



GÖTEBORGS UNIVERSITET

Tal i bråkform i lågstadiets matematik- läroböcker

Frida Svahn

Självständigt arbete L3XA1A

Examinator: Florenda Gallos Cronberg

Rapportnummer: VT19-2930-018-L3XA1A

Sammanfattning

Titel:	Tal i bråkform i lågstadiets matematikläroböcker
Engelsk titel:	Numbers in fraction in the primary school's mathematics teaching material
Författare:	Frida Svahn
Typ av arbete:	Examensarbete på avancerad nivå (15 hp)
Examinator:	Florenda Gallos Cronberg
Rapportnummer:	VT19-2930-018-L3XA1A
Nyckelord:	tal i bråkform, representationsformer, kontextuella och icke kontextuella uppgifter, läroböcker

Identifieringen av vilka möjligheter läroböcker erbjuder elever att utveckla deras begreppsförståelse inom området tal i bråkform har renderat till syftet med studien. Bråk som del av helhet och bråk som del av antal har studien valt att ha som fokusområde. För att uppnå syftet har studien valt att se hur representationsformer används inom del av helhet och del av antal i matematikböcker inom lågstadiet. För att se vilken kontext uppgifterna framställs är också en central frågeställning för studien. Metodiken för studien har genomförts genom en grundlig litterär genomgång av matematikläroböcker för årskurs tre. Studien baseras därför på en innehållsanalys eftersom analysen gjorts på texter i läroböcker.

Resultaten av studien visar att de representationsformer som dominerar i de läroböcker som analyserats är visuell och kombinerad representationsform där den kombinerade formen bestod av symbolisk och visuell form. Det var i endast en bok symbolisk form förekom och den skriftliga formen förekom inte alls. Uppgifterna i böckerna bestod till den största del av kontextuella uppgifter.

Innehållsförteckning

1. Inledning	1
2. Teoretisk bakgrund	2
2.1 Bråk.....	2
2.2 Olika aspekter av bråk.....	2
2.2.1 Uppfattning av ett bråk.....	2
2.2.2 Jämförelse av bråk.....	4
2.3 Representationsformer.....	5
2.3.1 Olika sätt att representera bråk.....	5
2.3.2 Kontextualiserade och icke kontextualiserade uppgifter.....	6
2.4 Elevers förståelse av bråk.....	6
2.5 Variationsteorin.....	6
2.5.1 Innebörden av variationsteorin.....	6
2.5.2 Representationsformernas koppling till variationsteorin.....	8
2.6 Läroböcker och bråk.....	8
2.6.1 Läroboken.....	8
2.6.2 Bråk i läroböcker.....	9
2.7 Läroboksanalys.....	9
3. Syfte och frågor	10
4. Metod	10
4.1 Val av metod.....	10
4.2 Genomförande.....	10
4.3 Urval.....	11
4.4 Analysverktyg.....	12
4.5 Begränsningar.....	12
4.6 Reliabilitet och validitet.....	12
4.7 Etiska aspekter.....	13
5. Resultat och analys	14
5.1 Resultatanalys.....	14
5.1.1 Symbolisk representationsform.....	14
5.1.2 Skriftlig representationsform.....	15
5.1.3 Visuell representationsform.....	15
5.1.4 Kombinerad form.....	16
5.1.5 Typ av uppgifter.....	17
5.2 Sammanfattning.....	20
6. Diskussion	20
6.1 Resultatdiskussion.....	20
6.1.1 Visuell representationsform.....	20
6.1.2 Kontextuella och icke kontextuella uppgifter.....	21
6.2 Metoddiskussion.....	22
7. Slutdiskussion	23
7.1 Slutsatser.....	23

7.2 Didaktiska implikationer.....	23
7.3 Fortsatt forskning.....	24
7. Referenser.....	25
Bilagor.....	27

1. Inledning

Bråk är ett innehåll i ämnet matematik många elever i lågstadiet upplever som svårt när det introduceras. Svenska studier och även internationella som Nagy (2017) tagit fram har det efter utvärdering dragits en slutsats att svenska elever har bristande kunskaper inom området bråk. De bristande kunskaperna beror på vara alltför lite kontinuitet mellan bråkräkning och grundläggande algebra (Kilborn, 2013). Redan i årskurserna 1-3 ska eleverna arbeta med bråk. En annan anledning kan vara att det under en period inte fanns mycket bråkräkning i läroböckerna i skolorna då miniräknaren kunde hjälpa till med att få tal i bråkform till decimalform. Undervisningen fokuserade på heltal och det talades inte lika mycket om bråk. På grund av det här fick elever bristande kunskaper vilket framkom när de skulle börja med algebra och hade svårigheter med det. De fick speciellt svårt att arbeta med uttryck och bokstäver och i och med det infördes tal i bråkform redan i åk 1-3 och fick en större plats i läroplanen (Olsson & Forsbäck, 2016).

Idag har tal i bråkform en mer central roll i undervisningen enligt didaktiska analyser av grundskolans syfte och centrala innehåll (Kilborn, 2013) och anses, liksom Olsson och Forsbäck (2016), vara en viktig byggsten för att eleven sedan ska kunna förstå andra delar av bråk, så som i formler och som hjälp när de ska lösa ekvationer. Bråk är också enligt Kilborn (2013) en förkunskap till algebran. Utvecklingen är fördelaktig för eleverna och introduceras inte bråk i tidiga åldrar riskerar eleverna att få svårigheter att hänga med i undervisningen under senare skolår.

Viss forskning menar att de är bäst att introducera bråk för elever när de har fått förståelsen för heltal och kvantiteter medan annan forskning menar att det kan introduceras för dem parallellt (Nagy, 2017). Å andra sidan skriver hon att det finns stöd i forskningen att det är först i tonåren som barn förstår rationella tal, vilket leder till att det blir en eftersträvan om att introducera bråk först i mellanstadiet. Det blir motsägelsefullt, då det har uppmärksammats att barn redan vid fyraårs ålder klarar av att genomföra enklare additioner. Alltså kan bråk redan i tidig ålder introduceras. Förskolans läroplan berör inte bråk utan det berörs först i förskoleklassen, under centralt innehåll (Skolverket, 2018). Dock skriver förskolans läroplan att barn ska utveckla uppfattning om talbegrepp. Det innebär att dela ett tal i lika stora delar och får eleverna kunskap om det kan det vara lättare för dem att sedan förstå bråk (Baroody, Lai & Mix, 2006).

Under min verksamhetsförlagda utbildning har jag stött på lite undervisning om bråk. Det jag har sett från när elever har arbetat med bråk är de tillfällena de arbetade i matematikboken med först en gemensam genomgång som behandlade de sidorna de ska arbeta med, följt av enskilt arbete i boken. Jag upplever att många lärare förlitar sig på matematikboken i undervisningen. Dock är läroböcker ett bra hjälpmedel som ger förslag på innehåll som lärare borde lära eleverna. Läroböckerna ger också lärare instruktionsidéer för olika arbetsområden för att engagera elever i de kommande områdena. Läroboken blir som en lektionsplanerare för lärare och även med dess specifika ämnesinnehåll ett mått på möjlighet att lära för elever.

För att elever ska kunna utvecklas inom matematiken krävs det också att lärare besitter ämneskunskaper och kunskap om hur de kan undervisas (Löwing, 2016). Bortsett från ämneskunskaper behöver också lärare ha goda didaktiska kunskaper vilket också skapar en grund för undervisningen. Resultat av forskning visar att lärarutbildning, ämneskunskaper, pedagogiska kunskaper, erfarenhet och kompetensutveckling är färdigheter som har en påverkan på elevers skolresultat (Löwing, 2016).

Frågan är om elever ges tillräckligt mycket kunskap inom området bråk genom att arbeta i arbetsboken. För att få syn på hur bråk framställs i olika läroböcker bestämde jag mig för att göra en läromedelsanalys där fokus låg på innehållet i bråkavsnitten.

2. Teoretisk bakgrund

Avsnittet börjar med en beskrivning av begreppet bråk följt av olika aspekter och representationer av bråk. Sedan görs en förklaring på kontextuella och icke kontextuella uppgifter. I följande text förklaras också variationsteorins koppling till studien.

