GÖTEBORGS UNIVERSITET

Geometriska figurer i läroböcker

En läromedelsanalys om hur läroböcker för årskurs 1 i matematik representerar och varierar geometriska figurer

Clara Johansson

Självständigt arbete L3XA1A

Examinator: Florenda Gallos Cronberg

Rapportnummer: VT19-2930-009-L3XA1A

Sammanfattning

Titel: Geometriska figurer i läroböcker
Engelsk titel: Geometric figures in textbooks
Författare: Clara Johansson
Typ av arbete: Examensarbete på avancerad nivå (15 hp)
Examinator: Florenda Gallos Cronberg
Rapportnummer: VT19-2930-009-L3XA1A
Nyckelord: *Geometri, representationer, former, typiskt exempel, lärobok, variation*

Abstract

Geometric figures can be found everywhere which allows a child to be exposed to it everyday. The continuous exposure develops an early understanding of geometry and its typical examples: a triangle, rectangle and square. A child will begin to identify figures after comparing objects to the typical examples. However, if the figures differs from the typical examples, the identification will be lost even if the figure's qualities have been distinguished. This problem will later impact the geometric understanding and affect the future geometry studies in school. Thus, how can the student take their geometric understanding to the next level? This thesis will discuss how many of the different shapes such as the triangle, rectangle and square are represented and vary in the most important educational tool: the textbook. For decades the mathematic textbook has been an important component in teaching and is therefore a part of students knowledge development. The Variation theory will be used to analyze the shapes that represents the triangle, rectangle and square. This will provide an understanding about the student's prerequisites needed in order to identify the geometric figures that differs from the typical examples. A content analysis has been used as research method to produce results regarding what varies, how it varies, the amount of representation forms, and the number of typical examples. The results indicate a significant difference between the six textbooks used in this study. The main resault of the analysis showed that the six different textbooks do not aim to develop the same geometric understanding. While some distinguish characteristics, other textbooks relate only to the ability to identify geometric figures by comparing them to a similar form of representation. What prerequisites does this leave the student with? And what does this say about an equivalent education?

Förord

Stort tack till min handledare Peter Nyström som varit till stor hjälp under arbetets gång. Tack för din vägledning och dina synpunkter. Tack till NCM samt Göteborgs Universitetsbibliotek för lånet av era läroböcker i matematik. Utan dessa hade studien aldrig varit möjlig. Jag vill även tacka Lena, som ställt upp och kommit med goda och viktiga råd.

Innehåll

Abstract ....

Förord ....

1 Introduktion 6

2 Litteraturbakgrund 7

2.1 Läroboken 7

2.2 Geometriska figurer 7

2.3 Karaktärisera geometriska objekt 8

2.2.1 Det typiska exemplet 8

2.4 Van Hieles teori 10

2.4.1 Nivåer av geometrisk förståelse 11

2.5 Ramverk för en analys av textböcker 11

3 Syfte och frågeställningar 13

4 Teoretisk bakgrund 13

4.1 Variationsteorin 13

4.1.1 Kontrastera, generalisera och sammanlägga 14

5 Metod 14

5.1 Metodval 14

5.2 Urval 14

Mera Favorit Matematik 14

Mondo 15

Koll på matematik 15

Lyckotal 15

5.3 Genomförande 15

5.4 Avgränsningar 16

5.5 Validitet och reliabilitet 16

5.6 Etiska överväganden 16

6 Resultat och analys 17

6.1 Antal representationer och *typiska exempel* 17

Mondo 1b 17

Koll på matematiken 1a och 1b 18

Lyckotal 1b 18

Prima 1b 18

Safari 1a 18

6.2 Variation i dimensioner 19

6.2.1 Kontrastering 19

6.2.2 Generalisering ... 21
6.2.3 Sammanslagning ... 23
6.2.4 När variation i dimension saknas ... 24
7 Resultatdiskussion ... 25
Variation av ett lärandeobjekt ... 26
Att lära genom tidigare erfarenheter ... 27
Läromedelsmarknaden ... 27
7.2 Metoddiskussion ... 28
8 Slutdiskussion ... 28
8.3 Slutsats ... 29
8.2 Förslag på framtida forskning ... 29
8 Referenser ... 30
Bilagor ... 32

1 Introduktion

Läromedel har i flera decennier varit en nyckelkomponent i grundskolan, och i takt med digitalisering och samhällets utveckling innefattar läromedelsmarknaden ett stort antal olika medel för lärande. Läroboken är ett av de vanligaste använda läromedlen – inte minst i matematik (Nationalcyklopedin, 2004). Således är det enbart ett av lärarens verktyg, men det går inte att undgå, att det matematikboken exponerar påverkar elevens lärande. Det här får en vidare betydelse när forskning pekar på elevers svårigheter för att klassificera geometriska figurer.

> Children might have spontaneously made up prototypes of the triangle and quadrilateral through everyday experiences, explicit and implicit instructions in their schools, and diagrams adopted in math textbooks (Shaughnessy & Burger, 1985, sid. 158)

Innan barn kunnat urskilja karaktäristiska drag för varje figur visualiserar de en prototyp för att jämföra den med olika objekt. Det här leder till att de kan identifiera figurer som liknar prototypen – och tvärtom. Om objekten inte liknar prototypen har elever svårt att karaktärisera geometriska figurer. Det här var redan känt i Shaughnessy & Burger studie (1985) där flera barn hade svårt att förstå att trianglar kunde skilja sig från den prototyp de visualiserar även om den har alla av triangelns egenskaper. Orsaken menar forskning, är de erfarenheter som de dagligen exponeras utav.

Överallt i vardagen finns prototyper av geometriska figurer, och den övervägande delen representeras genom samma representation– det *typiska exemplet* (c.f Clements & Sarama, 2000). Därför är det också den representation barnet visualiserar (c.f Atlas & Aktas Arnas, 2017). Hur kan elevens förståelse utvecklas så att eleven inte identifierar geometriska objekt utifrån de *typiska exemplen*, utan istället karaktäriserar dem utifrån figurernas egenskaper? I enlighet med det här får matematikboken en viktig betydelse. Hur representerar och varierar läroböcker de olika geometriska figurernas representationer? Hur ofta förekommer de *typiska exemplen*?

2 Litteraturbakgrund

Innan studiens syfte presenteras kommer följande kapitel skapa en bakgrund till uppsatsen utifrån relevant litteratur. Vad säger forskning om barns geometriska förståelse och vad är ett *typiskt exempel*? Dessutom kommer definitionen av de geometriska figurerna redogöras, men till en början presenteras här lärobokens betydelse i undervisningen.

2.1 Läroboken

Enligt Nationalencyklopedin (2004) var olika läromedel redan under industrisamhället en viktig komponent i undervisningen och innefattade bland annat böcker, filmer, informationsbilder och naturalier. Till en början var många forskare och kulturpersonligheter involverade av läromedlets framställning. Det var först senare i mitten av 1900-talet som den erfarna läraren växte fram som läroboksförfattare. Traditionellt sett motsvaras läromedel nästan enbart av läroboken. Den ses fortfarande idag som ett centralt verktyg och resurs för lärandet - inte minst i matematik (Nationalencyklopedin, 2004; Johansson, 2006). I skolans värld innefattar idag läromedel nästintill allting som kan används som bas för undervisningen (Nationalencyklopedin, 2004). I matematikböcker kan man skymta traditioner om hur vi lär oss (Johansson, 2006). Säljö (2012) skriver bland annat om behaviorismen, pragmatismen och det sociokulturella perspektivet. Dessa traditioner har olika syn på lärandet. Alla har emellertid varit betydande inom utbildningen.

Inte minst är behaviorismens idéer synliga i matematikboken, genom att fokus ofta ligger på rätt svar (Johansson, 2006). Det sociokulturella perspektivet blir synligt när uppgifter syftar till att utveckla lärandet tillsammans med andra människor. Då fokuseras det istället på det medierande redskapet. Enligt det sociokulturella perspektivet får språket och samspelet med andra stor betydelse i utvecklingen. Pragmatismen i sin tur, handlar om att uppgifter är formade för att utgå från elevens tidigare erfarenheter. Utgångspunkten i traditionen är att ge människor verktyg för att förbereda dem inför samhällets utmaningar och möjligheter. Pragmatismen trycker därför på att värdefull kunskap ska kopplas till människans egen vardag och utgå från konkreta erfarenheter för att fördjupa förståelsen (Säljö, 2012 sid. 177).

Oavsett tradition är det läraren som styr hur eleverna ska bearbeta matematiken. En viktig uppgift i undervisningen blir att förmedla lärobokens innehåll. Enligt Heikka (2015) påverkar läroboken lärarens och elevens föreställning om matematik. Det här får en vidare betydelse när koppling mellan läromedel och styrdokument står utanför statlig kontroll. Idag ingår det i lärarens uppdrag att orientera sig mellan utbudet och granska de olika läromedlen som produceras på marknaden. Det här leder till att dagens lärare inte använder samma läroböcker i sin undervisning. Således skiljer sig läroböcker - precis som lärare - från varandra och samtliga presenterar sin uppfattning hur lärandet ska ske. Däremot är läroböcker producerade i syfte att behandla samma matematiska innehåll - däribland geometri (Johansson, 2006).

2.2 Geometriska figurer

Geometri, jordmätning, beskrivs som läran om storleken och formen i rummet samt figurers egenskaper (Löwing, 2011). Enligt läroplanen ska eleverna i årskurs 1-3 bland annat behandla geometriska objekt och deras grundläggande egenskaper. Målet är sedan att eleverna i årskurs 3 kan använda och beskriva dessa geometriska objekts egenskaper och relationer (Skolverket, 2011). I den här uppsatsen är de geometriska figurerna begränsade till tre utav de geometriska objekt som står i det centrala innehållet - *Triangel, rektangel* och *kvadrat* (Skolverket, 2011).

Definitionen av dessa tre olika begrepp är baserade av Gennow & Wallby (2010). En *triangel* är en tresidig månghörning och består av tre sidor och tre hörn. Sidorna och vinklarna kan se olika ut, vilket också ger upphov till olika typer av trianglar. En *likbent* triangel har minst två sidor som är lika långa, med tillhörande vinklar som är likadana. En triangel som är *rätvinklig* har en rät vinkel. *Rätvinkliga* trianglar har alltid en vinkel som är 90°. Den räta vinkeln är den största vinkeln i rätvinkliga trianglar. *Liksidig* triangel består utav tre sidor som är lika långa, vilket också ger vinklar som alltid är 60°. En *spetsvinklig* triangel består utav vinklar där samtliga hör är mindre än 90°. *Trubbvinkliga* trianglar har en vinkel som är större än 90° *Fyrhörningarna* är en geometrisk grupp inom månghörningar. Dessa representerar en kategori geometriska figurer som består av fyra hörn. Inom denna kategori finns *rektangeln* vars vinklar alltid är räta och vars motstående sidor är lika långa samt parallella. Detta betyder att en rektangel även kan se ut som en kvadrat. En *kvadrat* kan däremot inte se ut som en rektangel, på grund av att den alltid består av fyra lika långa sidor och fyra räta vinklar. Kvadraten är den sista figuren i följetongen av fyrhörningar.

Målet i geometri är att kunna förstå och tillämpa dessa abstrakta idéer, men på vägen dit används ofta konkret material, olika uttrycksformer och representationer som hjälpmedel (Gennow & Wallby, 2010). I den här uppsatsen kommer uttrycksformer och representationer skiljas åt som två olika begrepp. Uttrycksformer är den form som uttrycker matematiken genom till exempel bild, text, konkret material eller algebraiska uttryck. Representationer i den här uppsatsen sätter fokus på vilken form den geometriska figuren presenteras. Till exempel hur presenteras triangeln? Presenteras den via en liksidig triangel, likbent triangel eller rätvinklig triangel och vilken riktning har den?

