GÖTEBORGS UNIVERSITET

Begreppsbilden av komplexa tal

Koncept eller procedur?

Erik Olsson
Ämneslärarprogrammet

Examensarbete:	15 hp
Kurs:	LGMA2A
Nivå:	Avancerad nivå
Termin/år:	VT/2019
Handledare:	Jan Stevens
Examinator:	Laura Fainsilber
Kod:	VT19-3001-007-LGMA2A

Nyckelord: komplexa tal, begreppsbild, konceptuell förståelse, procedurell förståelse

Sammanfattning

Syftet med denna studie är att undersöka gymnasieelevers förståelse av komplexa tal och vanliga missförstånd kring dessa samt undersöka om det går att kategorisera denna förståelse i olika typer. Ett frågeformulär som behandlar uppfattningen om komplexa tal, deras summa och absolutbelopp gavs till 42 elever från tre olika gymnasieskolor. Undersökningen har sin utgångspunkt i fenomenografisk metod. Resultaten tyder på en återkommande uppfattning att komplexa tal är mindre verkliga än andra, samt att svaga uppfattningar av begrepp för reella tal kan kopplas till missuppfattningar av begreppet för komplexa tal, som t.ex. absolutbelopp. Uppfattning om komplexa tal, deras summa och absolutbelopp modellerades efter *konceptuell* förståelse och *procedurell* förståelse vilket baserades på en teoretisk bakgrund av Skemp (1976), Hiebert & Lefevre (1986), Sfard (1991) samt Tall & Vinner (1981). Tolkningen av de aktuella begreppen dominerades sällan av ena eller andra typen av uppfattning, utan det var ofta små skillnader med viss tonvikt åt ena eller andra hållet. De didaktiska konsekvenserna av att känna till elevers begreppsförståelse är att man får en uppfattning om hur man kan undervisa om begrepp för att nå en bättre förståelse bland eleverna. Elever som har en mer procedurell uppfattning kan gynnas av att få en konceptuell beskrivning och vice versa.

Förord

Jag vill passa på att tacka de som hjälpt mig under arbetets gång; Jan som varit min handledare; de lärare vars klasser jag fått genomföra undersökningen med samt givetvis eleverna själva som ställde upp; gymnasielärarna Niklas, Kristofer och Simon samt min studiekamrat Henric som jag kunnat bolla idéer med och som har gett mig värdefull feedback, och min flickvän Lena som har fått korrekturläsa allt. Ett tack går också till Jens och Vidar som skrev sitt examensarbete i samma datasal som mig vilket var trevligt. De köpte även en Pepsi MAX åt mig.

Innehållsförteckning

Figur- och tabellförteckning

1. Inledning

Matematik är en axiomatisk vetenskap. Med hjälp av definitioner och induktiva resonemang går det att härleda alla sina slutsatser. Därför blir den begreppsliga förståelsen, dvs. att vara bekant med de matematiska definitionerna och hur de kan användas så viktig. Enligt Hiebert och Lefevre (1986) har debatten om matematikundervisning historiskt ofta landat i huruvida förståelse eller färdighet ska betonas mest. Många som har lätt för matematik brukar enligt min erfarenhet trycka på hur viktigt det är med förståelse snarare än utantillkunskap, eftersom man med hjälp av förståelsen kan härleda kunskapen. Det viktiga blir då de bakomliggande principerna snarare än att känna till specialfall. För de som har svårare för matematik upplever jag att det ofta kan vara tvärtom. Då kan det vara procedurella kunskaper som söks eftersom förståelsen känns för svår att uppnå. Många lärare upplever jag också undervisar genom att bygga (kommande) förståelse på en väl fungerande procedurell förmåga.

Komplexa tal introduceras i gymnasiet, dels i matematik 2 som ett sätt att lösa vissa andragradsekvationer och dels i matematik 4 som en större del av kursen. Det är ett område som jag tror många tycker är väldigt abstrakt och svårt att relatera till och därmed svårt att verkligen förstå sig på, trots att beräkningarna, det procedurella, ofta är på en relativt enkel nivå. Komplexa tal innehåller också möjlighet till många olika tolkningar eller framställningar, både grafiskt och algebraiskt, med växlingar mellan rektangulär form ($x + yi$), polär form ($r(\cos\theta + i\sin\theta)$), exponentiell form ($r\, e^{i\,\theta}$) och vektorform ($x, y$). Detta tror jag gör att det blir extra viktigt att kunna behärska både det konceptuella och det procedurella. Det finns studier som visar att elever upplever komplexa tal som extra svårt delvis på grund av benämningarna "komplex" och "imaginär", som hämmar inlärningen då de associeras med något komplicerat och påhittat (Nordlander & Nordlander, 2012). I det här arbetet vill jag undersöka elevers förståelse och kunskaper kring begrepp för komplexa tal.

2. Syfte

Syftet med arbetet är att undersöka hur man kan förstå matematiska begrepp inom komplexa tal, och därmed kunna få en insikt i hur man kan förstå matematiska begrepp mer allmänt. Frågeställningarna som arbetet avser att svara på är:

- Hur kan elevers begreppsbild av komplexa tal se ut?
- Hur kan man kategorisera olika elevers typer av förståelse av komplexa tal?
- Vilka vanliga missförstånd om komplexa tal kan förekomma?

3. Bakgrund

3.1 Vad innebär förståelse?

Skemp (1976) poängterar att ordet förståelse kan ha olika innebörd för olika personer och skiljer på *relationell* och *instrumentell* förståelse i matematiken, dvs. att förstå varför något ska utföras i kontrast mot att bara kunna en regel för hur. En person kan uppfatta sig förstå ett begrepp när denne har uppnått enbart instrumentell förståelse. Dock skriver han att det i praktiken är svårt att utvärdera huruvida någon har en relationell eller instrumentell förståelse. Han liknar relationell förståelse med att ha en slags mental karta över ett område som man kan använda för att själv skapa sig en rutt att ta sig från A till B med, medan instrumentell förståelse är som att kunna en specifik vägbeskrivning utantill utan att känna till geografin. För en utomstående är det svårt att avgöra om personen använder sig av en mental karta eller bara kan följa en specifik väg men för personen som ska hitta gör det stor skillnad för vilka situationer denne kan hantera.

En modell som liknar Skemp's används av Hiebert och Lefevre (1986). De definierar *konceptuell* kunskap som kunskap som man kan relatera till mycket annan kunskap. Kunskap som innehåller många kopplingar och som har en mening. Samband mellan begrepp är där lika betydelsefulla som begreppen själva. De definierar *procedurell* kunskap dels som att kunna se skillnad på korrekt eller felaktig syntax i matematiken, och dels som att känna till regler och algoritmer. Procedurell kunskap beskrivs som kunskap som typiskt omsätts sekventiellt. De diskuterar att det har funnits en tydlig distinktion mellan konceptuell och procedurell kunskap, men att de inte nödvändigtvis behöver stå i motsats till varandra. De menar att det är lätt att beskriva en generell skillnad mellan båda typerna av förståelse, men svårt att exakt definiera när den ena slutar och den andra tar vid.

Sfard (1991) har också en liknande beskrivning av två sidor av kunskap, men menar att det finns en dualitet i vår förståelse av matematik, två olika sätt att förstå matematiska begrepp som kompletterar varandra. Dels finns det en *strukturell* förståelse där man behandlar begrepp som statiska helheter som är oföränderliga och tidlösa. Dels finns det också en *operationell* förståelse där begreppen snarare ses som procedurer, något som resulterar i ett svar först när en beräkning genomförts. Ett exempel på det är att uttryck med likhetstecken kan ses som att antingen ena sidan av likhetstecknet alltid *är* lika med den andra, eller som en procedur där ena sidan ska *bli* lika med den andra efter en beräkning. För en djupare förståelse är det enligt Sfard viktigt att kunna föreställa sig abstrakta matematiska begrepp som objekt. Strukturell förståelse kan enligt Sfard förstärkas eller uppmuntras genom visuell representation. En funktion består t.ex. av ett oändligt antal punkter, och en graf kan representera alla de punkterna på en och samma gång. Alla punkterna kan ses som en helhet. En verbal eller skriftlig framställning går däremot inte att på en gång ses som en helhet, den måste läsas eller lyssnas från början till slut, och skulle därför kunna förstärka en operationell uppfattning eftersom den måste uppfattas sekventiellt. De två synsätten är egentligen inte kompatibla med varandra, att genomgå en procedur och samtidigt vara oföränderligt är inte möjligt, och därför kallar Sfard det en dualitet i likhet med våg-partikeldualiteten i fysiken. De är kompletterande synsätt och vi använder båda i olika grad.

Sammanfattningsvis finns det ett antal likartade modeller som beskriver en djupare förståelse som *relationell/konceptuell/strukturell* och som innebär en helhetsbild med många parallella kopplingar, och *instrumentell/procedurell/operationell* förståelse som en grundare typ av förståelse där begrepp uppfattas mer som sekventiella regler. Den djupare förståelsen framstår som mer kopplad till visualisering och grafisk framställning, medan den grundare kan kopplas mer till symbolisk eller språklig framställning. De står i kontrast till varandra men det går samtidigt inte att dra någon skarp gräns mellan de båda eftersom det är svårt att ha det ena utan att i någon grad ha det andra. Grosholz (2013) skriver om uppfattning av komplexa tal och använder beteckningarna *ikonisk* och *symbolisk* för att beskriva två olika kompletterande representationssätt, där *ikonisk* representation är att ha en meningsfull "visualisering" av ett begrepp medan *symbolisk* är att mer blint eller formellt följa en konvention. Hon poängterar att de stora framstegen i utvecklingen av komplexa tal historiskt kom i samband med de grafiska tolkningarna. Dock menar hon också att båda delarna behövs; den ikoniska representationen är användbar för en djupare förståelse medan den symboliska är användbar vid själva analysen och beräkningarna. De olika beskrivna författarna skriver egentligen inte om exakt samma saker, vissa talar t.ex. om *kunskap,* andra om *förståelse,* och de har olika utgångspunkter, men för syftet i denna studien räcker det att använda denna generella uppdelningen mellan *djup* och *grund* kunskap eller förståelse. Jag kommer i fortsättningen att använda paraplybegreppet *konceptuell* kunskap när jag hänvisar till de djupare typerna av kunskap, och *procedurell* kunskap när jag hänvisar till de grundare typerna. Det blir alltså inte exakt samma innebörd som Hiebert och Lefevres begrepp utan *konceptuell* kunskap ska innefatta alla de tidigare beskrivningarna av *relationell/konceptuell/strukturell/ikonisk,* och *procedurell* kunskap ska innefatta alla de tidigare beskrivningarna av *instrumentell/procedurell/operationell/symbolisk.*

3.2 Begreppsbild och missförstånd

Enligt Tall och Vinner (1981) har vi alla en slags mental bild av hur vi tänker oss matematiska begrepp som är färgad av våra tidigare erfarenheter. De menar att våra hjärnor inte arbetar efter logiska principer utan snarare genom associationer vilket kan leda till missförstånd kring begrepp. Logiskt motstridiga uppfattningar om ett begrepp kan samexistera om de normalt används vid olika situationer, eller situationer som vi uppfattar som olika. Exempelvis så kan unga elever uppfatta subtraktion som en process där svaret "ska bli mindre". Det synsättet fungerar inte vid subtraktion av negativa tal. Eleven uppfattar inte att det är ologiskt så länge negativa tal behandlas för sig och subtraktion för sig. Tall och Vinner menar att det finns en diskrepans mellan vad de kallar "concept image" och "concept definition", skillnaden mellan vår egen bild av begreppet och den korrekta matematiska definitionen. Två motstridiga uppfattningar av ett begrepp kan skapa en kognitiv konflikt först när båda framkallas samtidigt, som t.ex. när eleven ska subtrahera ett negativt tal, vilket kan leda till att elevens begreppsbild då uppdateras mot den mer korrekta definitionens koncept i likhet med Piagets modell med assimilation och ackommodation.

