GÖTEBORGS UNIVERSITET

ÄMNESLÄRARPROGRAMMET

VAD = DETTA?

Elevers och studenters situationsbundna förståelse för likhetstecknet och hur vi utvecklar denna på bästa sätt

Josefin Norrby & Fredrich Risebrandt

Ämneslärarprogrammet med inriktning mot arbete i gymnasieskolan

Självständigt arbete (examensarbete):	15 hp
Program och kurs:	Ämneslärarprogrammet, LGMA2G
Nivå:	Grundnivå
Termin/år:	HT/2019
Handledare:	Anders Södergren
Examinator:	Anna Holmlund
Rapport nr:	HT19-3001-003-LGMA2G
Nyckelord:	Matematik, likhetstecknet

Abstract

Denna litteraturstudie sammanfattar forskningsresultat som rör förståelse för likhetstecknet bland individer i olika åldrar och på olika utbildningsnivåer. En korrekt förståelse för likhetstecknet konstateras i de flesta situationer innebära förståelse för ekvivalensrelationens tre aspekter, men i många situationer anses det tillräckligt med förståelsen att de båda leden ska ha samma värde. Det medges även att den operationella förståelse som många elever har kan anses vara korrekt inom aritmetik, men klassas dock som ett missförstånd i andra sammanhang. Problemen som orsakas av bristande förståelse för likhetstecknet, ofta i form av operationell förståelse, börjar ofta dyka upp i samband med ekvationslösning. Bristande förståelse för likhetstecknet leder också till att likhetstecknet används fel och lösningar blir logiskt osammanhängande samt att utvecklingen av förståelse för nya koncept hämmas. Dessa problem kan leva kvar ända upp till universitetet, och bidra till en försämrad inställning till matematiken. För att stötta elevernas utvecklande av en korrekt förståelse rekommenderas för det första att läraren alltid använder tecknet korrekt och läser ut det som “är lika med” hellre än “blir”. För det andra rekommenderas användandet av analogin med en våg för att förklara ekvationer samt den tillhörande ekvationslösningsmetoden “gör samma sak på båda sidor” istället för “flytta över och byt tecken”. Kedjebråk presenteras som en representationsform för de reella talen. Likhetstecken kan alltså användas mellan ett tal skrivet i den för oss tidigare kända representationsformen decimaltal och samma tal i form av ett kedjebråk. Det konstateras att ändliga kedjebråk representerar rationella tal och att irrationella tal representeras av oändliga kedjebråk, samt att vad som kallas kvadratiska tal avslutas med en upprepande period när de skrivs som kedjebråk. Dessutom förklaras kedjebråkens användning inom approximation tillsammans med begreppet bästa approximation och två bevis som rör kopplingen mellan kedjebråk och bästa approximationer.

Förord

Vi som skriver detta arbete ska bli lärare på gymnasienivå. Att det mesta av litteraturen som berör missförstånd och förståelse för likhetstecknet behandlar elever i grundskolan kan därför ses som ett problem. Missförstånden och problemen som uppstår tidigt försvinner dock inte av sig själva, utan är i vissa fall kvar ända till universitetet. För oss som framtida gymnasielärare är detta därför ett högst relevant ämne, och allt vi kan lära oss om hur problemen uppstår samt hur vi kan hantera dem är av intresse. Därför ser vi det som fullständigt relevant att ta med forskning om elevers förståelse för likhetstecknet, oavsett elevernas ålder.

Vi vill tacka vår handledare Anders Södergren för att han “inte oroade sig” över att vi skulle bli klara i tid, men kanske främst för alla textrelaterade kommentarer han gett oss under arbetets gång. Dessutom lät han oss låna ett antal böcker om talteori för avsnittet om kedjebråk, och har hanterat vår barnsliga entusiasm över dessa på ett trevligt och lagom professionellt sätt.

Innehållsförteckning

1. Inledning

Som Vincent, Bardini, Pierce och Pearn (2015) skriver är en symbol ett tecken som har en betydelse, men den betydelsen kan bero på sammanhanget. För att verkligen förstå en symbol är det därför viktigt att förstå vilka olika betydelser den kan ha och när en tolkning gäller och en annan inte. Bokstaven x kan till exempel representera ett visst ljud om den står tillsammans med andra bokstäver i en text, men inom matematiken kan den istället stå för en variabel eller en okänd. På samma sätt har likhetstecknet olika betydelser beroende på vilket sammanhang det dyker upp i.

Eftersom likhetstecknet är en central och grundläggande symbol inom matematiken som hanteras av elever och studenter i alla åldrar kan det tyckas att de redan i början av gymnasietiden bör ha en bra uppfattning av dessa betydelser. Av egen erfarenhet vet vi dock att det bland gymnasieelever är vanligt med både missförstånd om likhetstecknet och svårigheter att använda det korrekt.

1.1 Syfte och frågeställningar

Syftet med denna litteraturstudie är att reda ut hur vi själva, i vårt framtida yrke som gymnasielärare, kan och bör hantera problematiken kring förståelse för likhetstecknet. För detta behöver vi alltså ta reda på vad problemen faktiskt är, under den frustration som vi upplever finns runt elevers inkorrekta användande av likhetstecknet. Egna erfarenheter och anekdoter vi fått höra i samband med diskussioner om ämnesvalet till denna litteraturstudie ger uppfattningen att förståelse för och korrekt användning av likhetstecknet inte är helt vanligt bland varken gymnasieelever eller universitetsstudenter. Vad felen beror på och om missförstånd påverkar individens inlärning eller resultat behöver vi dock veta mer om.

De fyra frågeställningar vi använder oss av i litteraturstudien är:

1. Vilka förståelser kan elever ha för likhetstecknet?
2. Vilka konsekvenser har olika förståelsetyper för eleven?
3. Vilka klassrumspraktiker stärker elevens förståelse för likhetstecknet?
4. Vilka egenskaper tydliggör kedjebråk hos de reella talen?

Nedan utvecklas, motiveras och preciseras frågorna, var och en för sig.

1.1.1 Vilka förståelser kan elever ha för likhetstecknet?

Innan vi kan ta itu med problemen måste vi veta vad de grundar sig i. Därför vill vi veta vilka olika förståelser elever kan ha för likhetstecknet. För att få en tydlig bild av detta krävs beskrivningar av vad olika förståelsetyper innebär. De olika förståelsetyperna behöver också jämföras med likhetstecknets betydelser, vilket betyder att även dessa behöver tydliggöras. Det är också viktigt att veta hur de olika förståelsetyperna uppkommer och förändras.

1.1.2 Vilka konsekvenser har olika förståelsetyper för eleven?

Att missförstånd gör vidare inlärning svår är lätt att gissa sig till, men i vilken utsträckning och när? Vilka matematiska koncept sätter krav på elevernas förståelse av just likhetstecknet och vilka problem kan vara tecken på bristande förståelse? Uppstår det någon annan typ av problem än de vi själva har noterat? Svaren på dessa frågor kommer indirekt ge en fingervisning om hur viktigt det är med förståelse för likhetstecknet och därmed en hint om hur mycket tid och energi vi som gymnasielärare bör lägga på att förbättra våra elevers förståelse för likhetstecknet.

1.1.3 Vilka klassrumspraktiker stärker elevers förståelse för likhetstecknet?

Detta är den frågeställning som mest direkt rör litteraturstudiens syfte, och den bygger vidare på de tidigare frågeställningarna. Här undrar vi nämligen vad forskningen säger att vi rent praktiskt kan göra för att våra elever ska få en chans att nå en bättre förståelse för likhetstecknet. Fokus ligger på vad som kan och bör göras i gymnasieskolor i Sverige för att hantera de missförstånd som finns och bygga upp en korrekt förståelse hos våra framtida elever. Vi vill dock inte utesluta didaktiska knep på andra nivåer, exempelvis skillnader i hur likhetstecknet introduceras i Kina och USA eftersom problemen som uppstår tidigt i västvärlden i princip inte uppstår alls i Kina (Li, Ding, Capraro & Capraro, 2008).

1.1.4 Vilka egenskaper tydliggör kedjebråk hos de reella talen?

För denna frågeställning, som representerar vår matematiska fördjupning, inspirerades vi av likheten $1 = 0,999$ ... och hur kontraintuitiv den är vid första anblick. Här används likhetstecknet för att visa någonting om oändliga decimalutvecklingar, men likheten säger också någonting om de reella talen. Kedjebråk är en representationsform för de reella talen som vi inte tidigare var bekanta med, och som ser mycket mer komplex ut än decimalform. Kedjebråk ser nämligen vid första anblick ut som en förvirrande uppställning av division och addition, eller som en följd av bråktal, adderade till ett annat tal och placerade i nämnaren till nästa bråk.

Till att börja med behöver vi därför förstå hur kedjebråken är uppbyggda och hur processen går till för att översätta ett tal mellan decimalform och kedjebråksform. Dessutom vill vi veta vilka likheter och skillnader vi kan hitta mellan denna och andra representationsformer som vi redan känner till. Eftersom approximation är ett av kedjebråkens största användningsområden är även detta av intresse, särskilt som det har ett visst släktskap med likhet. Det må inte vara korrekt att använda likhetstecknet mellan ett tal och dess approximerade värde, men en bra approximation kan ändå vara tillräckligt nära ursprungstalet för att vara praktiskt användbar. Varför just kedjebråk är bra till detta är alltså också något vi vill ha svar på.

2. Bakgrund

Som symboler i allmänhet har även likhetstecknet flera olika betydelser, men som en matematisk symbol har det en väldefinierad huvudsaklig betydelse inom matematiken som helhet. Som namnet antyder, och som tecknets uppfinnare Robert Recorde ämnade, är tecknets huvudsakliga betydelse likhet. Recorde valde år 1557 tecknet = för att symbolisera konceptet "är lika med", som tidigare skrevs ut med ord, eftersom symbolen redan i sitt utseende visar på sin betydelse. Recorde ansåg nämligen att två parallella linjesegment av samma längd är så lika som något kan bli (Godfrey & Thomas, 2008).

Det som likhetstecknet symboliserar är en ekvivalensrelation, vilken kan definieras på olika mängder. I fallen naturliga tal, heltal, rationella tal och reella tal betyder detta att det som står på ena sidan om tecknet står för samma punkt på tallinjen som det som står på andra sidan. När det handlar om komplexa tal är det samma punkt i talplanet som de båda leden ska beskriva. Med stegvis utökade eller ändrade definitioner av vad det är som ska vara lika har likhetstecknet självt samma betydelse oavsett vad det är som jämförs, och den betydelsen har tre aspekter.

I en ekvivalensrelation ska det gälla att alla element i mängden är relaterade till sig själva, detta kallas reflexivitet och betyder här att alla tal är lika med sig själva. Det ska också finnas symmetri, vilket betyder att om två element är relaterade på ett håll är de också relaterade i den andra ordningen. Detta betyder att om $a = b$ måste alltså $b = a$ också stämma, för alla a och b som relationen är definierad för. Den tredje egenskapen som en ekvivalensrelation ska ha är transitivitet, vilket kan beskrivas som att för alla tre element a, b och c i mängden, om a är relaterad till b och b är relaterad till c medför det att a är relaterad till c. Alltså att om $a = b$ och $b = c$ är även $a = c$.

Ekvivalensrelationen som likhetstecknet står för kan som sagt definieras på olika mängder, exempelvis de naturliga talen. Då kan vi alltså se att $2 = 2$, det faktum att $3 + 1 = 4$ implicerar att $4 = 3 + 1$, och när vi vet att $8 = 5 + 3$ och $5 + 3 = 4 + 4$ vet vi också att $8 = 4 + 4$, men det finns också andra sätt att skriva samma tal. Det tal som skrivs 16 i talbas tio skrivs exempelvis 10 000 med talbas två, vilket betecknas $16_{10} = 10\ 000_2$.