2.1 Bråk

Bråk är ett grundläggande begrepp inom matematiken (Kilborn, 2013). Det här begreppet innebär att tal i bråkform kan skrivas som a/b där a kallas täljaren och b kallas nämnaren och sträcket som är mellan a och b kallas bråkstrecket (Almström & Tengvall, 2016). Ett villkor för ett tal i bråkform är att nämnaren aldrig får vara noll. Historiskt sett har bråk uppkommit då det fanns ett behov av att kunna uttrycka stora enheter, som timme och mil, i mindre delar, till exempel en kvart eller en halvmil. För att uttrycka vissa divisioners exakta resultat används tal i bråkform. Vårt decimalsystem klarar inte av att visa detta exakta resultat, till exempel som en tredjedel som har oändligt många treor efter varandra (Nagy, 2017).

2.2 Olika aspekter av bråk

Bråk kan förstås på olika sätt, till exempel del av en helhet, bråk som del av ett antal och areamodellen. Areamodellen inom tal i bråkform innebär att delarna ska vara lika stora. Det här leder till att bråk blir ett komplext innehåll för elever. Kring de olika delarna inom bråk har elever olika förståelse enligt forskning. Delarna hänger ihop och vissa elever lyckas förstå sambandet. Bara för att en elev till exempel förstår del av en helhet behöver det inte betyda att eleven uppvisar förståelse för en liknande uppgift vilket fallet kan vara i vissa situationer. Orsaken kan vara komplexiteten att få pusselbitarna på plats (Nagy, 2017).

2.2.1 Uppfattning av ett bråk

Följande kapitel kommer att beskriva olika uppfattningar av ett bråk.

2.2.1.1 Bråk som del av en hel

För att dela en helhet i lika stora delar behöver elever utgå från helheten för att bråkdelen ska bli lika stora. Från en studie genomförd 1993 som Nagy (2017) tagit fram skulle elever från årskurserna 2, 3 och 6 visa med hjälp av snören hur de kunde dela respektive snöre i lika stora delar. De skulle dela snöret i andredelar, tredjedelar och fjärdedelar. Många av eleverna,

framförallt i årskurserna 2 och 3, klippte snörena på måfå och jämförde därefter snörenas längd. De upptäckte sedan att snörena inte var lika långa och rättade därför till dem genom att klippa till dem så att de skulle bli lika långa. På grund av det tog eleverna ingen hänsyn till helheten men visade att de visste att delarna skulle vara lika långa (Nagy, 2017).

Bråk som del av en helhet kan kopplas till areamodellen för bråk där delarna också ska vara lika stora. Här visas det i ytterligare studier som Nagy (2017) tagit fram att elever på låg- och mellanstadiet inte tar i beaktande att delarna måste vara lika stora i en helhet. I en annan studie gjord av Balls (1993) fick eleverna rita vertikala linjer i en cirkel. Utifrån elevernas perspektiv kan det tolkas att de fokuserar på antalet istället för att se till storleken. En annan tolkning kan vara att eleverna är vana vid att dela upp rektanglar i lika stora delar och där funkar det att rita linjer som är vertikala. Att dela upp en cirkel i lika stora delar är inte lika lätt som med en rektangel. Eleverna behöver, för att få erfarenhet om att det inte bara finns ett sätt att markera bråk, se olika varianter på helheten av ett bråk. Det är en slutsats båda forskarna Ball (1993) och Löwing (2016) tagit.

2.2.1.2 Bråk som del av ett antal

Likadelning innebär att någonting delas upp i lika stora delar. Det ska också förstås att varje del är mindre än helheten och ju mer delar helheten delas i desto mindre blir delarna (Kilborn, 2014). Vid likadelning innehåller varje delmängd samma antal vilket elever måste utveckla en förståelse för. Elever behöver också få syn på kontrasten, att någonting delas olika. I en intervjustudie skulle fem- och sex-åringar dela upp nio kronor för sig och nio knappar för sig. Resultatet blev att fler än hälften fördelade föremålen med fyra i den ena högen och fyra i den andra och la det nionde föremålet åt sidan. Här syntes det tydligt att eleverna ville fördela så rättvist som möjligt (Nagy, 2017). När elever i årskurs 1-3 skulle dela upp antal föremål i andredelar, tredjedelar och fjärdedelar var det svårast att dela upp föremålen i tredjedelar. Det fanns en elev som behärskade att dela i tredjedelar. Vissa elever tyckte att det var näst intill omöjligt att dela upp i tredjedelar.

I en annan uppgift där elever i årskurs fyra skulle lägga ägg i en äggkartong och visa att de kan behärska del av ett antal var det vissa elever som multiplicerade täljaren och nämnaren vid en $1/3$ och $2/6$ (Nagy, 2017). Det innebar att de la i 12 och tre stycken ägg i respektive kartong. En annan strategi var att de adderade täljaren och nämnaren och började först med att lägga i tre stycken ägg och sedan fyra till i talet $3/4$.

Kilborn (2014) menar också att barn är noga med att alla ska få lika mycket vid likadelning. Ska en $1/3$ av en chokladkaka delas upp ska varje del vara lika stor. Det är någonting inte alla barn har förstått. Han anser också att likadelning är någonting som måste tas upp redan när eleven lär sig hälften och dubbelt. Eleven bör få en förståelse för det i tidig ålder. När man ska dela sex föremål i tre grupper bör de separeras från varandra för att göra det tydligare att det är två föremål i varje grupp. Genom att ge eleverna en stabil grund inom området bråk som del av ett antal skapar det bättre förutsättningar när de ska lära sig andra delar inom matematik.

2.2.1.3 Bråk som ett tal

När fem- och sex-åringar ska arbeta med bråk på en tallinje uppstår svårigheten när de utgår från deras erfarenheter kring heltal. I en studie fick de en tallinje där det var cirklar målade på. Istället för att det var siffror på tallinjen så ersattes siffrorna med cirklar. På siffran ett var det en cirkel målade, på siffran två var det två cirklar målade och på siffran tre var det tre cirklar målade. De fick sedan i uppgift att placera ut talen $1/2$, $1/4$ och 1 och $1/2$ på tallinjen. Att placera

ut 1 och 1/2 blev svårt för dem. De placerade en och en halv ovanpå de två cirklarna och motiverade svaret genom att säga att de båda innehåller två delar. En annan studie visar att elever har svårt att se att det finns tal mellan heltalen när de arbetar med tallinjen (Balls, 1993). När elever i årskurserna tre till sex skulle placera ut 1/2 på tallinjen upptäcktes en annan problematik. De två tallinjerna var mellan noll till tre och noll till fyra. Många av eleverna placerade ut en halv som en sträcka på tallinjen eller mellan ett och två. Tallinjen som sträckte sig mellan noll till tre fick elever i årskurs fem och sex placera ut tre andredelar. Detta tycktes inte vara lika lätt för dem och det var inte många som kom fram till rätt svar. Resultatet blev att de placerade ut talet någonstans mellan två och tre (Nagy, 2017).

2.2.2 Jämförelse av bråk

Kommande avsnitt beskriver olika sätt att jämföra bråk, hur ekvivalenta bråk jämförs samt bråk som är större än ett.

2.2.2.1 Jämföra storlek på bråk

För att kunna göra en jämförelse mellan till exempel två bråk måste hänsyn tas till helheten, att bråktalen har lika stor helhet. Svårigheter som uppstår när eleverna ska jämföra är att de inte fokuserar på delarna som hör ihop med helheten på rätt sätt eller inte tar hänsyn till storleken på delarna (Nagy, 2017). I en studie som Nagy (2017) tagit fram fick en elev i årskurs sex göra en jämförelse mellan 1/4 och 7/8. Elevens svar blev att 1/4 är ett större tal på grund av att varje del är större. Vad det kan bero på att de fokuserar på delarna kan vara att de sedan innan har kunskaper om hela tal och att de använder dem på bråk (Nagy, 2017). I en ytterligare studie (Nagy, 2017) får elever i årskurs sex i uppdrag utifrån en vardagskontext att dela två pizzor i lika stora delar. Den ena pizzan skulle delas i åttondelar och den andra i sjättedelar. De fick sedan besvara frågan ifrån vilken pizza du får mest av. De fick sedan lösa en annan uppgift där de skulle svara på vilket av 1/6 eller 1/8 som är störst och den här gången i ett icke vardagligt sammanhang. Deras motivering varför de svarade att 1/8 är störst var att åtta är ett större tal än sex. De jämförde också 4/5 och 5/6 och svarade att det inte skiljer någonting på talen då det är ett emellan på båda två (Nagy, 2017). I en tredje studie som Nagy (2017) studerat skulle eleverna jämföra två bråk, 1/3 och 1/4. De svarade att 1/4 är störst på grund av att det finns fler delar än i 1/3.

