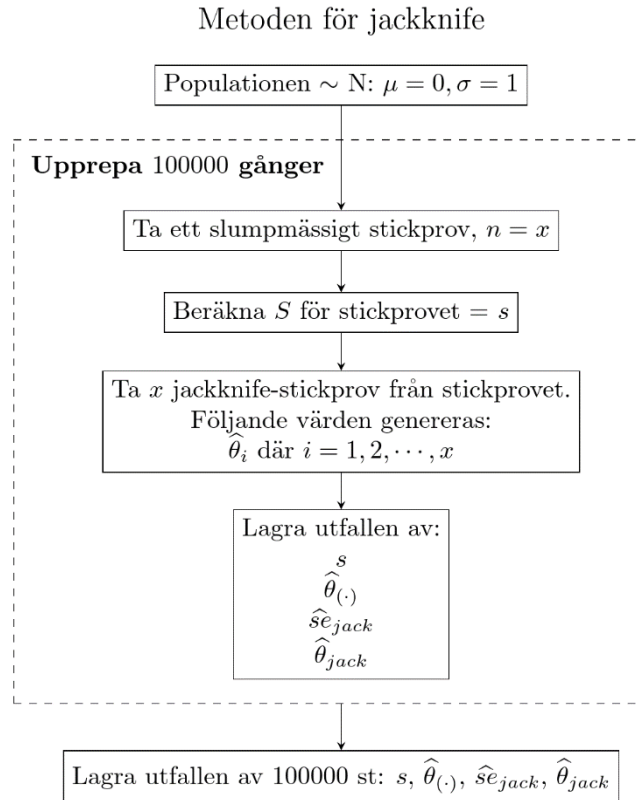
Steg 5. Utifrån värdena för $\hat{\theta}_i$ beräknar vi $\hat{\theta}_{(\cdot)}$.

Steg 6. Utifrån värdet för $\hat{\theta}_{(\cdot)}$ och värdena för $\hat{\theta}_i$ beräknar vi \widehat{se}_{jack} .

Steg 7. Utifrån värdet för s och $\hat{\theta}_{(\cdot)}$ beräknar vi $\hat{\theta}_{jack}$.

Steg 8. Vi lagrar värdena som vi får av s , \widehat{se}_{jack} , $\hat{\theta}_{(\cdot)}$ och $\hat{\theta}_{jack}$. Vi lagrar alltså 4 värden.

Steg 9. Här inleds MC. Vi upprepar steg 1-8, 100000 gånger. Vi lagrar alltså totalt 400000 värden.



Figur 3.2 Metoden för jackknife

För att utvärdera jackknife, beräknas \bar{x} och S^2 av de lagrade värdena av utfallen från \widehat{se}_{jack} , och $\widehat{\theta}_{jack}$. De härrör från MC av jackknife. \bar{x} av $\widehat{\theta}_{jack}$ utfallen ger oss en approximation av $E[\widehat{\theta}_{jack} | \sigma = 1]$, på så vis kan vi beräkna en skattning för bias av $\widehat{\theta}_{jack}$ vid estimering av σ . Tillsammans med värdet för S^2 av $\widehat{\theta}_{jack}$ utfallen kan vi approximera MSE för $\widehat{\theta}_{jack}$. \bar{x} av \widehat{se}_{jack} utfallen ger oss en approximation av $E[\widehat{se}_{jack} | \sigma = 1]$, på så vis kan vi beräkna en skattning för bias av \widehat{se}_{jack} vid estimering av medelfelet för S. Tillsammans med värdet för S^2 av \widehat{se}_{jack} utfallen kan vi approximera MSE för \widehat{se}_{jack} .

För att vidare utvärdera jackknife, beräknas \bar{x} av de lagrade värdena av utfallen från $\widehat{\theta}_{(.)}$. \bar{x} av $\widehat{\theta}_{(.)}$ utfallen ger oss en approximation av $E[\widehat{\theta}_{(.)} | \sigma = 1]$. Detta värde kan användas i syfte att verifiera att våra resultat överensstämmer med ekvation (2.45) Vi uttrycker denna verifikation på följande sätt:

$$\widehat{E}[\widehat{\theta}_{jack} | \sigma = 1] = \widehat{E}[S | \sigma = 1] - (n - 1)\{\widehat{E}[\widehat{\theta}_{(.)} | \sigma = 1] - \widehat{E}[S | \sigma = 1]\} \quad (3.2)$$

3.3 Bruggers formel

I detta avsnitt kommer vi att redogöra för hur vi både kommer att generera och analysera de resultat i studien som är relaterade till Bruggers formel. Vidare kommer vi med hänvisning till studiens syfte samt frågeställning, motivera tillvägagångssättet för analysen.

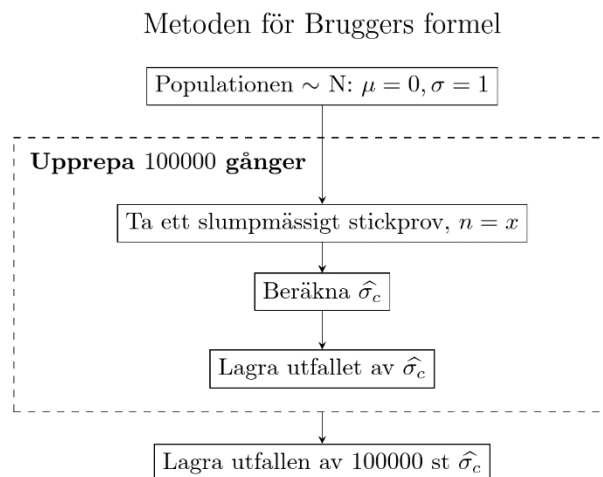
Bruggers formel genomförs i enlighet med förfarandet, teorierna och beräkningsformlerna som finns beskrivna i det teoretiska ramverket. Det praktiska genomförandet ser ut på följande vis:

Steg 1. Ett stickprov med $n = x$ samplas slumpmässigt från en distribution som är normalfördelad, där $\mu = 0$ och $\sigma = 1$. Variablerna för stickprovet är oberoende och likafördelade. x har ett bestämt värde genom hela denna procedur. Värden av x beror av vilken n man undersöker för stunden.

Steg 2. $\hat{\sigma}_c$ beräknas för detta stickprov.

Steg 3. Vi lagrar värdet som vi får av $\hat{\sigma}_c$. Vi lagrar alltså ett värde.

Steg 4. Här inleds MC. Vi upprepar steg 1-3, 100000 gånger. Vi lagrar alltså totalt 100000 värden.



Figur 3.3 Metoden för Bruggers formel

För att utvärdera Bruggers formel, beräknas \bar{x} och S^2 av de lagrade värdena av utfallen från $\hat{\sigma}_c$. De härrör från MC av Bruggers formel. \bar{x} av $\hat{\sigma}_c$ utfallen ger oss en approximation av

$E[\hat{\sigma}_c | \sigma = 1]$, på så vis kan vi beräkna en skattning för bias av $\hat{\sigma}_c$ vid estimering av σ . Detta värde kan jämföras med det teoretiska värdet för $E[\hat{\sigma}_c | \sigma = 1]$ som ges av tabell 2.4, på så

vis får vi ytterligare en indikation om studiens validitet. Tillsammans med värdet för S^2 av $\hat{\sigma}_c$ utfallen kan vi approximera MSE för $\hat{\sigma}_c$.