När likhetstecknet används i samband med reella tal finns det ännu fler sätt att skriva dem på, även om vi håller oss till talbas tio. 1,25 är till exempel samma tal som 125/100, vilket också kan skrivas som 5/4. Roten ur två kan skrivas enkelt med symboler, $\sqrt{2}$, men eftersom det är ett irrationellt tal går det inte att skriva exakt i bråkform och om det ska skrivas i decimalform krävs det ett oändligt antal decimaler som inte uppvisar något mönster, vilket betyder att det aldrig skrivs ut exakt. Som ett enkelt kedjebråk är det dock enkelt att faktiskt skriva ut roten ur två i exakt form, vilket vi går in på mer i detalj senare.

Utöver den huvudsakliga betydelsen har som vi tidigare nämnt likhetstecknet ett antal andra betydelser i olika sammanhang. I dagligt språkbruk symboliserar det ofta en koppling som inte har något med en ekvivalensrelation att göra. Det är inte heller strikt definierat vad denna koppling är, men ofta har den med beroende eller association att göra. Förvånande nog är det dock inte endast i dagligt språkbruk som likhetstecknet har alternativa betydelser, vissa går även att hitta inom matematiken.

Vincent m.fl. (2015) påpekar att på vissa enkla miniräknare står likhetstecknet på knappen som får fram svaret, och i de tidiga årskurserna används likhetstecknet ofta på samma sätt. Trots att ekvivalensen mellan leden även då måste vara uppfylld förmedlar denna användning snarare att likhetstecknet betyder "blir" eller "skriv svaret här". Enligt Vincent m.fl. (2015) är det i sig inte ett problem att låta likhetstecknet ha en operativ betydelse så länge ekvivalensen mellan leden alltid stämmer. Faktum är dock att elevers användning av likhetstecknet ofta är felaktig och att detta kan bero på att de endast känner till den operativa betydelsen.

Eftersom programmering numera ingår i flera matematikkurser på gymnasienivå måste det dessutom noteras att likhetstecknet där har en annorlunda roll. Dels kan det kombineras med sig självt och andra tecken för att fylla en uppsjö av funktioner, men inte ens när det dyker upp i en igenkännbar syntax står det nödvändigtvis för en ekvivalensrelation. Exempelvis kan likhetstecknet inom programmering användas för att tilldela eller ändra värdet på en variabel på sätt som inte nödvändigtvis står för en ekvivalensrelation.

3. Metod

I denna litteraturstudie har de vetenskapliga artiklarna hittats med hjälp av sökmotorerna Supersök och Google Scholar. Vi har även använt specifika databaser för didaktisk forskning, exempelvis Education Research Complete eftersom vissa av våra sökord har andra betydelser inom andra forskningsfält. De flesta av de vetenskapliga artiklarna hittades med kombinationer av olika engelska sökord, exempelvis “equal* sign” och “secondary education”. Sökordet “equal* sign” användes för att täcka in de tre benämningarna “equality sign”, “equal sign” och “equals sign” som likhetstecknet har i olika texter. Sökordet “secondary education” varierade vi med “secondary school” och “high school”. Andra viktiga sökord var “mathematics”, “understanding” och “symbol”. Även referenslistor och citeringar har använts för att hitta fler relevanta källor.

Sökningen i Education Research Complete med sökorden "equal* sign" och "high school" gav endast tre träffar, alla relevanta, och andra liknande kombinationer gav liknande resultat. Kombinationen “equal* sign” och “understanding” gav 58 träffar, varav de flesta berörde yngre barn. Bland dessa avgjorde vi till största del genom att läsa texternas abstract vilka som togs med.

Forskningsartiklar som rörde elever i allt från högstadieåldern till universitet och deras förståelse för likhetstecknet sågs direkt som relevanta, medan forskningsartiklar som hade en svagare koppling till det huvudsakliga ämnet togs med om de ansågs fördjupa eller bredda vår förståelse för ämnet på ett relevant sätt. Ett exempel är Jones artikel från 2008 där elever under ett experiment som tar mindre än en timme bildar sig en ny tolkning av likhetstecknet som gäller inom ramen för experimentet. Artikeln illustrerar alltså tydligt hur situationsbunden en elevs förståelse kan vara. Trots att den handlar om yngre barn tillät den oss på detta sätt att öka komplexiteten på vår frågeställning genom att inte bara fråga hur elever förstår likhetstecknet, utan också när de förstår det på olika sätt. Ett annat exempel är artikeln Fitzmaurice, O’meara, Johnson, och Lacey (2018) som handlar om irländska lärarstudenters bristande förståelse och förklaringsförmåga för algebra. Den väcker tankar om hur svårt det är att förbättra ett system som reproducerar sig självt, för hur ska lärare kunna lära ut en fullständig förståelse för likhetstecknet om de inte ens har den själva?

Flera artiklar har vi också hittat genom att leta via referenslistor i de artiklar vi hittat genom sökning och att använda funktioner som tar fram citeringar av en vald artikel. I vissa fall har vi även sökt på författarnamn, då exempelvis Per-Eskil Persson och Tomas Wennström som skrev en serie artiklar om en gymnasieskola i Klippan som hade flera delar med relevans till denna litteraturstudie.

Just artikelserien av Persson och Wennström hittades från början via supersök. Sedan dess har vi dock märkt att dessa artiklar tagits bort därifrån och vi har arbetat vidare med nedsparade kopior. Trots att de inte längre går att hitta på samma sätt som vi gick till väga går det dock enkelt att hitta dem med hjälp av google och all info i referenserna.

Värt att notera är mängden utländsk kontra svensk litteratur som används i arbetet. Att övervägande del av litteraturen är på engelska och handlar om studier gjorda i andra länder beror helt enkelt på utbudet av relevant material. Fördelen med detta är att kunna dra lärdom av vad som görs bra i andra länder, nackdelen är att kopplingen till vår framtida arbetssituation går att ifrågasätta. Den svenska litteratur vi använder stödjer dock bilden av att det finns vissa gemensamma drag i hur problematiken kring förståelse av likhetstecknet ser ut, åtminstone i Västvärlden.

För den matematiska fördjupningen har vi även använt faktaböcker som vi har fått låna av vår handledare Anders Södergren, dessa är Lindahl (2002), Niven, Zuckerman och Montgomery (1991) och Rockett och Szüsz (1992). Hur svenska skolan fungerar angående kurs- och ämnesplaner har vi hämtat från Skolverkets hemsida.

4. Resultat

4.1 Elevers förståelse för likhetstecknet

För att klassificera elevers förståelse för likhetstecknet behöver vi någon typ av modell eller klassifikationer. Den variation bland sådana verktyg som finns i litteraturen presenteras i följande avsnitt, och de förståelsetyper vi valt att använda i arbetet preciseras. I avsnittet som följer används dessa förståelsetyper för att presentera en bild av hur och i vilka situationer elevers förståelse för likhetstecknet utvecklas och förändras.

4.1.1 Förståelsetyper

Det finns flera olika modeller för att beskriva elevers förståelse av likhetstecknet, men de flesta har vissa drag gemensamt. Operationell förståelse beskrivs exempelvis på snarlika sätt på olika ställen i litteraturen, men Rittle-Johnson, Matthews, Taylor och McEldoon (2011) placerar den längst ner på en utvecklingsstege, åtminstone för barn i USA, medan Li m.fl. (2008) påpekar att de undervisningsmetoder som används i Kina aldrig ger upphov till den här typen av förståelse. Relationell förståelse ses som målet av både Rittle-Johnson m.fl. (2011), Harrell (2016) och Jones, Inglis, Gilmore och Dowens (2012), men den relationella förståelsen innehåller olika element i de olika artiklarna. Rittle-Johnson m.fl. (2011) menar att relationell förståelse betyder att eleven förstår att de båda leden är lika, alltså har samma numeriska värde. Enligt Jones m.fl. (2012) bör både förståelsen för numerisk likhet och förståelsen för utbytbarhet ingå i en relationell förståelse. Harrell (2016) delar istället upp relationell förståelse i två olika nivåer beroende på hur elever använder förståelsen för numerisk likhet. Den lägre nivån innebär då att varje sida räknas ut separat och jämförs, medan den högre nivån innebär att strukturen används för att lösa problem med likheter, utan att värdet på sidorna behöver räknas ut.

Eftersom Jones m.fl. (2012) visar att utbytbarhet och likhet är två olika typer av förståelse som kan uppstå separat, alltså att den ena förståelsen inte medför den andra och att de till och med utvecklas i olika ordning i olika kulturer har vi valt att ha separata benämningar för dem. Likhetsförståelse är således förståelsen att de båda leden på vardera sidan om likhetstecknet ska ha lika värde, vilket är vad många av artiklarna vi har använt kallar relationell förståelse. Utbytbarhetsförståelse är vad vi benämner förståelsen för att två uttryck som är lika med varandra kan bytas mot varandra. Tillsammans utgör de vad vi kallar relationell förståelse, eftersom de tillsammans utgör förståelse för hela ekvivalensrelationen. Likhetsförståelse täcker nämligen in både symmetri och reflexivitet medan utbytbarhet täcker in transitiviteten.

Ett annat sätt att se på förståelse presenteras av Hoch och Dreyfus (2004) i form av strukturförståelse. Denna form av förståelse är vad Harrell (2016) inkluderar i den högre nivån av vad han kallar relationell förståelse. Den innebär alltså åtminstone likhetsförståelse, men rör inte endast likhetstecknet. Istället rör den matematiska strukturer i allmänhet, i vilka likhetstecknet ofta har en roll. I exempelvis andragradsekvationer måste likhetstecknet vara med, men strukturförståelse innebär också insikten att ekvationerna $4x^2 - x^3 + 5(4 - 2x) = (3 - x^2)(6 + x)$ och $10x^2 - 13x + 2 = 0$ är ekvivalenta eftersom det med hjälp av aritmetiska operationer går att omforma den ena ekvationen till den andra. En annan aspekt av strukturförståelse är att förstå en strukturs olika former och vad de är användbara till, exempelvis när det är mer användbart att se ett kvadratiskt uttryck som en produkt av två linjära faktorer och när det passar bättre att se det som ett polynom. Dessutom kan det enligt Godfrey och Thomas (2008) ingå att se skillnaden på en villkorlig ekvation som $2x + 3 = 5$, vilken bara är sann för vissa värden av variabeln, och en identitet, som $a(b + c) = ab + ac$, vilken är sann för alla värden på variablerna. Just detta är användbart för att räkneregler ofta beskrivs med hjälp av identiteter. Att känna igen när och hur räknereglerna kan användas kräver därför att en koppling ses mellan exempelvis $2(3x + 2)$ och vänsterledet i identiteten ovan, eller $6x + 4$ och högerledet.

I detta arbete hanterar vi för enkelhetens skull operationell förståelse, likhetsförståelse och utbytbarhetsförståelse som tre olika typer av förståelse för just likhetstecknet, och strukturförståelse som ett mer övergripande koncept där en god förståelse för likhetstecknet ingår. Det går att se något av en rangordning mellan operationell förståelse, som i de flesta situationer kan klassas som ett missförstånd, och de två delarna av den relationella förståelsen, som går att utläsa ur definitionen av likhetstecknet inom matematiken. Däremot ser vi, som Jones m.fl. (2012), ingen tydlig nivåskillnad mellan förståelsen för numerisk likhet och utbytbarhet, eller någon inneboende ordning i vilken de olika förståelserna måste förvärvas.

Möjligtvis kan vi dock urskilja en ordning i vilken de kommer till användning i det svenska skolsystemet. I Sverige kommer ekvationssystem nämligen in i årskurs 7 i grundskolan, och då även substitutionsmetoden för att lösa dessa (Skolverket, 2011). Som hörs på namnet utnyttjar substitutionsmetoden just utbytbarheten som likhetstecknet implicerar, vilket betyder att förståelse för utbytbarhet är en relevant förståelse för våra framtida elever att ha. Den är dock inte lika vanligt förekommande i litteraturen som likhetsförståelse, kanske för att likhetsförståelse blir nödvändig redan när ekvationer introduceras och att det ofta är då det uppstår problem.