Likt ovan i en ytterligare studie hade elever på lågstadiet svårt att förstå vilket utav 1/3 och 1/4 som var störst. De tolkade talen som att det är tre föremål i 1/3 och fyra föremål i 1/4. Resultatet blev att de trodde att 1/4 var större än 1/3 (Empson, 1999).

2.2.2.2 Ekvivalenta bråk

Ekvivalenta bråk betyder motsvarande, således att 1/3 och 4/12 är olika namn för samma tal. Elevers tidigare uppfattningar av ett tal är att det endast skrivs på ett sätt vilket kan leda till en svårighet att förstå bråk som ett tal (Engström, 1997). Trots att elever kan se att 4/12 går att göra om till 1/3 har de svårt att förstå innebörden av det. I ekvivalenta bråk fokuserar elever på bråkets delar eller delarnas storlek vilket blir en svårighet för dem (Nagy, 2017). Ekvivalenta betyder som tidigare nämnt motsvarande, men det kan vara svårt att visualisera. För att elever ska få en förståelse för vad det innebär med ekvivalenta bråk behöver de också förstå begreppen fler och större. De måste utgå från hela mängden och inte bara delarna eller storleken på dem då bråk som ser olika ut som tal kan representera lika mycket (Ball, 1993).

2.2.2.3 Bråk större än 1

Många elever har uppfattningen om att bråk är ett tal som är mindre än ett. Om vi tänker oss två cirklar och båda är delade i fyra lika stora delar där alla delar i den ena cirkeln är skuggade och en del är skuggad i den andra kan vi på ett matematiskt sätt uttrycka att $1/1$ och $1/4$ är skuggade. Det finns en del elever som skulle svara att $5/8$ är skuggade (Macks, 1990). Det blev lättare för eleverna att få fram det rätta svaret när de fick höra uppgiften i en konkret kontext där cirkelarna föreställde pizzor (refererad i Nagy, 2017).

Studierna som har genomförts i Nagys (2017) licentiatavhandling talar hon om att den största skillnaden mellan de svenska och internationella studierna, är att elever högre upp i åldrarna behärskar bråk bättre i de internationella än i de svenska. I en annan studie som Nagy (2017) lyfter fram som genomfördes med svenska elever i årskurs fem, visade det sig att 39% inte hade kännedom att helhetens delar måste vara lika stora. Dessa missuppfattningar på lågstadiet lyfts fram i internationella studier. Det här pekar på att elever från andra länder når en högre nivå i matematik jämfört med svenska elever. Det kan också vara ett tecken på att progressionen i undervisningen inte är tillräckligt tydlig (Nagy, 2017).

2.3 Representationsformer

Att använda olika typer av representationsformer i undervisningen har enligt studier som Der-Ching (2017) tagit fram en påverkan på elevers lärande. Det framkommer i Der-Chings (2017) studie fyra olika sätt att representera tal i bråkform; symbolisk form, skriftlig form, visuell form och kombinerad form. Det framkommer också hur kontextuella och icke kontextuella uppgifter har påverkan på elevernas lärande.

2.3.1 Olika sätt att representera bråk

Symbolisk form

Symbolisk form innebär att om en fråga eller uppgift i matematikboken endast omfattar matematiska uttryck ses det som symbolisk form. Det är uppgifter som har översatts från det skrivna språket till symboler och siffror. Symboler är de uppgifter som innefattar siffror, bråkstrecket, addition- och subtraktionstecknet (Der-Ching, 2017).

Skriftlig form

En uppgift som är skriven i skriftlig form innebär att frågan och uppgiften endast presenteras i skriftlig form, det vill säga endast med bokstäver och symboler (Der-Ching, 2017)

Visuell form

Med visuell form menas de uppgifter och frågor som endast innefattar figurer, bilder, diagram och/eller tabeller (Der-Ching, 2017).

Kombinerad form

Kombinerad form innebär att två eller flera av ovanstående former ska användas i samma frågor. Genom att en uppgift både innehåller symbolisk och visuell form resulterar det till att elever kan ta hjälp av till exempel en bild för att kunna lösa uppgiften (Der-Ching, 2017).

2.3.2 Kontextualiserade och icke kontextualiserade uppgifter

Kontextualiserade uppgifter innebär uppgifter som är vardagsanknutna. Det kan handla om att bilderna innefattar föremål som är bekanta för eleverna eller att de ord som förekommer i uppgiften är ett ord som är elevnära. Bilder som är illustrationer av ett verkligt föremål kopplas också till kontextuella uppgifter. De icke kontextualiserade uppgifter är uppgifter som för eleverna inte är vardagsanknutna. Uppgifterna innehåller till det mesta geometriska figurer.

Der-Ching (2017) har efter sin studie dragit en slutsats om att den visuella representationsformen kan vara ett användbart hjälpverktyg när eleverna ska lära sig tal i bråkform. Uppgifterna är oftast lättare, men ger dock mindre utmaning för eleverna.

2.4 Elevers förståelse av bråk

Flera studier som Nagy (2017) har tagit fram visar hur elever uppfattar och förstår bråk. Studierna pekar på att eleverna visar upprepade svårigheter. Resultatet i alla studierna visar att lägga mycket fokus på att ta hänsyn till elevernas förståelse och ha det som utgångspunkt är viktigt för att en progression ska kunna ges i undervisningen (Nagy, 2017). Andra studier visar att elever också uppvisar svårigheter på grund av att det är samma symboler som används vid heltal och vid bråkform. Innan elever börjar arbeta med bråk har de oftast flera års erfarenhet med att ha arbetat med heltal vilket kan leda till att heltalen blir dominerande vid räkning av bråk. Det behöver inte bero på det här, men det kan vara en bra utgångspunkt för framtida forskning (Nagy, 2017).

I en annan studie av Löwing (2016) visar resultat av en bråkdiagnos att elever på gymnasiet har för få rätt svar på diagnosen som utfördes. Deras resultat kan härledas till tidigare skolår och har troligtvis sitt ursprung i bristande förkunskaper. Vidare när elever i årskurs fyra gjorde ett test som testade den grundläggande förståelsen av bråk visade det sig i lösningsfrekvensen att eleverna har relativt ytliga kunskaper. De har inga svårigheter med att visa vad en $\frac{1}{4}$ är på ett område som är indelat i fyra lika stora delar. När de sedan ska använda deras kunskap och kunna generalisera när de ska markera $\frac{1}{3}$ av sex rutor är det endast 33% som klarar av det i årskurs fyra och 44% i årskurs fem. Enligt kunskapskraven i årskurs tre ska eleverna kunna behärska sådana typer av uppgifter. Det är heller inte självklart för elever i årskurserna fyra och fem vid inledande undervisning om bråk att de förstår att delarna i en helhet måste vara lika stora. Det är en alldeles för stor andel elever som inte vet det. I studien (Löwing, 2016) visade det sig att 64% i årskurs fyra och 39% i årskurs fem inte förstod det.

2.5 Variationsteorin

Variationsteorin har sitt ursprung från den fenomenografiska forskningsansatsen och är en vetenskaplig teori som handlar om lärande. Teorin är inriktad på det som eleverna behöver lära och hur ett innehåll kan användas för att detta ska kunna vara möjligt (Runesson, 1999).

2.5.1 Innebörden av variationsteorin

Synen på lärande utifrån variationsteorin är att variation är en nödvändig förutsättning för att eleverna ska kunna urskilja nya aspekter av ett område och för att de ska märka att de lär sig något nytt (Kullberg, Runesson Kempe & Marton, 2017). Utgångspunkten handlar om att kunna hjälpa eleverna att klara av nya situationer på ett kärnfullt och effektivt sätt.

Kullberg m.fl. (2017) gör en jämförelse med att om du lyssnar på folk som bara talar kinesiska och det är det enda språket du har hört kan du inte förstå att det är kinesiska du lyssnar till.

Samma sak med att om du bara tittar på linjära ekvationer kommer du inte förstå att det bara är det som du studerar. Inom variationsteorin när det talas om jämförelse av två begrepp innebär det att ett mönster ska variera som i det här fallet kallas kontrast.

Genom studier som Kullberg m.fl. (2017) har tagit fram visar de att det är bättre att i matematikundervisningen använda två exempel istället för ett, och att dessa exempel ska presenteras ihop istället för separat. Exempelen som ges ska variera för att ge bästa inläring för eleverna, det vill säga att ge olika exempel av olika typer. Det verkar anses vara bättre än att ge flera exempel av samma typ. När olika exempel blandas tvingas eleverna att göra en jämförelse mellan dem vilket gör att de blir bättre på att se nya exempel. Med hjälp av olika språk kan en situation uttryckas på varierande sätt. I matematikundervisningen är det en viktig sak att belysa att det finns olika sätt att uttrycka matematiskt innehåll.