3.4 Metoden för att besvara studiens frågeställning

Det approximerade medelfelet för S kommer att estimeras av skattningarna för $se(S)$, \widehat{se}_B och \widehat{se}_{jack} . Värdet för $se(S)$ ges av ekvation (2.49). Eftersom $se(S)$ antar ett givet värde beroende på n , får vi det faktiska värdet för $se(S)$ snarare än en skattning. Vidare har $se(s)$ ingen varians vid given n . Till följd av detta har dess MSE samma värde som dess kvadrerade bias vid given n . När vi har fått dessa värden för $se(S)$ kommer vi kunna jämföra både approximerad bias och approximerad MSE mellan samtliga estimatorer.

Vidare kommer approximerad bias samt approximerad MSE för $\hat{\theta}_{boot}$, $\hat{\theta}_{jack}$ och $\hat{\sigma}_c$ att jämföras med varandra. Denna jämförelse utmynnar i ett svar på studiens frågeställning.

4 Resultat

I detta kapitel presenteras resultat och tillhörande slutsatser av studien. I avsnitt 4.1 ges resultaten av bootstrap och S . I avsnitt 4.2 ges en redogörelse av resultaten anknutna till jackknive. Vidare presenteras resultaten av Bruggers formel i avsnitt 4.3. I avsnitt 4.4 utvärderas estimatorer för medelfelet för S . Slutligen ges svaret på studiens frågeställning i avsnitt 4.5. Samtliga resultat är baserade på att $\sigma = 1$ estimeras samt på villkoret att den bakomliggande populationen är normalfördelad, om inte annat anges.

4.1 Bootstrap och stickprovsstandardavvikelse

4.1.1 Stickprovsstandardavvikelse

Stickprovsstorlek

S	6	7	8	9	10
Bias	-0.048107	-0.0405319	-0.0359027	-0.0316287	-0.0273438
MSE	0.0973701346	0.0811776639	0.0699581869	0.0612070207	0.0548157584
S²	0.09505588	0.079534829	0.068669183	0.060206646	0.054068075
S	0.3083113	0.2820192	0.2620481	0.2453704	0.2325254
\bar{x}	0.9518933	0.9594681	0.9640973	0.9683713	0.9726562
Median	0.9325341	0.9441425	0.9515062	0.95791	0.9630849
Skevhets	0.1883732448	0.1630271981	0.1441464372	0.1279041808	0.1234871545

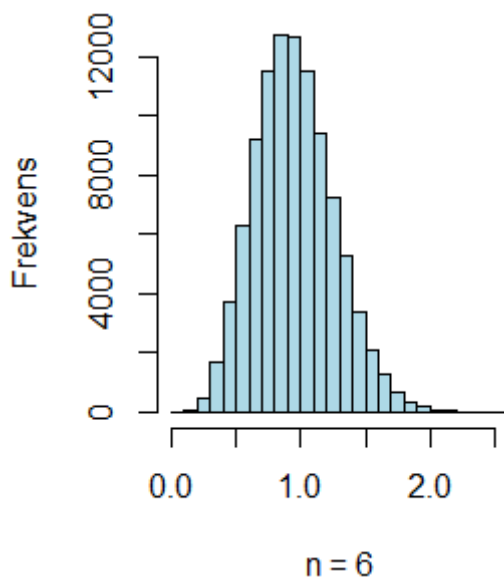
Tabell 4.1 analys av utfallen från S vid icke-parametrisk bootstrap

Det ska noteras i tabell 4.1 att \bar{x} av utfallen från S nästan är identiska med motsvarande värden i tabell 2.1. Det visar att MC av S ger en utmärkt approximation av $E[S \mid \sigma = 1]$. Att värdena väl överensstämmer med tabell 2.1 indikerar att vår studie har hög validitet i hänseendet att approximera väntevärden för studiens estimatorer. Fortsättningsvis kan det förekomma att väntevärden samt andra MC-approximerade statistiska egenskaper anges som faktiska värden av de stokastiska variabler som har undersökts. Det här i syfte att förenkla redogörelsen av resultaten. Följaktligen kan det fortsättningsvis förekomma att skevhets, väntevärden, bias och MSE åsyftas samt betecknas som faktiska värden när de i själva verket är skattningar. På intet sätt ska detta betraktas som att det har fastslagits att approximationerna inte har någon felmarginal eller en försumbar sådan.

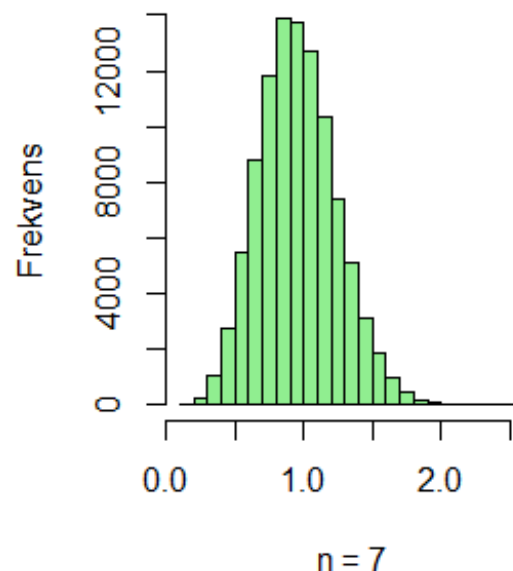
Vi noterar av tabell 4.1 att bias av S minskar med en ökande n . Detta indikerar att S är en konsistent estimator, vilket överensstämmer med det teoretiska ramverket. Vidare noteras det att S^2 av S minskar med en ökande n . Av båda dessa observationer följer att även MSE för S

minskar med en ökande n . Av särskilt intresse är de angivna MSE värdena för S . Av det teoretiska ramverket framgår det att dessa värden i praktiken är svåra att härleda matematiskt. Således har vi i litteraturstudierna inte funnit korresponderande talvärden för MSE för S givet olika n . Nu har vi genom MC fått värden som andra statistiker kan referera till vid $6 \leq n \leq 10$. Dessa värden är dock approximerade och det är oklart huruvida de är i linje med värden som potentiellt kan härledas matematiskt.

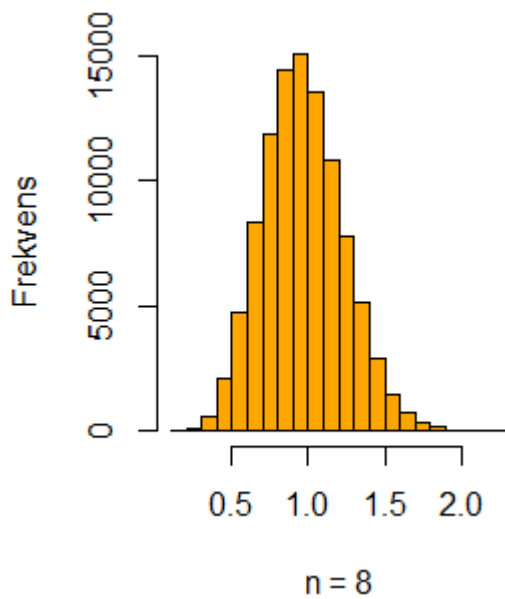
Det förekommer inte i litteraturen en härledning som ger exakta värden av medelfelet för S . Således utgör S av S i tabell 4.1 en approximation av de sanna värdena. Denna approximation av medelfelet för S kommer att utgöra en estimand som kommer att estimeras av $se(S)$, \hat{se}_B och \hat{se}_{jack} . Vi får därmed i avsnitt 4.4 ett svar på hur väl icke-parametrisk bootstrap samt jackknife estimerar medelfelet för $\hat{\theta}$, när $\hat{\theta} = S$. Vidare får vi en uppfattning om hur väl $se(S)$ estimerar medelfelet för S , när n är liten.