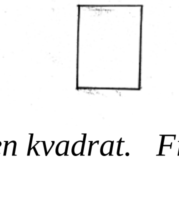
2.3 Karaktärisera geometriska objekt

Genom att använda representationer förenklas förståelsen för de grundprinciper som utgör geometriska figurer. Triangeln, rektangeln och kvadratens utseende kan varieras i hög grad men däremot representeras dessa figurer ofta genom *typiska exempel* (Hasegawa, 1997; Hannibal, 1999; Celements & Samara, 2000; Aslan & Aktas Arnas, 2007; Yeşil Dağlı & Halats, 2015). Men vad är egentligen ett *typiskt exempel*?

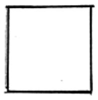
2.3.1 Det typiska exemplet

Studier benämner den visuella prototypen av geometriska figurer både som det *bästa exemplet, perfekta figuren* och *typiska exemplet* (Clements & Sarama, 2000; Hannibal, 1999; Aslan & Aktas Arnas, 2007). I den här uppsatsen kommer det *typiska exemplet* att användas som benämning likt Aslan & Aktas Arnas studie (2007).

Flera studier är överens (c.f. Clements & Sarama, 2000) om att det *typiska exemplet* innebär att rektanglar är mellan två och tre gånger så långa som breda och placerade horisontellt eller vertikalt (se Figur 1). Att trianglarna är antingen liksidiga eller likbenta med en horisontell bas (se Figur 2) och att kvadraterna är placerade med en horisontell bas (se Figur 3). Dessa *typiska exempel* som ofta visualiseras är med andra ord en av väldigt många figurer som representerar grundsatsen för geometriska figurer.



Figur 1. Typiska exempel av en kvadrat.   *Figur 2. Typiska exempel av en triangel.*



Figur 3. Typiskt exempel av en kvadrat.

Representationen av de *typiska exemplen* för geometriska figurer är inte helt förvånande. I sin studie skriver Hannibal (1999) om alla de olika faktorer som introducerar barn till geometri; mobiler, böcker, pussel, leksaker och olika TV-program. Utifrån de här formas en uppfattning över vad som definierar och representerar en geometrisk figur (Hannibal, 1999). I enlighet med det här skriver Clements och Sarama (2000) om en granskning av geometriska former de gjort som en del av deras studie. Granskningen gick ut på att undersöka geometriska figurer i leksaksbutiker och i tidningar med föremål av former som barn dagligen exponeras av. Det visade sig då - med enbart några få undantag - att formerna representeras genom det *typiska exemplet* på trianglar, rektanglar och kvadrater.

I enlighet med det här får Shaughnessy & Burgers studie (1985) betydelse. Där deltog över sjuttio elever i Nordvästra USA, för att uppvisa hur de klassificerar geometriska figurer – däribland trianglar, rektanglar och kvadrater. Den kvalitativa studien genomfördes över en tvåårsperiod, och eleverna från skolans samtliga stadier fick utföra olika uppgifter och aktiviteter i syfte att synliggöra elevernas geometriska förståelse. Efteråt följdes dessa uppgifter och aktiviteter upp genom intervjuer, som syftade till en fördjupad förståelse för resultaten och elevernas uppfattning om figurernas former.

En av de olika uppgifterna var att eleverna skulle rita trianglar. Ett flertal av de yngre eleverna kunde inte identifiera en triangel som var lång, smal och inte hade en bas som var horisontellt placerad. Ändå visade de medvetenhet om att figuren hade tre linjer och tre kanter.

> When asked how their drawings differed, many students replied that some of their triangles were "fatter" or "pointier" than others. Very young children usually felt that they could draw only a few triangles, perhaps three, four, and these frequently differed only in orientation (i.e., the direction they "pointed in”) (s.422).

De karakteristiska egenskaperna som utgör en geometrisk figur visade sig således inte vara självklart för eleven. En annan elev i samma studie genomförde en uppgift där trianglar skulle identifieras bland flera geometriska figurer. Däribland tyckte sig eleven hitta en *halv triangel*. Eleven kunde inte identifiera den rätvinkliga triangeln (med horisontell bas) som en triangel eftersom eleven utgick från det *typiska exemplet*. Flertal studier visar på samma komplexitet, där elever visar liknande mönster när man enbart visualiserar det *typiska exemplet* av geometriska figurer (Satlow & Newcombe, 1998; Celements & Samara, 2000; Hannibal, 1999; Yeşil Dağlı & Halats, 2015). För barn är *typiska exemplen* den ursprungliga formen av figurerna. Detta gör att de utgår från *typiska exempel* och har svårt att till sig andra representationer. Till exempel klassificerar de trianglar utifrån det *typiska exemplet* och kallar dem upp-och-nervända trianglar, halva trianglar, tjockare trianglar och vassare trianglar. Aslan & Aktas Arnas (2007) kvalitativa studie undersökte i likhet med föregående studie, hur 100 barn mellan tre och sex år gamla klassificerar en triangel, kvadrat, rektangel och cirkel. Studien genomfördes genom individuella intervjuer med barnen, där de fick identifiera de geometriska figurerna utifrån flera olika representationer. I enlighet med Shaughnessy & Burgers (1985) studie påvisades även i den här studien komplexiteten av att identifiera geometriska objekt som inte liknar det *typiska* *exemplet*. Enbart 52% kunde identifiera en representation av en trubbvinklig triangel som en triangel, medan 99% angav att det *typiska exemplet* var en triangel. Satlow & Newcombe (1998) skriver i deras liknande studie om sitt resultat. Förutom att presentera antalet barn som kunde identifiera geometriska figurer från flera objekt, inkluderade de även de svar där barnet identifierat icke giltiga trianglar. Med icke glitliga trianglar menas trianglar som inte uppfyller alla egenskaper, som till exempel trianglar med rundade hörn. Det visade sig då, att det var 38% som identifierat icke giltiga trianglar som trianglar. Bland dessa icke giltiga trianglar fanns bland annat *typiska exempel* där sidorna var brutna. Detta innebär att barnen inte klassificerade figurer efter alla samtliga egenskaper för att identifiera figuren. Studier är således överens om att barn visualiserar en viss geometrisk figur utifrån det *typiska exempel* (Satlow & Newcombe, 1998; Celements & Sarama, 2000; Hannibal, 1999; Aslan & Aktas Arnas, 2007; Yeşil Dağlı & Halat, 2015).

Sammantaget visar ovanstående forskning att barn i tidig ålder utvecklar ensidiga prototyper som dom använder för att jämföra och identifiera geometriska figurer med. Det är vanligt att barns prototyp representeras som det *typiska exemplet.* Detta medför att eleven får svårt att identifiera figurer när de presenteras som icke *typiska exempel*. Utifrån det här behöver de således öka sin kunskap inom geometri för att kunna karaktärisera geometriska figurer oavsett representationsform. För att veta *hur* geometrisk förståelsen ska utvecklas, behöver det först vara tydligt *vad* som ska utvecklas. För att redogöra det använder den här uppsatsen van Hieles teori som utgör fem nivåer av geometrisk förståelse.

2.4 Van Hieles teori

Under 1980-talet utvecklade Dina van Hiele och Pierre van Hiele tillsammans teorin om hur människan utvecklar geometrisk förståelse i samklang som Piagets syn på lärande (Stols, 2012). Det finns däremot en väsentlig skillnad. I Piagets teori utvecklas kunskap i stadier i förhållande till mognad och ålder. I Van Hiele teori utvecklas kunskap i förhållande till undervisning och tidigare erfarenheter (Van Hiele, 1984).

Van Hieles teori består av totalt fem nivåer som utgör en progression för att lära och förstå geometri (Van Hiele, 1984). Från att befinna sig på basnivån och känna igen geometriska former, utvecklas ett tänkande som leder till att behärska högsta nivån och besitta en abstrakt och formenlig geometrisäkerhet. För att komma till den säkerheten behöver dock människan behärska samtliga nivåer. Inlärningsprocessen enligt Van Hieles teori innebär att människan inte kan ta sig från nivå noll till två utan att uppnå kunskapen i nivå ett. Det här menar van Hiele inte är en naturlig process, utan sker genom påverkan av undervisning (Van Hiele, 1984). Ytterligare en aspekt som van Hiele lyfter (1984) är språkets betydelse och påverkan:

> Two people who reasion at two different levels cannot understand each other. This is what often happens between teacher and student (...). A true dialogue must be established at the level of the students. (Van Hiele, 1984, s.63)

Varje nivå innehar ett eget sätt att uttrycka sig i geometri anpassat till den teoretiska förståelsen. Det här betyder, att den som befinner sig på nivå ett inte kan diskutera geometri med någon som befinner sig på nivå tre, om inte den på nivå tre anpassar sitt språk. Det här får en viktig betydelse i klassrummet i de lärandetillfällen när läraren ska undervisa elever som befinner sig i en annan nivå än läraren själv gör (Van Hiele, 1984).

Flera studier som används i denna uppsats har visat på att barn som har svårt att karaktärisera geometriska figurer visualiserar en viss prototyp. Liknar inte den geometriska figuren prototypen, har de svårt att identifiera objektet. Barnen befinner sig här på den första nivån i van Hieles teori, och behöver därför utveckla geometrisk förståelse för att ta sig till andra nivån. I den här studien är sätts enbart fokus på två nivåer - den första och andra. Resterande tre kommer inte presenteras i den här uppsatsen.

2.4.1 Nivåer av geometrisk förståelse

Nivå 0 Visualisera

På den första nivån kan eleven känna igen geometriska figurer i sin omgivning genom deras utseende och kan till exempel jämföra former med verkliga föremål. Genom att jämföra de olika geometriska figurerna med en prototyp har eleven en förståelse över geometriska figurers utseende men kan däremot inte identifiera vad som gör att de ser likadana ut. Det betyder att eleven inte heller kan uppfatta en triangel som en triangel om den inte liknar den visuella prototypen. Dessutom uppfattar även eleven en rektangel och en kvadrat som två helt olika geometriska figurer. Eleven orienterar sig genom att visualisera, visualisering kan ske utan hjälp av språket, vilket leder till att språket på första nivån är begränsad (Van Hiele, 1984).

Nivå 1 Analysera

Nästa nivå är Enligt Van Hiele (1984) är det här första nivån av förståelse av geometri. I denna nivå börjar eleven skilja och namnge figurerna genom deras egenskaper. T.ex. när eleven tänker på en kvadrat så är det en figur med fyra hörn, fyra lika långa sidor och fyra räta vinklar. I den här nivån kan därför eleven skilja - men också kategorisera - olika figurer utifrån deras egenskaper. Däremot har inte eleven nödvändigtvis identifierat att egenskaperna är ordnade (Van Hiele, 1984).

Aslan & Aktas Arnas (2007) skriver i sin studie om att studier har gjort anspråk på att elever inte går direkt från en nivå till en annan i van Hiels teori, utan att kan befinna sig på båda nivåerna samtidigt. Vidare hänvisar de till Celements och Battistas studie (1992). Där en elev identifierar en geometrisk figur då den både klassificerar hela objektet genom att urskilja egenskaper, samtidigt som figuren jämförs med en visuell prototyp.

> This also has three sides, but it does not look like that one. For this reason it is not at triangle (Aslan & Aktas Arnas, 2007, sid. 84)

Utifrån den här aspekten får inlärningen av geometriska figurer en vidare betydelse. Trots att eleven kan urskilja triangelns egenskaper, har eleven ännu inte nått nästa nivå i geometrisk förståelse. Den visuella prototypen har en fortsatt viktig betydelse för att identifiera figuren, vilket gör att ett fullbordat lärande inte skett.

2.5 Ramverk för en analys av textböcker

I allmänhet är läroböcker ett viktigt inslag i undervisningen, vilket betyder att dessa fyra funktioner; *innehåll*, *struktur*, *tolkning* och *språk*, kommer ha en påverkan på lärandet (Okeeffe, 2013). I enlighet med Valverde (2002, citerat i Okeeffe, 2013) kommer således dessa fyra funktioner få en vidare betydelse i inlärningen, i positiv som negativ bemärkelse. Med hjälp av en textboksanalys kan man identifiera dessa fyra funktioner och därmed lärobokens effektivitet.