3.3 Relevans i skolan

Det finns sju förmågor i ämnesplanen för matematik på gymnasiet, *begreppsförmåga*, *procedurförmåga*, *problemlösningsförmåga*, *modelleringsförmåga*, *resonemangsförmåga*, *kommunikationsförmåga* och *relevansförmåga* (Skolverket, 2011). Som möjliga representanter för konceptuell kunskap och procedurell kunskap ligger begreppsförmåga och procedurförmåga nära till hands. Begreppsförmåga beskrivs delvis som förmåga att kunna redogöra för definitioner av begrepp, men även att kunna relatera dessa till andra begrepp samt förstå hur de ska användas. Förmåga att använda olika representationsformer som grafisk och algebraisk representation för samma begrepp ingår också. Procedurförmåga handlar om att kunna lösa standardproblem på ett säkert sätt med hjälp av rätt val av algoritmer (Skolverket, 2011). Dessa två förmågor liknar indelningen av kunskap i konceptuell och procedurell även om det inte är exakt samma sak, beskrivningen av begreppsförmåga innehåller t.ex. inget om visualisering. Procedurförmåga är mycket närmare ett mått på procedurell kunskap, och det är också lätt att bedöma om någon har följt en procedur korrekt. Dock så överlappar konceptuell och procedurell kunskap varandra, och förmågorna går även de delvis in i varandra.

Komplexa tal ingår i två olika matematikkurser, kurs 2 och kurs 4. I centralt innehåll ingår följande om komplexa tal:

Matematik 2 (b & c):

- Utvidgning av talsystemet genom introduktion av begreppet komplext tal i samband med lösning av andragradsekvationer.

Matematik 4:

- Metoder för beräkningar med komplexa tal skrivna på olika former inklusive rektangulär och polär form.
- Komplexa talplanet, representation av komplext tal som punkt och vektor.
- Konjugat och absolutbelopp av ett komplext tal.
- Användning och bevis av de Moivres formel.
- Algebraiska och grafiska metoder för att lösa enkla polynomekvationer med komplexa rötter och reella polynomekvationer av högre grad, även med hjälp av faktorsatsen.

(Skolverket, 2011).

3.4 Fenomenografisk ansats

Som lärare är det värdefullt att känna till vilka uppfattningar och missuppfattningar som kan förekomma för att på ett bra sätt kunna bemöta dessa i undervisningen.[1] Det är i denna mening inte alltid nödvändigt att veta hur t.ex. den statistiska fördelningen av dessa uppfattningar ser ut, eftersom man som lärare ska kunna bemöta så många olika elever som möjligt. Denna studie ämnar göra en beskrivning av hur begrepp inom komplexa tal kan uppfattas. Forskningsmetodik som benämns som kvalitativ handlar enligt Larsson (1986) typiskt om att karaktärisera egenskaperna hos ett fenomen snarare än fördelningen, och fenomenografisk metod är en typ av kvalitativ metod. Fenomenografisk metod går ut på att kategorisera olika utsagor från en undersökning i olika kategorier som ska motsvara den *mening* som går att tillskriva utsagan. Det handlar om att ta reda på hur fenomen uppfattas av olika människor, så det handlar om innebörder snarare än förklaringar. Dessa kategorier kan en lärare använda sig av för att förstå hur en elev tänker. För att uppfattningarna ska visa sig blir det viktigt att ställa öppna frågor, och inte standardfrågor som den medverkande kan ha lärt sig ett svar utantill på och därmed inte behöver resonera kring (Larsson, 1986).

3.5 Tidigare studier

Panaoura, Elia., Gagatsis. & Giatilis (vid Cyperns Universitet och Athens Universitet) undersökte 95 gymnasieelevers förståelse av komplexa tal och deras förmåga att växla mellan olika representationsformer. De poängterar att komplexa tal är rika på både algebraiska och geometriska egenskaper och att behärska båda typerna av representation är viktigt för förståelsen av komplexa tal överlag. De fann att de som föredrog att använda sig av enbart algebraisk representation hade svårare att lösa problemen korrekt än de som använde geometriska representationer. De som använde sig av grafiska representationer hade även lättare att växla representationsform. Dock så verkade det som att eleverna kunde delas in i de som föredrog algebraisk och de som föredrog geometrisk, och eleverna verkade se dessa former som två separata fenomen och inte två sätt att representera samma sak. Hortenisa Soto-Johnson (2013), professor i matematik vid University of Northern Colorado använde programmet Geometer's Sketchpad som är ett visualiseringsverktyg liknande GeoGebra, för

[1] Egentligen är det lite inkorrekt att kalla det missuppfattningar enligt Larsson (1986), man borde egentligen tala om uppfattningar som kan stämma bättre eller sämre med vad vetenskapen säger.

att undersöka hur en geometrisk tolkning kan hjälpa förståelsen av komplexa tal. Där kunde de använda programmet för att få en dynamisk visuell framställning av hur olika operationer som addition och multiplikation kan framställas för komplexa tal. De olika transformationerna dilation, rotation och translation kunde demonstreras på bildfiler och kopplas till räkneoperationerna. Denna representation kunde skapa kognitiva konflikter om vissa begrepp, "[...] these students' concept image conflicted with the concept definition" (Soto-Johnson, 2013, s. 109). Även hon menar att den visuella tolkningen är en nyckel till förståelse av komplexa tal.

I en studie från 2012 undersökte Maria Nordlander, lektor i matematikdidaktik på Dalarnas Universitet samt Edvard Nordlander, professor i elektronik vid Högskolan i Gävle studenters begreppsbild av komplexa tal baserat på Tall och Vinners teori om concept image. För en del av undersökningen använde de ett frågeformulär med öppna frågor där studenterna fick skriva svar i fritext. Deras svar kategoriserades sen i fyra kategorier av begreppsbild. Dessa kategorier var: "mathematical artifice", "two-dimensional view", "symbolic view", och "mystery view" (Nordlander & Nordlander, 2012). De hade ingen kategori som skulle motsvara en "korrekt" bild av komplexa tal, eller Tall och Vinners "concept definition" vilket kan förklaras av att kategorierna skulle motsvara en tolkning av elevernas svar, och att ingen kategori av elevsvar matchade en "concept definition" bra nog enligt författarna. Deras slutsatser var bland annat att benämningarna "komplex" och "imaginär" skapar onödig abstraktion som tillsammans med en brist på visualisering av begreppen hämmar inlärningen. En studie av Price & van Jaarsveld (2017) vid Witwatersrand Universitet i Johannesburg, Sydafrika handlar om begreppsbilden kring trigonometriska funktioner och baseras också på Tall och Vinners concept image. En av deras slutsatser var att öppna frågor är mer användbara än slutna för att få reda på någons begreppsbild. De använde ett eget system där de mätte hur nära en elevs begreppsbild var en "korrekt" bild som motsvarar definitionen enligt kriterier de själva ställt upp, liknande ett slags betygskriterier.

4. Metod

4.1 Urval och genomförande

Eleverna som deltog i studien var 42 st tredjeklassare som läste Matematik 4 och kom från tre olika klasser och två olika gymnasier. Två klasser var parallella klasser från tekniklinjen från ett gymnasium i en kranskommun till Göteborg och den tredje var från naturvetenskapslinjen från ett gymnasium i Göteborg. Eleverna introducerades till komplexa tal först i Matematik 2, och hade vid undersökningen arbetat med komplexa tal i Matematik 4 i ca 2–3 veckor. Två elever i en av klasserna var utbytesstudenter så dessa hade inte tidigare följt svensk skolgång. Totalt deltog 42 elever i undersökningen.

För att komma åt begreppsförståelsen var målet att använda relativt öppna frågor, men eftersom arbetet också behövde begränsas kunde de inte vara allt för öppna heller. Frågorna skulle kunna analyseras så att en skillnad mellan djupare och grundare förståelse som beskrivet tidigare kunde träda fram. En annan begränsande faktor var att elevgrupperna som skulle ingå var i slutet av sista året på gymnasiet. Matematik 4 läses generellt som en av de sista kurserna, och det finns stor risk att eleverna där har fullt upp med allt som ska vara färdigt inför terminsavslutningen. För att få bra svar ville jag därför inte ha ett allt för långt frågeformulär. För att kunna använda Tall och Vinners modell med "concept image" behövde frågorna kunna synliggöra missförstånd eller förförståelse som eleverna har med sig och använder när de arbetar med komplexa tal. Exempel på detta är absolutbelopp, som i praktiken beräknas med teckenbyte för reella tal vilket inte fungerar för komplexa.

Ett frågeformulär delades ut till varje elev som de fick besvara anonymt. Alla fick 20 minuter att besvara frågorna, inga hjälpmedel var tillåtna. De uppmanades att inte titta på varandra, och det poängterades att det inte var examinerade och att det var deras egna tankar som var det intressanta. Eleverna spreds ut så att ingen satt precis bredvid någon annan. På framsidan fanns följande tre frågor:

1. Vad menar vi när vi säger att ett tal är ett komplext tal? Vilka skillnader och likheter finns det med reella tal?

2. Beskriv addition mellan två komplexa tal så utförligt som möjligt.

3. Vad menas med absolutbeloppet av ett komplext tal?

På baksidan fanns en fjärde fråga:

4. (I mån av tid) Låt $z = -i$ och $w = -1 + 2i$.
   a) Beräkna $z + w$

   b) Stämmer likheten $|w + z| = |w| + |z|$? Motivera.

Varje elev hade alla sina svar på ett papper, och på dessa papper noterades vilken klass de tillhörde med siffrorna 1, 2, 3. Därefter numrerades papperna ytterligare så att de fick en unik siffra. Då motsvarar t.ex. beteckningen 1.1 elev 1 från klass 1, och beteckningen 3.13 elev 13 från klass 3. Eftersom alla elever svarat på enbart ett papper var och de var anonyma så behövdes ingen speciell anonymiseringskod. Siffrorna går med andra ord inte att koppla till någon speciell person. Undantaget är de två utbytesstudenterna som markerades med stjärna, men eftersom ingen signifikant skillnad kunde upptäckas så redovisas de inte speciellt i arbetet. Klass 1 bestod av 17 elever, klass 2 av 10 elever och klass 3 av 15 elever.