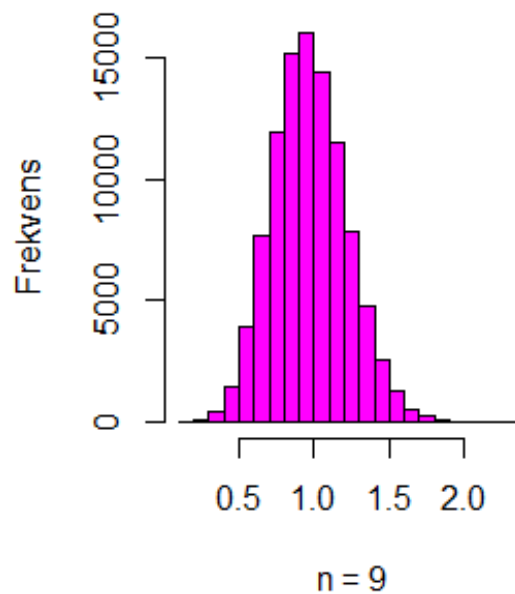
Figur 4.1 Samplingfördelning för S



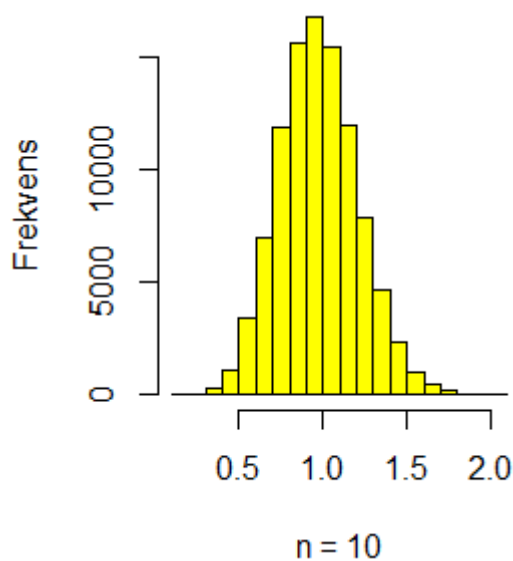
Figur 4.2 Samplingfördelning för S



Figur 4.3 Samplingfördelning för S



Figur 4.4 Samplingfördelning för S



Figur 4.5 Samplingfördelning för S

Figur 4.1–4.5 visar att samplingfördelningen för S kan uppfattas vara normalfördelad, trots att den i själva verket inte har någon särskild fördelning. Av särskilt intresse är värdet för skevhet från tabell 4.1. Vi noterar att den positiva skevheten minskar vid ökad n , åtminstone minskar den vid $6 \leq n \leq 10$. Det går dock inte att med säkerhet utesluta att detta härrör från ett

approximationsfel. Oavsett är resultaten av MC i högsta grad relevant data som kan användas för vidare studier om samplingfördelningen för S .

4.1.2 Icke-parametrisk bootstrap

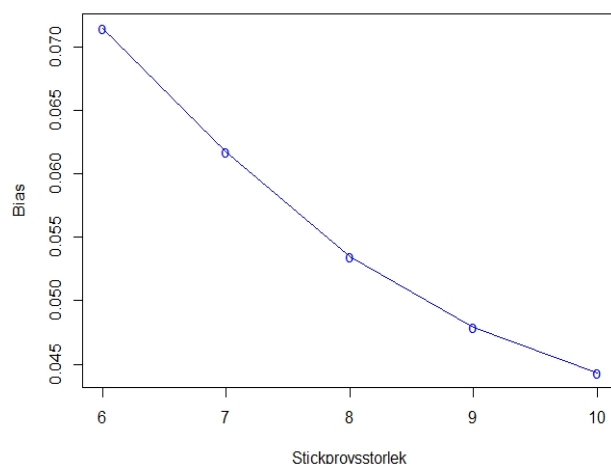
Stickprovsstorlek

$\hat{\theta}_{boot}$	6	7	8	9	10
Bias	0.0714970	0.0617264	0.0534618	0.0478933	0.0442939
MSE	0.125853981	0.1014114915	0.0850479351	0.0729369812	0.0644035057
S²	0.12074216	0.097601343	0.082189771	0.070643213	0.062441565
\bar{x}	1.071497	1.0617264	1.0534618	1.0478933	1.0442939

Tabell 4.2 analys av utfallen från $\hat{\theta}_{boot}$ vid icke-parametrisk bootstrap

I tabell 4.2 har \bar{x} av utfallen från $\hat{\theta}_{boot}$ angetts. Det ger $\hat{E}[\hat{\theta}_{boot} | \sigma = 1]$ vid icke-parametrisk bootstrap. Vi noterar vidare av tabell 4.2 att bias av $\hat{\theta}_{boot}$ minskar med en ökande n . Detta indikerar att $\hat{\theta}_{boot}$ är en konsistent estimator när den härrör från icke-parametrisk bootstrap. Vidare noteras det att S^2 av $\hat{\theta}_{boot}$ minskar med en ökande n . Av båda dessa observationer följer att även MSE för $\hat{\theta}_{boot}$ minskar med en ökande n . Av särskilt intresse är bias av $\hat{\theta}_{boot}$. Av tabell 4.1 och tabell 4.2 framgår det att bias av S är lägre än bias av $\hat{\theta}_{boot}$. Detta är i linje med det teoretiska ramverket, där det framgår att vid icke-parametrisk bootstrap är det säkrare att välja S istället för $\hat{\theta}_{boot}$ när $(S - \sigma)$ är liten i jämförelse med \widehat{se}_B . Av tabell 4.1 och tabell 4.4 framgår det att $\hat{E}[(S - \sigma) | \sigma = 1]$ är liten i jämförelse med $\hat{E}[\widehat{se}_B]$. Denna information är dock till föga nytta om man inte på förhand känner till värdet av σ .

Slutsatsen av icke-parametrisk bootstrap vid biaskorrigering är att den är dålig på att estimerar σ när n är liten, vilket påvisas av dess höga bias. Detta överensstämmer med det teoretiska ramverket, som säger att icke-parametrisk bootstrap inte är en pålitlig metod för estimering när n är liten. Detta eftersom data som reproduceras i icke-parametrisk bootstrap vid liten n riskerar att inte spegla den sanna fördelningen. Det innebär att icke-parametrisk bootstrap inte uppfyller bootstrap-hypotesen vid liten n .