4.1.2 Elevers förståelseutveckling

Kieran (1981) nämner att barn i åldern 3 till 5 år, alltså redan innan de börjar skolan, kan förstå likhet på två olika sätt. Dels kan de förstå att två olika grupper har samma antal objekt, vilket är det vi kallar likhetsförståelse. Dels kan de förstå att om två grupper med objekt läggs ihop kan antalet objekt de har tillsammans räknas, vilket känns igen som operationell förståelse.

När dessa barn börjar skolan förstärks den operationella förståelsen genom träning på standarduppgifter i aritmetik, alltså uppgifter med en operation i vänsterledet och plats lämnad för svar på höger sida om likhetstecknet, exempelvis $3 + 5 = \_$ (Harrell 2016; Kieran 1981; Vincent m.fl. 2015). Vincent m.fl. (2015) noterar att uppgifter av denna typ inte ställer några krav på likhetsförståelse, vilket kan förklara varför den operationella förståelsen dominerar bland yngre barn. Den förståelse som premieras är nämligen att likhetstecknet står mellan uträkningen i vänsterledet och svaret i högerledet. När svaret är ifyllt uppfattas likheten $3 + 5 = 8$ av barnen som en serie händelser där tre av någonting läggs ihop med fem av någonting och *blir* åtta, inte som att $5 + 3$ *är* 8 (Kieran 1981; Machaba 2017), vilket gör att riktningen är viktig och likheterna $8 = 3 + 5$ och $3 = 3$ helt verkar sakna mening och kanske till och med tolkas som felskrivna (Kieran 1981; Harrell 2016).

Förutom att övervägande del av uppgifter är av standardtyp finns även andra bidragande faktorer till utvecklandet av operationell förståelse. Exempel är användandet av ordet “blir” när likhetstecknet läses ut och miniräknare av enklare typ där likhetstecknet står på knappen som leder till att miniräknaren räknar ut svaret (Harrell 2016; Vincent m.fl. 2015). Något bättre blir förståelsen om fraser som “är lika med” eller “är samma sak som” används, även om detta inte räcker hela vägen (Kieran 1981). Mer avancerade miniräknare förbättrar också situationen något genom att det står “EXE”, som står för “execute”, på knappen som betyder “räkna ut” (Vincent m.fl. 2015).

Det hjälper inte heller att likhetstecknet ibland används i ickematematiska sammanhang såsom “matte = kul” eller “hårt jobb = framgång”. I slagord som dessa har likhetstecknet ofta en enriktad betydelse som mer liknar “leder till” eller “associeras med” än den matematiska definitionen (Harrell 2016). Med just “matte = kul” menas troligtvis att matte är kul, inte att kul nödvändigtvis alltid är matte. Att hårt jobb skulle vara det samma som framgång är inte heller helt korrekt, istället menas troligtvis att hårt jobb leder till framgång. Inte heller i det fallet uttrycker likhetstecknet någon symmetri, då det knappast är troligt att “hårt jobb = framgång” är menat att uttrycka att framgång leder till hårt jobb.

Operationell förståelse för likhetstecknet kan i de flesta fall klassas som ett missförstånd, men ibland även som ett första steg på väg till likhetsförståelse, exempelvis av Rittle-Johnson m.fl. (2011). Det går dock att konstatera att operationell förståelse inte är ett nödvändigt steg i utvecklingen av likhetsförståelse eftersom undervisningsmetoderna i Kina inte leder till att eleverna tar denna omväg (Li m.fl., 2008). Dessutom är steget från operationell förståelse till likhetsförståelse inget som elever nödvändigtvis gör, åtminstone inte fullständigt. Även universitetsstudenter uppvisar nämligen ibland en operationell förståelse för likhetstecknet (Vincent m.fl., 2015).

Torigoe och Gladding (2011) konstaterar dock att det inte bara är likhetstecknet som ändrar betydelse från aritmetikens till algebrans värld. Även andra tecken som + och -, som inom aritmetiken står för vilka operationer som ska utföras berättar ingenting om hur en ekvation ska lösas. Det kan alltså vara förvirrande att samma symboler som inom aritmetiken berättar om processen för att komma till svaret inte ger samma ledtrådar i algebran.

4.2 Konsekvenser av olika typer av förståelse

Förståelse för likhetstecknet är viktig just för att den har konsekvenser för elevernas fortsatta inlärning. Som vi kommer se innebär detta inte nödvändigtvis så pass stora problem att de leder till misslyckanden i matematiken, men de kan istället påverka individens resultat på flera sätt och under en lång period.

Torigoe och Gladding (2011) fann exempelvis i en undersökning av fysikstudenters prestationer att uppgifter som krävde strukturförståelse och därmed likhetsförståelse var svåra, särskilt för studenter som överlag presterade dåligt på kursen. Skillnaden i resultat på tentafrågor som krävde strukturförståelse och frågor som inte gjorde det var alltså större för de studenter som låg dåligt till på kursen.

Torigoe och Gladding (2011) identifierade tre specifika egenskaper hos uppgifter som krävande strukturförståelse. Dessa var kombinationer av flera symboliska ekvationer, numeriska ekvationssystem och numeriska ekvationer med en okänd på båda sidor om likhetstecknet. Alla dessa tre egenskaper kräver algebraiska manipulationer och därmed likhetsförståelse.

Torigoe och Gladding (2011) föreslår tre förklaringar till fenomenet att fysikstudenternas resultat på frågor av denna typ verkar ha en tydlig koppling till deras resultat på kursen. Alla tre förklaringarna bygger på att strukturförståelse, inklusive likhetsförståelse, hjälper studenterna att klara kursen. För det första noterar de att algebra ofta används av föreläsare för att introducera nya koncept. Att redan förstå algebran som används ger då bättre förutsättningar att förstå det nya stoffet. För det andra föreslår de att studenter som använder algebraiska lösningar på övningsuppgifter bättre kan generalisera sina slutsatser. Därmed kan dessa studenter lättare se likheter mellan problem och får alltså ut mer av övningsuppgifterna. För det tredje spekulerar de att strukturförståelsen själv kan hjälpa studenterna förstå fysikaliska koncept.

En slutsats som Torigoe och Gladding (2011) drar är att förståelse för symboler som likhetstecknet är något som bör satsas på för att öka andelen studenter som klarar kurser i fysik på universitetet. De anser också att det är troligt att liknande mönster finns i andra ämnen där matematik har en framträdande roll.

Det är dock inte bara universitetsstudenter som stöter på problem på grund av sin undermåliga förståelse för likhetstecknet. Elever både i grundskolan och på gymnasiet har mycket matematik att lära sig, och resultaten som Torigoe och Gladding (2011) kommer fram till på universitetet verkar knappast främmande där heller. Persson och Wennström (2003b) nämner att ekvationslösning på gymnasiet blir tuff för elever som endast har en operativ syn på likhetstecknet, men också att det går att klara gymnasiematten utan särskilt bra förkunskaper om varken eleven eller läraren ger upp. Det finns dock flera olika fel som elever med bristande förståelse för likhetstecknet gör.

Något som är typiskt för elever med strikt operationell förståelse för likhetstecknet är att de uppfattar uppgifter som felaktiga om de inte är skrivna på formen med en uträkning i vänsterledet och ett tomrum i väntan på svar i högerledet. Detta kan innebära att de antingen ignorerar termer som finns i högerledet, eller antar att de borde stå i vänsterledet (Falkner, Levi, och Carpenter, 1999; Machaba, 2017; Harrell, 2016). Exempel är Falkner m.fl. (1999) som fann att de vanligaste svaren bland sjätteklassare på $8 + 4 = \_ + 5$ var 12 och 17 istället för 7.

Ett fel som elever och studenter gör på alla nivåer och som starkt sammankopplas med en operativ förståelse av likhetstecknet är att göra så kallade horisontella lösningar. Med detta menar vi lösningar av typen $2 + 3 = 5 * 4 = 20 - 8 = 12$, där en uträkning görs i flera steg som bör skrivas upp separat, men istället endast åtskiljs av likhetstecken (Vincent m.fl., 2015; Harrell, 2016; Kieran, 1981; Persson & Wennström, 2003a). Värt att notera här är att denna metod ofta leder till rätt svar, åtminstone i lätta uträkningar, även om likhetstecknet i varje steg används inkorrekt. Detta leder eleven till att tro att metoden är korrekt, och därför uppstår förvirring och kanske till och med en försämrad inställning till matematiken som helhet när den slutar fungera (Persson & Wennström, 2003a).

Att horisontella lösningar används av universitetsstudenter (Kieran, 1981; Vincent m.fl., 2015), tyder på att de inte alltid innebär fullständig avsaknad av likhetsförståelse eftersom dessa studenter måste ha klarat av algebran i tidigare kurser. Istället kan horisontella lösningar vara slarv eller ett tecken på att likhetstecknet just i situationen där de horisontella lösningarna används uppfattas som operationellt. Det skulle till exempel kunna vara så att eleven eller studenten inte uppfattar sina egna lösningar som en strikt matematisk situation där kommunikation och korrekthet är viktiga. Kieran (1981) föreslår att den här typen av lösningar i vissa fall bara är en procedurell genväg, men Godfrey och Thomas (2008) konstaterar att elever har problem med att lämna den operationella förståelsen bakom sig även när de har börjat utveckla sin likhetsförståelse i vissa situationer.

Ekvationslösning bygger på att de båda leden har samma värde och därför är likhetsförståelsen viktig i algebra (Harrell, 2016). Ekvationer av standardtyp är sådana där endast en variabel ingår och den endast förekommer på ena sidan om likhetstecknet. Sådana ekvationer går att lösa genom att gissa. När variabeln finns på båda sidorna om likhetstecknet blir dock detta svårare och lösningsmetoderna som fungerar blir svåra att förstå utan likhetsförståelse (Vincent m.fl., 2015). Det händer då att elever skaffar sig uppfattningen att algebra består av en uppsättning regler att lära sig utantill, vilket Asquith, Stephens, Knuth och Alibali (2007) anger som en anledning till dåliga resultat på ekvationslösning bland elever i high school i USA. Hoch och Dreyfus (2004) visar också på att det fåtal elever som använder sig av likhets- och strukturförståelse i ekvationslösning når svaret snabbare och har mer korrekta lösningar än andra elever.

Kopplingen mellan likhetstecknet och ekvationer verkar inte heller vara helt tydlig för alla elever. Kabar (2018) noterade till exempel i sin studie att elever som går sitt elfte år i skolan inte vet att en ekvation måste innehålla ett likhetstecken. Det var en liten studie med endast fjorton elever, men de studerade på naturvetenskapliga program och eleverna valdes ut för att de gjorde bra ifrån sig både i matematik generellt och på ett prov som specifikt testade deras förståelse för andragradsekvationer. Ändå gav flera av eleverna exempel utan likhetstecken när de ombads ge exempel på andragradsekvationer.

4.3 Att stärka elevers förståelse för likhetstecknet

Driver och Powell (2015) trycker på behovet av djupare algebrainlärning i grundskolan då få elever är redo för de algebraiska utmaningar matematiken på gymnasiet erbjuder. För att bygga upp sin kunskap behöver elever arbeta med konkret materiel under en längre tid för att bilda sig en uppfattning för symbolernas faktiska betydelse (Skott, Jess & Hansen, 2010). Får elever inte tillräckligt med tid för att hinna det kan missuppfattningar skapas som lever vidare efter skolåren eller till högre utbildningar. I sina undersökningar ser Driver och Powell (2015) att små förändringar i elevers matematiska prestanda under grundskolan har stor påverkan på elevers matematiska kunskaper senare i livet.