4.2 Forskningsetik

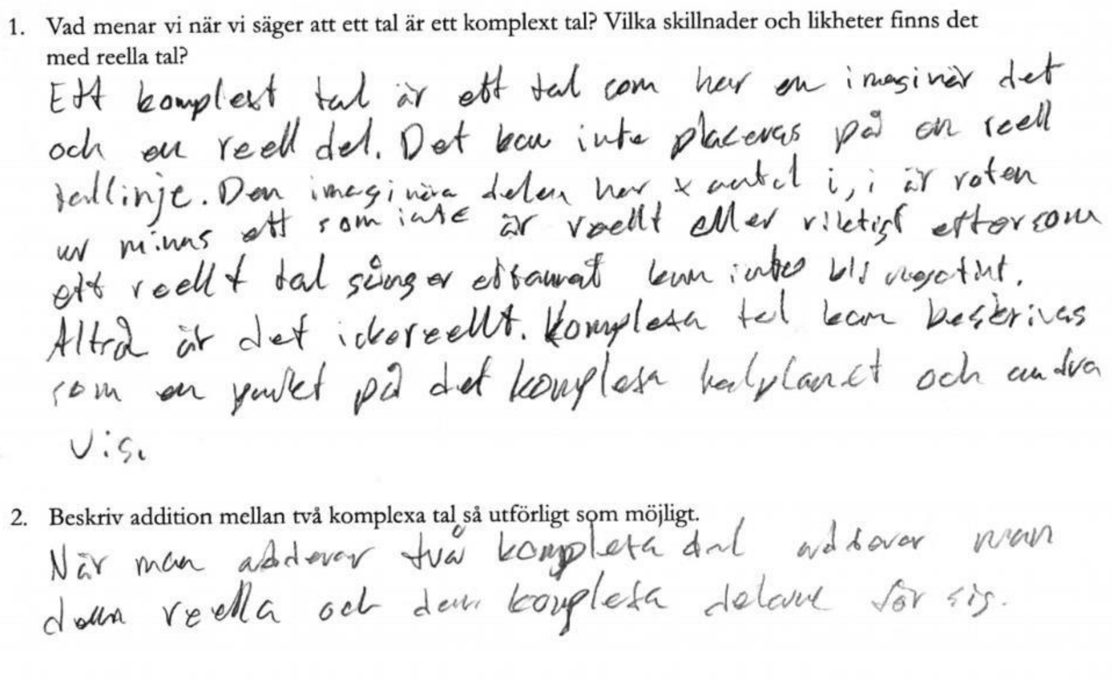
I undersökningen medverkade ett antal individer och för god forskningssed behöver hänsyn tas för att inte riskera skada för de medverkande. Enligt Vetenskapsrådet (2017) så bör medverkande vara informerade om att de deltar i en studie, och deras identitet ska inte kunna röjas. Inga namn samlades in men då klasserna var relativt små namngavs inte heller skolorna, då det ändå inte ansågs bidra till undersökningen. Vilka program de läste togs med då det kan vara av intresse, och det bedömdes inte kunna röja någons identitet. Alla informerades om att det var en vetenskaplig studie och att det var frivilligt. På frågeformuläret de fick fanns även skriftlig information om att det var en studie och att det inte var examinerande. Ingen data om elevernas identitet har sparats.

4.3 Analys

Målet var att hitta en modell för att beskriva begreppsbilden och klassificera elevers kunskaper efter procedurell och konceptuell kunskap som beskrivet i bakgrunden, samt synliggöra missförstånd i begreppsbilden i enlighet med Tall & Vinner (1981). Sfard (1991) påpekar att då det är omöjligt att undersöka vad någon egentligen tänker eller tror så är enda möjligheten att istället undersöka externa attribut, dvs. vad eleven *demonstrerar*. Undersökningarna av Nordlander & Nordlander (2012) samt Price & van Jaarsveld (2017) har även använts som inspiration för analysen.

Först lästes alla elevsvaren igenom för att få en uppfattning om svarens bredd. Nästa steg var att börja om och börja kondensera utsagorna i svaren till olika kategorier. Exempelvis kunde jag notera att deras svar uttryckte att komplexa tal på något sätt var overkliga eller mindre verkliga än andra tal genom att skriva *existerar inte*, eller om en elev använde sig av en bild så kunde jag skriva *figur*.

Varje fråga genererade ett antal kategorier av utsagor. Ett exempel på hur kategorierna skapades ges från följande svar av elev 1.10:



1. **Vad menar vi när vi säger att ett tal är ett komplext tal? Vilka skillnader och likheter finns det med reella tal?**

Ett komplext tal är ett tal som har en imaginär det och en reell del. Det kan inte placeras på en reell tallinje. Den imaginära delen har x antal i, i är roten ur minus ett som inte är reellt eller riktigt eftersom ett reellt tal gånger ett samma kan inte bli negativt. Alltså är det ickereellt. Komplexa tal kan beskrivas som en punkt på det komplexa talplanet och andra vis.

2. **Beskriv addition mellan två komplexa tal så utförligt som möjligt.**

När man adderar två komplexa tal adderar man dom reella och dom komplexa delarna för sig.

Figur 1. Elev 1.10s svar på fråga 1 och 2.
,

Här har eleven använt uppdelningen i realdel/imaginärdel ($a+bi$), *komplexa talplanet* och *roten ur minus ett* för att beskriva komplexa tal. Dessutom har eleven beskrivit ett imaginärt tal som ett tal som "inte är reellt eller riktigt" (*existerar inte*). På fråga två demonstreras uppfattning om att addition utförs *elementvis*.

5. Resultat

5.1 Kategorisering

Alla kategorier sammanfattades i tabeller tillsammans med antalet elever som svarat enligt den kategorin, där jag klassificerat gult som en procedurell förklaring och blått som konceptuell. I tabellerna fanns även en kommentarskolumn som användes för att förtydliga vilken typ av utsaga det handlande om. "Lösa ekvationer" är till exempel något eleven beskrivit som en "användning" för komplexa tal, medan "existerar inte" är en beskriven uppfattning. Tabell 1 nedan är resultatet från första frågan på formuläret, resultaten från alla frågor finns i appendix 2.

Fråga 1		
Kategori	Antal elever	Kommentar
lösa ekvationer	6	användning
innehåller i	11	beskrivning
$\sqrt{-1}$	13	beskrivning
a+bi	10	beskrivning
existerar inte	8	uppfattning
mer abstrakta	1	uppfattning
odefinierat	1	
ej på tallinje	6	beskrivning
utöka talsystemet	3	användning
delmängd	6	beskrivning
komplexa talplanet	13	beskrivning

Tabell 1. Resultat från fråga 1. Vad menar vi när vi säger att ett tal är ett komplext tal? Vilka skillnader och likheter finns det med reella tal?

Från dessa kategorier skapades sedan större kategorier, sammanslagningar av kategorier som oftast redan överlappade varandra. De resulterande kategorierna är en sammantagen bedömning av hela frågeformuläret, så att om en kategori inte demonstrerades i en fråga kunde den ändå demonstreras i en annan. Exempelvis kanske eleven inte använt sig av vektorer för att förklara addition i fråga 2, men ändå gjort en figur i fråga 4b där $w + z$ var utritad i komplexa talplanet. Då bedömdes det som att eleven har en grafisk uppfattning om addition med komplexa tal som vektorer. Dessa kategorier delades in i tre större klasser; *taluppfattning komplexa tal*, *addition med komplexa tal* samt *absolutbelopp av komplexa tal*. Inom dessa finns procedurella svar och konceptuella svar. Dessutom finns tre nivåer av svar; *stark*, *neutral* och *svag* uppfattning. Kategorierna listas nedan tillsammans med en kort förklaring om vad eleven har demonstrerat:

- **a+bi:** Ett komplext tal består av en reell och en imaginär del, och/eller skrivs allmänt på formen a+bi.
- **innehåller i/sqrt-1:** Komplexa tal innehåller i, eller skrivit ett rotuttryck med negativt tal.
- **lösa ekvationer:** Komplexa tal används för att lösa nya ekvationer eller problem
- **komplexa talplanet:** Nämnt komplexa talplanet eller använt i figur.

- **delmängd:** Komplexa tal som en mängd där de reella talen ingår är en delmängd/ingår.
- **overkligt:** Komplexa tal är mindre verkliga eller mer abstrakta än andra tal.

- **addition elementvis:** Komplexa tal adderas elementvis som "vanlig" addition.
- **addition felaktig:** Felaktigt utförd addition.

- **addition som vektorer:** Addition mellan komplexa tal med hjälp av vektorer/figur.

- **belopp rotuttryck:** Beräkning av absolutbelopp med rotuttryck.
- **belopp positivt:** Absolutbeloppet är alltid positivt.
- **belopp teckenbyte/felaktighet:** Beräkning av absolutbelopp genom att byta tecken, eller annan felaktighet.

- **belopp som längd:** Absolutbeloppet tolkas som en längd/sträcka.
- **belopp summa mindre:** Absolutbeloppet av en summa kan bli mindre än summan av absolutbeloppen.
- **belopp som reellt/vektor:** Absolutbeloppet som "största värdet", eller "samma som för reella tal", eller ser absolutbeloppet som en vektor.

De ursprungliga kategorier som innebar att eleverna svarat med exempel eller tolkat uppgiften som att de skulle svara med ett allmänt algebraiskt uttryck ingår inte i någon av de resulterande kategorierna.

5.2 En modell för begreppsuppfattning

En mall för uppfattning av de olika begreppen skapades:

Begrepp		
	Procedur	**Koncept**
Stark uppfattning	Korrekt algebraisk beskrivning	Korrekt visualisering
Neutral uppfattning	Korrekt procedurell egenskap	Korrekt konceptuell egenskap
Svag uppfattning	Procedurellt missförstånd	Konceptuellt missförstånd

Tabell 2. En mall för begreppsuppfattning.

I tabell 3 nedan sammanfattas kategorierna efter denna mall, och de är rangordnade från stark till svag uppfattning:

	Taluppfattning		Addition		Absolutbelopp	
	Procedur	**Koncept**	**Procedur**	**Koncept**	**Procedur**	**Koncept**
Stark (+2)	a+bi	komplexa talplanet	addition elementvis	addition som vektorer	belopp rotuttryck	belopp som längd
Neutral (+1)	innehåller i/sqrt-1	delmängd			belopp positivt	belopp summa mindre
Svag (-1)	lösa ekvationer	overkligt	addition felaktig		belopp teckenbyte/felaktighet	belopp som reellt/vektor

Tabell 3. Kategorier av beskrivningar av komplexa tal, addition och absolutbelopp.