Allt lärande måste handla om något som eleverna ska läras. Att prata om lärande går inte bara att göra utan att vi nämner det som ska läras, alltså *lärandeobjektet* Kullberg m.fl. (2017). Inom variationsteorin talas det om lärandeobjektet som har en central roll för lärandet. Det är inte samma sak som lärandemål. Inom lärandemål är det fokus på det som eleven ska kunna i slutet av en lärandeprocess. Lärandeobjektet fokuserar istället på ett objekt som ska läras i början av en process. Lärandeobjektet har alltid två aspekter. Den ena är den specifika aspekten där det fokuseras på själva ämnet och vad det är vi vill att eleverna ska lära för kunskaper. Här är det fokus på de kortsiktiga målen. Den andra är den generella aspekten som syftar på de kunskaper som tack vare den specifika aspekten gör att de kan utvecklas. Här är det istället fokus på de långsiktiga målen (Lo, 2014).

Lärare måste tänka på vad som är syftet med det eleverna ska lära sig och även tänka på förhållandet mellan lärandeobjektet och eleverna. Betydelsen av att lära sig någonting nytt är att se till att lärandet hjälper eleverna att förstå den värld vi lever i. Inom matematiken lär sig eleverna många nya begrepp, bland annat om procent. En fråga som kan ställas då är hur den kunskapen hjälper eleverna att bättre förstå det liv de lever i genom att lära sig procent. I det här fallet kan procenträkning i enkel mening kopplas till om de befinner sig i en affär behöver räkna ut vad rabatten blir av en vara med sänkt pris. Läraren måste få reda på vilka förkunskaper eleverna har och behöver gällande nya begrepp samt vad det är för kunskaper eleverna eventuellt kommer att lära sig av det nya begreppet (Lo, 2014).

För att se om lektionens kvalitet är relevant för elevens lärande måste hänsyn tas till lärandeobjektet som läraren har valt ut. Det val som görs av vilket lärandeobjekt som lektionen kommer att innehålla har påverkan på elevernas lärande. Det är viktigt att se om eleverna i ett lärandeobjekt ens ges möjlighet till att lära (Lo, 2014). Dock är det inte förrän under lektionen elevernas faktiska lärande kommer att visa sig och vilken uppfattning de har om lärandeobjektet. Det är lärarens roll att hjälpa eleverna att urskilja lärandeobjektets kritiska drag för att de ska kunna lära sig någonting, till exempel om lärandeobjektet är ett äpple behöver eleven se en variation av ett äpple så som olika färger etc. Att förutspå vilka de kritiska dragen kan vara av ett nytt objekt går inte genom att bara analysera ett innehåll. Varför det kallas kritiska aspekter är just på grund av att de kritiska dragen uppkommer på lektionen när eleverna arbetar med dem.

Variationsteorin innefattar också olika variationsmönster så som *kontrastering*, *separation*, *generalisering* och *fusion* (Lo, 2014). Vid studien har det valts att fokuseras på kontrastering. Kontrastering innebär att elever måste se kontraster till det som ska läras. De måste kunna erfara en skillnad för att kunna urskilja vilka likheter som finns. Lärandeobjektets kontraster måste påpekas. Om lärandeobjektet till exempel är ett äpple behöver eleven se vad som *inte* är ett

äpple för att förstå att det är ett äpple som de ser. De behöver således jämföra äpplet med en annan frukt, till exempel en banan för att kunna se att det är två olika frukter. För att eleverna ska veta vad en helhet eller ett antal innebär behöver de också veta vad det inte är (Lo, 2014).

2.5.2 Representationsformernas koppling till variationsteorin

Matematiska begrepp kan, som nämnts tidigare, representeras på olika sätt.

Der-Ching (2017) nämner i sin studie fyra stycken representationsformer; symbolisk, skriftlig, visuell och kombinerad form. Vilka av ovanstående representationsformer som används beror på vad de ska användas till och vad det är för lärandeobjekt som förekommer och då vilken representationsform som blir mest lämplig. Att använda flera olika representationsformer är nödvändigt för att eleven ska få en djupare förståelse för lärandeobjektet (Lo, 2014). För att förtydliga kopplingen mellan representationsformerna och variationsteorin kan det till exempel förklaras genom att i en uppgift ta hjälp av en bild kan lärandeobjektet synliggöras. I detta fall kopplas det till representationsformen visuell form (Lo, 2014).

2.6 Läroböcker och bråk

2.6.1 Läroboken

I dagens skolverksamhet är det vanligt att läromedel används i undervisningen, däribland läroboken. Läroboken, som är skriven av en eller flera författare har som avsikt att inom ett specifikt ämnesområde ge en välgjord pedagogisk version av det området. Det ämne som anses vara i mest behov av en lärobok är matematik (Skolverket, 2003; Johansson, 2006). I matematikböcker kan man finna olika uppfattningar om inläring (Johansson, 2006). Säljö (2012) belyser bland annat behaviorismen och det sociokulturella perspektivet. Dessa uppfattningar skiljer sig emellan sett till inläring. De har i många år haft en betydande roll inom utbildningen. Behaviorismens syn på lärande kan i matematikboken kännas igen genom att fokus ligger på att komma fram till ett rätt svar (Johansson, 2006). Det sociokulturella perspektivet synliggörs i de uppgifter som fokuserar på att främja diskussioner och samarbete. Synsättet inom perspektivet är att det är genom kommunikation med andra människor vi lär oss (Säljö, 2014).

Bortsett från behaviorismen och det sociokulturella perspektivet är det läraren som bestämmer hur eleverna ska lära sig matematik. Läroboken är ett bra hjälpmedel för läraren som ger förslag på hur ett innehåll kan förmedlas och som används vid planering och genomförande av undervisningen. Vidare påverkar detta hur lärare och elever uppfattar matematikämnet. Då undervisningen i matematik utgår till större del från läroboken är det viktigt att lärare har en god kunskap om lärobokens användning (Heikka, 2015). Utbudet av läroböcker är stort vilket leder till att lärare använder sig av olika läroböcker och liksom lärare skiljer sig läroböcker från varandra vilket leder till att de presenteras på olika sätt. De ska dock ha i åtagande att förmedla samma innehåll, bland annat bråk (Johansson, 2006).

Läroboken spelar en viktig roll i undervisningen som har som syfte att inverka på lärares, elevers och föräldrars uppfattning av skolans ämnen. Genom att eleverna arbetar med läroboken får de nära kontakt med läroplanen och syftet med läroböckerna är att hjälpa eleven med lärandeprocessen. Trots en sådan tydlig relation mellan läroboken och eleven finns det i liten utsträckning bevis som beskriver hur eleverna faktiskt använder läroböckerna. Genom forskning framhävs lärobokens användning vilket framkommer att det finns begränsad bevisning om hur

lärare använder läroboken. Vidare varierar läroboken från klassrum till klassrum och från lärare till lärare men enligt Okeeffe (2013) är läroböcker är en viktig faktor till ett framgångsrikt lärande.

2.6.2 Bråk i läroböcker

I en studie (Der-Ching, 2017) har det gjorts en jämförelse mellan två olika grundläggande läroböcker. De två läroböckerna som behandlades var ett finskt och ett taiwanesiskt. Syftet med undersökningen var att ta reda på hur bråk framställs i de olika läroböcker. Resultatet visade att det i den finska läroboken, Laskutaito, finns fler frågor som innehåller tal i bråkform jämfört med de taiwanesiska läroboken, Kang Hsuan. Det visade sig också att Laskutaito innehöll den grundläggande definitionen av bråk så att eleverna kan utveckla deras resonemangsförmåga. Laskutaito innehöll också fler uppgifter med bildstöd för att förtydliga begreppen, vilket också stöds i tidigare studier om hur bildstöd främjar elevers förståelse av bråk, och uppgifterna i den finska läroboken var också kopplade till verkliga situationer vilket de inte var i Kang Hsuan. Det förekom också många uppgifter i den finska läroboken som var i symbolisk form. Uppgifterna i den finska läroboken använder mer illustrationer för att på så sätt skapa realistiska scener vilket i jämförelse med den taiwanesiska läroboken saknar kopplingen till verkligheten. De finska läroböckerna integrera frågorna i uppgifterna i verkliga situationer som hjälper elever att förstå vikten av matematik i vår vardag. Även det här stöds av tidigare studier som Der-Chang (2017) tagit fram som visar att elevers motivation till att lära och deras prestationsförmåga i matematik främjas. Vidare visade det här att uppgifter som har koppling till det verkliga situationer lockar elevernas uppmärksamhet vilket gör att matematiken ses som mer intressant och ökar elevers motivation till att lösa uppgifterna.