Skillnaden som finns i förståelse för likhetstecknet mellan skolbarn i Kina och USA orsakas dock inte av små, utan stora, skillnader i inlärningssituationen. Li m.fl., (2008) ser att likhetstecknet sällan definieras i läroböcker i USA och en klar majoritet av uppgifterna i de yngre årskurserna använder det i den operativa betydelse det har inom aritmetiken. Majoriteten av uppgifterna är alltså i standardform, till exempel $2 + 4 = \_$. Detta ger eleverna en dålig grund för förståelse för likhet. I Kina introduceras likhetstecknet istället tillsammans med tecknen som betyder större än > och mindre än <. Dessa tre jämförelsetecken och begreppen de hör till definieras tydligt och används i flera sammanhang såsom i språk, rent symboliskt och även med bilder. En uppgiftstyp eleverna får hantera är den där de ska välja vilken av de tre jämförelsesymbolerna som ska stå mellan tal eller objekt, men de får även hantera flera olika typer av uppgifter med bara likhetstecknet. Visst stöter de på uppgifter av standardtyp, men även uppgifter av typen $2 + \_ = 5$ och till och med $2 + \_ = \_$ där det alltså finns flera olika korrekta svar. Både de tydliga definitionerna, den varierade användningen och sambandet med de andra jämförelsesymbolerna ger eleverna i Kina en betydligt bättre möjlighet att direkt bygga upp likhetsförståelse än vad elever i USA får. Resultatet av detta kan ses på att i sjätte klass löste 98% av eleverna i Kina och bara 28% av eleverna i USA fyra uppgifter som testade deras konceptuella förståelse för likhetstecknet korrekt (Li m.fl., 2008).

I en studie av Jones (2008) fick två elevpar arbeta med att lösa uppgifter i ett datorprogram. Uppgifterna gick ut på att eleverna fick använda ett antal likheter för att förenkla ett uttryck med addition tills slutsumman endast bestod av en term. Till exempel kunde $2 + 3$ i uttrycket $2 + 3 + 6$ bytas ut till 5 med hjälp av likheten $2 + 3 = 5$. Uttrycket blev då $5 + 6$, som byttes ut till 11 med hjälp av likheten $5 + 6 = 11$. I vissa fall behövde eleverna även använda likheterna åt andra hållet, alltså byta ut exempelvis 12 mot 5+7, eller vända på uttryck med hjälp av likheter som $2 + 4 = 4 + 2$ för att få "rätt" siffror bredvid varandra för att kunna använda en viss likhet och till slut komma fram till svaret.

Programmet var uppbyggt för att utveckla utbytbarhetsförståelse, men också för att testa om denna nya förståelse ersatte den förståelse barnen redan hade. Programmet innehöll därför flera uppgifter med ökande komplexitet för att träna förmågan att byta ut uttryck till andra de är lika med, men de senare nivåerna innehöll också likheter som var mer och mer uppenbart felaktiga. På den sista nivån var ursprungsuttrycket $143 + 77$ och när dessa båda tal hade blivit utbytta i flera steg nåddes det av programmet definierade rätta svaret, vilket var 52. Vid det laget var det några av barnen som reagerade på någon av de felaktiga likheterna, men de accepterade det snabbt som en del av uppgiften.

Resultatet av Jones (2008) experiment antyder att utbytbarhet är ett lätt koncept att lära sig, eftersom de båda paren mellanstadiebarn som deltog klarade att lösa varje problem i programmet. Det ger dock också ett konkret exempel som antyder det som Jones m.fl. (2012) konstaterar, om att utbytbarhetsförståelse och likhetsförståelse är två olika typer av förståelse. Ett barns kommentarer i studien från 2008 specificerar till och med att likhetstecknet uppfattas betyda något annat i programmet än i vanlig matte. Barnet förklarar med viss hjälp av försöksledaren att uppgifterna i programmet är något annat än addition och att målet är att "få fram talet". Den utbytbarhetsförståelse som byggdes upp hängde alltså inte ihop med elevernas tidigare förståelse för likhetstecknet, utan var bunden till situationen där den uppstod.

Med tanke på hur ofta matematik liknas vid ett eget språk är det inte heller konstigt att språket lyfts fram som en viktig del i lärandeprocessen. Skott m.fl. (2010) ser språket som en stor del i lärandet och att strukturera tänkandet. I experimentet av Jones (2008) kan också ett intressant exempel på detta noteras. Eleverna får alltså genom uttryck som $2 + 4 = 4 + 2$ bekanta sig med konceptet bakom den kommutativa lagen utan att de känner till begreppet. De beskriver användandet av lagen med orden "swap" och "switch", något som Skott m.fl. (2010) skulle beskriva som en anpassning till den matematiska kulturen genom en utveckling av sitt matematiska språk. Denna utveckling sker gradvis, och genom att på detta sätt bekanta sig med och bygga upp ett eget språk kring matematiska koncept kan eleverna använda dem och efterhand tillskriva dem deras faktiska matematiska betydelse.

Även Godfrey och Thomas (2008) anser att språk är en avgörande faktor för att bygga upp förståelse och påpekar vikten av att explicit förklara likhetstecknets symmetriska och transitiva egenskaper och hur de används, åtminstone på universitetet. Att endast visa korrekt användande av dessa egenskaper är inte tillräckligt eftersom det är svårt att utveckla en relationell förståelse från en operationell endast genom induktion. Skott m.fl. (2010) ser att diskussioner mellan elever och mellan lärare och elever, ger en förståelse som sätter en gräns för hur symboler används och därmed informellt definieras. Ett exempel på en sådan diskussion kan vara en elev som motiverar sitt svar eller förklarar sin tankegång. Det kan också ingå att använda symboler och symboliska återgivningar för att förklara tankegångar och metoder i dessa diskussioner (Skott m.fl., 2010).

För att lära ut komplicerade matematiska koncept är det ofta behjälpligt att använda analogier. Specifikt för att lära ut likhetsförståelse rekommenderar Araya m.fl. (2010) analogin med en gammaldags våg med två vågskålar, där de båda vågskålarna ska väga lika. I en studie med 236 elever i Chile visade nämligen Araya m.fl. (2010) att denna analogi hjälper elever att förstå både ekvationslösning och konceptet likhet bättre än en traditionell genomgång med symboler, trots att eleverna själva inte hade någon erfarenhet av att använda vågar av typen som analogin bygger på. Denna bild problematiseras något av Vlassis (2002) som påpekar att det finns fler aspekter av ekvationslösning som analogin med vågen inte hanterar särskilt väl. Det tydligaste exemplet på detta är negativa tal. Just för att förstärka elevers förståelse för likhetstecknet förespråkar dock även Vlassis (2002) användandet av våganalogin.

Våganalogin leder till ekvationslösningsmetoden “gör samma sak på båda sidor”, vilken är den metod som föredras av Persson och Wennström (2003a) eftersom den associeras med likhetsförståelse utöver procedurell kunskap. Det har dock visats av Ngu, Chung och Yeung (2015) att balansmetoden, “gör samma sak på båda sidor”, innebar en högre kognitiv belastning än inversmetoden, “flytta över och byt tecken”. I denna studie hade dessutom eleverna som använde balansmetoden sämre procedurell kunskap än de som använde inversmetoden. Den konceptuella förståelsen testades dock inte i detta experiment, vilket betyder att elevernas förståelse för likhetstecknet inte framgår. Det var också ett kort experiment som genomfördes på bara en lektion. Ett förkunskapstest följdes av 20 min inlärning av någon av metoderna och sedan ett test till som var identiskt med förkunskapstestet.

Att som lärare själv ha den typ av förståelse som ska läras ut kan tyckas vara en självklar förutsättning för att lyckas. Det blir då intressant att en studie utförd på Irland av Fitzmaurice m.fl. (2018) tyder på att långtifrån alla lärarstudenter där har likhetsförståelse. Undersökningen bestod av 23 lärarstudenter där alla utan problem kunde genomföra uppgifter gällande linjära ekvationer. Många hade dock svårt att på ett korrekt sätt förklara sitt tillvägagångssätt. Några lärarstudenter förklarade till och med sina metoder på sätt som indikerade att de inte helt förstod begreppet likhet. Istället för förståelse förlitade sig lärarstudenterna på rutiner och regler i sina lösningar och förklaringar. Studien kom också fram till att en enda lektion om likhetstecknets betydelse inte var tillräckligt för att ge dem den djupa förståelse de behöver för att kunna stödja sina elevers utveckling av robust förståelse. Fitzmaurice m.fl. (2018) menar att en faktor för lärarstudenternas operationella sätt att tänka är kursplanens betoning på procedurförståelse för att klara av proven, alltså att förståelse för likhetstecknet inte prioriteras i varken kursplan eller undervisning.

4.4 Kedjebråk

Reella tal går att representera i flera olika former, exempelvis kan alla representeras som decimaltal och de rationella som bråktal. Dessa båda former bör elever vara bekanta med när de kommer till gymnasiet; de bör till exempel redan veta att $0{,}5 = \frac{1}{2}$. De bör också vara bekanta med att vissa tal, som $\frac{1}{3}$, skrivs bäst i bråkform eftersom de måste skrivas med en oändlig, men upprepande, decimalutveckling i decimalform. Det går till och med att gå åt andra hållet och säga att om ett reellt tal avslutas med en upprepning i decimalutvecklingen är det i själva verket rationellt och kan därför skrivas exakt i bråkform. Irrationella tal, som $\sqrt{2}$ eller e, kan dock inte skrivas exakt i bråkform och hanteras därför oftast av elever antingen som symboler eller inexakt som avrundade tal i decimalform.

Till skillnad från bråkform, som endast fungerar för rationella tal, är kedjebråk en representationsform som kan beskriva alla reella tal (Niven m.fl., 1991, s. 325). Som namnet antyder har kedjebråken ett visst släktskap med vanliga bråk, men strukturen är mer komplicerad. Istället för en täljare och en nämnare som vardera består av heltal består varje nämnare i ett kedjebråk, utom den sista om det finns en sådan, av en addition av ett ensamt tal och en ny division med samma typ av nämnare. Effekten när hela strukturen skrivs ut blir av bråk i bråk, men skrivet på ett mer kompakt sätt med en ordnad rad med siffror påminner kedjebråken även ytligt om decimaltal.

<u>Definition:</u> *i*) Låt $a_0, a_1, \dots, a_n$ vara reella tal, alla positiva förutom möjligen a_0 medan x är ett reellt tal. Uttrycket

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\dots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}}$$

kallas för en *ändlig kedjebråksutveckling* av x och betecknas $[a_0, a_1, \dots, a_n]$. Talen a_k kallas för *termer* eller *delkvoter* av kedjebråket.

ii) För att definiera ett *oändligt kedjebråk* som inte har någon sista term skriver vi $[a_0, a_1, \dots]$, och värdet av denna oändliga sekvens av tal är enligt Niven m.fl. (1991, s. 331):

$$\lim_{n \to \infty} [a_0, a_1, \dots, a_n],$$

iii) Ett ändligt eller oändligt kedjebråk kallas *enkelt* om alla dess termer är heltal.

Processen för att ta fram en enkel kedjebråksutveckling för ett reellt tal beskrivs i Niven m.fl. (1991, s. 325) och har mycket gemensamt med Euklides algoritm. Ett exempel med den enkla kedjebråksutvecklingen av det rationella talet $\frac{42}{30}$ och Euklides algoritm på talets täljare och nämnare visas nedan.

$$\frac{42}{30} = 1 + \frac{12}{30} = 1 + \frac{1}{\frac{30}{12}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{6}{12}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{12}{6}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}.$$

När termen a_0 tas fram i kedjebråksutvecklingen görs detta genom att räkna ut att heltalssiffran i $\frac{42}{30}$ är 1. Den första likheten i sekvensen beskriver alltså att 42 delat med 30 är 1 med resten 12. Detta kan jämföras med första raden i Euklides algoritm för 42 och 30 här nedanför, som beskriver samma process. Om första raden i Euklides algoritm divideras med 30 blir resultatet den första likheten här ovanför. Nästa steg i uträkningen av den enkla kedjebråksutvecklingen är att få in ettan som ska vara i täljaren. För detta måste resten, alltså bråket $\frac{12}{30}$, inverteras för att likheten ska stämma. Samma process används sedan för att ta fram a_1 på samma sätt som a_0, och uträkningen här kan jämföras med den andra raden i Euklides algoritm.

$$42 = 30 \cdot 1 + 12$$

$$30 = 12 \cdot 2 + 6$$

$$12 = 6 \cdot 2$$

Eftersom talet vi valde att representera med kedjebråk var rationellt hade det ett ändligt antal termer, i detta fall endast tre. Det gick också lätt att dra paralleller till Euklides algoritm som hanterar heltal. Det finns dock en egenskap som Euklides algoritm inte kan förklara, och det är att representationer av rationella tal i enkel kedjebråksform inte är helt unika. Det finns nämligen alltid en alternativ form som fås av att dela upp den sista termen, a_n, i två termer, där den näst sista blir $a_n - 1$ och den sista blir 1. Vi kan alltså representera talet $\frac{42}{30}$ med två olika enkla kedjebråk, det vi räknade ut ovan och det precis här under.