Tre av fälten här är tomma, vilket beror på att inga elever i studien uppvisade något som jag skulle klassificera i en sådan kategori. Mer om detta i diskussionsavsnittet. Kategorierna är nästan varandra uteslutande, dvs. att elever som gett svar som klassificeras som t.ex. stark uppfattning i en kolumn sällan också gav svar som hade klassificerats som svag uppfattning i samma kolumn. Enbart i några få fall överlappar de varandra, och då oftast som antingen Stark/Neutral eller Neutral/Svag. Nivåerna är dock inte egentligen varandras motsatser, utan en svag uppfattning i en kolumn kan helt enkelt försvaga den totala bedömningen av en annars stark uppfattning inom samma kolumn. Efter denna nya indelning kunde elevernas svar skrivas ut i en tabell som återfinns i appendix: Resultatet summeras i tabell 3 nedan:

		tal lösa ekvationer	tal innehåller i/sqrt-1	a+bi	tal felaktighet	tal overkligt	tal delmängd	tal komplexa talplanet	addition fel	addition elementvis	addition som vektor	belopp teckenbyte/felaktighet	belopp positivt	belopp rotuttryckt	belopp som reellt/som vektor	belopp summa mindre	belopp längd
Totalt		6	26	17	3	11	9	22	7	36	9	14	8	15	15	8	27

Tabell 4. Totala antalet elevsvar summerade efter kategori.

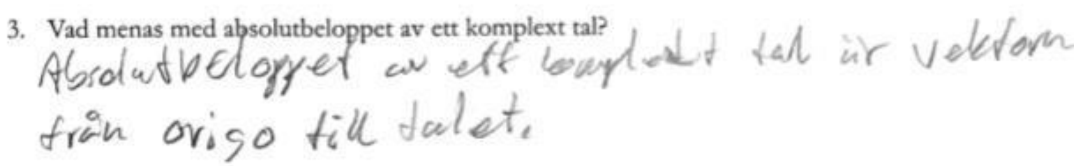
Kolumnen "tal felaktigt" innehåller felaktigheter eller udda utsagor om komplexa tal som inte kunnat kategoriseras som något annat. Dessa slogs ihop med "tal overkligt" som en svag konceptuell uppfattning. Samtliga elever sammanfattades efter dessa kategorier och tilldelades poäng. En stark uppfattning ökade poängen med 2, neutral ökade med 1 poäng och en svag uppfattning gav -1 poäng.

För att återkomma till exemplet elev 1.10 som vi såg tidigare, så kunde vi se följande kategorier:

"a+bi" (taluppfattning) (+2)
"$\sqrt{-1}$" (taluppfattning) (+1)
"komplexa talplanet" (taluppfattning) (+2)
"existerar inte" (taluppfattning) (-1)
"elementvis" (addition). (+2)

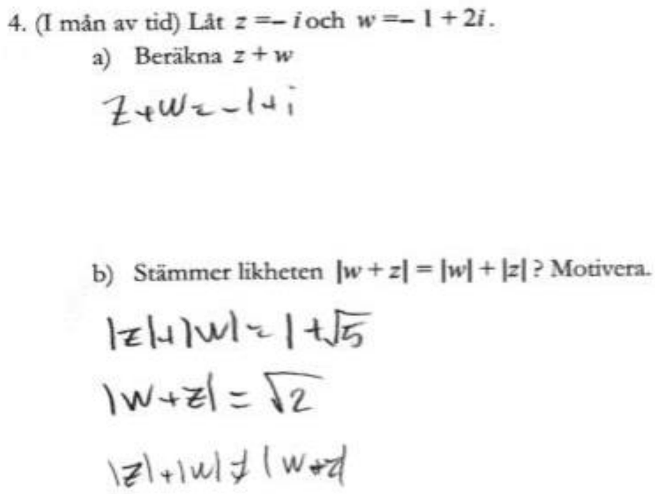
Dessa översätts till $2+1=3$ poäng för procedurell uppfattning och $2-1=1$ poäng för konceptuell uppfattning om komplexa tal i allmänhet, samt $2+0=2$ poäng för procedurell uppfattning om addition. Anledningen till denna poängsättning är att en svag uppfattning ska kunna "dra ner" en annars stark uppfattning. En elev kan ha demonstrerat stark uppfattning för att senare demonstrera ett missförstånd, och det kan reflekteras med ett "neutralt" resultat på 1 poäng. Som nivå för "ingen demonstrerad uppfattning" valdes 0.

Fortsättningsvis svarade eleven såhär på fråga 3 och 4:


3. Vad menas med absolutbeloppet av ett komplext tal?

Absolutbeloppet av ett komplext tal är vektorn från origo till talet.

Figur 2. Elev 1.10's svar på fråga 3.


4. (I mån av tid) Låt $z=-i$ och $w=-1+2i$.

a) Beräkna $z+w$

$z+w=-1+i$

b) Stämmer likheten $|w+z|=|w|+|z|$? Motivera.

$|z|+|w|=1+\sqrt{5}$

$|w+z|=\sqrt{2}$

$|z|+|w|\neq|w+z|$

Figur 3. Elev 1.10's svar på fråga 4.

Här ser vi att eleven tolkat absolutbeloppen som en längd samt svarat med korrekta uttryck, vilket klassificeras som:

"belopp som längd" (absolutbelopp) (+2)

"addition elementvis" återigen (vilket inte räknas dubbelt) "belopp rotuttryck" (absolutbelopp) (+2)

Eleven har inte demonstrerat att addition kan tolkas som vektoraddition i komplexa talplanet vilket är anledningen till att kategorin om konceptuell uppfattning om addition lämnas tom. Eleven har inte i något svar använt sig av figurer för att visa sitt resonemang utan enbart text och algebra, även om svaret på fråga tre visar på en geometrisk tolkning. I fråga 3 står det att absolutbeloppet är en *vektor* vilket skulle kunna kategoriseras som "belopp som reellt/vektor", men eftersom beräkningen av absolutbeloppet ändå är korrekt i fråga 4 (ett reellt tal och inte en vektor) klassas svaret som att eleven här ändå har menat *längden* av vektorn. Överlag har tolkningar som denna dock undvikits, och det är vad eleven faktiskt skriver som bedöms. Totalt får eleven 3,2,2 i procedurell uppfattning och 1,0,2 i konceptuell uppfattning om tal, addition och belopp respektive:

Elev	**Taluppfattning**		**Addition**		**Absolutbelopp**	
1.10	3	1	2	0	2	2

Tabell 5. Elev 1.10s begreppsuppfattningar summerade.

Detta färgkodades på samma sätt som innan, så gult innebär stark procedurell uppfattning eller 2–3 poäng, orange är neutral uppfattning eller 1 poäng, rött är svag uppfattning eller -1 poäng. Motsvarande för konceptuell uppfattning med ljusblått, mörkblått och lila. Vita fält innebär ingen demonstrerad uppfattning eller 0 poäng.

5.3 En karta över elevernas begreppsuppfattningar

Poängen för varje elev summerades i ett kalkylark och från detta skapades en karta över alla elevers uppfattningar som finns i appendix 2. I tabell 6 nedan sammanfattas kartan genom en summering av elevernas poäng:

	Taluppfattning		**Addition**		**Absolutbelopp**	
Elev	Procedur tal	Koncept tal	Procedur addition	Koncept addition	Procedur belopp	Koncept belopp
Totalt	54	39	65	18	24	45

Tabell 6. Summering av poäng för uppfattningar som eleverna demonstrerat.

Starkast överlag verkar vara procedurella uppfattningar om addition, men det finns vissa oklarheter även här. Det är lägre siffror för konceptuella uppfattningar om addition och procedurella uppfattningar om absolutbelopp. Anledningen till att kolumnen "koncept addition" är så låg beror på att det var väldigt få elever som demonstrerat någon, varken stark eller svag, uppfattning. De flesta elever fick "0" precis som elev 1.10 vilket i denna modellen innebär att eleven inte demonstrerat något. Anledningen till att kolumnen "procedur belopp" är så låg beror däremot på att det var mycket blandade resultat. Många elever fick "-1" poäng vilket här innebär ett procedurellt fel. Samtidigt var det många som också hade starka uppfattningar även här, och resultatet visar summeringen över alla elever.

En svag uppfattning verkar sällan uppträda tillsammans med en stark inom samma begreppskategori. Det sker endast 2 gånger, för elev 2.4 och 3.3. Där visas svag procedurell tillsammans med stark konceptuell uppfattning om komplexa tal allmänt för elev 2.4, och omvänt för 3.3. En svag uppfattning *utan* motsvarande stark uppfattning för samma begrepp uppträder totalt 22 gånger, eller 7, 3 och 12 gånger för begreppen komplexa tal i allmänhet, addition respektive absolutbelopp. Total 30 gånger har båda typerna av uppfattning varit stark (2 eller 3 poäng i respektive kolumn, vilket bara är möjligt om eleven inte demonstrerat svag uppfattning).

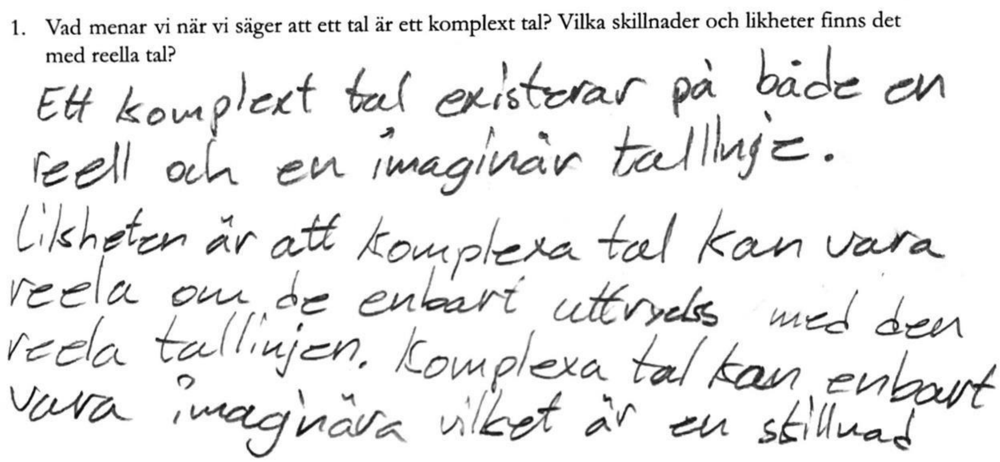
5.4 Analys av några elevsvar

Elev 1.7 är värd att titta närmare på. Ur tabell 4 går det att avläsa följande:

	Taluppfattning		**Addition**		**Absolutbelopp**	
1.7	0	3	2	2	2	2

Tabell 7. Resultat från elev 1.7.