Forskningsstudier som Der-Ching (2017) tagit fram visar att bråk anses som ett svårt begrepp för elever i grundskolan att lära sig och det sker en del missuppfattningar kring bråk. En meningsfull förståelse av bråkbegreppet ger en bra grund för att lära sig mer avancerad matematik. Andra forskningsstudier har också visat att om elever inte har en grundläggande kunskap om bråk är de begränsade när de ska lära sig andra matematiska begrepp. Der-Ching (2017) nämner att en förståelse av bråk är en förutsättning för att förstå algebra.

2.7 Läroboksanalys

Läroböcker är allmänt accepterade som ett vanligt inslag i klassrum över hela världen och är viktiga medel för att stödja läroplaner. Följaktligen är deras innehåll och struktur viktigt för att främja en viss vision för läroplanen. Det finns många inslag i läroböcker, några av dem är främmande för författarna. Inslagen kan ha positiva eller negativa effekter på inläringen. Genom en textboksanalys kan inslagen identifieras. Enligt Valverde (refererad i Okeeffe, 2013) bör det vid analys av läroböcker tas hänsyn till dessa fyra aspekter, nämligen innehållet, strukturen, förväntningarna och språket. Vid innehållet kan fokus ligga på att se hur innehållet kan locka uppmärksamheten hos eleven, att presentera meddelandet tydligt och tillslut att bibehålla uppmärksamheten hos eleven. Strukturen kan med hjälp av en matristabell illustreras så att man enklare kan analysera strukturen på en text och registrera schematiskt hur frekventa idéer/ämnen visas och på så sätt visualiseras kopplingarna. Gällande förväntningar är det som är grundläggande att både lärare och elever förstår materialet som presenteras. I läroböckerna är det viktigt att det språk som förekommer förstås av de som läser innehållet. Den här studien

täcker endast en aspekt, som är innehållsanalys. Dessutom är innehållet specifikt för bråk som en del av en helhet och en del av ett antal (Okeeffe, 2013).

3. Syfte och frågor

Syftet med den här studien är att identifiera vilka möjligheter läroböcker erbjuder elever att utveckla deras begreppsförmåga inom området tal i bråkform. Fokus kommer att ligga på bråk som del av helhet och bråk som del av antal. För att kunna uppnå syftet ställs följande frågor:

- Hur används representationsformer i avsnitten del av helhet och del av antal i matematikböcker och vilken typ av representationsform dominerar?
- I vilken kontext framställs uppgifterna i del av helhet och del av antal?

4. Metod

I kommande avsnitt kommer tillvägagångssätt som har använts i studien att presenteras.

4.1 Val av metod

Eftersom syftet med studien är att undersöka hur läroböcker bidrar med kunskap så att eleverna utvecklar deras begreppsförmåga inom området bråk som del av helhet och bråk som del av antal, tycktes det passande att välja en metod som används för att tolka dokument. Studien avser att kvantifiera hur olika representationsformer dominerar samt i vilken kontext uppgifterna i läroböckerna förekommer. Därför baseras studien på en kvalitativ studie kopplat till innehållsanalys, då Bryman (2011) menar att det är en metod som används när analys av dokument och texter ska göras.

4.2 Genomförande

Studien inleddes med ett bekvämlighetsurval (Bryman, 2011) eftersom böckerna som valts till studien var lättillgängliga. Från början valdes sex stycken läromedel ut till analysen. Kravet var att läroböckerna skulle vara anpassade för första terminen i årskurs 3, alltså 3A-böckerna, att bråk skulle behandlas likvärdigt så långt som möjligt och att de skulle vara utgivna efter 2011 så att de kunde ha en koppling till Lgr 11. Jag började därefter att läsa innehållsförteckningen i läroböckerna för att se om de innehöll tal i bråkform eftersom att del av helhet och del av antal är en del av tal i bråkform. Efter att ha analyserat innehållsförteckningen gjordes en avgränsning genom att välja ut fyra stycken matematikläroböcker på grund av att två av de sex läroböckerna som först valdes att analyseras inte innehöll tal i bråkform i 3A-boken. Det behandlades först i 3B-böckerna som används under termin två.

När böckerna hade valts ut började jag att analysera innehållet. Jag började först att ta reda på hur många sidor som innehöll tal i bråkform i varje lärobok. Det här gjordes för att få reda på hur mycket det innehållsmässigt skiljer sig mellan böckerna sett till tal i bråkform. Del av helhet och del av antal är de vanligaste områdena inom matematiken i de tidigare åldrarna. Jag valde därför att efter granskning av böckerna och efter att ha studerat det centrala innehållet för årskurs 1-3 i läroplanen (Skolverket 2018) att utgå från kategorierna bråk som del av helhet och bråk som del av antal. Det gjorde jag också på grund av att det i läroplanen under det centrala

innehållet för årskurs 1-3 står att eleverna ska lära sig: ”del av helhet och del av antal. Hur delarna kan benämnas och uttryckas som enkla bråk samt hur enkla bråk förhåller sig till naturliga tal” (Skolverket, 2018, s. 55). Eleverna ska även lära sig: ”naturliga tal och enkla tal i bråkform och deras användning i vardagliga situationer” (Skolverket, 2018, s. 55).

Alla fyra läromedel innehöll kategorierna bråk som del av helhet och bråk som del av antal vilket gjorde att jag ville undersöka hur de kategorierna skiljer sig böckerna emellan.

För att få en bättre förståelse kring de uttryck som bråk kan framställas i blir Nagys (2017) olika sätt att förstå bråk på nödvändiga. Det nämns ofta när hon presenterar de olika sätten att presentera ett tal i bråkform att eleverna har svårt att förstå att de måste utgå från helheten vid bråkräkning. Det var också en av anledningarna till varför jag ville titta närmare på hur del av helhet och del av antal presenteras i böcker utifrån mina forskningsfrågor. Det hade varit intressant att analysera och jämföra hur alla kategorierna Nagy (2017) skriver om skiljer sig böckerna emellan, men på grund av begränsat med tid hade det inte funnits tid till att göra det. Olsson och Forsbäck (2016) nämner även att bråk förekommer i många olika former.

4.3 Urval

Analysen kommer att göras på fyra olika läroböcker på avsnitten del av helhet och del av antal. Nedan nämns de läroböcker som valdes ut och hur många sidor de innehöll samt hur många sidor som behandlade tal i bråkform.

Singma matematik

Singma matematik är en läromedelsserie baserad på forskning och är konstruerad enligt Singaporemodellen där lärarens kompetens är betydelsefull och att undervisningen är av hög kvalitet på ett noga förberett sätt. Läroboken har framställts i samarbete med Dr Yeap Ban Har, doktor i matematikdidaktik. De svenska författarna är Pia Agardh och Josefine Rejler varav en av dem är lärare i matematik med flera års erfarenhet. Till varje termin finns en lärobok och en övningsbok. Eleverna får i böckerna möjlighet att öva på förmågorna i matematik ur läroplanen. I studien används läroboken Singma matematik 3A som gavs ut 2018. Den innehåller 164 sidor varav 30 sidor som behandlar området bråk.

Mondo matematik

Mondo matematik är ett läromedel i matematik för grundskolan och har en tydlig förankring i Lgr 11. Författaren till läroboken heter Åsa Brorsson och har lång erfarenhet av undervisning i matematik. I studien används boken Mondo matematik 3A. Boken innehåller 159 sidor där bråk innefattar 13 sidor.

Matte Eldorado

Författarna till läromedlet Matte Eldorado heter Ingrid Olsson och Margareta Forsbäck. De båda författarna har under många år arbetat som klasslärare och speciallärare inom grundskolan. De har också undervisat i matematikdidaktik vid lärarutbildningen. I varje grundbok finns det sex kapitel där varje kapitel består av 24 områden som behandlar matematik. Varje område startar med en sida med gemensam undersökning följt av ett antal sidor där eleven får träna på egenhand för att befästa kunskap. Läroboken Matte Eldorado 3A kommer användas i studien. Boken gavs ut år 2016 och behandlar 152 sidor varav 10 sidor med tal i bråkform.