Figur 4.6 bias av $\hat{\theta}_{boot}$ vid icke-parametrisk bootstrap

Stickprovsstorlek

$\hat{\theta}^*(\cdot)$	6	7	8	9	10
\bar{x}	0.8322896	0.8572098	0.8747328	0.8888493	0.9010185

Tabell 4.3 analys av utfallen från $\hat{\theta}^*(\cdot)$ vid icke-parametrisk bootstrap

I tabell 4.3 har \bar{x} av utfallen från $\hat{\theta}^*(\cdot)$ angetts. Det ger $\hat{E}[\hat{\theta}^*(\cdot) | \sigma = 1]$. Genom att använda ekvation (3.1) och värdena för $\hat{E}[S | \sigma = 1]$ från tabell 4.1, har vi verifierat att våra resultat överensstämmer med ekvation (2.41). Värdet av $\hat{E}[\hat{\theta}_{boot} | \sigma = 1]$ från tabell 4.2 kan konstateras ha beräknats i enlighet med förfarandet, teorierna och beräkningsformlerna som finns beskrivna för icke-parametrisk bootstrap i det teoretiska ramverket. Studiens mätmetod för $\hat{E}[\hat{\theta}_{boot} | \sigma = 1]$ vid icke-parametrisk bootstrap har åtminstone i det hänseendet hög validitet.

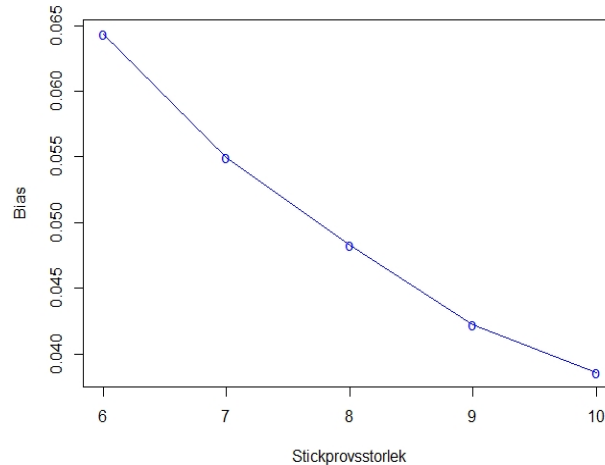
Stickprovsstorlek

\widehat{se}_B	6	7	8	9	10
Bias	-0.0643805	-0.0549699	-0.0483277	-0.0422462	-0.0385731
MSE	0.07715874878	0.0667879779	0.0590571306	0.0526731164	0.048014935
S²	0.07301390	0.063766288	0.056721564	0.050888375	0.046527051
\bar{x}	0.2439308	0.2270493	0.2137204	0.2031242	0.1939523

Tabell 4.4 analys av utfallen från \widehat{se}_B vid icke-parametrisk bootstrap

I tabell 4.4 har \bar{x} av utfallen från \widehat{se}_B angetts. Det ger $\hat{E}[\widehat{se}_B | \sigma = 1]$. Vi noterar vidare av tabell 4.4 att bias av \widehat{se}_B minskar med en ökande n. Detta indikerar att \widehat{se}_B är en konsistent

estimator vid estimering av medelfelet för S . Vidare noteras det att S^2 av \widehat{se}_B minskar med en ökande n . Av båda dessa observationer följer att även MSE för \widehat{se}_B minskar med en ökande n . Av särskilt intresse är värdet för bias av \widehat{se}_B . Vi noterar att bias är förhållandevis hög. Detta härrör från att icke-parametrisk bootstrap inte är en pålitlig metod för estimering när n är liten.



Figur 4.7 Absolutvärden för bias av \widehat{se}_B vid icke-parametrisk bootstrap.

4.1.3 Parametrisk bootstrap

Stickprovsstorlek

$\widehat{\theta}_{boot}$	6	7	8	9	10
Bias	-0.00048	-0.00199	-0.0005	-0.0057	0.00256
MSE	0.1043302	0.085759	0.0761153	0.06151448	0.0580526
S^2	0.10433	0.085755	0.076115	0.061482	0.058046
\bar{x}	0.99952	0.99801	0.9995	0.9943	1.00256

Tabell 4.5 analys av utfallen från $\widehat{\theta}_{boot}$ vid parametrisk bootstrap

I tabell 4.5 har \bar{x} av utfallen från $\widehat{\theta}_{boot}$ angetts. Det ger $\widehat{E}[\widehat{\theta}_{boot} | \sigma = 1]$ vid parametrisk bootstrap. Vi noterar vidare av tabell 4.5 att bias av $\widehat{\theta}_{boot}$ inte alltid minskar med en ökande n . Detta indikerar att $\widehat{\theta}_{boot}$ inte är en konsistent estimator när den härrör från parametrisk bootstrap. S^2 av $\widehat{\theta}_{boot}$ minskar dock med en ökande n . Av båda dessa observationer följer MSE för $\widehat{\theta}_{boot}$.

Det ska dock understrykas att man inte kan dra slutsatsen att $\widehat{\theta}_{boot}$ inte är en konsistent estimator vid parametrisk bootstrap. Antalet MC för denna underordnade del av studien var lågt. Det kan förklara fluktuation av värdet för $\widehat{E}[\widehat{\theta}_{boot} | \sigma = 1]$ i tabell 4.5. Ett större antal MC hade fordrats för att kunna dra slutsatser. Detta härrör från att MC bygger på stora talens

lag, som säger att medelvärdet av ett antal oberoende observationer går mot väntevärdet när antalet observationer går mot oändligheten. I detta fall har vi inte tillräckligt med observationer för att få tillförlitliga resultat.

Vi har däremot fått en indikation om att parametrisk bootstrap vid biaskorrigering är bra på att estimerar σ när n är liten. Detta överensstämmer med det teoretiska ramverket. Vi känner till att vid parametrisk bootstrap baseras den empiriska fördelningen i första hand på ett antagande om distributionen som det ursprungliga stickprovet kommer från. Har man rätt i antagandet om den bakomliggande populationen är parametrisk bootstrap en bra metod för estimering när n är liten, vilket indikeras av våra resultat. Av tabell 4.2 och tabell 4.5 framgår det att parametrisk-bootstrap estimerar σ avsevärt bättre än icke-parametrisk bootstrap. Man ska dock ta i beaktande att parametrisk bootstrap inte är robust, eftersom den vilar starkt på antagandet att man vet fördelningen av populationen som stickprovet tas från. Oftast känner man inte till fördelningen av den bakomliggande populationen; följaktligen kan det vara vanskligt att använda parametrisk bootstrap.

Det ska slutligen understrykas att $\hat{\theta}_{boot}$ fortsättningsvis endast härrör från icke-parametrisk bootstrap.

4.2 Jackknife

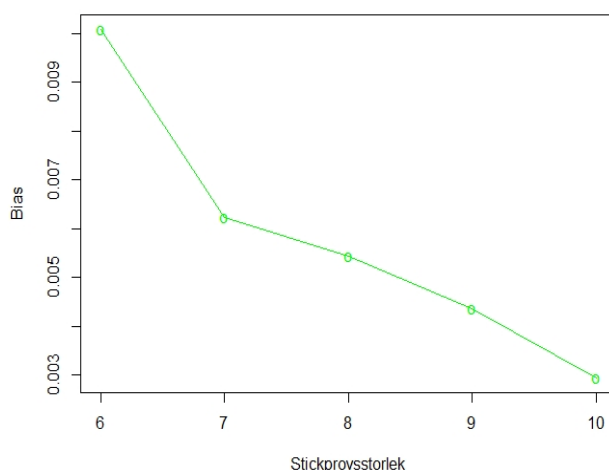
Stickprovsstorlek

$\hat{\theta}_{jack}$	6	7	8	9	10
Bias	0.01009364	0.006249	0.005452	0.00436	0.002939
MSE	0.12163486	0.09771799	0.075343	0.06551997	0.0579576
s²	0.121533	0.097679	0.075313	0.065501	0.057949
\bar{x}	1.01009364	1.006249	1.005452	1.00436	1.002939

Tabell 4.6 analys av utfallen från $\hat{\theta}_{jack}$

I tabell 4.6 har \bar{x} av utfallen från $\hat{\theta}_{jack}$ angetts. Det ger $\hat{E}[\hat{\theta}_{jack} | \sigma = 1]$. Vi noterar vidare av tabell 4.6 att bias av $\hat{\theta}_{jack}$ minskar med en ökande n. Detta indikerar att $\hat{\theta}_{jack}$ är en konsistent estimator. Vidare noteras det att S^2 av $\hat{\theta}_{jack}$ minskar med en ökande n. Av båda dessa observationer följer att även MSE för $\hat{\theta}_{jack}$ minskar med en ökande n.