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}}$$

Dessa båda kedjebråksutvecklingar kan också skrivas som $[1, 2, 2]$ respektive $[1, 2, 1, 1]$.

När talet som ska skrivas som ett enkelt kedjebråk är irrationellt tar dock termerna inte slut. Därför finns det då ingen sista term och således inget alternativt sätt att avsluta kedjebråksutvecklingen på. Irrationella tal har alltså en unik kedjebråksutveckling.

För att ta fram den oändliga enkla kedjebråksutvecklingen till ett irrationellt tal följs i stort sett samma process som för ett rationellt tal. Talet delas alltså i första steget upp i ett heltal som blir a_0 och en rest. Nästa term, a_1, är heltalsdelen av restens multiplikativa invers, alltså 1 dividerat med resten. Även här blir det en rest och den används på samma sätt för att ta fram nästa term.

Vissa enkla kedjebråksutvecklingar avslutas dock med en periodisk upprepning, och precis som i decimalform säger det något om talet som representeras. När ett kedjebråk avslutas på detta sätt betyder det dock inte att talet är rationellt, för rationella tal representeras som vi tidigare sett av ändliga enkla kedjebråk. Istället visar den repeterande perioden att talet är kvadratiskt, det vill säga det löser en irreducibel kvadratisk ekvation med rationella koefficienter (Hua, 1982). I denna kategori av tal hittar vi bland annat $\sqrt{2}$ och $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, också känt som gyllene snittet.

För att illustrera detta fenomen kan talet $\sqrt{2}$ och dess enkla kedjebråksutveckling $[1, 2, 2, 2, ...]$ användas. Uträkningen av denna kedjebråksutveckling börjar med att heltalssiffran konstateras vara 1 och resten $\sqrt{2} - 1$. För att undvika rottecken i nämnaren skrivs bråket i steg två nedan om med hjälp av konjugatregeln och vi får talet 1 i nämnaren.

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}-1}} = 1 + \frac{1}{\frac{\sqrt{2}+1}{1}} = 1 + \frac{1}{2+\frac{\sqrt{2}-1}{1}} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}-1}}}.$$

I sista steget ovan känner vi igen bråket i nämnaren som bråket i första steget. Processen fortsätter därför med att konjugatregeln igen görs på $\sqrt{2} - 1$ och vi får ett i nämnaren, följt av att även nästa term blir en tvåa. Eftersom talen i uträkningen hela tiden blir de samma fortsätter processen på samma sätt, och varje term utom a_0 i detta oändliga enkla kedjebråk blir 2.

$\sqrt{2}$ skrivs alltså $[1, 2, 2, 2, ...]$ som ett enkelt kedjebråk, men eftersom det avslutas med en upprepning finns det alternativa skrivsättet $[1, \overline{2}]$ med ett streck över perioden. Detta påminner om hur decimaltal som slutar med en oändlig upprepning av en viss sifferkombination också kan skrivas med ett streck över perioden, som i $\frac{1}{3} = 0{,}3333 ... = 0{,}\overline{3}$.

Eftersom ett tal skrivet på olika former är samma tal även om formerna ser olika ut kan likhetstecknet användas mellan formerna. Exempelvis har vi att $\sqrt{2} = [1, \overline{2}]$. I vissa fall är det dock inte praktiskt att använda ett tals exakta värde eftersom det är för svårt att beskriva i antingen decimalform eller kedjebråksform. De irrationella talen, exempelvis $\sqrt{2}$ och e, representeras nämligen av oändliga decimal- och kedjebråksutvecklingar. Eftersom till exempel talet e till skillnad från $\sqrt{2}$ inte är ett kvadratiskt tal har det inte heller någon avslutande upprepning som kan förkorta hur det skrivs ut i någon av formerna.

När tal av denna typ, oftast pi men ibland även e, ska användas av gymnasieelever i beräkningar hanteras de ofta i avrundad form. Avrundningsprocessen går då, åtminstone i svenska skolor, till på ett specifikt sätt. Eleverna väljer först ett lämpligt antal decimaler för den precision som behövs för beräkningen och hugger av decimalutvecklingen, vid behov ändras också sista siffran till ett högre tal för att det avrundade värdet ska ligga så nära det ursprungliga värdet som möjligt. Att hugga av en enkel kedjebråksutveckling ger dock en bättre approximation enligt några specifika kriterier som tas upp i samband med att detta påstående bevisas lite senare i detta avsnitt. Innan dess ska vi dock ge lite sammanhang till dessa approximationer och varför de används.

Det är inte bara elever som har svårt att använda sig av irrationella tal i exakt form, även datorer misslyckas med detta. Datorer kan inte hantera oändliga decimalutvecklingar och eftersom exempelvis multiplikation av två decimaltal med tre decimaler kan ge upphov till ett nytt tal med sex decimaler går det inte att på ett korrekt sätt sätta gränser för hur många decimaler ett program ska hantera. Om endast heltal används går det dock betydligt bättre att utföra diverse beräkningar utan att förlora precision. Även rationella tal kan hanteras korrekt av datorer om de skrivs på bråkform eftersom de då består av heltal.

Oavsett om det är en decimalutveckling eller en enkel kedjebråksutveckling som trunkeras blir resultatet ett rationellt tal. En avrundning av e med tre decimaler skulle alltså kunna skrivas som $\frac{2718}{1000} = \frac{1359}{500}$, men för att få bästa möjliga precision med minsta möjliga nämnare är det bättre att använda kedjebråk. Det går till och med att bevisa att de rationella tal som fås vid trunkering av ett irrationellt tals enkla kedjebråksutveckling är den bästa möjliga med en nämnare av samma eller mindre storlek.

För att ytterligare bekanta oss med kedjebråk innan beviset för ovanstående påstående vill vi dock börja med en av egenskaperna som gör enkla kedjebråk, och approximering med dem, intressanta, nämligen att en enkel kedjebråksutveckling konvergerar mot talet både ovanifrån och underifrån.

Definition: *Den n:te konvergenten* $r_n = \frac{h_n}{k_n}$ för $n > 0$, till ett tal $x = [a_0, a_1, \ldots]$ definieras som det rationella tal som den enkla kedjebråksutvecklingen $[a_0, a_1, \ldots, a_n]$ representerar då.

Betrakta exempelvis kedjebråksutvecklingen av talet e: $[2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, \ldots]$. Den första termen, a_0, är 2, vilket är heltalssiffran i $\frac{e}{1}$. Den första resten blir därför $\frac{e-2}{1}$. Om vi följer samma procedur som i tidigare kedjebråksutvecklingar får vi att den andra termen, a_1, är 1. Om trunkeringen görs efter denna term får vi konvergenten r_1 som alltså har värdet $2 + \frac{1}{1} = 3$. Detta tal är ett heltal, alltså ett rationellt tal som kan skrivas i bråkform med nämnare 1. Det är också den bästa approximation vi kan göra av talet e med ett heltal. Den andra konvergenten, r_2, har värdet

$$2 + \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = 2 + \frac{1}{\frac{3}{2}} = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}.$$

Denna approximation är ett lägre tal än e självt, men det ligger också närmare än föregående approximation. Nästa konvergent, r_3, har värdet $\frac{11}{4}$, vilket är större än e, men det är närmare e än $\frac{8}{3}$. Detta mönster fortsätter, där avståndet mellan konvergenten r_n och talet självt krymper när n växer, samtidigt som varannan konvergent har ett högre värde och varannan ett lägre än talet självt.

Vilka konvergenter som ligger över och under talet självt går att bilda sig en uppfattning om genom att betrakta hur enkla kedjebråk byggs upp. Varje term är ett heltal som kommer ur en division, och varje term (utom den sista om talet är rationellt) följs av vad som var resten av denna division. Varje gång det finns en rest innebär det alltså att termen är mindre än kvoten hade blivit om divisionen utförts på "vanligt" sätt. Trunkering efter en viss term innebär därför att talet på den nivån i kedjebråkets struktur blir mindre än det är i det fullständiga kedjebråket. Sedan funderar vi över i vilka positioner i kedjebråkets struktur, alltså under vilka antal bråkstreck, som ett mindre tal ger ett mindre värde på hela kedjebråket. På samma sätt som talet $\frac{1}{3}$ är större än talet $\frac{1}{4}$ kan vi lista ut att ett mindre tal i positionen som a_1 har i ett kedjebråk ger ett större tal. Drar vi detta ett steg längre inser vi att om den sista termen som är kvar när ett kedjebråk huggs av är under ett udda antal bråkstreck är det värdet på det trunkerade kedjebråket större än ursprungstalet, och vice versa. Därför inser vi att en trunkering där sista termen är a_n innebär en approximation med ett mindre värde än talet självt om n är jämnt, och ett större värde än talet självt om n är udda.

Genom att konvergenterna till ett irrationellt tal växlar sida om talet vet vi också att talet självt måste ligga mellan två på varandra följande konvergenter. Detta ger en första, någorlunda intuitiv, uppskattning av felet vid approximation med hjälp av konvergenter.

Även när tal i decimalform avrundas på det sätt som är vanligast i Sverige finns dock en inbyggd feluppskattning som bygger på positionssystemet. När vi till exempel hugger av e:s decimalutveckling efter tre decimaler får vi nämligen 2,718, vilket vi vet ligger under e självt, men vi vet också att e ligger under 2,719, vilket på samma sätt som två på varandra följande konvergenter till ett oändligt kedjebråk ringar in talet vi approximerar. Vid vanlig avrundning tas dock även hänsyn till nästa decimal för att avrundningen ska komma så nära talet självt som möjligt. Om avrundningen till tre decimaler för ett irrationellt tal x är 3,574 vet vi därför istället att $3{,}5735 \leq x < 3{,}5745$.

Det mest fascinerande med approximering med hjälp av konvergenter till enkla kedjebråk är dock att det går att bevisa att dessa approximationer är så kallade bästa approximationer.

4.4.1 Bästa approximationer

Definition: En approximation $\frac{a}{b}$ där b är ett naturligt tal och a ett heltal, till ett tal x är en *bästa approximation* om $|bx - a| < |qx - p|$ för alla rationella tal $\frac{p}{q}$ med $0 < q \leq b$ som skiljer sig från $\frac{a}{b}$.

Redan ur definitionen kan vi dra slutsatsen att den största gemensamma delaren för a och b måste vara 1. Alternativet är nämligen att $SGD(a, b) = c > 1$, vilket betyder att $\frac{a}{b} = \frac{cd}{ce}$. För att $\frac{a}{b}$ ska vara en bästa approximation behöver då $|c(ex - d)|$ vara mindre än $|ex - d|$, vilket helt enkelt inte stämmer. Men för att dra slutsatsen att alla bästa approximationer är konvergenter behövs det ett bevis.

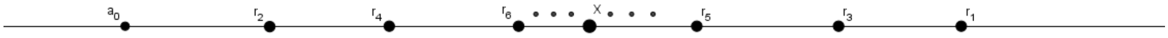
Sats: Om x är ett reellt tal är varje bästa approximation till x en konvergent $r_n = \frac{h_n}{k_n}$ till x eller talet $a_0 = \frac{h_0}{k_0}$. Just i detta fall kallar vi för enkelhetens skull även a_0 för en konvergent.