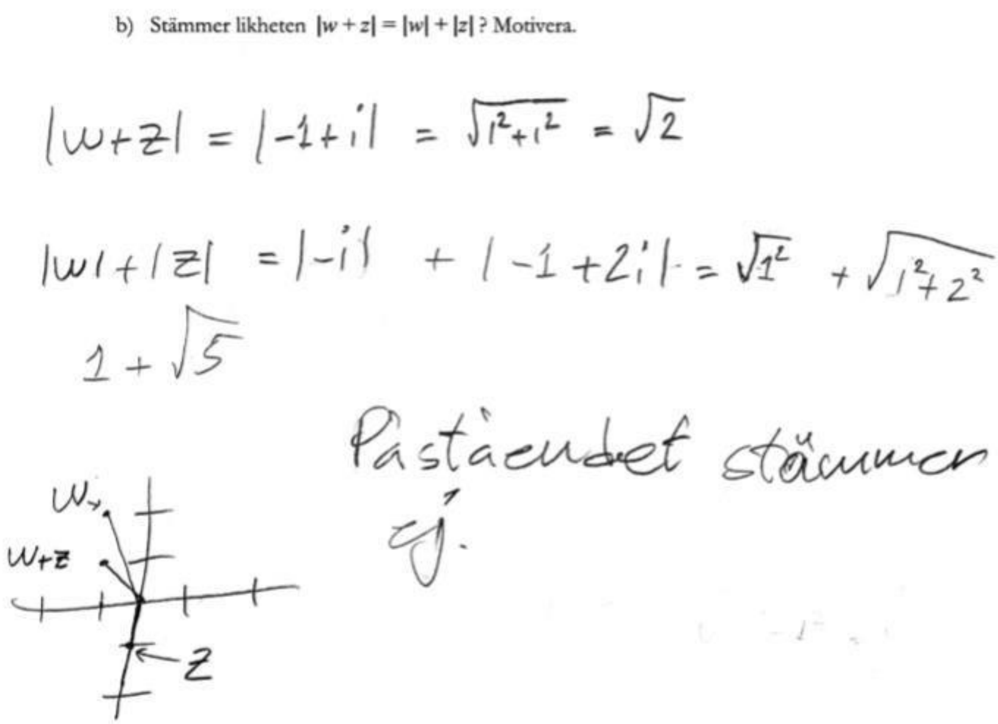
Resultatet indikerar att eleven har starka procedurella och konceptuella uppfattningar, men har tydligen inte demonstrerat procedurell uppfattning om komplexa tal i allmänhet. Så här svarade eleven på fråga 1:


1. Vad menar vi när vi säger att ett tal är ett komplext tal? Vilka skillnader och likheter finns det med reella tal?

Ett komplext tal existerar på både en reell och en imaginär tallinje. Likheten är att komplexa tal kan vara reela om de enbart uttrycks med den reela tallinjen. Komplexa tal kan enbart vara imaginära vilket är en skillnad

Figur 4. Elev 1.7s svar på fråga 1.

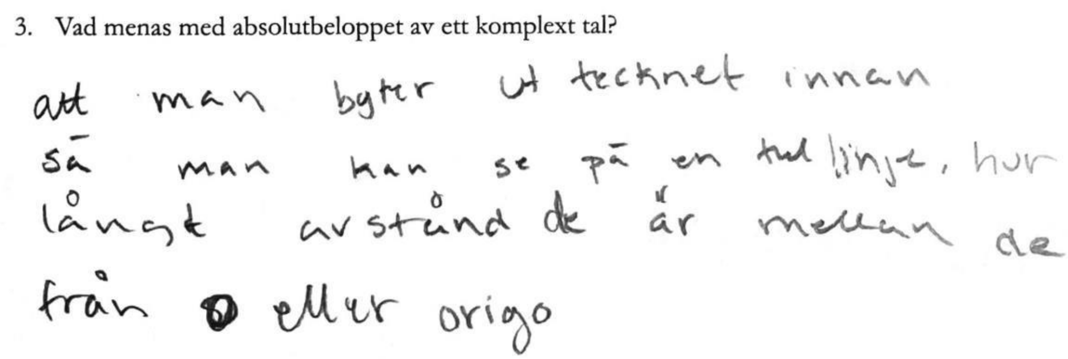
Eleven har ingenstans i sina svar direkt uttryckt att komplexa tal allmänt skrivs på formen a+bi, eller att komplexa tal består av två komponenter vilket lett till att kategorin för den procedurella uppfattningen om komplexa tal lämnats tom. Svaret skulle kunna tolkas som att eleven uttryckt talen som bestående av realdel och imaginärdel vilket jag i andra fall kategoriserat som stark procedurell uppfattning (a+bi), men jag tolkar det inte i detta fall som en procedurell framställning. Eleven demonstrerar vad jag skulle beskriva som en mer konceptuell framställning av komplexa tal då de beskrivs som att de "existerar på både en reell och en imaginär tallinje", ett strukturellt sätt att visualisera talen. Dock demonstreras den procedurella kunskapen indirekt med exempel då alla beräkningar är korrekta, och lösningen med figur som används i uppgift 4b tyder på en god grundläggande förståelse av komplexa tal:



Figur 5. Elev 1.7 löser uppgift 4b med korrekt algebra och korrekt figur.

Jag tycker att modellen här ger en hygglig hänvisning om var elevens kunskaper ligger, eleven visar generellt starka konceptuella och procedurella kunskaper men den allmänna beskrivningen av komplexa tal hade kunnat vara mer utförlig.

Elev 1.13 har ett intressant svar på fråga 3:



Figur 6. Elev 1.13s svar på fråga 3.

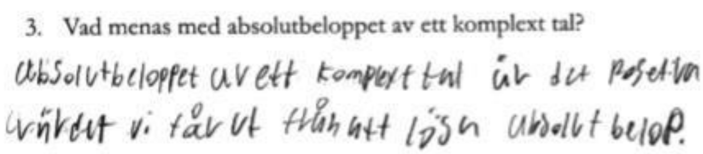
Eleven visar på en geometrisk tolkning av absolutbeloppet som ett avstånd till origo, men har samtidigt uttryckt en procedurell uppfattning om att “man byter ut tecknet innan”. Eleven har alltså en konceptuell uppfattning om att det är en sträcka som ska beräknas, men inte procedurell kunskap om hur den beräknas. Den konceptuella tolkningen kommer antagligen från tolkningen av reella tal och dess absolutbelopp, men i fråga ett har eleven beskrivit komplexa tal genom att rita in talet $2 + 2i$ som en punkt i det komplexa talplanet så uppfattningen att de inte ligger längs en tallinje finns helt klart också. I fråga 4b har eleven beräknat absolutbeloppet genom att byta tecken. Eleven har troligtvis ingen stark uppfattning om hur ett teckenbyte skulle kunna ge avståndet eller när det gäller och inte (vilket i sig dock är ett procedurellt sätt att förstå sammanhanget som leder till ett missförstånd). Här finns möjlighet att skapa en kognitiv konflikt hos eleven, då proceduren teckenbyte inte är förenlig med t.ex. beräkning av längden av hypotenusan i en rätvinklig triangel. Denna typen av missförstånd har varit ovanliga, men det visar att de åtminstone kan förekomma.

En annan elev som vi kan titta närmare på är elev 1.3:

	Taluppfattning		**Addition**		**Absolutbelopp**	
1.3	2	1	2	2	-1	-1

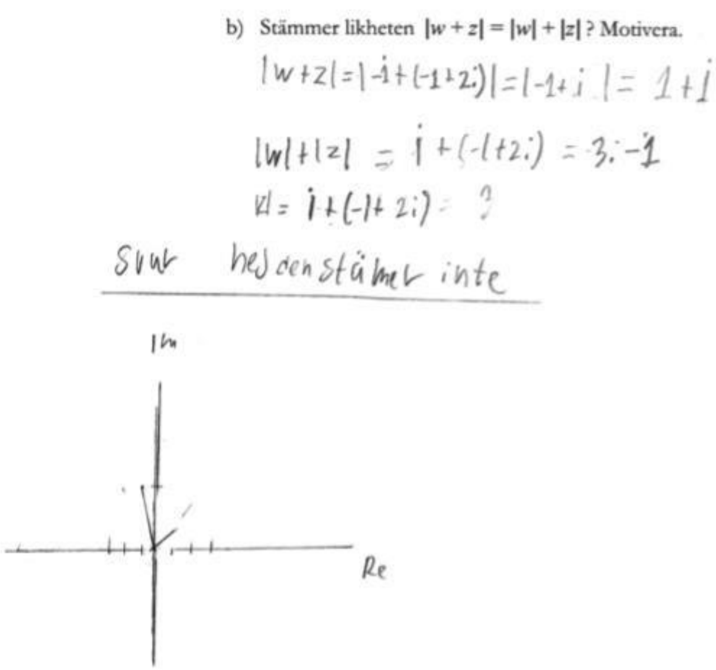
Tabell 8. Resultat från elev 1.3.

Tabellen indikerar att eleven till övervägande del har starka eller neutral uppfattningar men att uppfattningen om absolutbelopp är svag. Eleven har skrivit så här om absolutbelopp:



Figur 7. Elev 1.3s svar på fråga 3.

Här har eleven skrivit att "absolutbeloppet av ett komplext tal är det positiva värdet vi får ut från att lösa absolutbelopp". I fråga 4b har eleven svarat så här:



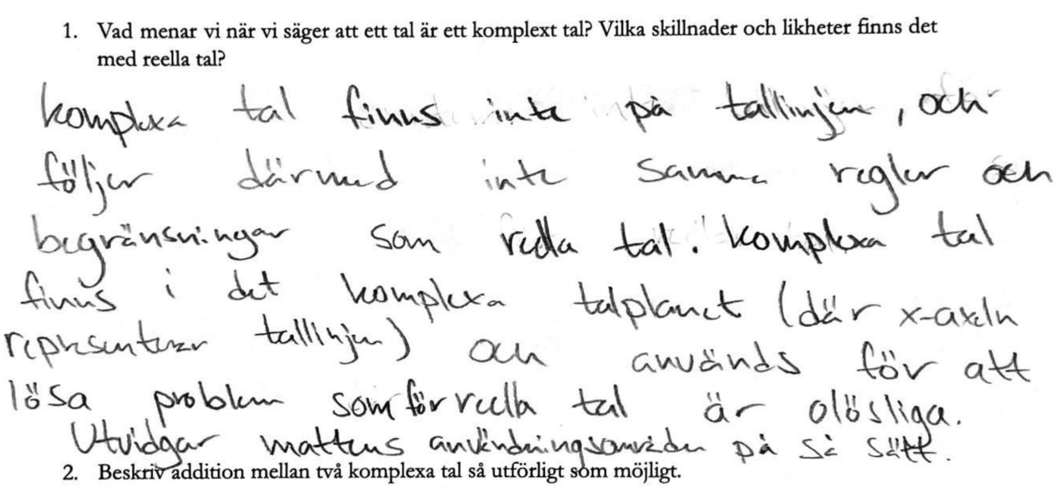
Figur 8. Elev 1.3s svar på fråga 4b.