Slutsatsen av jackknife vid biaskorrigering är att den är utmärkt för att estimeras σ när n är liten, vilket påvisas av dess försumbara bias. Detta överensstämmer med det teoretiska ramverket, som säger att jackknife är lämplig att använda när n är liten. En betydande nackdel med jackknife är att den inte är robust. Den vilar starkt på antagandet att $\hat{\theta}$ är "smooth". Att $\hat{\theta}$ är smooth, är ekvivalent med att små ändringar i sticksprovsobservationerna medför små ändringar av estimatet. Av detta kan vi dra slutsatsen att S är smooth.



Figur 4.8 bias av $\hat{\theta}_{jack}$.

Stickprovsstorlek

$\hat{\theta}_{(\cdot)}$	6	7	8	9	10
\bar{x}	0.940611	0.951418	0.960068	0.965759	0.969369

Tabell 4.7 analys av utfallen från $\hat{\theta}_{(\cdot)}$

Stickprovsstorlek

S	6	7	8	9	10
\bar{x}	0.95219144	0.959251	0.965741	0.970048	0.972726

Tabell 4.8 analys av utfallen från S vid jackknife

I tabell 4.7 har \bar{x} av utfallen från $\hat{\theta}_{(\cdot)}$ angetts. Det ger $\hat{E}[\hat{\theta}_{(\cdot)} | \sigma = 1]$. Genom att använda ekvation (3.2) och värdena för $\hat{E}[S | \sigma = 1]$ från tabell 4.8, har vi verifierat att våra resultat

överensstämmer med ekvation (2.45). Värdet av $\hat{E}[\hat{\theta}_{jack} | \sigma = 1]$ från tabell 4.6 kan konstateras ha beräknats i enlighet med förfarandet, teorierna och beräkningsformlerna som finns beskrivna för jackknife i det teoretiska ramverket. Studiens mätmetod för $\hat{E}[\hat{\theta}_{jack} | \sigma = 1]$ har åtminstone i det hänseendet hög validitet.

Stickprovsstorlek

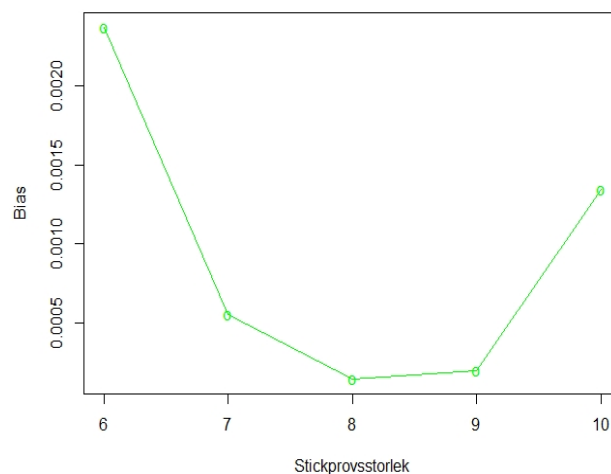
\widehat{se}_{jack}	6	7	8	9	10
Bias	0.0023757	0.0005508	-0.000142	-0.0001984	-0.0013454
MSE	0.02390564395	0.01742030338	0.01354502016	0.0104660	0.00853081
S²	0.0239	0.01742	0.013545	0.010466	0.008529
\bar{x}	0.310687	0.28257	0.261906	0.245172	0.23118

Tabell 4.9 analys av utfallen från \widehat{se}_{jack}

I tabell 4.9 har \bar{x} av utfallen från \widehat{se}_{jack} angetts. Det ger $\hat{E}[\widehat{se}_{jack} | \sigma = 1]$. Vi noterar vidare av tabell 4.9 att bias av \widehat{se}_{jack} är nära noll oavsett n. Det går inte att dra någon slutsats huruvida \widehat{se}_{jack} är en konsistent estimator eller ej vid estimering av medelfelet för S.

S^2 av \widehat{se}_{jack} minskar med en ökande n. Av båda dessa observationer följer att även MSE för \widehat{se}_B minskar med en ökande n.

Av särskilt intresse är bias av \widehat{se}_{jack} . Vi noterar från tabell 4.4 att den är avsevärt lägre än bias av \widehat{se}_B . Detta härrör från att \widehat{se}_{jack} är mer konservativ än \widehat{se}_B , vilket ger ett högre estimat av medelfelet för S. Vidare är jackknife tillskillnad från icke-parametrisk bootstrap, lämplig att använda för estimering när n är liten.



Figur 4.9 Absolutvärden för bias av \widehat{se}_{jack} .

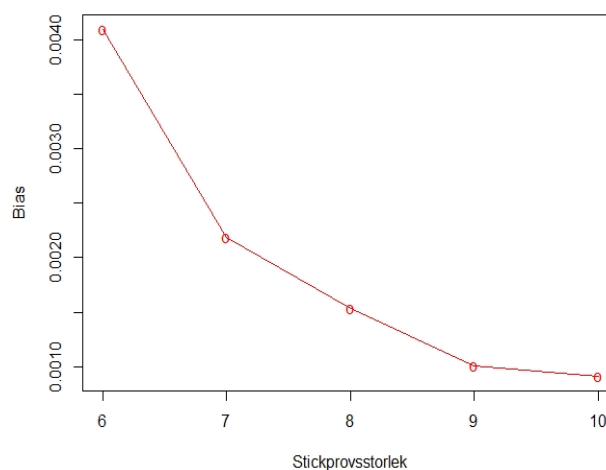
4.3 Bruggers formel

Stickprovsstorlek

$\hat{\sigma}_c$	6	7	8	9	10
Bias	0.004096	0.00219	0.001534	0.001008	0.000909
MSE	0.1051293772	0.0863179461	0.0742511132	0.0638957661	0.05735789
S²	0.1051126	0.08631315	0.07424876	0.06389475	0.05735706
\bar{x}	1.004096	1.00219	1.001534	1.001008	1.000909

Tabell 4.10 analys av utfallen från $\hat{\sigma}_c$

Det ska noteras i tabell 4.10 att \bar{x} av utfallen från $\hat{\sigma}_c$ nästan är identiska med motsvarande värden i tabell 2.4. Det visar att MC av $\hat{\sigma}_c$ ger en utmärkt approximation av $E[\hat{\sigma}_c \mid \sigma = 1]$. Att värdena väl överensstämmer med tabell 2.4 indikerar hög validitet i denna del av studien. Vi noterar vidare av tabell 4.10 att bias av $\hat{\sigma}_c$ minskar med en ökande n . Detta indikerar att $\hat{\sigma}_c$ är en konsistent estimator, vilket överensstämmer med det teoretiska ramverket. Vidare noteras det att S^2 av $\hat{\sigma}_c$ minskar med en ökande n . Av båda dessa observationer följer att även MSE för $\hat{\sigma}_c$ minskar med en ökande n . Av särskilt intresse är de angivna MSE värdena för $\hat{\sigma}_c$. Av det teoretiska ramverket framgår det att dessa värden i praktiken är svåra att härleda matematiskt. Således har vi i litteraturstudierna inte funnit korresponderande talvärden för MSE för $\hat{\sigma}_c$ givet olika n . Nu har vi genom MC fått värden som andra statistiker kan referera till vid $6 \leq n \leq 10$. Dessa värden är dock approximerade och det är oklart huruvida de är i linje med värden som potentiellt kan härledas matematiskt.