Genom att analysera *strukturen* hänvisar Okeeffe i sin studien (2013) till Mikk (2000), som skriver att det inte bara är kunskapen som är avgörande i en text. Mikk menar (2000) att en strukturanalys syftar till att ta reda på hur väl texten är disponerad för att tilltala eleven. Nästa funktion, *innehållet*, har stor betydelse för de val som både lärare och eleven ställs inför i undervisningen. Detta får också följder för inlärningen och läranderesultatet (Okeeffe, 2013). Den tredje funktionen, *tolkning*, har sin betydelse för hur eleven kommer att hantera och tillmötesgå innehållet. Denna funktion fokuserar på vilket sätt innehållet tolkas, och om innehållet går att förstås av eleven och läraren. Den sista funktionen, *språket*, är betonat som en viktig betydelse för att utveckla ett lärande i matematik (citerat i Okeeffe, 2013). En analys av matematiskt textboksspråk är avsedd för att synliggöra vissa diskurser av språket som har stor betydelse för inlärningen, till exempel beskrivningar (Okeeffe, 2013).

Slutligen, dessa fyra funktioner utgör således i enlighet med Valverde (2002, citerat i Okeeffe, 2013) ett ramverk vid en textboksanalys. Eftersom den här studien är avsedd för att ta reda på hur läroböcker utvecklar den geometriska förståelsen, kommer *innehållet* att analyseras. I Okeeffes (2013) artikel kan man läsa att en innehållsanalys är avsedd för att skapa en insyn till vad som läroboken förmedlar, och en hjälp för att avgöra hur främjade den är för lärandet. Denna funktion stämmer således bra för studiens analys.

3 Syfte och frågeställningar

Uppsatsens huvudsakliga syfte är att bidra med kunskap om hur olika läroböcker utvecklar den geometriska förståelsen. Vilka förutsättningar får eleven för att kunna identifiera geometriska figurer som inte liknar det *typiska exemplet* de visualiserar?

1. Hur representeras geometriska figurer (kvadrat, rektangel och triangel) i läroböcker för åk 1?
2. Hur ofta representeras det *typisk exemplen* i läroböcker för åk 1?
3. På vilka sätt varieras geometriska figurerna triangel, kvadrat och rektangel i läroböcker för årskurs 1?

4 Teoretisk bakgrund

Barn som identifierar figurer genom att jämföra med det *typiska exemplet* befinner sig enligt Van Hiele (2004) på första nivån av geometrisk förståelse. Vad de behöver utveckla för att ta sig till nästa nivå av geometrisk förståelse, är att kunna urskilja egenskaper för att utifrån det identifiera geometriska figurer oavsett hur de ser ut (Van Hieles, 1984). För att resonera *hur* det kan gå till kommer den här uppsatsen att använda variationsteorin.

4.1 Variationsteorin

Variationsteorin härstammar från den fenomenografiska forskningssatsen där lärande sker genom att erfara variation av ett fenomen (Marton & Booth, 1997; Runesson, 1999). Det blir därför viktigt att veta vad som ska läras för att kunna kontrastera och variera fenomenet i olika termer och dimensioner. Det handlar således inte om att behandla ett undervisningsinnehåll genom att fokusera på olika aspekter av samma fenomen, utan ställa ett annat fenomen mot tidigare för att öppna upp en rymd av variationer (Runesson, 1999).

> It has been found that two examples are better than one, and that two examples presented together are better than two examples presented separately (Kullberg, Runesson & Marton, 2017, s. 561).

Variationsteorin innebär följaktligen att utveckla lärandet genom att urskilja innehållet med hjälp av att presentera ett annat fenomen. Det blir således avgörande och lika viktigt för lärandet att veta vad som *inte* ska läras i kontrast till vad som ska läras. För att veta vad en geometrisk figur är behöver dess egenskaper jämföras med en annan geometrisk figurs egenskaper. Geometriska figuren får, enligt variationsteorin, inte hela sin betydelse förrän de kritiska aspekterna synliggörs genom variation i dimensioner (Marton, & Fai Pang, 2006; Kullberg, Runesson & Marton, 2017).

4.1.1 Kontrastera, generalisera och sammanlägga

Utifrån Kullberg, Runesson & Marton (2017) finns det tre olika dimensioner att skapa variation, fram till fullbordad förståelse - *contrast*, *generalization* och *fusion*. I den här uppsatsen kommer de benämnas genom att kontrastera, generalisera och sammanlägga, vilket är en svensk översättning. Följande exempel kommer att visa på hur ett lärande kan gå till med hjälp av dessa variationer. Vi utgår från att lärandeobjektet är ett äpple. Genom att enbart använda *ett* lärandeobjekt blir det inte tydligt nog för att avgöra vad som egentligen definierar ett äpple. Är det formen, färgen eller storleken? Att *kontrastera (contrast)* innebär därför att barnet behöver lära sig om vad som är ett äpple genom att jämföra äpplet med en annan frukt, till exempel banan, för att urskilja vad som *inte* är ett äpple. När barnet väl förstått vad ett äpplet är, vad talar då för att barnet kan förstå att äpple kan skildras i form, färg och storlek? I följd med det här behöver barnet därför *generalisera (generalization)* äpplet, genom att få flera konkreta exempel på hur ett äpple kan representeras. Genom att låta äpple variera sitt utseende blir det tydligt att urskilja äpplets mönster och skapa förståelse för vad som gör ett äpple till ett äpple. När dimensioner av variationer av olika aspekter synliggjorts kan de sedan *sammanläggs (fusion).* Det här kräver således att tidigare dimensioner av variationer tillhandahållits och att dessa variationer erfars samtidigt. Äpplet måste således förekomma bredvid en annan frukt samtidigt som det varieras genom olika representationer. Variationsteorin innebär därför inte *att lära om en sak i taget* eller *att börja med likheter istället för skillnader* utan tvärtom - öppna upp för kritiska aspekter i olika dimensioner för en fullbordad förståelse av ett lärandeobjekt (Marton, & Fai Pang, 2006; Kullberg, Runesson & Marton, 2017).

5 Metod

Det som nu kommer presentas är uppsatsens tillvägagångssätt. Kapitlet innehåller vilken metod som valts för att genomföra studien, urvalet som analyserats och hur studien gått tillväga för att besvara forskningsfrågorna. Slutligen kommer viktiga etiska överväganden att diskuteras.

5.1 Metodval

Uppsatsen avser att kvantifiera och analysera hur geometriska figurer varieras i läroböcker i form av en innehållsanalys. Studien utgår från läroböcker som används i matematikundervisningen, och använder sig av ett arbetssätt som inte genererar data. Metoden innebär att man på ett systematiskt sätt analyserar ett innehåll inriktat på färdiga föreställningar för att noggrant synliggöra aspekter genom att leta, räkna, tolka och jämföra (Bryman, 2016; Denscombe, 2018). Bryman (2016) hänvisar till Holsti (1969) som skriver att man genom denna forskningsteknik kan göra objektiva beskrivningar av budskap. En innehållsanalys gör det därför möjligt att exponera representationer av geometriska figurer i läromedel och analysera hur dessa varieras. Förbestämda frågor som formats av variationsteorin (se bifogad Bilaga 1) används som verktyg vid analysen av utvalda läroböcker.

5.2 Urval

Urvalet som resultatet bygger på, är ett bekvämlighetsurval som innebär att urvalet funnits lätt tillgängligt för forskaren (Bryman, 2016). För att öka studiens validitet har däremot vissa kriterier varit nödvändiga. Validitet innebär att det som mäts är relevant för studiens syfte (Bryman, 2016). Därför var det viktigt att de läroböcker som skulle användas, hade tydlig förankring i lgr 11, och att samtliga användes för samma årskurs. I samband med undersökningens mål behövde urvalet behandla geometri och tvådimensionella figurer, vilket resulterade i att den här studien baseras på sex olika läromedel för årskurs 1 som är publicerade i Sverige.

Mera Favorit Matematik

Mera Favorit Matematik kommer ursprungligen från Finland och är skrivet utav Sirpa Haapaniemi, Sirpa Mörsky, Arto Tikkanen, Päivi Vehmas och Juha Voima. Läromedlet finns för förskoleklass till och med årskurs nio. I den senast reviderade upplagan tillkommer även en digital del. I uppsatsen har den senaste upplagan av läroboken 1b används, vilken är publicerad 2018.

Mondo
Författaren till läromedlet Mondo är Åsa Brorsson som även är verksam lärare i matematik. Läromedlet finns för elever i förskoleklass till och med årskurs 9. I den här studien används läromedlets senaste upplaga av 1b som gavs ut 2018.

Koll på matematik
Koll på matematiken är ett läromedel skrivet av lärarna Hanna Almström och Pernilla Tengvall. Böckerna riktar sig till elever från förskoleklass upp till klass 6. Den senaste upplagan för årskurs 1a publicerades 2014 och 1b publicerades 2015. I *Koll på matematiken* tillkommer även en digital del som är kopplad till varje kapitel. Geometri kunde hittas både i lärobok 1a och 1b vilket gjorde att två böcker representerar det här läromedlets sätt att skildra och lära geometri.

Lyckotal
Författarna till *Lyckotal* är finländarna Lisen Häggblom och Siv Hartikainen, som även publicerat flera läromedel för både den svenska och finska skolan. Lyckotal 1a består både av en a och b bok, men den här uppsatsen använder enbart 1a eftersom 1b inte behandlar geometri. 1a är den första upplagan och publicerades 2012 och är ett basläromedel med tydlig förankring i lgr 11.

Prima
Prima matematik kommer ursprungligen från Sverige och är ett basläromedel i matematik för elever i årskurs 1-3. Författaren av läromedlen är Åsa Brorsson. Den här studien kommer använda den andra upplagan av 1b som gavs ut 2014.

MatteSafari
Margareta Picetti, Pernilla Falck och Siw Elofsdotter Meijer har skrivit läromedlet Matte Safari för elever i förskoleklass till årskurs 3. I både Matte Safari 1a och 1b berörs geometri men det är enbart i 1a där tvådimensionella figurer behandlas vilket också är den bok som används i uppsatsen. I Matte Safari följer även en digital del med som är kopplad till övningar och progressionen i kapitlen. Detta läromedel publicerades 2011 vilket gör den till den äldsta upplagan som används i studien.

5.3 Genomförande

Uppsatsen påbörjades genom att undersöka forskningsfältet genom att karaktärisera geometriska figurer via olika sökmotorer, med bland annat begreppen *geometry, shapes* och *recognition.* Flera vetenskapliga artiklarna visade sig bli relevant litteratur som i sin tur sammanfattades. Därefter utforskades forskningsfältet inom *the theory of variation*. Variationsteorin har som syfte att användas vid analysen för att hitta, tolka och jämföra kritiska aspekter för hur geometriska figurer varieras. Utifrån all litteratur kunde slutligen frågor formas (se bifogad bilaga 1), som användes som verktyg vid innehållsanalysen. Utifrån dessa kunde även analysen delas upp i två olika steg.

Första analyssteget
Det första analyssteget innebar att kvantifiera de olika geometriska figurera. Till en början beräknades det totala antalet av triangeln, rektangeln respektive kvadraten som återkom i de olika

läroböckerna. Efter det beräknades hur många olika former som återkom för varje geometrisk figur och hur många gånger representationen av det *typiska exemplet* förekom. För varje lärobok beräknades en geometrisk figur i taget i turordningen trianglar, rektanglar och kvadrater. Det här gjordes i två omgångar för att öka reliabiliteten.