Koll på matematik 3A

Koll på matematik är ett läromedel anpassat för elever på låg- och mellanstadiet. Författarna heter Hanna Almström och Pernilla Tengvall. Läroboken som används i studien är Koll på matematik 3A och är utgiven 2016. Boken innehåller 175 sidor där tal i bråkform innefattar fyra sidor.

4.4 Analysverktyg

Studiens syfte är att analysera läroböcker där fokus ligger på analys av innehållet. Enligt Valverde (refererad i Okeeffe, 2013) finns det olika dimensioner för att analysera läroböcker. Fokus kan vara på innehållet, strukturen, förväntningarna och språket. Den dimension som blir aktuell för studien är innehåll då det görs en innehållsanalys för att få fram data.

Strukturen som har varit vägledande i analysen har varit Der-Chings (2017) representationsformer. De har hjälpt mig att veta vad jag ska analysera i läroböckerna. Då syftet också var att ta reda på i vilken kontext uppgifterna i del av helhet och del av antal framställs i blev även Der-Chings (2017) sätt att benämna hur en uppgift är kontextuell eller inte. För att under analysen avgöra om en uppgift är kontextuell ska de uppgifter som är kontextualiserade innefatta föremål som är bekanta för eleverna, eller att de ord som förekommer i uppgiften är ett ord som är elevnära således att uppgiften kan kopplas till en verklig situation. Representationsformerna som kommer att vara vägledande i analysen är: *symbolisk, skriftlig, visuell och kombinerad form*. Vidare fortsatte analysen med att fokusera på att synliggöra vilka böcker som innehöll symbolisk form och därefter fortsattes med de andra representationsformerna.

Efter att analysen hade gjorts skapades sedan ett diagram, Diagram 1. Diagrammet visar en sammanställning av det resultat som framkom. Diagrammet innehåller olika delar. De olika delarna innehåller vilka läroböcker som var aktuella för analysen, i vilka böcker kontextuella och icke kontextuella uppgifter förekommer, vilka böcker som innehåller symbolisk, skriftlig, visuell och/eller kombinerad representationsform.

4.5 Begränsningar

Variationsteorin kommer att utnyttjas på så sätt att fokus vid analysen kommer bland annat ligga på att se om det förekommer uppgifter som kontrasteras, således att se om författarna kommer att visa ett exempel på hur en uppgift inte till exempel är en del av en helhet (Lo, 2014). Tallinjen kommer ej att analyseras om den förkommer under avsnitten del av helhet och del av antal på grund av avgränsning. Områdena del av helhet och del av antal valdes ut, som nämns ovan, efter att ha läst tidigare forskning. Jag har också valt att inte presentera alla bilder i resultatet i den löpande texten. Resterande exempel kommer att bifogas som bilagor. Det är endast uppgifter i läroböckerna som kommer att analyseras.

4.6 Reliabilitet och validitet

Begreppen reliabilitet och validitet är enligt Bryman (2011) de viktigaste kriterierna vid en undersökning för att kunna säkerställa att undersökningen har gjorts på ett trovärdigt sätt. Det blir betydelsefullt att göra en tydlig beskrivning av sin analysmetod så att läsaren ska kunna förstå hur datainsamlingen har gått till. I den här studien har analysen av läroböckerna gjorts med stor noggrannhet och ett flertal gånger för att vara säker på att begreppen har kategoriserats rätt.

Reliabilitet innebär huruvida ett resultat av en undersökning får samma resultat om det skulle omprövas och göras på nytt (Bryman, 2011). För att få samma resultat har undersökningens mätinstrument stor betydelse och behöver vara så exakt som möjligt för att inte få ett missvisande resultat. Inom kvalitativa studier blir det oftast svårare att kunna generalisera då undersökningen oftast är gård in mer på djupet i jämförelse med kvantitativa undersökningar som oftast är bredare. Urvalet är också mindre i en kvalitativ studie. Resultatet kan ej generalisera i denna studie då undersökningen endast har utgått från fyra stycken läromedel. Trots att studien inte går att generalisera stärks undersökningens reliabilitet så på sätt att den utgår från Der-Chings (2017) representationsformer där det i studien görs en tydlig beskrivning av formerna som gör det möjligt att veta vad som ska undersökas. Analysen utgår också från hans sätt att definiera hur uppgifterna är kontextuella eller icke kontextuella.

En undersöknings validitet menar Bryman (2011) är att se om det som var avsett att mätas har mätts. I den här studien kopplas de resultat som framkommit till Der-Chings (2017) representationsformer som användes för att besvara studiens syfte och frågeställningar.

Dock kan det enligt Bryman (2011) vara risk för att en felkälla uppkommer då frågor kan tolkas på olika sätt beroende på vem det är som tolkar. Så som intressen och ålder kan vara faktorer som kan påverka. Databasinsamlingen i studien har tolkats av mig själv och då jag som lärarstudent inte har så mycket erfarenhet av matematikläroböcker kan det förekomma slutsatser som är felaktiga vilket måste tas hänsyn till.

4.7 Etiska aspekter

Vid forskning måste etiska beslut alltid övervägas då hänsyn måste tas till individskyddskravet som innebär att de individer som medverkar måste skyddas. I kravet preciseras fyra stycken huvudkrav på forskningen vilka är informationskravet, samtyckeskravet, konfidentialitetskravet och nyttjandekravet (Vetenskapsrådet, 1999). För detta arbete har det inte behövts tas någon ställning till dessa krav då det material som används endast innefattar läroböcker. Däremot har förlagen som har berörts av studien har kontaktats via mejl där det har givits ett godkännande att få tillåtelse använda deras bilder till studiens resultat.

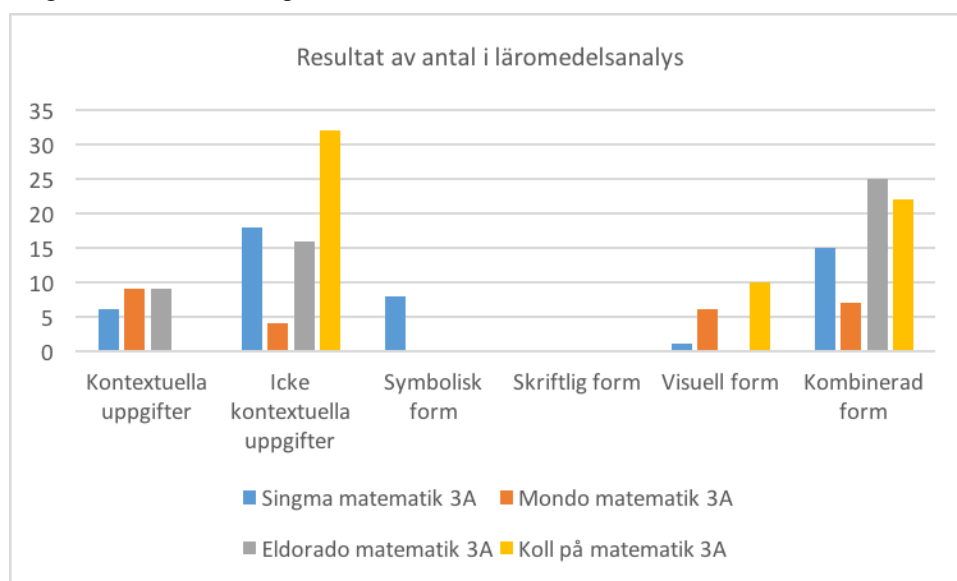
5. Resultat och analys

I kommande avsnitt kommer resultatet presenteras och analyseras. Det har framkommit att i läroböckerna under avsnitten del av helhet och del av antal förekommer representationsformerna symbolisk, visuell och kombinerad form. De representationsformer som kan ses mest av i böckerna är visuell form och kombinerad form. Hur de olika representationsformerna framställs i läroböckerna varierar.

5.1 Resultatanalys

Diagram 1 är en sammanställning av resultatet från analysen. Diagrammet visar vilka läromedel som användes vid analysen. Det visar vilka läroböcker som innehöll kontextualiserade och icke kontextualiserade uppgifter. Symbolisk, visuell och kombinerad form är de representationsformer som förekom i läroböckerna. Diagrammet visar bland annat att det var i läroboken Singma matematik 3A som symbolisk form förekom åtta gånger under avsnitten del av helhet och del av antal. I diagrammet utläses även att i läroboken Koll på matematik 3A förekom endast icke kontextualiserade uppgifter under del av helhet och del av antal. Diagram 1 synliggör också hur många gånger representationsformerna förekommer samt hur många uppgifter som är kontextuella och icke kontextuella.