Figur 4.10 bias av $\hat{\sigma}_c$.

4.4 Estimering av medelfelet för stickprovsstandardavvikelsen

Stickprovsstorlek

	6	7	8	9	10
Bias(se(S))	0.007916466	0.0066559346	0.0052131419	0.0046296	0.0031768604
MSE(se(S))	0.00006267	0.00004430	0.000027177	0.00002143	0.0000101
se(S)	0.31622777	0.288675135	0.267261242	0.25	0.235702260

Tabell 4.11 värden av $se(S)$

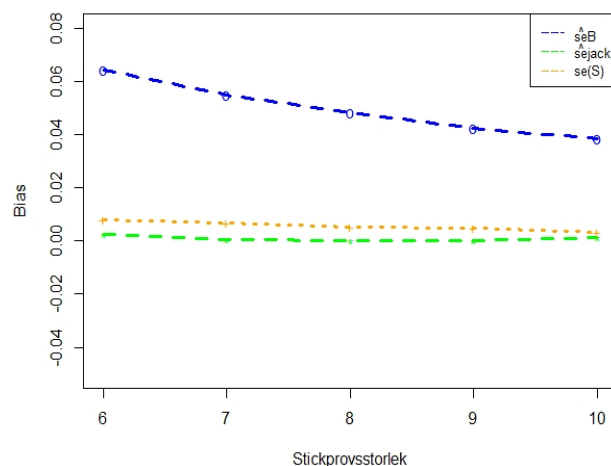
I tabell 4.11 har värdena för $se(S)$ angetts vid olika n . Det motsvarar det faktiska värdet av $E[se(S) | \sigma = 1]$. Vi noterar vidare av tabell 4.11 att bias av $se(S)$ minskar med en ökande n . Detta indikerar att $se(S)$ är en konsistent estimator. Eftersom $se(S)$ antar ett givet värde beroende på n , har $se(s)$ ingen varians vid given n . Till följd av detta har dess MSE samma värde som dess kvadrerade bias vid given n .

Stickprovsstorlek

	6	7	8	9	10
MSE\widehat{se}_B	0.12163486	0.09771799	0.075343	0.06551997	0.0579576
MSE\widehat{se}_{jack}	0.02390564395	0.01742030338	0.01354502016	0.0104660	0.00853081
MSE$se(S)$	0.00006267	0.00004430	0.000027177	0.00002143	0.0000101

Tabell 4.12 MSE värden

Avseende MSE ser vi av tabell 4.12 att $se(S)$ har lägst MSE, följt av \widehat{se}_{jack} . \widehat{se}_B har högst MSE. Skillnaderna är återkommande i alla n . Noterbart är att $se(S)$ har betydligt lägre MSE än övriga estimatorer, vilket följer av att den inte har någon varians vid given n . \widehat{se}_{jack} i sin tur har avsevärt lägre MSE än \widehat{se}_B .



Figur 4.11 Absolutvärden för bias av \widehat{se}_B , \widehat{se}_{jack} och $se(S)$.

Vi ser av figur 4.11 att \widehat{se}_B har avsevärt större bias än \widehat{se}_{jack} och $se(S)$. Med beaktande att \widehat{se}_B även har störst MSE, kan man dra slutsatsen att icke-parametrisk bootstrap inte är en lämplig metod för att skatta medelfelet för S när n är liten. Detta härrör från att icke-parametrisk bootstrap inte är en pålitlig metod för estimering när n är liten. Skillnaden i bias mellan \widehat{se}_{jack} och $se(S)$ är försumbar, även om \widehat{se}_{jack} har marginellt lägre bias vid just denna MC. Man kan argumentera för att $se(S)$ är en bättre estimator med bakgrund i att den har lägre MSE. Eftersom $se(S)$ är beroende av att man på förhand känner till σ är den dock inget praktiskt alternativ. Således argumenterar vi för att \widehat{se}_{jack} är en mer lämplig metod än både \widehat{se}_B och $se(S)$ om man önskar estimeras medelfelet för S och inte känner till värdet för σ . En observant läsare kan ställa sig frågan hur det kommer sig att medelfelet som ska approximeras härrör från S av S utfallen från just icke-parametrisk bootstrap. Förklaringen till detta ligger i att den primära jämförelsen är mellan \widehat{se}_{jack} och $se(S)$. \widehat{se}_B hade på förhand avskrivits som en dålig estimator vid liten n , detta mot bakgrund av det teoretiska ramverket. Således utformades studien på sådant sätt att värdet som skulle estimeras inte skulle härröra från \widehat{se}_{jack} . Anledningen till att \widehat{se}_B ändå inkluderades i denna jämförelse, var för att få enhetlighet i studien. Värt att notera är att vi har lyckats visa att $se(S)$ är en bra estimator vid liten n . Detta är av särskilt intresse i beaktande att $se(S)$ enligt det teoretiska ramverket är baserad på stora n .

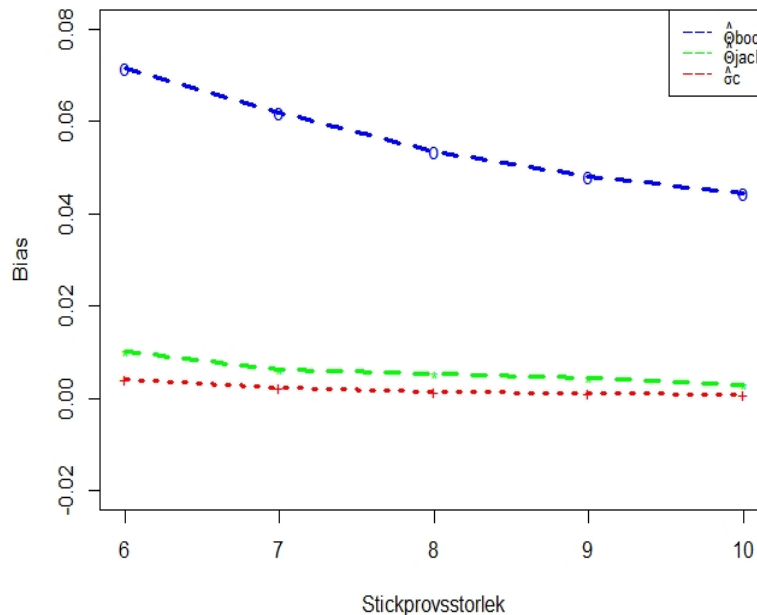
4.5 Studiens frågeställning

Stickprovsstorlek

	6	7	8	9	10
MSE $\hat{\theta}_{boot}$	0.125853981	0.1014114915	0.0850479351	0.0729369812	0.0644035057
MSE $\hat{\theta}_{jack}$	0.12163486	0.09771799	0.075343	0.06551997	0.0579576
MSE $\hat{\sigma}_c$	0.1051293772	0.0863179461	0.0742511132	0.0638957661	0.05735789

Tabell 4.13 MSE värden

Avseende MSE ser vi av tabell 4.13 att $\hat{\sigma}_c$ har lägst MSE, följt av $\hat{\theta}_{jack}$. $\hat{\theta}_{boot}$ har högst MSE. Skillnaderna är inte nämnvärda dock återkommande i alla n.