Andra analyssteget
Därefter analyserades läroböckerna genom att undersöka *hur* geometriska figurer varieras. Det här gjordes utifrån ett variationsmönster med fokus på två olika dimensioner. Till en början analyserades hur väl uppgifterna i boken syftar till att *kontrastera* ett lärandeobjekt, för att sedan gå tillbaka och göra samma procedur fast genom att analysera hur uppgifter syftar till att *generalisera* ett lärandeobjekt. Det här upprepades för samtliga läroböcker.

5.4 Avgränsningar

I analysen har bara de uppgifter i läroböckerna som behandlar geometri analyserats och dels har inga tredimensionella figurer varit inräknade. Vidare är inte all forskning helt överens om vad som utgör det *typiska exemplet*. Det är inte självklart om bara utseende har betydelse eller om riktningen också spelar roll. Den här studien har i sin tur valt att använd Clements & Sarama (2000) sätt att beskriva de *typiska exemplen* för triangel, kvadrat och rektangel. Det här innebär att de *typiska exempel* för alla tre geometriska figurer ska ha horisontell bas och att skala inte har spelat in när det gäller sidor på triangel och kvadrat. Till exempel är inte en liksidig triangel med ett hörn som bas inräknad. Däremot har rektangelns storlek av sidor varit betydande eftersom det *typiska exemplet* innebär att rektangelns sidor, i det *typiska exemplet,* är två och tre gånger så långa som breda. När de geometriska figurerna i sin tur ska analyseras utifrån variationsteorin behövde ytterligare avgränsningar göras. Analysen utifrån generalisering utgår ifrån att representationerna skiljer sig från varandra och att skala inte har betydelse. Däremot har olika rotationer räknats som olika representationer, eftersom en horisontell bas har betydelse vid identifieringen. Analysen har dessutom utgått ifrån uppgiften och dess syfte, vilket betyder att de har analyserats separat ifrån kapitlet som helhet. En viktig aspekt är också att den här studien använder sju läroböcker, men som benämns som sex olika. Anledningen är att två läroböcker tillhör samma läromedel. I *Koll På Matematiken* kan man möta geometri i både a och b boken, vilket gör att båda används men analyseras utifrån en helhet. Till sists har inga muntliga och praktiska uppgifter analyserats.

5.5 Validitet och reliabilitet

Validitet och reliabilitet är två nyckelbegrepp inom forskning och används för att stärka kriterierna för bedömningen av undersökningen (Bryman, 2016). Validitet handlar om att det som mäts är relevant för studiens syfte. Reliabilitet innebär däremot att det som mäts görs på ett tillförlitligt sätt vilket betyder att mätningen ska innebära att upprepade mätningar av samma syfte ska ge samma resultat (Bryman, 2016). Den här uppsatsen syftar till att analysera det geometriska innehållet i läroböcker. Exempel som gör att studiens validitet ökar är de sex olika läroböcker avsedda för årskurs 1 bildar urvalet - läroböckernas innehåll är således relevant för studiens syfte. För att exempelvis öka reliabiliteten har avgränsningarna varit en viktig betydelse. För att ytterligare studier ska få samma resultat när de kvantifierar de olika *typiska exemplen* i läroböckerna, har det varit viktigt att representationerna av geometriska former följer samma kriterier för ett *typiskt exempel*.

5.6 Etiska överväganden

Vid forskning ska etiska beslut alltid övervägas (Bryman, 2016). Vetenskapsrådet skriver (1990) om etiska frågor som gäller forskning och de grundläggande principer som berör de medverkande. De personer som är direkt inblandande påverkas genom informationskravet, samtyckeskravet, konfidentialitetskravet och nyttjandekravet. Det här är däremot ingenting som den här uppsatsen berörs av och behövt ta ställning till, eftersom läroböcker är det enda material som används. Däremot har de förlag som berörs i studien kontaktas via mail, för att få deras tillåtelse att publicera böckernas bilder som används i resultatdelen.

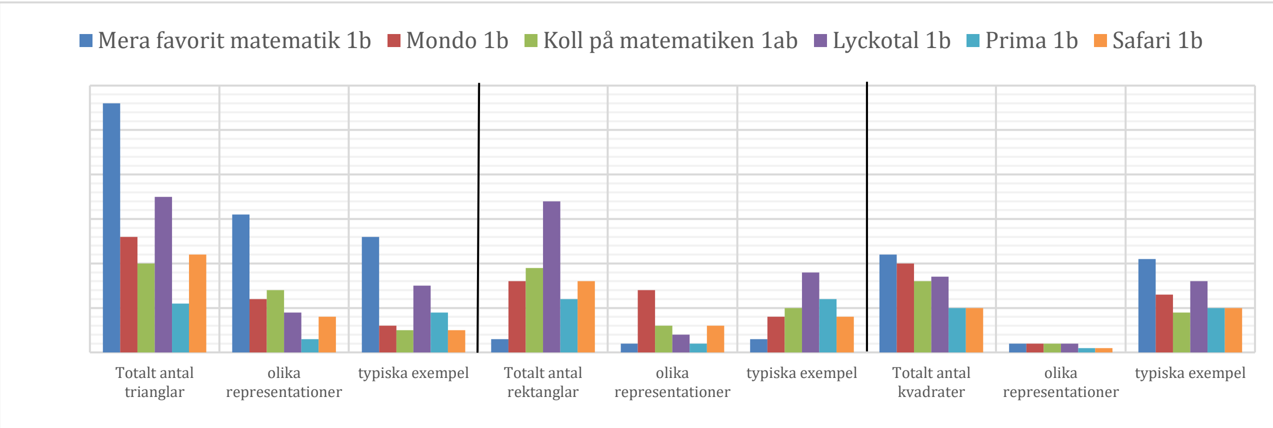
6 Resultat och analys

Studiens syfte är att bidra med kunskap om hur läroböcker utvecklar den geometriska förståelsen. Kommande avsnitt kommer därför presentera antalet olika representationer och *typiska exempel* av triangel, rektangel och kvadrat i sex olika läroböcker. Därefter kommer lärobockernas uppgifter att analyseras utifrån variationsteorin, med syfte att ta reda på vilket sätt läroböcker varierar de tre geometriska figurerna. Således är resultatet uppdelat i två olika delar. Den första delen presenterar antalet olika representationer av former, och i den andra delen presenteras analysen om hur dessa varieras.

6.1 Antal representationer och *typiska exempel*

Genom innehållsanalysen kunde det totala antal av varje geometrisk figur, antalet olika representationsformer och *typiska exemplet* kvantifieras. Det här sammanställdes och presenteras genom ett diagram (se Diagram 1.) med tillhörande tabell (se bifogad Bilaga 2). Varje lärobok kommer i sin tur därefter redogöras mer ingående, innan nästa del av resultatet kommer presentera analysen av på vilket sätt de geometriska figurerna varieras.

Diagram 1.



Här visas det totala antalet av trianglar, rektanglar och kvadrater. Här visas även antalet olika representationer och *typiska exempel* av dessa figurer. Diagrammet är uppdelat i tre delar, en för varje geometrisk figur.

Mera Favorit Matematik 1b

Sammantaget i *Mera Favorit Matematik 1b* får eleven arbeta med geometriska former på sex sidor i totalt 13 olika uppgifter. Under dessa sidor förekommer triangeln 56 gånger varav 6 stycken likbenta trianglar och 20 liksidiga trianglar inklusive en liksidig triangel som fungerar som bildstöd. Rektangeln däremot förekommer totalt tre gånger och representeras med horisontell långsida (en styck) och vertikal långsida (två stycken). Kvadraten i sin tur förekommer totalt 22 gånger där 21 representeras genom det *typiska exemplet*. En kvadrat representeras med ett hörn som bas.

Mondo 1b

Under 11 sidor förekommer totalt 21 uppgifter om geometriska figurer. I dessa uppgifter förekommer totalt 26 stycken trianglar varav sex representeras genom *typiska exempel* (4 stycken liksidiga trianglar och 2 likbenta trianglar) där en används som bildstöd. Rektanglarna representeras i fyra olika former där hälften (8 stycken) av alla totala rektanglar (16 stycken) överensstämmer med det *typiska exemplet* varav en används som bildstöd. 20 stycken kvadrater beräknades genom kapitlet där 13 återkom genom *typiska exemplet* varav en som bildstöd.

Koll på matematiken 1a och 1b
I läromedlet *Koll på matematiken 1a* får eleven via sju uppgifter under fyra sidor lära sig om månghörningar. Trianglarna går under kategorin trehörningar och representeras genom fyra olika figurer under kapitlet varav en figur representeras genom en liksidig triangel. Rektangeln förekommer aldrig i 1a. Kvadraten urskiljs inte från månghörningarna men representeras en gång som ett *typiskt exempel*. I *Koll på matematiken 1b* arbetar eleven med geometriska figurer på fyra sidor i fem uppgifter och triangel, rektangel och kvadrat urskiljs nu från månghörningar. Trianglar förkommer 16 gånger och representeras genom 11 olika former. Det *typiska exemplet* exemplet påträffas fyra gånger varav en som bildstöd (fem liksidiga trianglar). I *Favorit Matematik 1b* får man nu även möta 19 stycken rektanglar genom sex olika representationsformer. Det *typiska exemplet* förekommer tio gånger genom åtta rektanglar med horisontell långsida (varav två som bildstöd) och två rektanglar med vertikal långsida. Slutligen förekommer kvadraterna 16 gånger där totalt nio stycken figurer liknar det *typiska exemplet* varav två är bildstöd. Resterande har hörn som bas.

Lyckotal 1b
I läromedlet Lyckotal 1b får eleven på nio sidor arbeta med geometriska former i totalt 15 olika uppgifter. I boken följer dessutom utklippta formbitar av triangel, rektangel och kvadraten som används genom kapitlet i olika uppgifter. Alla dessa representeras genom *typiska exempel* om man förutsätter att de har en horisontell bas. Däremot i bokens uppgifter förekommer trianglar 35 gånger där den rätvinkliga triangeln utgör största delen (16 stycken). De typiska exemplen av en triangel förekommer 15 gånger (12 liksidiga trianglar och en likbent triangel). Vidare förekommer en rektangel totalt 34 gånger där 18 liknar det *typiska exemplet*. Kvadraten förekommer genom två olika representationer där en kvadrat har ett hörn som bas. Resterande representeras genom det *typiska exemplet*.

Prima 1b
I Prima 1b får eleven genom 4 sidor arbeta med geometriska former i totalt 9 uppgifter. Under dessa sidor beräknas 11 triangelar genom tre olika representationer där det *typiska exemplet* förekom totalt 9 gånger varav tre stycken som bildstöd. Resterande två trianglar representeras genom en rätvinklig triangel och en liksidig triangel med ett hörn som bas. Rektanglar representerades genom det *typiska exemplet* med horisontell långsida (sju stycken varav tre stycken som bildstöd) och med vertikal långsida långsida (fem stycken). Kvadraten förkeommer tio gånger genom det *typiska exemplet*.

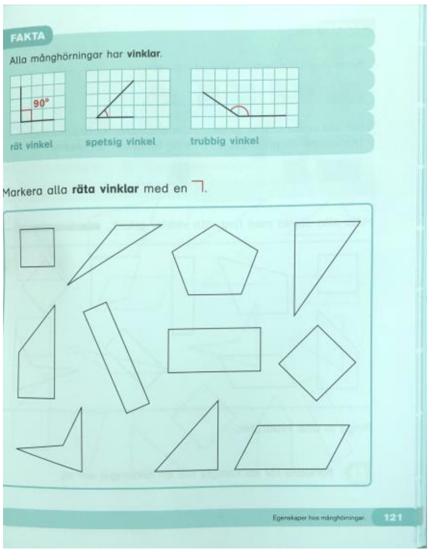
Safari 1a
På två sidor erbjuder *Safari 1a* två uppgifter som behandlar geometriska figurerna. Trianglar beräknas trianglar till 22 stycken. Totalt representeras fem trianglar genom det *typiska exemplet* (fyra stycken liksidiga trianglar varav två som bildstöd). Rektangeln förekommer 16 gånger där det *typiska exemplet* med horisontell långsida påträffas åtta gånger varav två som bildstöd. Kvadraten beräknas totalt 10 gånger där samtliga motsvarar det *typiska exemplet* varav två som bildstöd.