Eftersom a_0 är den första termen i kedjebråksutvecklingen för x är det ett heltal, vilket betyder att $a_0 = h_0$ och $k_0 = 1$. Vi specificerar också för enkelhetens skull att om x är ett rationellt tal använder vi den form av kedjebråksutvecklingen där den sista termen inte är 1.

4.4.1.1 Bevis: Bästa approximationer är konvergenter

Hela beviset följer det i *Continued Fractions* av Rockett och Szüsz (1992, s. 20-21), med några förklaringar av oss för att tydliggöra stegen i beviset.

Vi vet sedan tidigare att konvergenterna till ett tal närmar sig talet omväxlande från höger och vänster på tallinjen. Talet x och dess konvergenter ligger alltså på tallinjen på det sätt som visas på bilden nedan.



För att visa att den bästa approximationen $\frac{a}{b}$ måste vara en konvergent antar vi motsatsen. I så fall finns tre positioner som $\frac{a}{b}$ kan ha relativt konvergenterna $\frac{h_n}{k_n}$. Den första är under a_0, den andra är över r_1 och den tredje är mellan två konvergenter på samma sida, alltså r_k och r_{k+2}. Dessa tre fall hanteras separat.

Fall 1 innebär alltså att $\frac{a}{b} < \frac{h_0}{k_0}$. Då följer:

$$|bx - a| = b|x - \frac{a}{b}| \geq |x - \frac{a}{b}| > |x - \frac{h_0}{k_0}| = |x - a_0|.$$

Den sista olikheten använder att $\frac{a}{b}$ är längre bort från x på tallinjen än $\frac{h_0}{k_0}$. I sin helhet visar denna rad med jämförelser att om $\frac{a}{b}$ är mindre än $\frac{h_0}{k_0}$ kan inte $\frac{a}{b}$ vara en bästa approximation till x eftersom det ligger längre bort än a_0, som är ett heltal och alltså kan skrivas i bråkform med nämnaren 1.

Fall 2 innebär istället att $\frac{a}{b}$ är ett större tal än $r_1 = \frac{h_1}{k_1}$. Eftersom r_1 också är större än x får vi att

$$|bx - a| = b|x - \frac{a}{b}| > b|\frac{h_1}{k_1} - \frac{a}{b}| = b|\frac{h_1 b - a k_1}{k_1 b}| \geq b\frac{1}{k_1 b} = \frac{1}{k_1} = \frac{1}{a_1}.$$

Den första olikheten använder att $r_1 = \frac{h_1}{k_1}$ ligger mellan x och $\frac{a}{b}$. För att förstå den andra olikheten behöver vi först konstatera att $h_1 b - a k_1$ där alla bokstäver står för heltal också totalt sett står för ett heltal. Vi vet också i detta fall att $h_1 b - a k_1$ inte är lika med 0 eftersom detta skulle innebära att $\frac{a}{b} = \frac{h_1}{k_1}$ vilket inte kan stämma eftersom $\frac{a}{b}$ inte är en konvergent till x. Därför måste absolutbeloppet av $h_1 b - a k_1$ vara 1 eller större, och olikheten följer. Den sista likheten kommer av att $k_1 = a_1$, vilket vi vet för att k_1 är nämnaren i den första konvergenten och den konvergenten endast består av $a_0 + \frac{1}{a_1}$.

För att visa att $\frac{a}{b}$ inte kan vara en bästa approximation i fall 2 behöver vi också notera att $|x - a_0| < \frac{1}{a_1}$, vilket vi också kommer fram till genom att undersöka strukturen för kedjebråk. Tillsammans med olikheten $|bx - a| > \frac{1}{a_1}$ som vi redan visat kan vi alltså dra slutsatsen att $\frac{a_0}{1} = \frac{h_0}{k_0}$ är en bättre approximation än $\frac{a}{b}$, vilket i sin tur betyder att vi har nått motsägelse även i fall 2.

Fall 3 innebär att $\frac{a}{b}$ ligger mellan två konvergenter r_i och r_{i+2}. I detta fall använder vi likheterna nedan, som bevisas i Niven m.fl. (1991, s. 330):

$$\frac{h_i}{k_i} - \frac{h_{i-1}}{k_{i-1}} = r_i - r_{i-1} = \frac{(-1)^{i-1}}{k_i k_{i-1}}. \qquad \textbf{(1)}$$

Med hjälp av **(1)** får vi

$$\frac{1}{k_i k_{i+1}} = \left|\frac{h_{i+1}}{k_{i+1}} - \frac{h_i}{k_i}\right| > \left|\frac{a}{b} - \frac{h_i}{k_i}\right| \geq \frac{1}{k_i b},$$

vilket betyder att $b > k_{i+1}$. Vi har alltså en undre gräns på nämnarens storlek. Nästa steg är att ta fram en undre gräns på felmarginalen hos approximationen,

$$|bx - a| = b\left|x - \frac{a}{b}\right| > b\left|\frac{h_{i+2}}{k_{i+2}} - \frac{a}{b}\right| = b\left|\frac{h_{i+2}b - ak_{i+2}}{k_{i+2}b}\right| \geq b\frac{1}{k_{i+2}b} = \frac{1}{k_{i+2}}.$$

Precis som i fall 2 fås här den första olikheten genom att $r_{i+2} = \frac{h_{i+2}}{k_{i+2}}$ ligger mellan x och $\frac{a}{b}$ och den andra olikheten genom att $h_{i+2}b - ak_{i+2}$ måste vara ett heltal som inte är 0.

Vi vet dock enligt **(1)** och att x ligger mellan två på varandra följande konvergenter att

$$\left|x - \frac{h_{i+1}}{k_{i+1}}\right| < \left|\frac{h_{i+2}}{k_{i+2}} - \frac{h_{i+1}}{k_{i+1}}\right| = \frac{1}{k_{i+2}k_{i+1}}.$$

Detta resultat använder vi för att visa att konvergenten r_{i+1}, vars nämnare vi redan vet är mindre än b, också är en bättre approximation än $\frac{a}{b}$ enligt

$$|k_{i+1}x - h_{i+1}| < k_{i+1}\left|\frac{h_{i+2}}{k_{i+2}} - \frac{h_{i+1}}{k_{i+1}}\right| = k_{i+1}\frac{1}{k_{i+2}k_{i+1}} = \frac{1}{k_{i+2}}.$$

Vi kan alltså dra slutsatsen att $\frac{a}{b}$ inte är en bästa approximation till x eftersom dess nämnare är större än den som r_{i+1} har, men dess approximation är sämre.

Med detta har vi nått motsägelse i alla tre fall där en bästa approximation till ett tal inte är en konvergent till samma tal. Därmed kan vi dra slutsatsen att alla bästa approximationer är konvergenter.

En fråga som naturligt följer denna slutsats är om det omvända är sant. Är alla konvergenter till ett tal också bästa approximationer till samma tal?

Det kommer framgå att det stämmer, om ett visst undantag utesluts och vi återgår till den vanliga definitionen av konvergent, alltså utesluter a_0. Undantaget som behöver uteslutas är när $x = a_0 + \frac{1}{2}$, alltså om talet vi approximerar ligger exakt halvvägs mellan två på varandra följande heltal. I detta fall är nämligen inte alla konvergenter till talet bästa approximationer.

Både talet a_0 och talet $a_0 + 1$ har nämligen i detta fall nämnaren 1 och är precis lika bra approximationer till x, vi kan alltså skriva $|x - (a_0 + 1)| = |x - a_0|$. Detta betyder att varken a_0 eller $a_0 + 1$ är en bättre approximation till x än det andra, och därför kan ingen av dem vara en bästa approximation, trots att det inte finns någon bättre med samma eller mindre nämnare.

<u>Sats:</u> Om x inte är lika med $a_0 + \frac{1}{2}$ är alla dess konvergenter bästa approximationer till x.

4.4.1.2 Bevis: Konvergenter är bästa approximationer

<u>Bevis:</u> Även detta bevis följer motsvarande bevis i *Continued Fractions* av Rockett och Szüsz (1992, s. 21-22), med förklaringar som tydliggör stegen tillagda av oss. Även i detta bevis antar vi att om x är rationellt är det skrivet på formen där den sista termen är större än eller lika med två.

Vi kommer i detta bevis behöva använda olikheterna

$$\frac{1}{k_i + k_{i+1}} < |k_i x - h_i| < \frac{1}{k_{i+1}} \quad \textbf{(2)}$$

där den första olikheten härleds i det första kapitlet i Rockett och Szüsz (1992). Den andra olikheten kan härledas ur **(1)** med hjälp av att x alltid ligger mellan r_i och r_{i+1}.

Vi kommer även använda den rekursiva formeln för k som presenteras av Rockett och Szüsz (1992, s.2)

$$k_{i+1} = a_{i+1} k_i + k_{i-1}. \qquad \textbf{(3)}$$

Vi ska alltså bevisa att r_n är en bästa approximation till x, för alla $n > 0$. Detta betyder att vi ska visa att varje r_n är en bättre approximation till x än alla tidigare konvergenter och dess första term a_0.

Till att börja med väljer vi därför ett k_n, alltså nämnaren till en konvergent r_n till x. Nästa steg är att ta fram ett rationellt tal $\frac{A}{B}$ enligt två kriterier. För det första begränsar vi nämnarens storlek enligt $0 < B \le k_n$. För det andra ska $|Bx - A|$ vara så litet som möjligt.

Redan här behöver vi dock dela upp beviset i två fall. I fall 1 antar vi att det A i $\frac{A}{B}$ som uppfyller kriterierna ovan är unikt. I fall 2 antar vi att A inte är unikt, alltså att det lägsta möjliga värdet på $|Bx - A|$ uppnås av två olika A.

I fall 1 kan vi dra slutsatsen att $\frac{A}{B}$ är en bästa approximation, och därmed vet vi att det är en konvergent $\frac{A}{B} = \frac{h_m}{k_m}$. Eftersom $0 < B \le k_n$ vet vi även att $m \le n$. Om $m < n$ vet vi att

$$|k_m x - h_m| > \frac{1}{k_m + k_{m+1}} \ge \frac{1}{k_{n-1} + k_n}$$

där den första olikheten kommer från **(2)**. I det andra steget gäller likheten endast om $n = m + 1$, annars gäller olikheten. Detta gäller eftersom både m och n är naturliga tal och det alltid gäller att $k_i < k_{i+1}$.

Vi vet också från **(2)** att $|k_n x - h_n| < \frac{1}{k_{n+1}}$. För att $\frac{h_n}{k_n}$ inte skulle vara en bästa approximation krävs att $\frac{h_m}{k_m}$ är bättre, och nu har vi vad som behövs för att jämföra dem. Vi kan nämligen skriva

$$|k_m x - h_m| > \frac{1}{k_{n-1} + k_n} \geq \frac{1}{k_{n+1}} > |k_n x - h_n|$$

eftersom $k_{n+1} \geq k_n + k_{n-1}$ enligt **(3)**.

Vi har alltså visat att om A är unikt och $m < n$ får vi en motsägelse i definitionen för B eftersom den förutsatte att B minimerar $|Bx - A|$ när B fick vara i spannet $0 < B \leq k_n$. Därför kan vi dra slutsatsen att om A är unikt måste $n = m$ och $\frac{A}{B} = \frac{h_n}{k_n}$, vilket är konvergenten r_n. I fall 1 har vi alltså bevisat att r_n är en bästa approximation.

I fall 2 är A inte unikt. Detta betyder att Bx måste ligga mellan två på varandra följande heltal eftersom det måste finnas två olika heltal A sådana att $|Bx - A|$ får minsta möjliga värde. Vi kan kalla dessa heltal A och A+1. Vi vet nu att $Bx - A = \frac{1}{2}$ och att $Bx - (A + 1) = -\frac{1}{2}$, alltså att $|Bx - A| = |Bx - (A + 1)|$. Detta i sin tur betyder att $x = \frac{1+2A}{2B}$, vilket är ett rationellt tal. Vi vet också nu att $\frac{A}{B}$ inte är en bästa approximation till x eftersom både $\frac{A}{B}$ och $\frac{A+1}{B}$ ger lika bra approximationer.