Figur 4.12 Bias av $\hat{\theta}_{boot}$, $\hat{\theta}_{jack}$ och $\hat{\sigma}_c$.

Av figur 4.12 framgår det att $\hat{\sigma}_c$ har lägst bias, följt av $\hat{\theta}_{jack}$. $\hat{\theta}_{boot}$ har högst bias. Skillnaderna är återkommande i alla n. Med beaktande att $\hat{\theta}_{boot}$ även har störst MSE, kan man dra slutsatsen att icke-parametriskt bootstrap inte är en lämplig metod för att estimeras σ när n är liten, varken avseende bias eller MSE. Detta härrör från att icke-parametrisk bootstrap inte är en lämplig metod för estimering när n är liten.

Skillnaden i bias mellan $\hat{\sigma}_c$ och $\hat{\theta}_{jack}$ är inte nämnvärd men reell. Tar man även hänsyn till MSE, är $\hat{\sigma}_c$ att föredra framför $\hat{\theta}_{jack}$. Särskilt med hänsyn till att beräkningen av $\hat{\sigma}_c$ inte fordrar någon programvara. Slutsatsen vi kan dra är att $\hat{\sigma}_c$ är den bästa estimatorn i studien för att estimeras σ , både avseende bias och MSE.

Med det sagt ska inte $\hat{\theta}_{jack}$ avskrivas som estimator. Snarare visar vår studie på att den väl estimerar σ , både avseende bias och MSE. Detta härrör från att jackknife är en lämplig metod för estimering vid liten n .

Resultaten och tillhörande slutsatser är baserade på MC. För att återknyta till påpekandet om att MC ger approximationer snarare än helt exakta värden, är det på sin plats att förtydliga att det föreligger en felmarginal i resultaten vi har erhållit från MC. Således är det önskvärt med icke-simuleringsbaserade studier inom detta fält för att verifiera resultaten av denna omfattande studie.

5 Diskussion

I detta kapitel kommer vi med studiens resultat som utgångspunkt ha en konkluderande diskussion. I avsnitt 5.1 sammanfattas de viktigaste resultaten. I avsnitt 5.2 framförs kritik mot delar av studien. Slutligen presenteras förslag på vidare studier i avsnitt 5.3.

5.1 Viktigaste resultaten

Studien är omfattande och angränsar till flera olika områden inom statistik. Av svaret på studiens frågeställning framgår det att σ estimeras väl av framförallt $\hat{\sigma}_c$ men även av $\hat{\theta}_{jack}$. $\hat{\theta}_{boot}$ som härrör från icke-parametrisk bootstrap visade sig vara en dålig estimator för σ när n är liten. $\hat{\theta}_{boot}$ från parametrisk bootstrap visade däremot lovande resultat. Dock var antalet MC för få för att kunna dra några säkra slutsatser. Med frågeställningen i beaktande är särskilt resultatet för $\hat{\sigma}_c$ intressant i åtanke att den estimerade σ väl, både i avseende på bias och MSE. Man bör överväga att införa $\hat{\sigma}_c$ som ett alternativ till S i den generella litteraturen om avvikelsemått. Det kan vara ett pedagogiskt sätt att belysa att S är icke-väntevärdesriktig. Fördelen med $\hat{\sigma}_c$ är att den är intuitiv och hanterbar även för individer som inte har en särskilt djup statistisk förankring. Med det sagt är vi inte odelat positiva till att införliva $\hat{\sigma}_c$ i litteraturen. Man kan problematisera följderna av detta. Exempelvis fordrar t -fördelning att man använder utfall från S . Att införa $\hat{\sigma}_c$ som ett alternativ till S är med andra ord förenat med svårigheter.

Ytterligare en bäring av studien var att vi fick MC värden för MSE för både $\hat{\sigma}_c$ och S . Vi känner inga av teorin härledda MSE värden för varken $\hat{\sigma}_c$ eller S . På så vis kan våra resultat för MSE utgöra referensvärden. Våra resultat är dock approximerade och det är oklart vad felmarginalen är.

En sekundär del av studien var att studera medelfelet för S . Även där var resultaten i linje med det teoretiska ramverket. \widehat{se}_{jack} visade sig vara en bra estimator medan det motsatta kan sägas om \widehat{se}_B . I kontexten av medelfelet lyckades vi påvisa att $se(S)$ är en bra estimator vid liten n . Detta är av särskilt intresse i beaktande att $se(S)$ enligt det teoretiska ramverket baseras på stor n . Relaterat till detta är frågan om samplingfördelningen för S vid normalfördelad population. Våra resultat indikerar att den positiva skevheten minskar vid ökad n .

5.2 Kritik

Studien har hög reliabilitet. Dessutom har vi med hjälp av referensvärden visat på hög validitet. Det finns dock anledning till kritik. Ytterligare teoretisk framställning kring MC

hade varit önskvärt för att bättre motivera att resultaten som frambringats, de facto är approximationer med liten felmarginal.

Även om resultaten förhållandevis enkelt kan regenereras, hade det varit önskvärt att vi hade presenterat delresultat av studiens MC. Detta i syfte att påvisa konvergens i studiens MC.

5.3 Förslag till vidare studier

I detta avsnitt ges förslag till vidare studier. Dessa förslag är dels baserade på våra resultat men även av begrundanden under framarbetningen av studien.

Med utgångspunkt från denna studie föreslås att man studerar $\hat{\theta}_{boot}$ som härrör från parametrisk bootstrap, med ett större antal MC. Studiens resultat av $\hat{\theta}_{boot}$ från parametrisk bootstrap var lovande och det hade varit intressant att se om dessa resultat upprepas vid större antal MC.

Frågan om samplingfördelning för S väcker liv till frågan om hur samplingfördelningen ser ut för andra statistiska egenskaper samt vid icke-normalfördelad population. Vi föreslår vidare studier inom området för att vidga förståelsen om samplingfördelningar.

I anslutning till studien om bootstrap lyftes frågan om det går att härleda antalet B som fordras för att få ett väntat antal distinkta B , i fallet då alla observationer i det ursprungliga stickprovet är distinkta. Det är en fråga som fordrar vidare studier för att kunna besvaras.

Man ska göra en distinktion mellan att förmedla saker på ett akademiskt vis och att uttrycka sig diffust. Ansträngningar har gjorts för att hålla språket enkelt, vilket är förenat med betydande svårigheter när komplexa teoretiska resonemang behöver föras. I denna process har vi noterat allvarliga brister inom den svenska statistiska litteraturen. Det saknas i vissa fall enhetlighet för både beteckningar och benämningar av en del statistiska egenskaper. Det förekommer i litteraturen att man inte särskiljer mellan en stokastisk variabel och dess realiserade värde. Det ger upphov till förvirring och i slutändan kan det leda till att inläringen försvåras. Man bör inom det svenska statistiska samfundet göra en översyn av språket i syfte att få enhetlighet. Ett förslag är att man upprättar en officiell svensk förteckning med statistiska benämningar och beteckningar.