6.2 Variation i dimensioner

För att besvara på vilka sätt triangel, rektangel och kvadrat varieras i läroböcker, har den här studien använt sig utav variationsteorins tre olika sätt att variera ett fenomen, för att nå ett lärandemål - *kontrastering*, *generalisering* och *sammanslagning* (Kullberg, Runesson & Marton, 2017). Analysen kommer utefter dessa dimensioner delas upp i tre olika teman för att synliggöra hur de sex olika läroböcker varierar sina former som representerar de tre olika geometriska figurerna. Slutligen kommer analysen avslutas med ett fjärde tema, där uppgifter ur läroböcker presenteras som helt saknar variation i dimension.

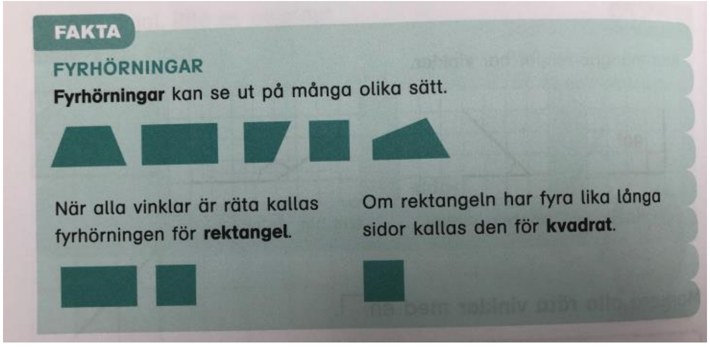
6.2.1 Kontrastering

Resultatet av studien visar att kontrastering är den variation av fenomen som förekommer minst i de läroböcker som använts i studien. Enbart en lärobok, *Mondo 1b*, visar på en tydlig variation där uppgifter syftar till att kontrastera både egenskaper och figurer. I *Mondo 1b* presenteras tre egenskaper hos månghörningar - sida, hörn och vinkel. Efter att sidor och hörn introducerats får eleven därefter ta del av vinklar, som behandlas isolerat från de andra egenskaperna (se Figur 4).



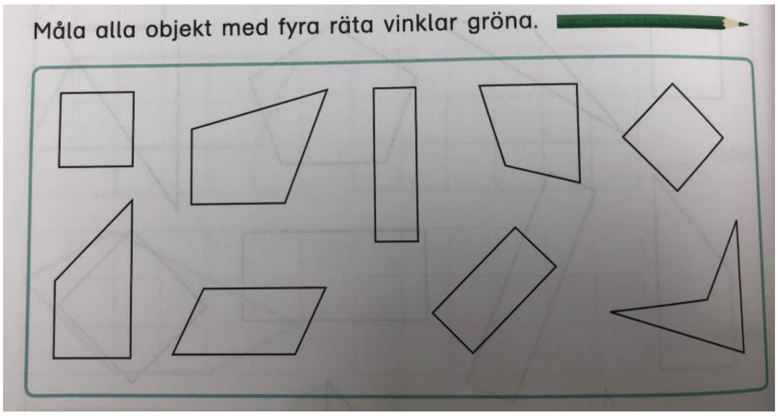
Figur 4. En sida ur Mondo 1b där eleverna arbetar med att lära sig om räta vinklar (Brorsson, Å., 2018, sid. 121).

Det blir här tydligt *vad* som är lärandemålet, vilket skapar möjlighet för att variera det. Genom en liten *faktaruta* får eleven med hjälp av bilder erfara olika vinklar - räta, spetsiga och trubbiga. Därefter ska eleven markera räta vinklar på olika geometriska figurer. Variation i lärande genom kontrastering skapas följaktligen när eleven ska markera räta vinklar på olika representationerna av månghörningar. Det som betecknar att det sker kontrastering är att det inte enbart är en grupp av geometriska figurer med räta vinklar. Även om syftet är att eleven ska öva på vad som är en rät vinkel möjliggörs ett lärande såväl om vad som inte är en rät vinkel - vilket skapar den kontrast som enligt variationsteorin blir variation av ett lärandeobjekt. Dessa räta vinklar blir sedan återkommande i en efterföljande uppgift om fyrhörningar (se Figur 5).



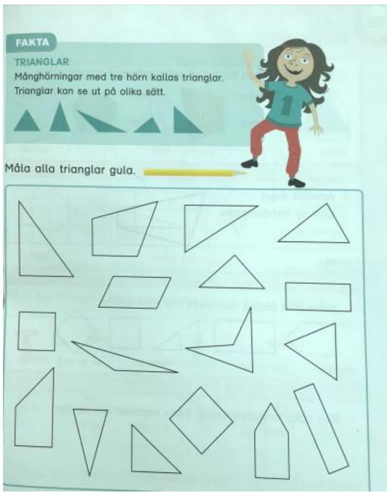
Figur 5. En sida ur Mondo 1b där eleven får kategorisera fyrhörningar (Brorsson, Å., 2018. sid. 122).

Utan att särskilja figurerna från varandra urskiljs de efter vissa egenskaper. Vinklar och sidor förekommer som betydande egenskaper för rektangel och kvadrat, vilket i sin tur ger eleven möjlighet att ta sig från nivå 1 av geometrisk förståelse till nivå 2. I Figur 6 presenteras en uppgift med syfte att redogöra vilka figurer av objekten som är kvadrater och rektanglar. I den här uppgiften får eleverna således en uppfattning om vad som *inte* är en kvadrat och rektangel, genom att kontrastera dem med fyrhörningar som *inte* har räta vinklar. Tidigare kunskap om vad som är en rät vinkel får här en viktig och avgörande betydelse. Genom att representera figurerna i olika vinklar utmanas även elevens förståelse, att förstå att geometriska figurer inte behöver ha en horisontell bas likt det *typiska exemplet*.



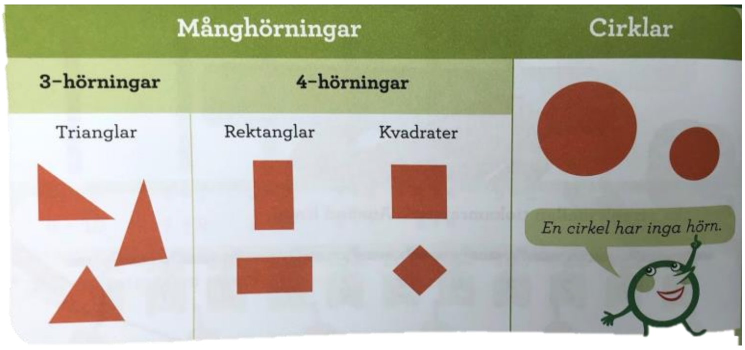
Figur 6. En uppgift ur Mondo 1b där eleven lär sig en av rektangelns och kvadratens egenskaper (Brorsson, Å., 2018, sid. 122).

På liknande sätt får eleven sedan i *Mondo 1b* möta trianglar, men istället för att särskilja räta vinklar från vinklar som inte är räta, ska nu trianglar särskiljas från månghörningar genom sina hörn. Eleven blir tvungen att reflektera och kontrastera över vad som karaktäriserar en triangel bland geometriska figurer genom att jämföra triangelns egenskaper med figurer som inte är en triangel, så som i uppgiften i Figur 1. Återigen blir det tydligt hur *Mondo 1b* arbetar med ett lärandeobjekt åt gången, för att skapa kontrast med hjälp av andra objekt.



Figur 7. En sida ur Mondo 1b där eleven får lära sig om trianglar och hörn (Brorsson, Å., 2018, sid. 123).

Som tidigare nämnts erbjuder inte samtliga läromedel uppgifter som skapar variation genom att kontrastera. I *Koll på matematiken 1b* förekommer däremot en faktaruta som kontrasterar ett lärandeobjekt.

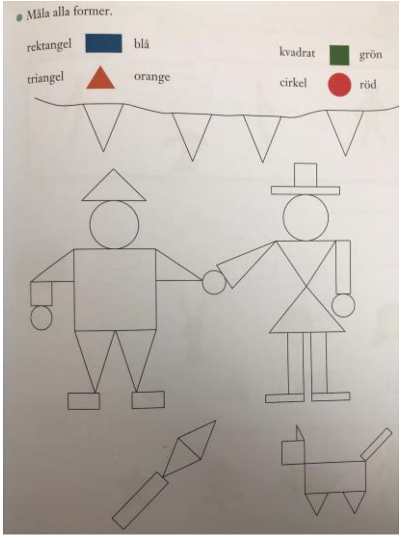


Figur 8. En Faktaruta i Koll På Matematik 1b som kategoriserar månghörningar i kontrast med en cirkel (Almström, H., & Tengvall, P., 2015, sid. 18).

I faktarutan presenterar olika geometriska figurer. För att urskilja en egenskap som karaktäriserar månghörningar används en cirkel. Kontrast framkommer genom att hörn blir ett lärandeobjekt, och genom att visa figurer och karaktärisera dem efter antal hörn de har, skapas sedan kontrast när en figur som inte har hörn används – cirkeln. Trots att eleverna aktivt inte får arbeta med det här i kommande uppgifter, så uppmanar *Koll På Matematiken 1b* till att kontrastera vad som är ett hörn, genom att visa vad som inte är ett hörn.

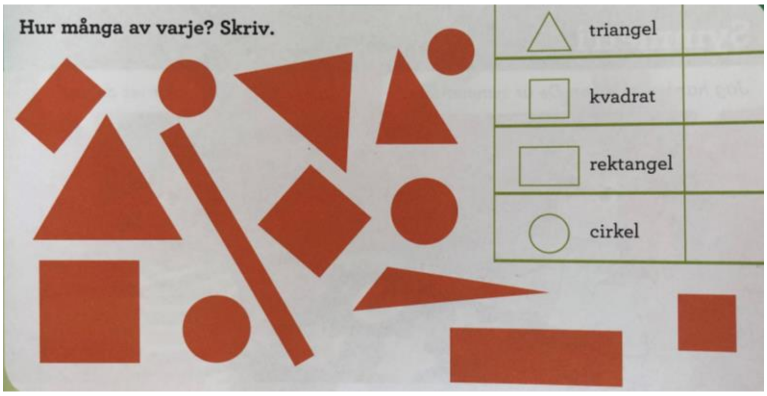
6.2.2 Generalisering

Betydligt mer av de läroböcker som används i studien erbjuder variation genom generalisering. Läroböcker erbjuder flera olika representationer av former genom hela kapitlet men studien utgår från att avgränsa analysen till hur *enskilda uppgifter* varierar geometriska figurer genom generalisering. Det visar sig då, att de mest förekommande uppgifter som varieras genom generalisering går ut på att dra streck, räkna eller färglägga triangel, rektangel, kvadrat och cirkel bland en grupp geometriska former. I *Safari 1a* utgörs ett sådant exempel som visas i Figur 9.



Figur 9. En sida ur Safari 1a där eleverna får generalisera geometriska figurer (Falck, P., Elofsdotter Meijer, S., & Picetti, M., 2011, sid. 55)

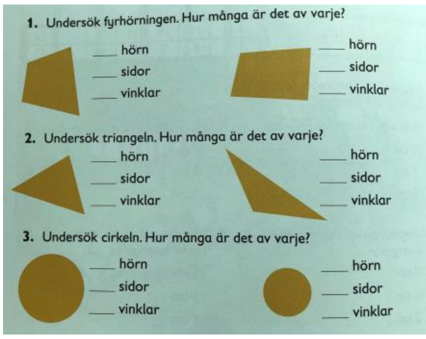
I figur 9 exemplifieras det hur matematikböckerna i urvalet varierar geometriska figurer genom att generalisera. I dessa uppgifter behöver eleven identifiera trianglar, kvadrater och rektanglar genom att hitta ett mönster för vad som karaktäriserar de olika geometriska figurerna, eftersom de skiljer sig i utseende - dels från varandra, dels från bildstödet. Det här gör eleverna på liknande sätt i *Koll på matematiken 1b* (se figur 10), fast de där istället ska räkna dem bland en grupp olika geometriska former.