Eleven har beräknat $|-1+i|$ genom att byta tecken på -1 i likhet med hur absolutbeloppet beräknas för reella tal. Detta dock inte helt konsekvent med nästa beräkning där$|w|+|z| = 3i-1$ och inte $3i+1$. Eleven har ritat ut vad som ser ut att vara talen $3i-1$ och $1+i$ ett komplext talplan, men inget som tydligt indikerar vad absolutbeloppet där skulle innebära. En gissning är att absolutbeloppet här skulle vara de komplexa talen själva eller vektorerna som representerar dem. Mycket tyder på att eleven har en svag uppfattning om vad absolutbelopp innebär, både procedurellt och konceptuellt. Eleven har i andra frågor demonstrerat korrekt utförd addition samt använt vektorer för att beskriva addition grafiskt. Imaginära tal har beskrivits som tal som inte existerar utanför matematiken. Starka uppfattningar om ett begrepp behöver inte innebära starka uppfattningar om ett annat, vilket kanske inte är så överraskande. Elev 3.3 har ett något udda resultat:

	Taluppfattning		**Addition**		**Absolutbelopp**	
3.3	-1	3	2	0	1	2

Tabell 9 Resultat för elev 3.3

Detta är nästan enda fallet då en stark konceptuell uppfattning kombinerats med en svag procedurell uppfattning, i detta fall för uppfattning om *komplexa tal i allmänhet*. Anledningen är bland annat för att eleven inte svarat alls på fråga 4a eller 4b på baksidan och därmed inte demonstrerat något på dessa frågor. Det enda eleven demonstrerat procedurellt om komplexa tal i allmänhet är att de kan användas för att "lösa problem som för reella tal är olösliga":


1. Vad menar vi när vi säger att ett tal är ett komplext tal? Vilka skillnader och likheter finns det med reella tal?

komplexa tal finns inte på tallinjen, och följer därmed inte samma regler och begränsningar som reella tal. komplexa tal finns i det komplexa talplanet (där x-axeln representerar tallinjen) och används för att lösa problem som för reella tal är olösliga. Utvidgar mattens användningsområden på så sätt.

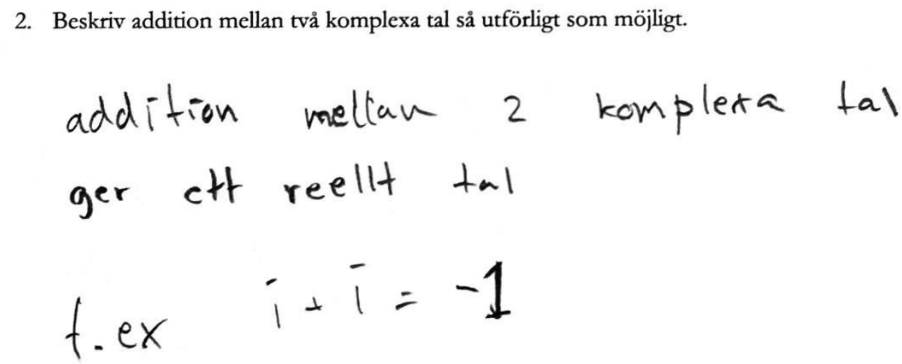
2. Beskriv addition mellan två komplexa tal så utförligt som möjligt.

Figur 9. Elev 3.3s svar på fråga 1.

Dock har eleven noggrant redogjort att addition sker elementvis, samt att absolutbeloppet är avståndet från origo eller längden på vektorn till talet i det komplexa talplanet men att det inte anger någon riktning. Ett liknande resultat hade elev 2.4 som inte heller svarat på 4a eller 4b.

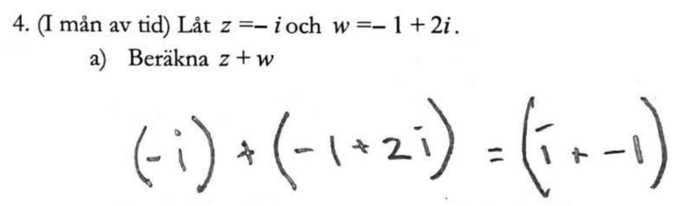
5.5 Vanliga missförstånd

För addition med komplexa tal uppenbarade sig inte många missförstånd alls. Vissa felaktigheter uppstod bl.a. till följd av rena misstag eller teckenfel, men även vissa enskilda missuppfattningar. Elev 2.8 skrev t.ex. så här:



Figur 10. Elev 2.8s svar på fråga 2.

Samtidigt har eleven utfört additionen korrekt i fråga 4a:



Figur 11. Elev 2.8 demonstrerar korrekt addition.

I övrigt fanns inte många missförstånd kring addition. Frågorna med absolutbelopp visade däremot på ett återkommande missförstånd. Totalt 12 av 42 elever visade svag procedurell och/eller svag konceptuell uppfattning om absolutbelopp. Ur tabell 6 ser vi att 14 elever svarat att belopp beräknas med teckenbyte eller annan felaktighet, och 15 elever har beskrivit belopp "som reellt" eller som en vektor istället för tal. Vissa elever verkade ha uppfattningen att absolutbeloppet är själva *vektorn*.

En annan uppfattning som var vanlig är den om att komplexa eller imaginära tal är overkliga eller mindre verkliga än andra tal. Det har 11 elever uttryckt. Den har här klassificerats som ett missförstånd, huruvida det verkligen är ett missförstånd eller ej lämnas åt diskussionsavsnittet.

6. Diskussion

6.1 Frågeformuläret

Fråga 2 om addition gav inte speciellt stor spridning på svaren. Kanske är addition en alltför grundläggande operation, som dessutom har samma procedur som den för reella tal. En alternativ fråga hade kunnat fokusera mer på tolkningen, eller så hade frågan kunnat bytas ut mot en annan operation som multiplikation som inte har samma procedur som den för reella tal. Multiplikation övervägdes dock som alternativ fråga men valdes bort då tolkningen ansågs väl svår och omfattande. I efterhand hade multiplikation kunnat vara mer intressant då addition inte verkade innehålla speciellt många olika uppfattningar och inte heller många missförstånd. En del elever tolkade uppgift 4b som att de skulle visa allmänt om likheten $|w+z|=|w|+|z|$ stämde. Detta minskar undersökningens validitet eftersom det som avsågs undersökas var deras uppfattning om absolutbelopp och addition av komplexa tal, och inte deras färdighet att använda rotuttryck i allmänhet eller deras förmåga att resonera matematiskt. En bättre ställd fråga hade kunnat poängtera att det var just med samma tal w och z som i 4a det gällde. En annan sak att ha i åtanke är att eleverna troligtvis inte är speciellt vana vid denna typen av frågor i matematikämnet. De är nog snarare vana vid frågor där de får demonstrera beräknings- och problemlösningsfärdigheter än öppna textfrågor. En del i fenomenografisk metod är att de inte ska ges frågor som kan besvaras på rutin, men detta kan också påverka svaren så att de inte får demonstrera allt de kanske kan, då frågorna kommer i ett för dem annat sammanhang än de är vana vid.

En intressant observation är att frågan om addition inte resulterade i speciellt många svar med konceptuell tolkning, medan frågan om absolutbelopp gjorde det, vilket sammanfattas i tabell 5. Frågan ”*vad menas med absolutbeloppet av ett komplext tal?*” är mer konceptuell till sin natur än ”*beskriv addition så utförligt som möjligt*”. Jag hade först tänkt använda frågan ”*vad är absolutbeloppet av ett komplext tal?*” eftersom det är en mer öppen fråga, vilket kunde ha gett eleven mer utrymme att uttrycka sin föredragna eller spontana representation. Möjligen hade detta resulterat mindre konceptuella svar (eller troligen, enligt de lärare jag diskuterade frågan med). En möjlig slutsats från svaren till de två frågorna om addition och absolutbelopp är att ”som man frågar får man svar”, så formuleringen av frågan är viktig. Antagligen är det delvis på grund av typen av frågor som ställs som elever inte alltid demonstrerar allt som de kan.

6.2 Kategorierna

I modellen som skapades i studien saknades tre kategorier för elevsvar för addition av komplexa tal. Modellen kunde uttryckas allmänt:

Begrepp		
	Procedur	**Koncept**
Stark uppfattning	Korrekt algebraisk beskrivning	Korrekt visualisering
Neutral uppfattning	Korrekt procedurell egenskap	Korrekt konceptuell egenskap
Svag uppfattning	Procedurellt missförstånd	Konceptuellt missförstånd

Tabell 10. Modell för begreppsbild.

Procedurell uppfattning om addition saknade en neutral kategori, medan konceptuell uppfattning om addition saknade både neutral och svag kategori. Detta var på grund av att ingen elev visade på något som passade in i de kategorierna. En möjlig orsak till detta kan vara att modellen helt enkelt inte går att använda här. En annan möjlig orsak är att frågorna inte var ställda på ett sådant sätt att de kunde avslöja några sådana uppfattningar. Jag har själv inga förslag på vad en neutral procedurell uppfattning om addition skulle vara, eftersom addition är en såpass enkel procedur som de flesta egentligen behärskar sedan ung ålder. Addition med komplexa tal blir därmed också en enkel procedur så länge eleven bara lärt sig utantill hur det går till, och det blir antingen rätt eller fel. Samma problem finns i den konceptuella uppfattningen av addition. Det är svårt att tänka sig ett konceptuellt missförstånd här eller att eleven har en bild av addition som är felaktig, i alla fall för de som läser Ma 4. Antingen finns en uppfattning av addition som är korrekt, eller så finns det ingen uppfattning alls. Därmed blir modellen inte speciellt användbar i fallet addition, även om det går att skilja på synen av addition som vektorer och de algebraiska uttrycken.

Modellens olika nivåer är sådana att de svaga uppfattningarna ungefär motsvarar missförstånd eller uppfattningar som inte hjälper förståelsen. T.ex. så är uppfattningen att komplexa tal är overkliga en uppfattning som inte är användbar för att förstå dem. Det går förstås att motivera att inga eller alla tal är verkliga. Det kan finnas hela och halva antal äpplen men inte ett halvt antal personer. Ett negativt antal äpplen eller personer blir än mer abstrakt, men det går ju däremot att tänka sig att en person som har gett bort ett äpple har ”fått” -1 äpple. En visare på en klocka skulle kunna modelleras med vektorn som representerar ett komplext tal, som ju inom kretsteori dessutom kallas för just visare. Om talen kan representera något beror på vad som ska mätas eller räknas. Huruvida de är verkliga eller ej får lämnas till var och en att avgöra. Därför borde detta inte kallas för ett missförstånd, men det är i alla fall en uppfattning som kan vara kontraproduktiv. Emanuelsson et al. (2004) skriver om allmän taluppfattning och menar att ”[g]od taluppfattning visar sig ofta i form av en förväntan att tal är meningsfulla helheter och att hanterandet av tal och resultat har betydelse och mening.” Därför har denna kategori klassificerats som svag taluppfattning. Enligt Nordlander & Nordlander (2012) så är det en vanlig uppfattning som är ett hinder vid inlärning.

Att komplexa tal kan användas för att lösa nya typer av ekvationer är heller inte speciellt användbar kunskap (tänk om de inte kunde det?). Sen är det förstås skillnad på det och att känna till att komplexa tal kan användas för att hitta *alla* lösningar till polynomekvationer, dvs. att det inte behövs några fler klasser av tal. Det hade kunnat klassas som en neutral eller stark uppfattning, men uppfattningen att de enbart ”kan lösa nya ekvationer” har här klassificerats som svag procedurell.