Vi undersöker nu om det rationella talet x går att förkorta, vilket betyder att vi behöver hitta den största gemensamma delaren för täljaren och nämnaren. Till att börja med dras slutsatsen att SGD(1 + 2A, 2B) inte kan vara 2 eftersom 1 + 2A är ett udda tal. Om SGD(1 + 2A, 2B) är ett tal v, större än 2 gäller att $\frac{2B}{v} x - \frac{1+2A}{v} = 0$ eftersom $x = \frac{1+2A}{2B}$. Detta motsäger definitionen av B eftersom talet $\frac{2B}{v}$ är mindre än B och är nämnare i ett rationellt tal som är en bättre approximation än $\frac{A}{B}$. Vi drar därför slutsatsen att SGD(1+2A, 2B)=1.

Det rationella talet $x = \frac{1+2A}{2B}$ har alltså en sista konvergent $x = r_s = \frac{h_s}{k_s}$ där $h_s = 1 + 2A$ och $k_s = 2B$. Här används **(3)** för att skriva $k_s = 2B = a_s k_{s-1} + k_{s-2}$ där $a_s \geq 2$ eftersom rationella tal skrivs på formen där den sista termen inte är ett. Eftersom fallet då s = 1 och $a_s = 2$ är uteslutet redan i satsen har vi antingen att s = 1 och $a_s > 2$ eller att s > 1. Vi har då i båda fallen även $k_{s-1} < B$ enligt **(3)**, så att

$$|k_{s-1} x - h_{s-1}| = |k_{s-1}(\frac{h_s}{k_s}) - h_{s-1}| = \frac{1}{k_s} = \frac{1}{2B} \leq |Bx - A| = \frac{1}{2}$$

Det första som händer här är att x skrivs som $\frac{h_s}{k_s}$. För att få det andra steget följet vi **(1)** på samma sätt som på s.20. Olikheten kommer av att $k_s \geq 2$ vilket vi vet för att $k_s = 2B$ och B är ett naturligt tal.

Detta motsäger dock definitionen för B eftersom vi nu vet att det finns ett tal $\frac{h_{s-1}}{k_{s-1}}$ som har en mindre nämnare än B och är en bättre approximation till x än $\frac{A}{B}$. I fall två har vi nu uppnått motsägelse.

Med detta avslutas beviset eftersom vi har motsagt att B kan vara något annat än k_n för att uppfylla sin definition och vi därigenom har bevisat att alla konvergenter r_n till x där $n > 0$ är bästa approximationer till x.

Den uppmärksamme läsaren har kanske nu noterat att vi i beviset för att alla bästa approximationer är konvergenter inkluderade den första termen i kedjebråket som en konvergent, men att vi inte gjorde det i beviset för att alla konvergenter är bästa approximationer. Det är nämligen vissa tal x, men inte alla, vars första term också är en av dess bästa approximationer. Vilka dessa är går dock att förklara utan något komplicerat bevis.

Utifrån hur a_0 bestäms vet vi att $a_0 \leq x < a_0 + 1$. Vi har dessutom redan sett att om ett tal x ligger precis mellan två heltal, alltså $x = a_0 + \frac{1}{2}$, har det ingen bästa approximation med nämnare 1. Detta kan förklaras som att inget heltal är det heltal som ligger närmast x eftersom heltalen a_0 och $a_0 + 1$ ligger på samma avstånd från x. Om vi istället antar att $x < a_0 + \frac{1}{2}$ är a_0 en bästa approximation till x eftersom det är det närmaste heltalet till x. Däremot om $x > a_0 + \frac{1}{2}$ är a_0 inte en bästa approximation till x eftersom $a_0 + 1$ är närmare. I detta fall kan vi resonera oss fram till att $r_1 = a_0 + 1$. Den andra termen, a_1 måste nämligen vara 1 för att $r_1 = a_0 + \frac{1}{a_1}$ ska kunna vara ett större tal än x, vilket vi vet att den första konvergenten är.

5. Diskussion

Det finns mycket i denna litteraturstudie att diskutera. Det första avsnittet rör några av våra huvudsakliga resultat på fråga ett och två, alltså elevers förståelse för likhetstecknet och vilka konsekvenser olika typer av förståelse för likhetstecknet kan ha för eleven. Sedan diskuteras resultatet på fråga tre och hur det relaterar till vår egen framtida yrkesutövning, alltså vilka klassrumspraktiker vi planerar att använda oss av och i vilken utsträckning. Efter detta följer ett om relevans, som hanterar både arbetets relevans till vår framtida yrkesutövning och litteraturens relevans i detta sammanhang. I avsnittet som följer diskuteras kedjebråk utifrån deras roll i ett arbete om likhetstecknet. Förståelse för likhetstecknet relateras där till taluppfattning och strukturförståelse. Det sista avsnittet innehåller förslag på framtida forskning.

5.1 Förståelser för likhetstecknet och deras konsekvenser för individen

Likhetstecknet betyder inom matematiken att det finns en ekvivalensrelation mellan det som står i högerledet och det som står i vänsterledet, och en relationell förståelse för tecknet innebär förståelse för alla aspekter som ingår i denna relation. I många fall är dock likhetsförståelse, som innebär förståelse för symmetri och reflexivitet, tillräcklig förståelse. Elevers förståelse för likhetstecknet domineras dock alltför länge av den operativa betydelse som tecknet i västvärlden används med inom elementär aritmetik.

Problem uppstår när elevers uppfattning av likhetstecknet inte stämmer överens med dess betydelse eller inte är tillräcklig i sammanhanget. En strikt operationell förståelse utanför grundläggande aritmetik eller avsaknad av någon av aspekterna av en relationell förståelse, främst likhetsförståelse, skapar de flesta problem som tas upp i litteraturen. Dessa problem täcker in allt från horisontella lösningar där likhetstecknet används felaktigt till svårigheter att ta till sig nya matematiska koncept och misslyckade eller avslutade studier på universitetsnivå. En korrekt och tillräcklig förståelse för likhetstecknet associeras istället med bra resultat och snabba och korrekta lösningar.

5.2 Vårt framtida användande av rekommenderade klassrumspraktiker

Att en korrekt förståelse för likhetstecknet verkar vara något som hjälper individens inlärning av matematik samtidigt som det inte verkar vara något som uppstår spontant eller faktiskt krävs för att klara gymnasiematematiken, gör det till ett intressant koncept att fundera över för oss framtida gymnasielärare. Det är inte något som explicit hanteras i våra styrdokument, men vi vet att förståelse för likhetstecknet kan ha stora konsekvenser för våra framtida elevers inlärning och prestationer inom matematik. Hur mycket tid är det då rimligt att vi lägger ner på att främja förståelse för detta enda lilla tecken?

Det absolut minsta vi kan göra för att främja våra framtida elevers förståelse för likhetstecknet är att utläsa det som “är lika med” istället för “blir” och att själva använda likhetstecknet korrekt. Att vi vid några väl valda tillfällen tydligt definierar likhetstecknet är också troligt eftersom detta inte behöver ta mycket tid.

Att vi själva undviker att göra horisontella lösningar är också en självklarhet. Att vi på något sätt markerar dem som felaktiga när elever gör dem i prov- eller diagnossituationer är också troligt. Men i vilken mån kommer vi låta dem passera i lärsituationer i helklass och med enskilda elever för att det är något annat koncept som är i fokus? Hur stor andel av klassen behöver göra horisontella lösningar för att vi ska tjäna på att förklara i helklass varför de är fel? Troligtvis är tröskeln för att göra dessa insatser lägre för oss nu när vi vet hur stor påverkan en elevs förståelse för just likhetstecknet har för elevens fortsatta inlärning av matematik, men dessa frågor kommer aldrig ha några fullständiga svar.

Avvägningarna vi kommer behöva göra gällande ekvationslösning har dessutom en ytterligare faktor inblandad. Vi vet nu att det hjälper för likhetsförståelsen att jämföra ekvationen med en våg, där de båda leden måste väga lika för att ekvationen ska stämma. Det är troligt att vi använder denna analogi i samband med ekvationslösning, särskilt om många elever gör fel som tyder på bristande likhetsförståelse. Det är också troligt att vi kommer förespråka ekvationslösningsmetoden "gör samma sak på båda sidor" som är kopplad till våganalogin och likhetsförståelse, över metoden "flytta över och byt tecken" som endast associeras med procedurella färdigheter. Den senare går dock att komma fram till med hjälp av den tidigare och innebär dessutom, som Ngu m.fl. (2015) kallar det, en mindre kognitiv belastning. Eftersom förståelse för likhetstecknet inte kommer vara det enda vi vill att eleverna uppnår kan argumentet om kognitiv belastning i vissa situationer vara ett kraftfullt argument för att istället använda metoden "flytta över och byt tecken".

Något som både Persson och Wennström (2003b) och Fitzmaurice m.fl. (2018) tar upp är att lärande tar tid och träning. Att ge alla våra framtida elever en möjlighet att nå relationell förståelse för likhetstecknet eller strukturförståelse generellt innebär därför troligtvis en viss mängd upprepning vid olika tillfällen. Det går inte att anta att eleverna kommer ha en fullständig relationell förståelse efter bara en förklaring, men kanske kan förståelsen förbättras lite varje gång.

Persson och Wennström (2003b) tar dessutom upp betydelsen av mängdträning för att de procedurella färdigheterna ska ha en chans att leda till djupare förståelse. Deras system med stödgrupper där de elever som just då behöver extra hjälp och träning får det konstateras fungera bra där för att tackla problem med bristande förkunskaper. Vilka system för extra stöd i matte som finns är dock olika på olika skolor och det som fungerar på en skola fungerar inte nödvändigtvis på en annan.

Sammanfattningsvis kan sägas att förståelse för likhetstecknet är något komplext, och vi som framtida gymnasielärare kommer aldrig ha kontroll över hela utvecklingsprocessen. Det finns dock saker vi kan göra när vi märker att förståelsen brister, och starka argument för att göra dessa åtgärder. Trots att det kan tyckas att de redan borde ha en relationell förståelse när de börjar på gymnasiet är nämligen så ofta inte fallet, och detta kan ha stora konsekvenser för individens framgång inom matematiken av flera olika anledningar, även om det inte nödvändigtvis innebär ett misslyckande i form av underkända kurser.

5.3 Relevans

Att alla metoder för att lära ut relationell förståelse till gymnasieungdomar är sätt att lösa ett problem som troligtvis inte hade behövt uppstå är intressant, men gör inte metoderna irrelevanta eller jobbet onödigt. Det faktum att problemen med operationell förståelse eller bristande relationell förståelse inte uppstår i Kina, där undervisningen ser annorlunda ut från första stund (Jones m.fl., 2012), betyder att det finns lärdomar vi kan dra därifrån om hur den tidiga undervisningen om likhetstecknet kan se ut. Det betyder också att bland annat Driver och Powell (2015) har en poäng med att algebra behöver läras ut tidigare och tydligare än vad som görs i västvärlden idag. Utveckling av kursplaner och liknande sker dock långsamt, vilket betyder att problem med bristande förståelse för likhetstecknet bland elever på gymnasienivå troligtvis kommer kvarstå i många år efter att vi får våra lärarlegitimationer. Vår egen kunskap om likhetstecknet och vilka misstag och problem som kan tyda på bristande förståelse för det kommer därför säkerligen komma till användning i vårt framtida yrkesliv.