Figur 10. En uppgift ur Koll På Matematiken 1b som syftar till att generalisera olika geometriska figurer (Almström, H., & Tengvall, P., 2015, sid. 19).

Bland ett antal geometriska figurer med olika representationsformer, blir eleven tvungen att urskilja dem från varandra genom att jämföra dem med bildstödet. Ännu en liknande uppgift går även att finna i *Favorit matematik 1b.* Genom att räkna fyrhörningar såväl som trianglar med olika representationer i en grupp geometriska figurer, krävs det att eleven kan uppfatta karaktärsdrag, eftersom samtliga skiljer sig i utseende. Det finns ingen representation i den samlade gruppen av en triangel eller fyrhörning som är lik en annan. På så sätt varieras dessa geometriska figurer, genom deras representationer av olika former och vinklar, och anträffbara mönster genom variation möjliggörs.

I *Safari 1a*, *Favorit matematik 1b* och *Koll på matematiken 1a* är flera uppgifter utformade genom att samtliga geometriska figurer ska urskiljas bland alla olika objekt. I *Mondo Ib* förekommer en uppgift som syftar till att enbart triangeln ska urskiljas (se figur 7). Förutom att triangeln kontrasteras med hjälp av andra geometriska figurer, så varieras även triangeln genom generalisering. Eleven får till en början erfara trianglar i olika representationer i en faktaruta. Det här syftar till att skapa förståelse att triangeln kan se olika ut, utan att byta innebörd. Eleven ska sedan i uppgiften kunna identifiera olika trianglar oavsett om de liknar deras visuella prototyp eller de trianglar som representeras i faktarutan. Eleven behöver därför ifrågasätta och hitta ett mönster för vad som är en triangel, samtidigt som hon utmanas till att förstå vad som *inte* är en triangel. Återigen blir variationsteorin ännu mer tydlig i läromedlet *Mondo 1b* när trianglar behandlas som det enda lärandeobjektet. Det går även att finna i en uppgift i *Mera Favoritmatematik 1b*. Inledningsvis i *Favorit matematik 1b* introduceras tre typiska egenskaper för fyrhörningar och trianglar - vinkel, sida och hörn. Dessa demonstreras på geometriska figurer genom att pilar pekar mot motsvarande fenomen. Det här utvecklar en förståelse för när eleven i följande tre uppgifter i Figur 11 ska räkna dessa fenomen på olika representationer av geometriska figurer.



Figur 11. Uppgifter ur Favorit Matematik 1b som syftar till att generalisera olika geometriska figurer (Haapaniemi, S., Mörsky, S., Tikkanen., Vehmas., & Voima, J., 2018, sid. 146).

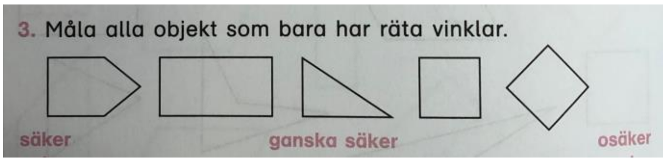
Det som varieras i uppgifterna är inte figurens egenskaper utan formen som figurerna representeras genom. I varje uppgift utmanas eleven således att se ett mönster i figurernas utseende men att dessa trots det, kan skilja sig i formen. Dessutom skiljer sig de geometriska figurerna från de *typiska exemplen* vilket också ökar lärandet för att kunna karakterisera figurerna oavsett utseende.

6.2.3 Sammanslagning

Det är inte helt lätt att analysera huruvida läroböcker erbjuder sammanslagning, då det kräver att eleven tillhandahållit all tidigare kunskap av variation av dimensionerna för lärandemålet. Det vill säga att läroboken har skapat kontrast och generalisering av ett lärandeobjekt. Analysen visar därför att sammanslagning inte kommer kunna ske i samtliga böcker. Däremot ingår det i flera läroböcker en eller två sidor som syftar till att repetera de nya kunskaperna och ta reda på hur väl eleven behärskar dem. Det här går att se i *Mondo 1b*.

Figur 12. Uppgift hur Mondo 1b där eleverna får i en minikoll, ta reda på hur väl de behärskar sina nya kunskaper (Borsson, Å., 2018, sid. 124).

Mondo 1b är den lärobok som erbjuder både kontrastering och generalisering vilket betyder att eleven även kan möta dimensionen sammanslagning. Uppgiften i Figur 12 skulle kunna vara en sådan uppgift, där sammanslagning faktiskt kan synliggöras. Här får eleven träna på att både urskilja olikt antal egenskaper, vilket betyder att eleven måste tillhandhållit vad som är en sida och ett hörn, samtidigt som figurerna byter utseende. Ändå är samtliga figurer en månghörning. Däremot hade uppgiften skapat ännu mer kontrast genom att ha med en cirkel som varken har hörn eller sidor. Då skulle en sammanslagning bli extra tydlig. På samma sida kan man hitta ytterligare en uppgift som kan antyda till en sammanslagning.

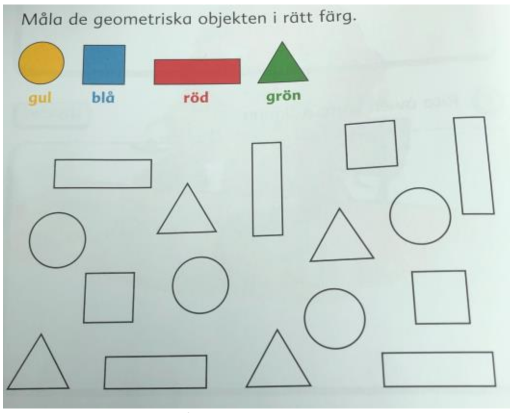


Figur 13. Uppgift hur Mondo 1b där eleverna får i en minikoll, ta reda på hur väl de behärskar sina nya kunskaper (Borsson, Å., 2018, sid. 124).

I figur 13 får följaktligen eleverna urskilja räta vinklar på objekt. Det vill säga att eleven behöver kontrasterar räta vinklar med vinklar som inte är räta. Det här förutsätter att eleven vet vad en rät vinkel är, vilket i tidigare uppgift eleven fått träna på. Samtidigt som dessa räta vinklar ska urskiljas, får eleven också erfara att figurerna skiljer sig i utseende. En rät vinkel i en figur behöver således inte ha horisontell bas som i den sista figuren i ledet. Här skulle det med andra ord kunna ske en sammanslagning, men som tidigare nämnts förutsätter det också att eleven tillhandhållit tidigare kunskap vid kontrastering och generalisering.

6.2.4 När variation i dimension saknas

Studien resulterade i att det mer eller mindre skapas variation av minst en dimension i drygt hälften av de olika läroböcker som använts i studien. I de andra läroböckerna förekommer det ingen eller väldigt lite variation. Uppgifterna i dessa läroböcker syftar desto mer till att öka geometrisk förståelse genom att jämföra geometriska figurer med en prototyp, som representeras genom det *typiska exemplet*. Dessa läroböckerna låter eleverna träna på sin förståelse genom att jämföra geometriska figurer med en prototyp.



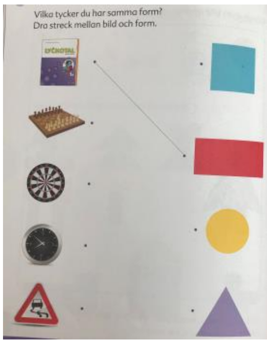
Figur 14. Uppgift i Prima 1b (Brorsson, Å., 2014, sid. 32).

Uppgiften i figur 14 går att hitta i *Prima 1b*. Utifrån analysen kan varken kontrastering eller generalisering påträffas. Uppgiften syftar således till att identifiera geometriska objekt genom att jämföra den med en prototyp. Till en början representeras denna prototyp genom det *typiska exemplet*. Följaktligen representeras de geometriska figurer som ska identifieras *också* genom det *typiska exemplet*. Det enda som skiljer sig i representationerna av figurerna är att rektangel både har horisontell och vertikal långsida. Här får eleverna således enbart erfara den representation som de redan visualiserat.

I läroboken *Lyckotal 1b* tillkommer konkret material. Dessa utklippta materiella bilder på geometriska figurer, syftar till att användas i flera uppgifter som är utformade för praktiskt arbete. Genom att använda bilderna får eleven i olika uppgifter lägga dem så de liknar olika kreationer (se Figur 15).

Figur 15. Uppgift ur Lyckotal 1b (Häggblom, L., & Hartikainen., 2012, sid. 78).

Utifrån analysen skapas det i uppgiften (se Figur 15) ingen variation, varken genom kontrastering eller generalisering. Elevernas får i likhet med *Prima 1b* utveckla sin geometriska förståelse genom att jämföra det konkreta materialet med bilderna i boken, som representeras med exakt samma form (och färg). Variation genom generaliseringen förekommer därför enbart genom att ändra riktning på figurerna. Däremot representeras dessa genom de *typiska exemplen,* vilket gör att eleverna inte får erfara olika former av geometriska figurer. Figurerna kan istället därför upplevas av barnen som sneda, upp-och-ner, smalare, etc., eftersom de fortfarande enbart behöver utgå från det *typiska exemplet* som prototyp. Förutom praktiska uppgifter med materiella bilder finns ytterligare en uppgift i *Lyckotal 1b* som visar exempel på det här.



Figur 16. Uppgift ur Lyckotal 1b där eleven ska utifrån egna verkliga föremål känna igen geometriska figurer (Häggblom, L., & Hartikainen., 2012, sid. 80).

I uppgiften ska eleven identifiera geometriska figurer med en annan uttrycksform. Det skapas således ingen variation om vad som *inte* är ett visst fenomen. Eftersom flera uppgifter utgår ifrån samma representationsformer som det konkret materialet, är därför generaliseringen fortfarande begränsad.

7 Resultatdiskussion

Den här uppsatsen avser att bidra med kunskap på vilka sätt läroböcker ökar den geometrisk förståelsen. För att ta reda på det har studien kvantifierat och analyserat hur geometriska figurer presenteras och hur de varieras. Huvudresultatet av analysen visade att läroböckerna använder flera olika representationer av geometriska figurer. Det som också framkommer i studien är att, trots att representationer på icke *typiska exempel* förekommer, så är det inte alltid i en stor utsträckning. Det *typiska exemplet* är följaktligen, i enlighet med tidigare forskning (Shauhnessy & Burger, 1985), vanligt förekommande i läroböcker. *Typiska exempel* utgör i två av läroböcker den större delen (se Bilaga 2) av formens representation på de geometriska figurerna. Studien visar även att flera läroböcker varierar representationer av geometriska figurer, men vad som varieras skiljer sig åt läroböckerna. I enstaka fall går det att urskilja *kontrastering, generalisering* och *sammanslagning,* medan ingen av variationsteorins dimensioner är synliga i två av läroböckerna. Analysen visar därför indikationer på att läroböcker skiljer sig i koppling till van Hieles nivåer. Enbart i vissa läroböcker betonas geometriska figurernas egenskaper. Dessa utgör en viktig kunskap för att kunna ta sig till den andra nivån av geometrisk förståelse (van Hiele, 1984). Studien indikerade även på ett samband mellan de böcker som saknar variation i dimension, och de som har flest *typiska exempel.* Samma läroböcker hade dessutom färre antal representationsformer. Utifrån van Hieles teori (van Hiele, 1984) får dessa elever inte samma förutsättningar att utveckla sin geometriska förståelse om de enbart använder läroboken. Utifrån resultatet aktualiseras frågan; hur likvärdig blir egentligen elevernas utveckling av den geometriska förståelsen, i relation till den lärobok de använder?