Diagram 1: Författarens egna



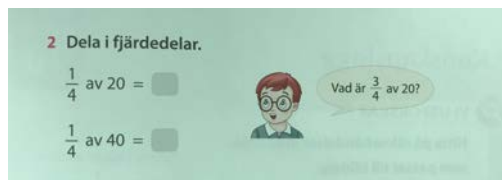
Nedan följer en redogörelse för temen som utvecklades vid analysen. De teman som framkommer blir stöd för resultatet och har utgångspunkt i studiens syfte och frågeställningar.

5.1.1 Symbolisk representationsform

Symbolisk form som syftar till att om en uppgift i matematikboken endast omfattar matematiska uttryck ses det som symbolisk form. De läroböcker som användes i analysen fanns det endast ett läromedel där symbolisk form förekom och användes. Det var i läroboken Singma matematik 3A vilket också kan utläsas i Diagram 1. En förklaring till varför det ser ut så kan vara att

symbolisk form används mer i de äldre åldrarna där matematiken är på en högre nivå och inte använder lika mycket stöd från bilder.

Under avsnitten del av helhet och del av antal i Singma matematik 3A förekom symbolisk form åtta gånger. Nedan visas ett exempel från avsnittet en del av ett antal. Uppgiften var utformad på följande vis:



Figur. 1: Symbolisk form. (Yeap, 2015, s. 163).

Uppgiften är i symbolisk form på grund av att uppgiften omfattar endast matematiska uttryck, således uttrycket $\frac{1}{4}$ samt 20 och 40. Eleverna ska i de båda uppgifterna dela ett tal i fjärdedelar. Fokus blir att dela ett helt tal, talet 20 och talet 40, i fjärdedelar. Eleverna får inte stöd från någon visuell representationsform i form av exempelvis bilder.

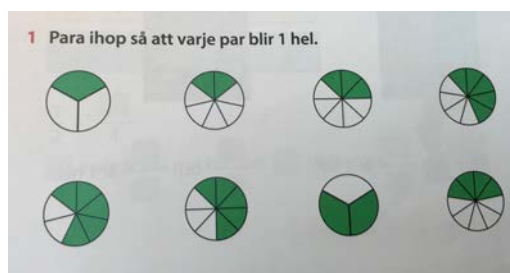
5.1.2 Skriftlig representationsform

En uppgift som är utformad i skriftlig form innebär att uppgiften endast presenteras i skriftlig form, det vill säga endast med bokstäver och symboler. Formen förekom inte i någon av de läroböcker som har använts till analysen. Uppgifterna bestod antingen av endast visuell form eller kombinerad form. Vad det kan bero på, likaså som symbolisk form, är att i de lägre åldrarna är uppgifterna oftast utformade med stöd från en bild och oftast inte bara skrivna som en problemlösningsfråga där det sällan förekommer bildstöd.

5.1.3 Visuell representationsform

Följande exemplen åskådliggör den visuella representationsformen. Exemplen kommer att vara från böckerna Singma matematik 3A, Koll på matematik 3A och Mondo matematik 3A. Matte Eldorado innehöll inga uppgifter som endast bestod av den visuella representationsformen. Med visuell form menas de uppgifter och frågor som endast innefattar figurer, bilder, diagram och/eller tabeller. Diagram 1 visar att visuell form förekommer i tre av de fyra läroböcker som har analyserats. Skillnaden på hur visuell form framställs i de olika läroböckerna skiljer sig inte så mycket åt.

Figur 2 är ett exempel på en uppgift från Singma matematik 3A där eleverna lär sig del av en helhet. Eleverna ska para ihop cirklarnas delar så att varje cirkel bildar en helhet. Figur 2 är ett exempel på hur visuell form framställs. Uppgiften kopplas till visuell form på grund av att det i uppgiften endast förekommer bilder.



Figur. 2: Visuell form. (Yeap, 2015, s. 139).

Figur 3 är från läroboken Koll på matematik 3A. Här ska eleverna i, jämförelse med Figur 2, istället själva skriva hur stor *del* av figuren som är målad för att lära sig en del av en helhet. Men den representationsform som blir synlig här är också visuell form. I Figur 3 blandar de olika geometriska figurer vilket de inte gör i Figur 2.



Figur. 3: Visuellt form. (Almström & Tengvall, 2016, s. 152).

Följande exempel, Figur 4, är från läroboken Mondo matematik 3A som illustrerar en del av en helhet. Eleverna ska i uppgiften skriva hur stor del av smörgåsen barnen tar från helheten. Likt uppgiften i Figur 3 ska eleverna även här se en del av en helhet med hjälp av en bild.



Figur 4: Visuellt form. Del av en helhet. (Brorsson, 2017, s. 112).

5.1.4 Kombinerad form

Nedan följer ett exempel från vardera lärobok på hur kombinerad form kunde se ut.

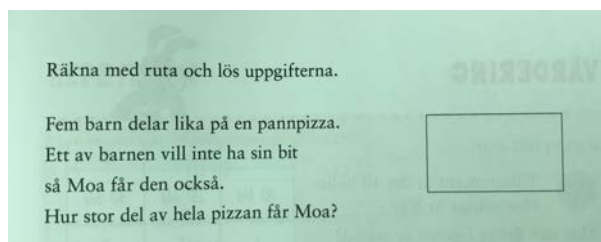
Kombinerad form innebär att två eller flera av formerna symbolisk, skriftlig och/eller visuell form ska användas i samma uppgift. Kombinerad form var den representationsform som också förekom i alla läroböcker som har analyserats. Genom att en uppgift både innehåller symboler och visuell form resulterar det till att elever kan ta hjälp av till exempel en bild för att kunna lösa uppgiften samt att eleverna får arbeta med både visuell och symbolisk form bortsett från om de får stöd från bilden eller ej.

Uppgiften i Figur 5 ur boken Singma matematik 3A innehåller en kombination av två representationsformer – symbolisk och visuell form under del av ett antal avsnittet för tal i bråkform. Eleverna ska i uppgiften dela upp 15 föremål i tredjedelar. Jordgubbarna är inte nödvändiga för att uppgiften ska bli komplett, utan här blir den visuella formen som ett bildstöd för eleverna när de ska lösa uppgiften.

Figur 6 är från läroboken Matte Eldorado 3A. Uppgiften använder sig likt figur 5 också representationsformerna symbolisk och visuell form som blir den kombinerade representationsformen. Likaså som uppgiften i figur 5 kan eleverna lösa uppgiften utan att behöva bilderna som hjälp. Rektangeln blir som ett komplement för eleverna.

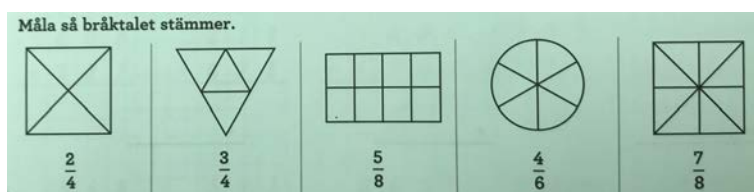


Figur 5: Kombinerad form (Yeap, 2015, s. 160).

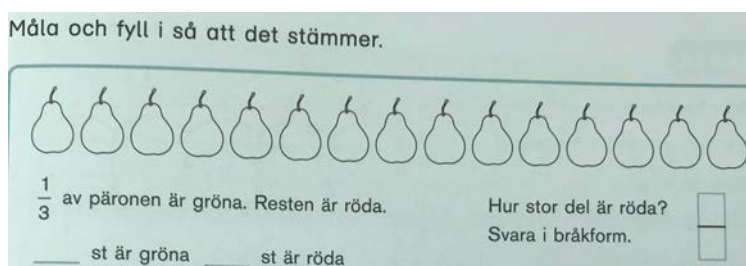


Figur 6: Kombinerad form (Olsson & Forsbäck, 2016, s. 119).

Figur 7 och 8 är uppgifter i kombinerad form från läroböckerna Koll på matematik 3A och Mondo matematik 3A. De skiljer sig lite från uppgifterna i Figur 7 och 8 då uppgifterna där får stöd från den visuella formen. Uppgifterna i Figur 7 och 8 får eleverna inte stöd från den visuella formen, dock får eleverna möjlighet att arbeta både med visuell och symbolisk form vilket också var ett kriteriet för att en uppgift ska få kallas kombinerad form.



Figur 7: Kombinerad form (Almström & Tengvall, 2016, s. 152).