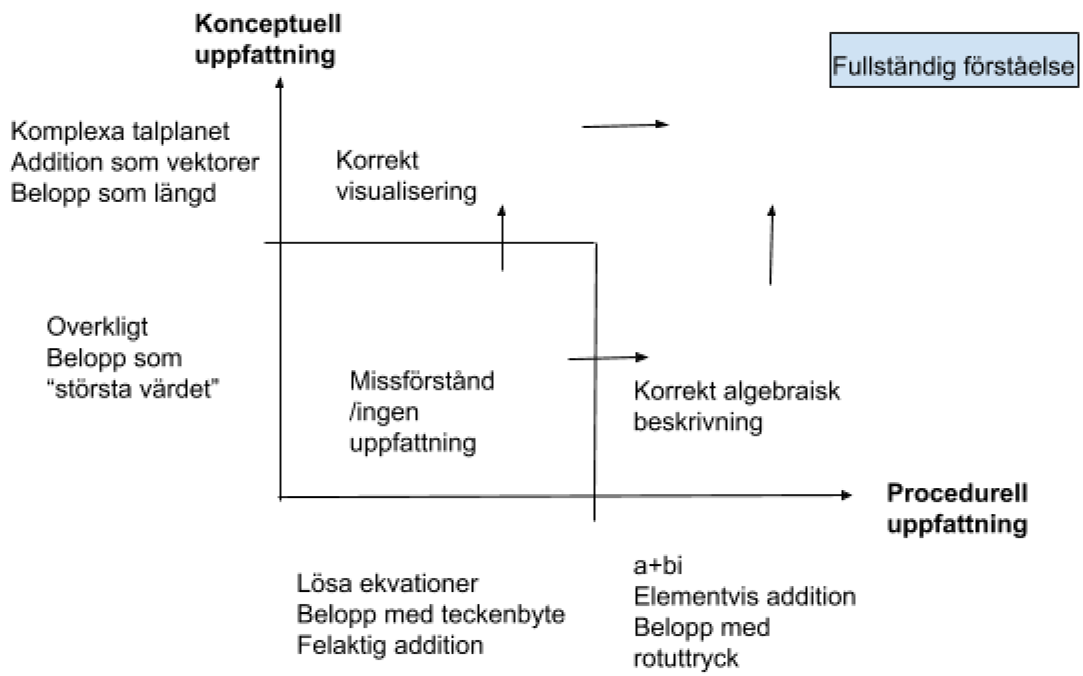
Neutrala uppfattningar är uppfattningar som inte är felaktiga och som *kan* hjälpa förståelsen. De kan vara kopplade till det aktuella begreppet, men otillräckliga som beskrivning. Om eleven vet att absolutbeloppet alltid är positivt så kan det hjälpa eleven att kontrollera om svaret blir rimligt eller ej, men det räcker inte för att kunna beräkna vad det faktiskt blir. Starka uppfattningar räcker för att kunna “använda” begreppet (inom sammanhanget). De ligger nära Tall och Vinners “concept definition”.

Eftersom studien är såpass begränsad som den är går det givetvis inte att hävda att modellen skulle gå att använda i ett bredare perspektiv. Även inom denna studie gav modellen en tveksam beskrivning av förståelsen av addition. Det är värt att komma ihåg att komplexa tal innehåller många möjligheter till både geometriska och algebraiska tolkningar, så en sådan här modell behöver inte nödvändigtvis passa i andra områden, även om den teoretiska bakgrunden om konceptuell och procedurell förståelse inte grundar sig i just komplexa tal. För vidare forskning hade det varit intressant att undersöka hur väl modellen skulle passa för att beskriva förståelsen av andra områden, samt med ett större underlag av elever. Det hade även varit intressant att undersöka hur andra frågor inom samma begrepp hade kunnat påverka kategoriseringen.

6.3 Didaktiska konsekvenser

Sfard (1991) beskriver tre stadier av begreppsförståelse, *interiorization*, *condensation* och *reification*, ungefär *införlivning, kondensering* och "*förtingligande*" av kunskap. I de första två stegen bekantar sig eleven med det nya begreppet och lär sig automatisera färdigheter eller tankemönster som inbegriper det, och i sista steget skapas en slags mental struktur, en ny typ av förståelse där begreppet ses mer som ett objekt som går att betrakta från olika perspektiv. Exempelvis kan förståelsen av olika representationsformer bidra till en reifikation av ett begrepp. Sfard skriver även att trots att ett operationellt synsätt ofta kommer före ett strukturellt så är det inte ett måste. Hon beskriver ju förståelse som en dualitet, och min tolkning är att båda synsätten krävs för en fullgod förståelse.

Lärarens uppdrag är att leda eleverna mot en om möjligt fullständig begreppsbild. Missförstånd behöver då ersättas med uppfattningar som är så nära den matematiska definitionen som möjligt. I modellen som används här representeras missförstånden av de svaga uppfattningarna inom respektive kategori, och en "fullständig" bild (i sammanhanget) representeras av en stark uppfattning inom alla kategorier. Ett alternativt sätt som jag tänker mig modellen för koncept-procedur är med följande diagram där konceptuell och procedurell uppfattning utgör två koordinataxlar:



Figur 12. Diagram över konceptuell och procedurell uppfattning.

Längst upp till höger finns en slags "fullständig förståelse" som inte är färgad av missförstånd eller personlig förförståelse som kan stå i konflikt med en matematiskt korrekt "concept definiton", och som dessutom innebär en heltäckande bild av begreppet. Då menar jag att varken konceptuell eller procedurell uppfattning i sig räcker för en förståelse som närmar sig den "fullständiga" utan en stark uppfattning av båda typerna skulle i så fall krävas. Från rutan med "Missförstånd/ingen uppfattning" kan en elev röra sig mot en antingen starkare konceptuell eller procedurell uppfattning. Från resultaten fanns exempelvis elev 1.13, som hade en konceptuell uppfattning av belopp som avståndet till origo men en procedurell uppfattning av att det beräknas med teckenbyte. Eleven hade en förförståelse om hur absolutbelopp beräknas från reella tal, och försökte kombinera denna med den konceptuella bild denne fått om absolutbelopp för komplexa tal. En kognitiv konflikt mellan dessa hade ännu inte resulterat i en uppdaterad procedurell uppfattning. För begreppet absolutbelopp skulle denne placeras närmare "Korrekt visualisering" än "Korrekt algebraisk beskrivning", men därifrån behöver eleven lära sig den korrekta beräkningen med rotuttryck för att röra sig mot en mer fullständig bild av absolutbelopp.

Vanligt var dock att procedurella och konceptuella uppfattningen av ett begrepp sammanföll relativt nära varandra, så med andra ord var det få som hade placerats på områdena för enbart "Korrekt visualisering" eller enbart "Korrekt algebraisk beskrivning". Detta var något som förvånade mig, då jag hade förväntat mig fler som förlitade sig på enbart procedurell förmåga. I resultatet förekom det endast 2 gånger en svag uppfattning av ena typen tillsammans med en stark av andra typen för ett begrepp, medan det 22 gånger förekom en svag utan en stark, och 30 gånger där båda var starka för samma begrepp. Det lutar åt att det oftast inte är allt för stora skillnader och att elever ofta inte har en dominerande typ av uppfattning. Det kan också tyda på att de båda uppfattningarna går hand i hand, till exempel genom att en stark uppfattning av ena typen skulle kunna stärka en svag uppfattning av den andra. En elev som vet hur absolutbeloppet beräknas har antagligen lättare att ta till sig den konceptuella beskrivningen av beloppet som en längd genom att jämföra med t.ex. Pythagoras sats. Omvänt så kanske en elev som lärt sig att beloppet representerar en längd skulle ha lättare att komma ihåg formeln för beräkning (än om eleven inte uppfattade belopp som längd) då det i så fall blir mer uppenbart *varför* den används.

Att förstå varför något ska användas beskrivs ju i bakgrunden egentligen som en egenskap hos *relationell* kunskap, och ingår därmed i min definition av konceptuell kunskap. Då kan man argumentera att eleven som tolkade beloppet som en längd utan att veta varför inte alls hade en konceptuell kunskap. Här menar jag ändå att *uppfattningen* av beloppet som längd är mer konceptuell än procedurell. Dels så går de båda typerna in i varandra. Men med kombinationen att kunna beräkningen samt veta varför, och vad det representerar, uppnås också både en konceptuell och en procedurell förståelse av begreppet.

För att en modell likt den jag använt i analysen ska kunna användas i undervisningen behöver läraren skapa sig en uppfattning och vara medveten om elevernas begreppsbild för att på så sätt kunna fylla i de luckor som finns och styra eleverna mot en mer fullständig förståelse. Dessutom kan det vara bra att på förhand vara medveten om vilka *möjliga* begreppsbilder som kan existera. Tall och Vinner (1981) skriver att "[w]hen the teacher is aware of the possible concept images it may be possible to bring incorrect images to the surface and, by discussion, rationalize the problem." (s. 168). Elever som befinner sig i området "Missförstånd/ingen uppfattning" kan ibland röra sig mot starkare konceptuell eller procedurell uppfattning, men om då enbart en av typen av uppfattningar stärks utan den andra kan det leda till nya missförstånd eller en bristande förståelse som för elev 1.13. Därför tror jag att elever med en mer procedurell uppfattning kan gynnas av att komplettera den med en konceptuell uppfattning, och tvärt om. Sedan tror jag att lärare har mycket att vinna på att fundera över vilka frågor som ställs till eleverna, dels i klassrummet men även på t.ex. skriftliga examinationer. Om frågorna som ställs enkelt kan besvaras med ett direkt svar så lär det också kunna leda till att mer procedurella svar ges. Därför är frågor som kräver viss eftertanke antagligen väldigt användbara för läraren, och en blandning av dessa gissar jag är önskvärt. Vissa elever kan ha en hygglig konceptuell uppfattning om ett område, och kanske därför tänker att ”de vet ju hur de ska göra, och behöver därför inte arbeta på lektionen”. Dessa riskerar kanske att hamna efter om de inte också tränar på det procedurella, som ju krävs när en skriftlig examination väl kommer.