Variation av ett lärandeobjekt

Studiens resultat visar att det finns en märkbar skillnad gällande variationen av representationsformer i de läroböcker som analyserats. För att utveckla förståelse av geometriska figurer använde sig den här studien av variationsteorins sätt att variera ett fenomen. Utifrån analysen blev variation i dimension dock inte alltid synligt i alla läroböcker som analyserades. Att således använda uppgifter med avseende att identifiera en figur genom att känna igen den utefter en liknande prototyp, leder utifrån variationsteorin inte till att kritiska aspekter synliggörs. Det eleven syftar till att utveckla i de böcker som saknar variation, är därför att kunna namnge det *typiska exemplet*. Ett annat resultat av analysen är att samma läroböcker som saknar variation i dimensioner, även har minst antal representationer av former på de geometriska figurerna. I enlighet med van Hieles teori (van Hiele, 1984) leder inte det här till en utveckling i geometrisk förståelse. Barnet som befinner sig på nivå ett får inga möjligheter att nå nivå två utifrån läroboken, eftersom egenskaperna aldrig urskiljs.

Tidigare forskning (Clements & Samara, 2000) indikerar på att eleven i sin omvärld erfar ett begränsat antal av olika former som representerar triangel, rektangel och kvadrat. Om eleverna i skolans värld inte utvecklar geometrisk förståelse och kan identifiera figurerna efter deras karaktärsdrag, kan man befara att de eleverna får liknande i enlighet med tidigare studier (c.f Shauhnessy & Burger, 1985), svårt att identifiera icke *typiska exempel.* Eleven kan då få till exempel få svårare att identifiera trianglar som skiljer sig genom riktning och form utifrån det *typiska exemplet* än om det *typiska exemplet* inte har hela sidor precis som i Satlow & Newcombe studie (1998) - vilket inte är matematiskt korrekt. I enlighet med det här blir en av uppgifterna (se Figur 15) intressant, där syftet var att para ihop geometriska figurer med verkliga föremål. En bok, en klocka och ett schackbräde användes bland annat som verkliga föremål som liknar de geometriska figurerna. Det som också användes som ett verkligt exempel på en geometrisk figur, var en triangulär trafikskylt - med rundade hörn. Det blir tydligt här hur alla-karaktärsdrag som identifierar triangeln inte synliggörs, eftersom vinklar saknas. Ändå identifieras den som en triangel. Däremot finns en möjlig tolkning att uppgiften i läroboken syftar till att skapa ett lärande genom att känna igen figuren utifrån elevens egna erfarenheter. I enlighet med det här får de *typiska exemplen* en vidare betydelse.

Att lära genom tidigare erfarenheter
Synen på lärandet och didaktiken har haft många ansikten under åren och ett utav dem är pragmatismen. Dewey, som var en central forskare inom pragmatismen, betonade vikten av kopplingen mellan undervisning och elevens egna erfarenheter.

> Att organisera en undervisning så att barnet kan bygga vidare på sina erfarenheter är pedagogens främsta uppgift (Säljö, 2012, sid. 181).

Utifrån vad Säljö (2012) skriver menar Dewey att undervisningen ska bidra till att erfarenheterna från vardagen knyts ihop med en fördjupad förståelse, istället för att skapa en klyfta mellan skolans vardag och barnets egna upplevelser (Säljö, 2012). I enlighet med pragmatismen får således det *typiska exemplet* en annan innebörd i läroböckerna. I Hannibals studie (1999) är TV, spel och tidningar faktorer som introducerar barn till geometri. Enligt Clements & Sarama studie (2000) använder majoriteten av nämnda arenor det *typiska exemplet* som form när geometriska figurer representeras. Idag har dessutom den digitala världen tagit allt större plats i barnets liv och möjligen representeras geometriska figurerna på samma sätt via de appar som används. När barnet kliver in i skolans värld, blir därför det *typiska exemplet* en del av barnets tidigare erfarenheter, och det som pragmatismen menar skapar ett gynnande lärande. I enlighet med det här, skulle det kunna förklaras varför läroböcker tillämpar de *typiska exemplen* för att befästa ett lärande. När eleven kan koppla namn med figur kan eleven då fördjupa sin förståelse för geometri. Däremot återstår frågan*: vad* det är som befästs när eleven kan namnge det *typiska exemplet*? Möjligen en bestämd prototyp. I en av läroböckerna (se exempelvis figur 13) blir det tydligt att eleven efter uppgifterna fått möjlighet att namnge *typiska exempel*. Däremot får eleven aldrig erfara olika representationer och därför inte behöva urskilja några egenskaper. Hur vet då eleven att en triangel inte behöver ha en horisontell bas? Leder verkligen uppgifter som enbart utgår från elevens tidigare erfarenhet till att de kommer kunna namnge *alla* geometriska objekt - oavsett utseende? I enlighet med tidigare litteraturbakgrund (c.f Shauhnessy & Burger, 1985) blir slutsatsen att det här kan leda till svårigheter för att identifiera icke *typiska exempel*.

Läromedelsmarknaden
Sammantaget vilar den här uppsatsen på en innehållsanalys av läromedel i koppling till variationsteorin. Urvalet bestod av sex olika läromedel i matematik, samtliga med en förankring i lgr 11. Det betyder således att det innehåll som läroboken förmedlar är avsett för att främja samma förmågor som står i kunskapsmålen får årskurs 3;

> Dessutom kan eleven använda grundläggande geometriska begrepp (...) för att beskriva geometriska objekts egenskaper (Skolverket, sid. 60).

Utifrån min analys undrar jag om alla elever får samma förutsättningar att nå det här kunskapskravet om de arbetar med olika läroböcker. Denna studie visar på att läroböcker i första året på grundskolan skiljer sig både genom *hur* geometriska figurer varieras och *vad* som varieras. I vissa böcker låg det fokus på geometriska figurers egenskaper medan dessa nämndes i andra. Utifrån den här aspekten blir en vidare fråga om dagens elever får en likvärdig utbildning. Vad händer om barnet byter skola och lärobok inför kommande år? Vilka kunskaper går eleven miste om, eller vilka utmaningar kommer eleven behöva ta sig an beroende på vilken lärobok som används? Det här får även en vidare betydelse utifrån Van Hieles teori (1984), där utveckling av geometrisk förståelse inte kan hoppa över nivåer, och där språket har en viktig betydelse. Utöver kunskapskravet som läroböcker säger sig utgå ifrån vore det även önskvärt att läroböcker grundades sig på vetenskap. Jag tror att vi i sådana fall hade sett färre *typiska exempel* och mer variation i dimensioner av geometriska figurer. Fast likväl som lärare undervisar på olika sätt är det möjligen inte konstigt att också läroböcker skilja sin pedagogik för att framställa det matematiska innehållet. Dessutom måste det finnas skillnader i läromedel, för att de ska kunna utgöra en marknad. Hade samtliga läromedel varit utformade på samma sätt, med identiskt innehåll och samma typ av teorier, försvinner marknadens syfte. Frågan är bara för vem marknaden egentligen är avsedd för; läraren, eleven eller förlaget?

7.2 Metoddiskussion

Uppsatsen har som syfte att bidra med kunskap hur läroböcker utvecklar den geometrisk förståelse för att öka förmågan att kunna karaktärisera geometriska figurer. I studien användes läroböcker för årskurs 1, men urvalet behövde däremot begränsas och förhålla till sig ett rimligt antal av läroböcker i tanke på till den begränsade tidsramen för studien. En viktig aspekt att ta hänsyn till är därför att dessa läroböcker inte utgör hela bilden. För att uppsatsen skulle få en högre validitet hade det således varit önskvärt med ett större antal läroböcker för årskurs 1. behövts användas. Slutligen gällande valet av läroböcker finns en viktig aspekt att påpeka. I och med att samma läromedel publicerar läroböcker i flera åldrar, kan det finnas en tydlig progression som studien utelämnar. De läroböcker som visar på lågt antal olika former, kan således öka den i högre åldrar, vilket inte denna studie kan påvisa.

Studien vilar på en innehållsanalys som använder variationsteorin för att synliggöra figurers variation i läromedel. Utifrån variationsteorin formades frågor som innehållsanalysmetod för att synliggöra aspekter för att räkna, tolka och jämföra innehållet, vilket skapade betydelsefulla diskussioner. Däremot är analysen tolkad av mig själv, vilket tyder på att den kan skilja i uppfattning, eftersom människor upplever och tolkar på olika sätt (Bryman, 2012). För att öka reliabiliteten hade det därför varit bra om ytterligare en person kunnat analysera utifrån intervjufrågorna. Det hade att ökat trovärdigheten av resultatet. I studien bör även en medvetenhet finnas att jag enbart utgår från enskilda uppgifter, medan variation i dimensioner kan upplevas genom att företräda flera uppgifter. I och med det är det möjligt att jag missat lärobokens intentioner att skapa variation i dimension. Ett exempel av detta kan exemplifieras i Figur 13, där sida, hörn och vinkel ska beräknas på trehörningar, fyrhörningar och cirklar i olika uppgifter. Genom att kontrastera en cirkel med de andra figurerna, skapas kontrast till vad som är en sida, hörn och vinkel. Däremot förutsätts det här också att eleven jämför uppgifterna med varandra, och att läraren i sin tur har ett ansvar att belysa den här aspekten.

Studien besvarar forskningsfrågorna, men i enlighet med den tidigare forskningen utelämnas två viktiga aspekter, som kommer påverka studiens validitet. Dels elevresultat som kan stärka om eleverna i enlighet med böckernas olika mängd variationer, hade visat på olika kunskapsnivåer. Finns det en tydlig koppling hade även vikten av lärobokens innehåll blivit ännu mer påtaglig. Slutligen blir lärarens roll den sista aspekt som har betydelse för validiteten. Trots att läroboken utgör en stor del av undervisningen, går det inte att undgå lärarens betydande roll i klassrummet. Hur läraren undervisar och förhåller sig till läroboken, och vilken kunskap läraren har om hur barnets geometriska förståelse utvecklas, kommer påverka hur väl eleverna utvecklar sin geometriska förståelse.

8 Slutdiskussion

Läroboken har sedan flera år tillbaka varit en viktig komponent i vårt skolväsen. Inte minst i matematik har den präglat planering och undervisning, och jag ser inga tecken på att den trenden ska försvinna. Möjligen tvärtom, eftersom tid hos många lärare är en viktig fråga, som jag av egen erfarenhet ses som en bristvara i dagens skolväsen. Att luta sig mot en lärobok blir därför en räddning i många fall för att planera undervisningen, men främjar den alltid elevernas lärande? En lärobok som inte varierar representationer av geometriska objekt, ger utifrån litteraturbakgrunden (c.f Shauhnessy & Burger, 1985) inte samma förutsättningar för eleven att identifiera icke *typiska exempel*. Det behöver inte betyda att elevernas slutliga resultat kommer skilja sig, men det understryker lärarens ansvar och egen profession. Om en lärare inte är medveten om den geometriska förståelsen, kan det lätt bli lärobokens pedagogik som styr undervisningen. Därför är det viktigt att läraren själv har kunskap om utvecklingen av den geometriska förståelsen, för att kunna anpassa undervisningen ifall läroboken saknar variation och icke *typiska exempel* i sitt upplägg. Det är också viktigt att läraren är medveten om var i den geometriska utvecklingsfasen eleven befinner sig, och hur förståelse sedan ska vidareutvecklas. Det här kanske lärare förutsätter att läroboksförfattaren haft i åtanke, men den här studien indikerar att så inte alltid är fallet. Vad säger det här om läroböckernas författare och hur mycket kan vi lita på deras kunskap? Detta är dessutom en liten bråkdel av läroböckerna. Mina funderingar efter denna studie är hur resterande ämnesområden inom matematiken ser ut i läroböckerna. Hur förhåller de sig till den vetenskapliga grunden? Med detta växer vikten av att läraren har en professionell och kritisk hållning till läroböcker, liksom vikten av egen kunskap av den matematiska utvecklingen.