Referenser

- Blom, G., Enger, J., Englund, G., Grandell, J., & Holst, L. (2017). *Sannolikhetssteori och statistikteori med tillämpningar*. Studentlitteratur, Lund.
- Bolch, B.W. (1968). More on Unbiased Estimation of the Standard Deviation. *The American Statistician*, 22(3), 27.
- Brown, L.D., Cai, T.T., & DasGupta, A. (2001). Interval Estimation for a Binomial Proportion. *Statistical Science*. 16(2), 101-133.
- Brugger, R.M. (1969). A Note on Unbiased Estimation of the Standard Deviation. *The American Statistician*. 23(4), 32.
- Chalmers. (u.å.). *Chapter 3 Bootstrap*. Hämtad 2021-02-05 från <http://www.math.chalmers.se/Stat/Grundutb/CTH/tms150/1112/Boot.pdf>
- Chernick, M.R., & LaBudde, R.A. (2011). *An Introduction to Bootstrap Methods with Applications to R*. John Wiley & Sons.
- Cortinhas, C., & Black, K. (2012). *Statistics for Business and Economics*. John Wiley & Sons.
- Croucher, J.S. (1988). The distribution of sample standard deviations. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 19(1), 125-127.
- Cureton, E. (1968a). Priority Correction to "Unbiased Estimation of the Standard Deviation". *The American Statistician*, 22(3), 27.
- Cureton, E. (1968b). Unbiased Estimation of the Standard Deviation. *The American Statistician*, 22(1), 22.
- Dahmström, K. (2005). *Från datainsamling till rapport – att göra en statistisk undersökning*. Studentlitteratur, Lund.
- Djurfeldt, G., Larsson, R., & Stjärnhagen, O. (2010). *Statistisk verktygslåda – samhällsvetenskaplig orsaksanalys med kvantitativa metoder*. Studentlitteratur, Lund.
- Efron, B., & Tibshirani, R.J. (1993). *An Introduction to the Bootstrap*. Springer-Science+Business Media.
- Englund, Gunnar. (2000). Datorintensiva metoder i matematisk statistik. Hämtad 2021-02-05 från

<https://docplayer.se/53829204-Datorintensiva-metoder-i-matematisk-statistik-gunnar-englund.html>

Gurland, J., & Tripathi, R.C. (1971). A Simple Approximation for Unbiased Estimation of the Standard Deviation. *The American Statistician*, 25(4), 30-32.

Heijungs, R. (2019). On the number of Monte Carlo runs in comparative probabilistic LCA. *The International Journal of Life Cycle Assessment*, 25, 394-402. doi: 10.1007/s11367-019-01698-4

Holtzman, W. (1950). The Unbiased Estimate of the Population Variance and Standard Deviation. *The American Journal of Psychology*, 63(4), 615-617.

Kroese, D.P., Brereton, T., Taimre, T., & Botev, Z.I. (2014). Why the Monte Carlo method is so important today. *WireS Comput Stat*, 6, 386-392. doi: 10.1002/wics.1314

Newcombe, R.G. (1998). Two-sided confidence intervals for the single proportion: comparison of seven methods. *Statistics in Medicine*, 17(8), 857-872. doi: 10.1002/(sici)1097-0258(19980430)17:8<857::aid-sim777>3.0.co;2-e

Oxford College. (u.å.). *Bessel's Correction*. Hämtad 2021-02-05 från <http://mathcenter.oxford.emory.edu/site/math117/besselCorrection/>

Rao, C. R. (1973). *Linear Statistical Inference and Its Applications*. John Wiley & Sons.

SBU. (2016). *Värdering av effektivitet i klinisk vardag*. Hämtad från SBU: <https://www.sbu.se/sv/publikationer/sbu-bereder/vardering-av-effektivitet-i-klinisk-vardag/>

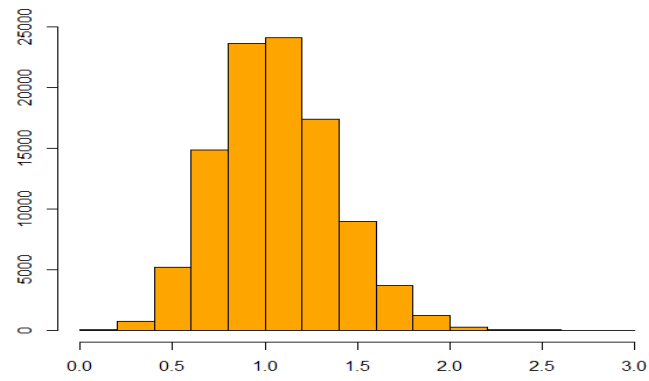
VRC. (u.å.). *Optimal numbers of trials for Monte Carlo Simulation*. Hämtad 2021-02-05 från https://www.valuationresearch.com/wp-content/uploads/kb/SpecialReport_MonteCarloSimulationTrials.pdf

Wackerly, D.D., Mendenhall, W., & Scheaffer, R.L. (2008). *Mathematical Statistics with Applications*. Brooks/Cole, Belmont, USA.

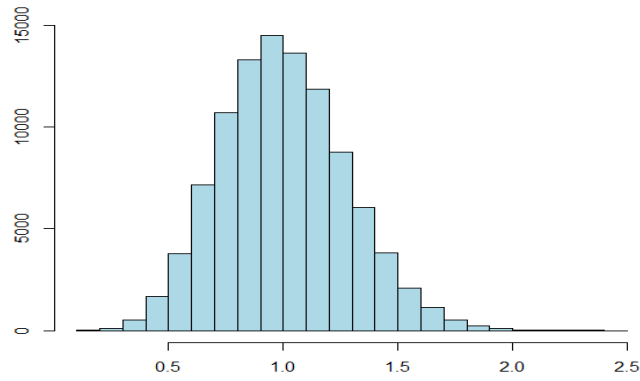
Weba, M. (1993). Representations for bias and variance of the sample standard deviation. *Statistical Papers*, 34, 369-375.

Wilks, S.S. (1943). *Mathematical statistics*. Princeton University Press.

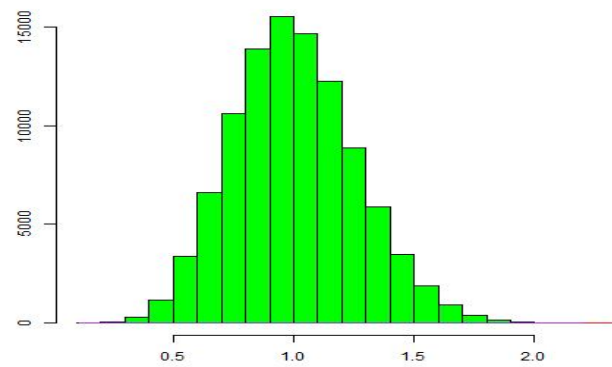
Bilaga



Figur B.1 Samplingfördelningen för $\hat{\theta}_{boot}$ vid icke-parametrisk bootstrap, $n = 7$



Figur B.2 Samplingfördelningen för $\hat{\delta}_c$, $n = 8$



Figur B.3 Samplingfördelningen för $\hat{\theta}_{jack}$, $n = 9$