6.4 Reflektioner

Ibland sägs det att vår högra hjärnhalva behandlar bilder, holistiskt tänkande och intuition medan vår vänstra hjärnhalva behandlar språk, linjärt tänkande och logik. Den uppdelningen tycker jag liknar uppdelningen mellan konceptuell och procedurell kunskap. För den djupare förståelsen av matematiska begrepp krävs att man kan ha flera begrepp i huvudet samtidigt och förstå deras kopplingar till varandra. Jag tycker själv att det är otroligt användbart att försöka rita en bild och visualisera ett problem på så sätt. Ofta förstår jag problemet mycket bättre efter att jag ritat bilden, även om jag inte på förhand visste exakt hur jag skulle rita den och bilden inte blev en perfekt eller ens speciellt bra representation. En gissning är att bilden hjälper hjärnan med att hålla ihop alla begrepp det handlar om. Dock kan det gå snabbare att lösa ett problem om man direkt känner igen vilken lösningsmetod som är lämplig än om man försöker härleda lösningsmetoden själv. Matematik är enligt min erfarenhet inte bara teoretisk kunskap utan också en färdighet som man behöver träna upp. I likhet med att spela ett instrument behöver vissa delar av kunskapen finnas i “ryggmärgen”, så att man inte behöver stanna upp och tänka när de ska användas. En grafisk tolkning kan tyda på förståelse men i en beräkning behöver man oftast använda sig av symboler och algoritmer. Ska man göra en matematisk analys är det ofta väldigt effektivt att först ställa upp ekvationer “utan att tänka efter” (“skriv upp vad du vet”) och sedan göra analysen när man väl har förenklat dessa. Något som jag kommer ha med mig efter denna studien när jag ska handleda elever är att jag kommer försöka vara medveten om vilken representationsform och vilken problemlösningsstrategi eleven väljer, och från det jobba med en kompletterande bild av problemet. Dessutom så har jag indirekt fått en tankeställare över hur jag kan se på *begreppsförmågan* i skolan. Kanske framförallt så kommer jag fundera över hur jag kan få in frågor i klassrummet och i examinationer som låter eleverna demonstrera både procedurell och konceptuell kunskap på olika nivåer.

7. Referenser

Emanuelsson, G., Holmquist, M., Häggström, J., Johansson, B., Lindberg, L., Maerker, L., Nilsson, G., Reys, B., Reys, R., Rosén, Bo., Ryding, R., Rystedt, E., Sjöberg Wallby, K. (1994). Vad är god taluppfattning? *Nämnaren 22(2)*.23-26

Grosholz, E. R. (2013). Teaching the Complex Numbers: What History and Philosophy of Mathematics Suggest. *Journal of Humanistic Mathematics. 3(1)*, 62-73. DOI: 10.5642/jhummath.201301.06

Hiebert, J. & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics.* (pp. 1–17) Hillsdale, NJ:Lawrence Erlbaum.

Larsson, S. (1986). *Kvalitativ analys - exemplet fenomenografi* (Vol. 11). Tillgänglig: http://urn.kb.se/resolve?urn=urn:nbn:se:liu:diva-32578

Panaoura, A., Elia, I., Gagatsis, A. & Giatilis, G.-P. (2006). Geometric and algebraic approaches in the concept of complex numbers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 37(6), 681-706, DOI: 10.1080/00207390600712281.

Nordlander, M. & Nordlander, E. (2012). On the concept image of complex numbers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,* 43(5), 627-641, DOI: 10.1080/0020739X.2011.633629.

Price, C. & van Jaarsveld, P. (2017). Using open-response tasks to reveal the conceptual understanding of learners - learners teaching the teacher what they know about trigonometry. African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education. 21(2):159-175, DOI:
10.1080/18117295.2017.1329054

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 1-36.

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding, *Mathematics Teaching, 77*, 20-26.

Soto-Johnson, H. (2014). Visualizing the arithmetic of complex numbers. *The International Journal for Technology in Mathematics Education, 21*(3), 103-114.

Skolverket. (2011.) *Ämne – Matematik*. Tillgänglig: https://www.skolverket.se/undervisning/gymnasieskolan/laroplan-program-och-amnen-i-gymnasieskolan/gymnasieprogrammen/amne?url=1530314731%2Fsyllabuscw%2Fjsp%2Fsubject.htm%3FsubjectCode%3DMAT%26tos%3Dgy&sv.url=12.5dfee44715d35a5cdfa92a3

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*, 151-169.

Vetenskapsrådet. (2017). *God forskningssed.* Stockholm: Vetenskapsrådet.

Bilaga 1

Undersökning komplexa tal

Undersökningen är en del av en studie som behandlar uppfattningar av komplexa tal. Den är inte examinerade och det finns inga svar som är rätt eller fel.

1. Vad menar vi när vi säger att ett tal är ett komplext tal? Vilka skillnader och likheter finns det med reella tal?

2. Beskriv addition mellan två komplexa tal så utförligt som möjligt.

3. Vad menas med absolutbeloppet av ett komplext tal?

4. (I mån av tid) Låt $z = -i$ och $w = -1 + 2i$.

c) Beräkna $z + w$

d) Stämmer likheten $|w + z| = |w| + |z|$? Motivera.

Bilaga 2

Fråga 1		
Kategori	Antal elever	Kommentar
lösa ekvationer	6	användning
innehåller i	11	beskrivning
$\sqrt{-1}$	13	beskrivning
a+bi	10	beskrivning
existerar inte	8	uppfattning
mer abstrakta	1	uppfattning
odefinierat	1	
ej på tallinje	6	beskrivning
utöka talsystemet	3	användning
delmängd	6	beskrivning
komplexa talplanet	13	beskrivning

Resultat från fråga 1. Vad menar vi när vi säger att ett tal är ett komplext tal? Vilka skillnader och likheter finns det med reella tal?

Fråga 2		
Kategori	Antal elever	Kommentar
exempel	11	
som vanlig addition	10	förklaring
elementvis	17	realdel och imaginärdel för sig
algebraiskt	8	algebraiskt uttryck
som vektor	3	
figur	3	

Resultat från fråga 2. Beskriv addition mellan två komplexa tal så utförligt som möjligt.

Fråga 3		
Kategori	Antal elever	Kommentar
konjugat	2	svarat med konjugatet
teckenbyte	5	beräkning med teckenbyte
som reellt	1	jämför med reellt
största värdet	3	förklaring
positiv	7	belopp alltid positivt
exempel	3	
algebraiskt	4	formulering utan siffror
figur	7	
avstånd till origo	17	beskrivning
längd	2	längd men utan vektor
radie/polär	4	svar innehållande
pythagoras/hypotenusa	5	associerat med triangel
längden av vektorn	6	beskrivning

Resultat från fråga 3. Vad menas med absolutbeloppet av ett komplext tal?

Fråga 4		
Kategori	Antal elever	Kommentar
4a annat	5	har svarat, men annat än -1+i
4a -1+i	30	svarat -1+i
4b nej	25	$\|w+z\| \neq \|w\| + \|z\|$
teckenbyte	7	beräkna absolutbelopp med teckenbyte
4b ja	6	$\|w+z\| = \|w\| + \|z\|$
som reellt	6	jämfört med reellt absolutbelopp
exempel	2	visat med exempel
allmänt	5	tolkat som allmänt problem
rotuttryck	12	korrekt beräkning

summan mindre	6	resonerat att |summa|≤|del|+|del|
figur	7	

Resultat från fråga 4. Låt $w = -1$ och $z = -1 + 2i$. *Beräkna* $z + w$. *Stämmer likheten* $|w + z| = |w| + |z|$?

Elev	Klass	tal lösa ekvationer	tal innehåller i/sqrt-1	a+bi	tal felaktighet	tal overkligt	tal delmängd	tal komplexa talplanet	addition fel	addition elementvis	addition som vektor	belopp teckenbyte/felaktighet	belopp positivt	belopp rotuttryckt	belopp som reellt/som vektor	belopp summa mindre	belopp längd
1.1	1		1		1			1		1		1		1			1
1.2	1	1				1											
1.3	1			1		1		1		1	1	1			1		
1.4	1		1	1				1		1	1			1			1
1.5	1	1	1	1				1		1		1			1	1	
1.6	1	1	1	1		1		1		1	1			1			1
1.7	1						1	1		1	1			1			1
1.8	1		1	1				1		1		1		1		1	1
1.9	1	1	1			1			1			1		1			1
1.10	1		1	1		1		1		1				1			1
1.11	1									1					1		
1.12	1					1		1		1	1			1			1
1.13	1		1					1		1		1			1		1
1.14	1		1					1		1		1			1	1	
1.15	1		1	1				1		1				1			1
1.16	1					1		1		1		1					
1.17	1			1				1		1			1				1
2.1	2		1			1				1			1		1		1
2.2	2		1	1							1				1	1	1
2.3	2		1							1		1		1			
2.4	2		1	1		1											1
2.5	2		1						1						1	1	1
2.6	2		1						1								

2.7	2		1							1			1	1			1
2.8	2	1			1				1	1			1				1
2.9	2			1					1	1				1			1
2.10	2			1						1				1			1
3.1	3		1	1				1		1		1			1	1	
3.2	3		1			1				1							
3.3	3	1					1	1		1			1				1
3.4	3						1	1		1				1			1
3.5	3		1				1			1		1			1		
3.6	3		1			1			1	1							1
3.7	3			1			1	1		1	1			1			1
3.8	3		1	1			1	1		1			1		1	1	
3.9	3		1		1					1			1		1		
3.10	3		1							1		1	1		1		
3.11	3			1			1	1		1						1	1
3.12	3							1		1		1			1		
3.13	3		1							1	1						1
3.14	3		1				1		1	1		1			1		
3.15	3			1			1	1		1	1						1
Totalt		6	26	17	3	11	9	22	7	36	9	14	8	15	15	8	27

Resultattabell över elevernas svar.

	Taluppfattning		**Addition**		**Absolutbelopp**	
Elev	procedur tal	koncept tal	procedur addition	koncept addition	procedur belopp	koncept belopp
1.1	1	1	2	0	1	2
1.2	-1	-1	0	0	0	0
1.3	2	1	2	2	-1	-1
1.4	3	2	2	2	2	2
1.5	2	2	2	0	-1	0
1.6	2	1	2	2	2	2
1.7	0	3	2	2	2	2
1.8	3	2	2	0	1	3
1.9	0	-1	-1	0	1	2
1.10	3	1	2	0	2	2
1.11	0	0	2	0	0	-1
1.12	0	1	2	2	2	2
1.13	1	2	2	0	-1	1
1.14	1	2	2	0	-1	0

1.15	3	2	2	0	2	2
1.16	0	1	2	0	-1	0
1.17	2	2	2	0	1	2
2.1	1	-1	2	0	1	1
2.2	3	0	0	2	0	2
2.3	1	0	2	0	1	0
2.4	3	-1	0	0	0	2
2.5	1	0	-1	0	0	2
2.6	1	0	-1	0	0	0
2.7	1	0	2	0	3	2
2.8	-1	-1	1	0	1	2
2.9	2	0	1	0	2	2
2.10	2	0	2	0	2	2
3.1	3	2	2	0	-1	0
3.2	1	-1	2	0	0	0
3.3	-1	3	2	0	1	2
3.4	0	3	2	0	2	2
3.5	1	1	2	0	-1	-1
3.6	1	-1	1	0	0	2
3.7	2	3	2	2	2	2
3.8	3	3	2	0	1	0
3.9	1	-1	2	0	1	-1
3.10	1	0	2	0	0	-1
3.11	2	3	2	0	0	3
3.12	0	2	2	0	-1	-1
3.13	1	0	2	2	0	2
3.14	1	1	1	0	-1	-1
3.15	2	3	2	2	0	2
Totalt	54	39	65	18	24	45

Karta över uppfattningar som eleverna demonstrerat.