8.3 Slutsats

Den här studien har som syfte att ta reda på hur läroböcker ökar den geometriska förståelsen, med avseende att studera hur läroböcker representerar och varierar geometriska figurer. Inom geometrin i de läroböcker som undersökts, visar studien att representationer varieras i flera böcker, när det gäller formen av de geometriska figurerna, där representationer genom icke *typiska exempel* är inkluderade. Studien visar dock på, att om en lärobok har icke *typiska exempel*, kan representationer av formen på figurer ändå vara ensidiga. Det är alltså inte självklart att representationen av formen på figurerna har stor omväxling för att det finns icke *typiska exempel*. Emellertid finns det en skillnad mellan läroböckerna. Genom att analysera geometriska figurer med hjälp av variationsteorin, kunde studien visa på att läroböcker i matematik för årskurs 1 har olika upplägg. Enbart några av läroböckerna använde sig av icke *typiska exempel* i stor utsträckning. Där betonades då även figurernas egenskaper för att hjälpa eleven att utveckla geometrisk förståelse. Utifrån det kan eleven sedan identifiera geometriska figurer efter deras egenskaper. I de andra böckerna verkade denna medvetenhet saknas. I samma böcker som till större delen använde de *typiska exempel*, saknades även urskiljning av egenskaper. Detta medför att om eleven enbart använder dessa läroböcker, kan de utifrån van Hieles teori få svårt att utveckla kunskaper som tar dem till nästa nivå av geometrisk förståelse.

8.2 Förslag på framtida forskning

Ett intressant uppslag är att följa upp denna studien med elevresultat, efter att elever arbetat med de olika uppgifterna i läroböckerna som används i studien. Detta skulle man till exempel kunna följa upp med olika uppgifter där figurer som varieras i representantsformer ska identifieras. Här skulle man då kunna se i vilken omfattning eleven klarar av att identifiera icke *typiska exempel*, och på sätt kanske kunna stärka den här studies validitet. Här behöver det dock även finnas en medvetenhet om att även lärarens undervisning påverkar elevens kunskaper.

Den här studien har enbart fokuserat på hur läroböcker ökar den geometriska förståelsen. När det visade sig vara stora skillnader mellan hur läroböckerna presenterar geometri, väcks frågan: hur ser det ut i de andra matematiska momenten? Med tanke på resultatet av studien, finns det ett behov av att studera läroböcker mer djupgående, om läroböcker fortsättningsvis kommer vara en nyckelkomponent i grundskolans undervisning. Därför skulle det vara av intresse att även studera andra matematiska moment i läroböckerna, och deras upplägg i koppling till forskning rörande elevens lärandeprocesser.

8 Referenser

Almström, H., & Tengvall, P. (2014). *Koll på Matematiken 1A*. Stockholm: Sanoma Utbildning.

Almström, H., & Tengvall, P. (2015). *Koll på Matematiken 1B*. Stockholm: Sanoma Utbildning.

Aslan, D & Arnas, Y. (2007). Three- to six-year-old children's recognition of geometric shapes. *International Journal of Early Years Education, 15*(1). 83-104. Doi: 10.1080/09669760601106646.

Brorsson, Å. (2018). *Mondo matematik* 1B. (2). Malmö: Gleerups utbildning.

Brorsson, Å. (2014). *Prima matematik 1B.* (2). Malmö: Gleerups utbildning.

Bryman, A. (2016). *Samhällsvetenskapliga metoder*. Stockholm: Liber.

Clements, D & Samara, J. (2000). Young children's ideas about geometric shapes. *Teaching Children Mathematics, 6*(8). 482. Hämtad från https://search-proquest-com.ezproxy.ub.gu.se/docview/214138896?accountid=11162

Denscombe, M. (2018). *Forskningshandboken. För småskaliga forskningsprojekt inom samhällsvetenskaperna.* Lund: Studentlitteraur.

Falck, P., Elofsdotter Meijer, S., & Picetti, M. (2011). *Matte Direkt Safari 1A.* (2). Stockholm: Bonnier Utbildning.

Gennow, S., & Wallby, K. (2010). *Geometri och rumsuppfattning - med Känguruproblem*. Göteborg: NCM Nämnaren.

Haapaniemi, S., Mörsky, S., Tikkanen., Vehmas., & Voima, J. (2018). *Mera Favorit Matematik 1B*. Lund: Studentlitteratur.

Hannibal, M. (1999). Young children's developing understanding of geometric shapes. *Teaching Children Mathematics*, *5*(6). 353. . Hämtad från https://search-proquest-com.ezproxy.ub.gu.se/docview/214139659?accountid=11162

Hasegawa, J. (1997). Concept formation of triangles and quadrilaterals in the second grade. *Educational Studies in Mathematics, 32*(2), 157-179. Doi: 10.1023/A:1002923229779.

Heikka, L. (2015). *Matematiklärarens målkommunikation*. (Litentatsuppsats, institutionen för konst, kommunikation och lärande, Luleå) Hämtad från: http://ltu.diva-portal.org/smash/get/diva2:990282/FULLTEXT03.pdf

Häggblom, L., & Hartikainen., (2012). *Lyckotal Grundbok 1A*. Malmö: Gleerups Utbildning.

Johansson, M. (2006). *Teaching Mathematics with textbooks*. (Doktorsavhandling, institutionen för matematik, Luleå). Hämtad http://ltu.diva-portal.org/smash/get/diva2:998959/FULLTEXT01.pdf

Johnsen, E.B., Selander, S., & D. Skjelbred. Nationalencyklopedin. (1993/2004). Läromedel. Hämtad 19-10-05 från https://www.ne.se/uppslagsverk/encyklopedi/lång/läromedel

Kullberg, A., Runesson, U., & Marton, F. (2017). What is made possible to learn when using the variation theory of learning in teaching mathematics?. *ZDM Mathematics Education, 49*(4). 559–569. Doi: 10.1007/s11858-017-0858-4.

Löwing, M. (2011). *Grundläggande geometri*. Lund: Studentlitteratur.

Marton, F & Booth, S. (1997). *Learning and Awareness*. Routledge Member of the Taylor and Francis Group.

Marton, F., & Fai Pang, M. (2006). On Some Neccecary Condition of Learning. *The Journal of the Learning Sciences. 15*(2). 193-220. DOI: 10.1207/s15327809jls1502_2.

Okeeffe, L. (2013). A Framework for Textbook Analysis. *Mathematics Learning Centre. 1*. 1-13. DOI: 10.12785/irclr/020101

Runesson, U. (1999). *Variationens pedagogik. Skilda sätt att behandla ett matematiskt innehåll. (Doktorsavhandling, Göteborgs universitet, Göteborg).*

Satlow, E & Newcombe, N. (1998). When is not a triangle a triangel? Young children’s developing concepts of geometric shape. *Cognitive development*, *13*(4). 547-559. Doi: 10.1016/S0885-2014(98)90006-5.

Shauhnessy, M & Burger, W. (1985). Spadework Prior to Deduction in Geometry. *The mathematics teacher*, *78*(6). 419-428. Hämtad från https://www.jstor.org/stable/i27964558

Skolverket (2011). *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet 2011. S*tockholm: Skolverket. Finns tillgänglig på:

Stols, G. (2012). Does the us of technology a difference in the geometric cognitive growth of pre-service mathematics teacher? *Australasian Journal of Educational Technology*, *28*(7). 1233-1247. Doi: 10.14742/ajet.799.

Säljö, R. (2012). Lärande och elevers utbildning. I C, Liberg, U.P, Lundgren & R, Säljö. *Lärande*, *skola*, *bildning*. (s.139–199). Stockholm: Natur & Kultur

Ümmühan Yesil, D & Erdogan, H. (2015). Young Children's Conceptual Understanding of Triangle. *EURASIA Journal of Mathematics*, *Science & Technology Education*, *12*(2). 189-202. DOI: 1305-8223.

van Hiele, P. M. (1984). A child's thought and geometry. I D. Fuys, D. Geddes, & R. Tischler (Red.), *English translation of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and P. M. van Hiele* (pp. 243-252). Brooklyn: Brooklyn College. (Orginaldokumentet på franska: La pensee de 1'enfant et la geometrie, Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathematiques de l'Enseignment Public. 1959, 198, 199-205).

Vetenskapsrådet. (1990). *Forskningsetiska principer inom humanistisk-samhällsvetenskaplig forskning.* Hämtad 19-05-22 från http://www.codex.vr.se/texts/HSFR.pdf

Bilagor

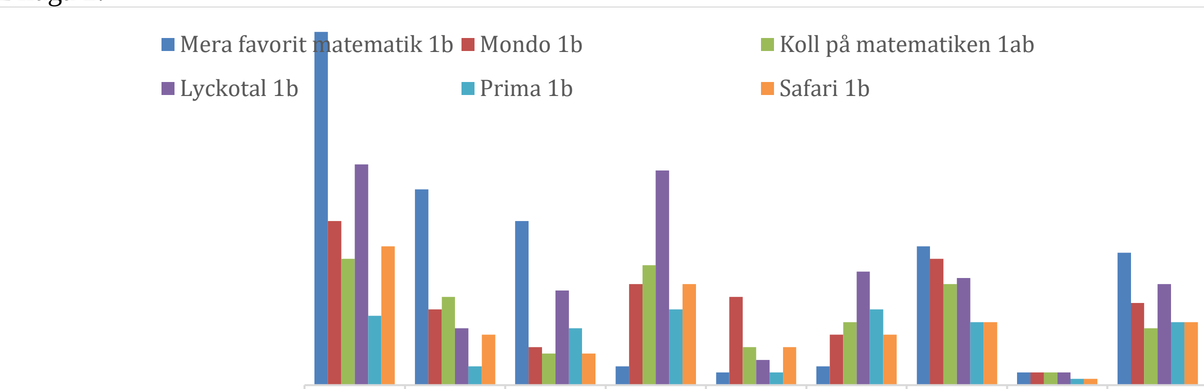
Bilaga 1.

Frågor till innehållsanalysen

1. Vad presenteras i kapitlet om geometri?
2. Hur många uppgifter berör geometrin?
3. Hur många gånger förekommer triangel, rektangel och kvadrat?
4. På hur många olika sätt representeras de olika geometriska figurerna; triangel, rektangel och kvadrat?
5. Hur många gånger förekommer triangel, rektangel och kvadrat genom de *typiska exemplen*?
6. Vilka begrepp används för att benämna/beskriva de geometriska figurerna?
7. Vilket syfte har den geometriska figuren?
8. Behöver man identifiera en triangel, rektangel eller kvadrat genom att jämföra med samma geometrisk figur eller används ett annan för att för att urskilja fenomenet?
9. Får eleven karaktärisera olika representationer av samma figur i en uppgift som skiljer sig genom riktning samt sidornas och vinklarnas storlek i en uppgift?
10. Får eleven ta del av kontrastering och generalisering i en och samma uppgift?

Frågor som ställdes till läroböckerna. Svaren användes sedan vid resultatet och analysen.

Bilaga 2.



	Totalt antal trianglar	olika representa tioner	typiska exempel	Totalt antal rektanglar	olika representa tioner	typiska exempel	Totalt antal kvadrater	olika representa tioner	typiska exempel
Mera favorit matematik 1b	56	31	26	3	2	3	22	2	21
Mondo 1b	26	12	6	16	14	8	20	2	13
Koll på matematiken 1ab	20	14	5	19	6	10	16	2	9
Lyckotal 1b	35	9	15	34	4	18	17	2	16
Prima 1b	11	3	9	12	2	12	10	1	10
Safari 1b	22	8	5	16	6	8	10	1	10

Totala antalet, representationsformer och typiska exempel av trianglar, rektanglar och kvadrater i 6 olika läroböcker för årskurs 1, sammanställda i ett diagram och i en tabell.