Likhet är dock inte det enda viktiga koncept som elever saknar kunskap om när de kommer till gymnasiet. Det är viktigt att uppmärksamma att de kunskapsglapp som finns på alla olika områden kommer ha någon typ av konsekvens för elevernas fortsatta inlärning och resultat samt att undervisningstiden är begränsad i varje kurs och att tiden vi har för att gå igenom sådant som borde vara förkunskaper därför också är begränsad. Det gäller därför att prioritera, och eftersom likhetstecknet används i varje avsnitt i varje kurs på gymnasiet kan det prioriteras högt. Ett annat område där förkunskaperna ofta brister är taluppfattning (Persson & Wennström, 2003a; Persson & Wennström, 2003b; Hoch & Dreyfus, 2004; Vlassis, 2002; Linchevski & Livneh, 1999; Vincent, Pierce & Bardini, 2017), och eftersom tal förekommer åtminstone lika ofta som likhetstecknet är även detta ett område som bör prioriteras.

Mycket av den litteratur om förståelse för likhetstecknet som vi stött på handlar om yngre barn, antingen i början av skolåldern eller runt tiden då algebra introduceras. Detta tänker vi oss är naturligt. Algebra är nämligen det första koncept eleverna stöter på som tydligt sätter krav på deras förståelse för likhetstecknet, det vill säga det är då problem uppstår för första gången, och de tidigare årskurserna med grundläggande aritmetik är tiden då eleverna bygger upp den förståelse som senare orsakar problem. Den litteratur vi har hittat som handlar om elever på gymnasiet och liknande eller till och med studenter på universitetet antyder dock att det är möjligt att komma långt med bristande förståelse för likhetstecknet trots att problemen som eleverna möter för första gången i samband med algebran inte försvinner.

Det är också värt att notera att de flesta av artiklarna som använts är antingen från andra länder än Sverige eller äldre än vad som vore optimalt. Det framgår till exempel inte av studien av Jones m.fl. (2012) hur undervisningen och elevernas förståelse i Sverige ligger till jämfört med USA och Kina, trots att de antyder att problembilden i USA till viss del delas av andra länder i västvärlden. Vi anser också att det är någorlunda rimligt att anta att liknande problem finns i Sverige. Delvis grundar vi detta i egen erfarenhet av att exempelvis rätta horisontella lösningar under våra praktikperioder på utbildningen, delvis i att Persson och Wennström (2003a) påpekar att en märkbar andel av eleverna som kommer till gymnasiet har med sig en operationell förståelse för likhetstecknet.

5.4 Kedjebråk

Vi har redan noterat att utöver en tillräcklig och korrekt förståelse för likhetstecknet är taluppfattning en viktig förkunskap att ha på gymnasiet. Enligt Linchevski och Livneh (1999) ingår dessutom taluppfattning i det övergripande begreppet strukturförståelse, som vi har berört i detta arbete eftersom en av dess aspekter är likhetsförståelse. Strukturförståelse är också något som enligt Torigoe och Gladding (2011) hjälper i universitetsstudier i fysik, och troligtvis även andra ämnen där mycket matematik ingår.

Detta arbete har inte gått ut på att hitta kopplingar mellan taluppfattning och förståelse för likhetstecknet, men vi har åtminstone hittat kopplingen att de båda är viktiga för strukturförståelsen, som i sin tur är viktiga för att lära sig matematik. Redan i början av arbetet såg vi dock en koppling genom ekvivalensrelationen. Likhetstecknet symboliserar nämligen en ekvivalensrelation som bland annat är definierad på de reella talen. Att vi ville utvidga vår förståelse för de reella talen genom att undersöka en för oss okänd representationsform för dem ser vi i efterhand att vi kan se som en ansats att förbättra vår taluppfattning. Motivationen till att göra det i detta arbete var att ett kedjebråk är lika med samma tal i exempelvis decimalform, alltså att likhet gäller när samma tal är representerat i båda leden, oavsett representationsform.

Även vanliga bråktal vet vi dock av egen erfarenhet från våra praktikplatser är ett svårt koncept för många elever att greppa, särskilt det faktum att tal som $\frac{1}{3}$ är exakta och 0,333 inte är samma sak eftersom det är en avrundning. Eftersom vanliga bråktal anses vara svåra tänker vi oss inte att kedjebråk skulle användas för att hjälpa elever som har svårigheter med taluppfattning, utan snarare skulle de kunna användas som en utmaning för understimulerade elever. Bara att skriva tal på denna, för eleven, nya form skulle vara en utmaning, men deras talförståelse skulle också kunna utvidgas när de får veta att exempelvis $\sqrt{2}$ har en upprepning i sin struktur i kedjebråksform. Kedjebråken skulle också kunna användas för att ta fram en approximation till pi som är bättre än en vanlig avrundning för att den behåller sin precision bättre i beräkningar, och för att den kan användas korrekt av datorer.

Samma länk mellan likheten $1 = 0{,}999 \ldots$ och kedjebråk som vi såg i början ser vi alltså även nu. De kan hjälpa oss att se nya egenskaper hos och bygga ny förståelse för de reella talen, och dessa i sin tur har en koppling till likhetstecknet genom att ekvivalensrelationen är definierad på bland annat denna mängd. Vi vet till exempel nu att likheten $\sqrt{2} = [1, 2, 2, \ldots]$ är sann på samma sätt som $0{,}5 = \frac{1}{2}$. Vi har alltså i någon mån utvidgat vår förståelse för likhetstecknet och hur det kan användas genom att utvidga får förståelse för de reella talen.

5.5 Framtida forskning

För vår egen framtida yrkesutövning skulle det exempelvis vara användbart med fler studier i Sverige, av samma typer som vi använt oss av i denna litteraturstudie. Allt från analyser av matteböcker för att se vilka typer av uppgifter som används, till studier med prov och intervjuer för att bedöma gymnasieelevers konceptuella förståelse för likhetstecknet är av intresse.

Det hade dessutom varit intressant att veta vilka andra koncept som är lika viktiga att förstå. Otillräcklig eller felaktig förståelse för likhetstecknet hamnar nämligen i en intressant kategori av problem som inte nödvändigtvis blir lösta. Det framgår att en inkorrekt eller otillräcklig förståelse för likhetstecknet är ett problem för utveckling av förståelse för nya koncept, men också att dessa problem inte nödvändigtvis resulterar i icke godkända resultat. Därför kan eleverna fortsätta studera matematik, utan att först skapa sig en korrekt förståelse för likhetstecknet, och problemen kvarstår.

Referenslista

Araya, R., Calfucura, P., Jiménez, A., Aguirre, C., Palavicino, M., Lacourly, N., . . . Dartnell, P. (2010). The effect of analogies on learning to solve algebraic equations. *Pedagogies: An International Journal, 5*(3), 216-232.

Asquith, P., Stephens, A., Knuth, E., & Alibali, M. (2007). Middle School Mathematics Teachers' Knowledge of Students' Understanding of Core Algebraic Concepts: Equal Sign and Variable. *Mathematical Thinking and Learning, 9*(3), 249-272.

Driver, M., & Powell, S. (2015). Symbolic and Nonsymbolic Equivalence Tasks: The Influence of Symbols on Students with Mathematics Difficulty. *Learning Disabilities Research & Practice, 30*(3), 127-134.

Falkner, K., Levi, L., & Carpenter, T. (1999). Children's understanding of equality: A foundation for Algebra. *Teaching Children Mathematics, 6*(4), 232-236.

Fitzmaurice, O., O'meara, N., Johnson, P., & Lacey, S. (2018). 'Crossing' the equals sign: Insights into pre-service teachers' understanding of linear equations. Asia-Pacific Journal of Teacher Education, 1-22.

Godfrey, D., & Thomas, M. (2008). Student perspectives on equation: The transition from school to university. *Mathematics Education Research Journal, 20*(2), 71-92.

Harrell, Z. (2016). *High school geometry students' interpretations of the equal symbol* (Order No. 10249731). Available from ProQuest Dissertations & Theses Global. (1866380317). Retrieved from https://search-proquest-com.ezproxy.ub.gu.se/docview/1866380317?accountid=11162

Hoch, M., & Dreyfus, T. (2004). Structure sense in high school algebra: The effect of brackets. In *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 49-56).

Hua, L. K. (1982). Continued Fractions and Approximation Methods. In: *Introduction to Number Theory*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.

Jones, I. (2008). A diagrammatic view of the equals sign: Arithmetical equivalence as a means, not an end. *Research in Mathematics Education, 10*(2), 151-165.

Jones, I., Inglis, M., Gilmore, C., & Dowens, M. (2012). Substitution and sameness: Two components of a relational conception of the equals sign. *Journal of Experimental Child Psychology, 113*(1), 166-176.

Kabar, M. (2018). Secondary School Students' Conception of Quadratic Equations with One Unknown. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning, 19*(1), 112-129.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics, 12*(3), 317-326.

Leinbach, L. C. (2015). Representing Numbers as Continued Fractions and an N-Spire. tns Document to Do Some Basic Continued Fraction Arithmetic. *International Journal* *for Technology in Mathematics Education*, *22*(3), 131–136. Retrieved from http://search.ebscohost.com.ezproxy.ub.gu.se/login.aspx?direct=true&db=eric&AN=EJ1080478&site=ehost-live

Linchevski, L., & Livneh, D. (1999). Structure sense: The relationship between algebraic and numerical contexts. *Educational studies in mathematics*, *40*(2), 173-196.

Lindahl, L. A. (2002). Lectures on Number Theory. Sweden: Uppsala University Retrieved http://www2. math. uu. se/~ astrombe/talteori2016/lindahl2002. pdf.

Machaba, F. M. (2017). Grade 9 learners' structural and operational conceptions of the equal sign: A case study of a secondary school in Soshanguve. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 13*(11), 7243-7255.

Ngu, B., Chung, S., & Yeung, A. (2015). Cognitive load in algebra: Element interactivity in solving equations. *Educational Psychology, 35*(3), 271-293.

Niven, I., Zuckerman, H. S., & Montgomery, H. L. (1991). *An introduction to the theory of numbers*. John Wiley & Sons.

Persson, Per-Eskil, and Wennström, Tomas. (2003a). *Gymnasieelevers algebraiska förmåga och förståelse*. Tsunami 1 (2003): Tsunami, 2003(1). Web.

Persson, Per-Eskil, & Wennström, Tomas. (2003b). *Gymnasieelevers algebraiska förmåga och förståelse II*. Tsunami, (2), Tsunami, 2003(2).

Rittle-Johnson, B., Matthews, P., Taylor, R., & McEldoon, K. (2011). Assessing Knowledge of Mathematical Equivalence: A Construct-Modeling Approach. Journal of Educational Psychology, 103(1), 85-104.

Rockett, A., & Szüsz, P. (1992). Continued Fractions. Singapore: World Scientific Publishing Company.

Skolverket. (2011). *Läroplan och kursplan för grundskolan*. Hämtat från (2019-09-19): https://www.skolverket.se/undervisning/grundskolan/laroplan-och-kursplaner-for-grundskolan/laroplan-lgr11-for-grundskolan-samt-for-forskoleklassen-och-fritidshemmet?url=1530314731%2Fcompulsorycw%2Fjsp%2Fsubject.htm%3FsubjectCode%3DGRGRMAT01%26tos%3Dgr%26p%3Dp&sv.url=12.5dfee44715d35a5cdfa219f#anchor3

Skott, J., Jess, K., & Hansen, H. C. (2010). *Matematik för lärare: δ Didaktik*. Gleerups Utbildning AB.

Torigoe, E., & Gladding. (2011). Connecting symbolic difficulties with failure in physics. *American Journal of Physics, 79*(1), 133-140.

Vincent, J., Bardini, C., Pierce, R., & Pearn, C. (2015). Misuse of the Equals Sign: An Entrenched Practice from Early Primary Years to Tertiary Mathematics. *Australian Senior Mathematics Journal, 29*(2), 31-39.

Vincent, J., Pierce, R., & Bardini, C. (2017). Structure sense: A precursor to competency in undergraduate mathematics. *Australian Senior Mathematics Journal, 31*(1), 38-47.

Vlassis, J. (2002). The balance model: Hindrance or support for the solving of linear equations with one unknown. *Educational Studies in Mathematics*, *49*(3), 341-359.