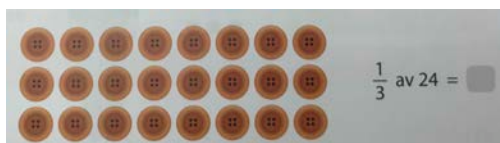
Figur 8: Kombinerad form (Brorsson, 2017, s. 115).

5.1.5 Typ av uppgifter

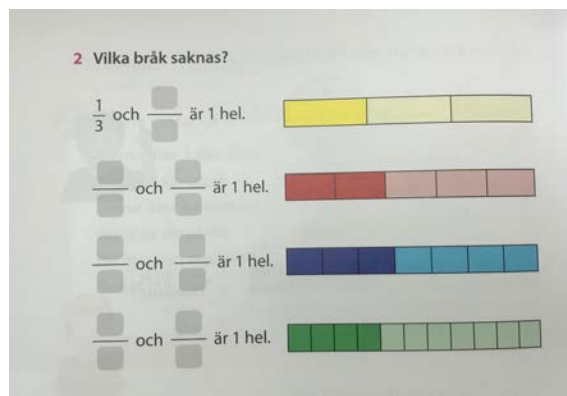
Av analysen framkom det att läroböckerna innehöll kontextuella och icke kontextuella uppgifter. För att en uppgift ska få kategoriseras kontextuell skulle den innehålla föremål som eleven kan koppla till deras vardag, till en verklig kontext samt om det förekom illustrationer av verkliga föremål.

Nedan redovisas ett exempel från varje lärobok som har analyserats. Av de fyra läroböcker som har analyserats var det tre stycken av dem som innehöll både kontextuella och icke kontextuella uppgifter. Läromedlet Koll på matematik 3A innehöll endast uppgifter som var icke kontextuella. Det skiljde sig dock böckerna emellan.

I Singma matematik 3A kunde de uppgifter under avsnitten, del av en helhet och del av ett antal, som var kontextuella (se Figur 9) och icke kontextuella (se Figur 10) se ut så här:

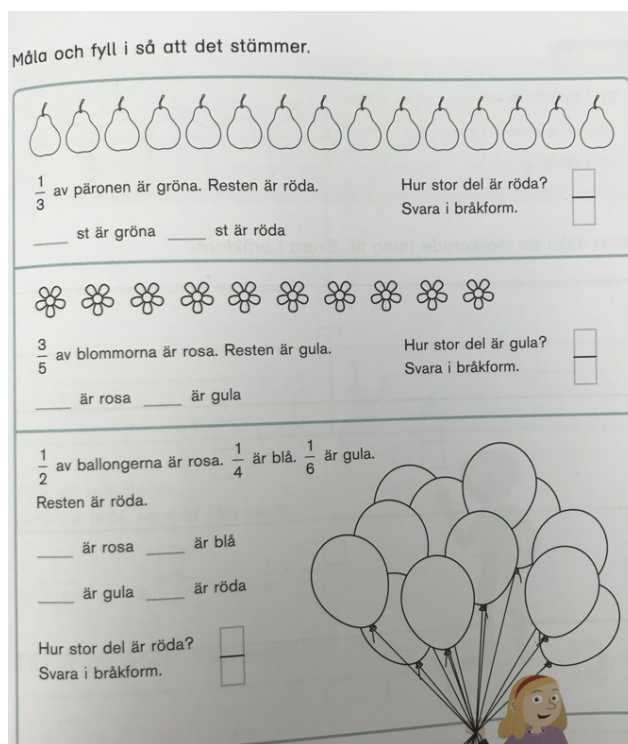


Figur 9: Kontextuell uppgift (Yeap, 2015, s. 160).

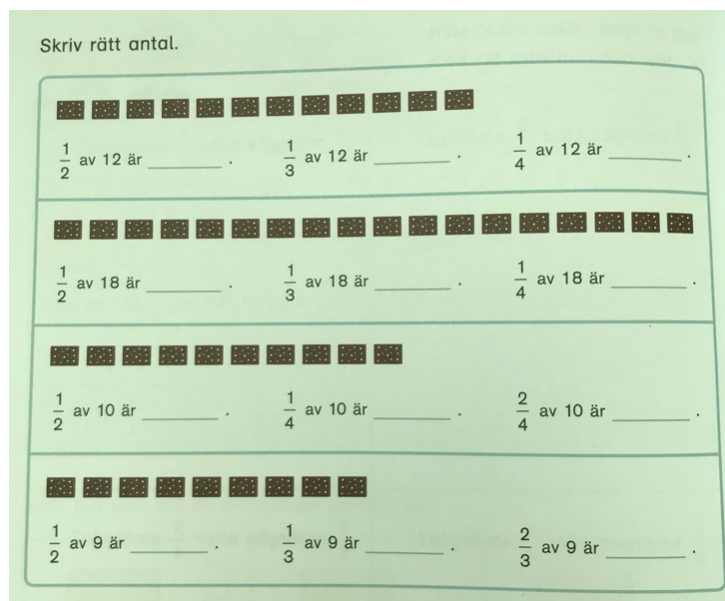


Figur 10: Icke kontextuell uppgift (Yeap, 2015, s. 138).

I figur 11 innehåller alla tre uppgifterna vardagsnära bilder för eleverna så som illustrationer av päron, blommor och ballonger vilket gör att uppgifterna blir kontextuella. I jämförelse med figur 12, där eleverna ska dela in ett antal i olika stora delar där de också får stöd i form av bild, blir inte uppgiften lika kontextualiserad som i figur 11. Ett krav för att en uppgift ska vara kontextuell var att bilden eller utformningen på frågan ska vara elevnära. Uppgiften i figur 12 kan den visuella formen ses som endast rektanglar. Formen är inte främmande för eleverna men uppgiften blir inte elevnära utifrån kriterierna. Det nämns heller inga ord som eleven kan koppla till föremålen så som i figur 11 att orden päron, blommor och ballonger är utskrivna.

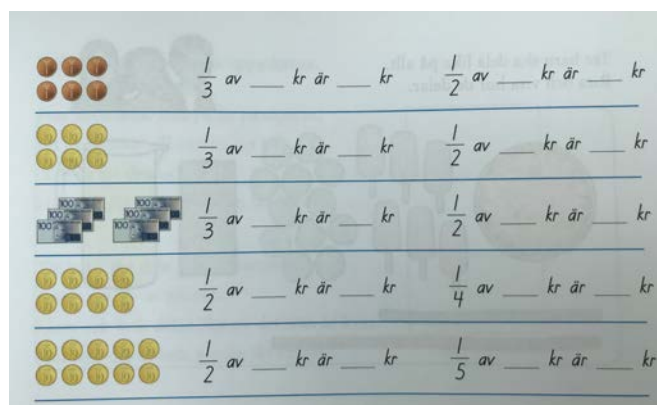


Figur 11: (Brorsson, 2017, s. 115).

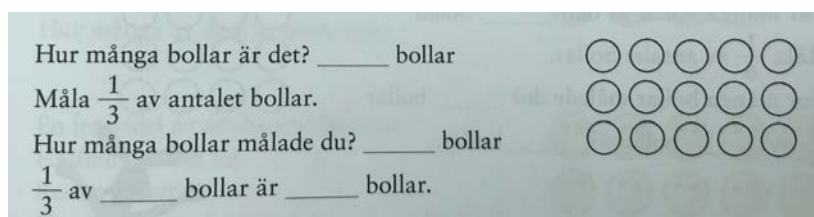


Figur 12: (Brorsson, 2017, s. 114).

Matte Eldorado 3A kunde de uppgifterna som var kontextuella (se Figur 13) och icke kontextuella (se Figur 14) se ut så här:



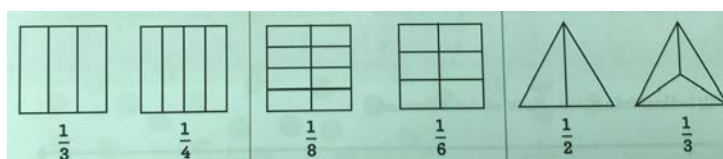
Figur 13: Kontextuell uppgift (Olsson & Forsbäck, 2016, s. 117).



Figur 14: Icke kontextuell uppgift (Olsson & Forsbäck, 2016, s. 115).

Koll på matematik 3A innehöll endast uppgifter som var icke kontextuella. Figur 15 som visas följande är en uppgift där eleverna ska fylla i angivet tal i figuren som visas ovanför. Under avsnittet del av en helhet och del av ett antal i läroboken får eleverna inte se några uppgifter som innehåller vardagsnära bilder utan författarna använder sig endast av geometriska figurer. När avsnitten del av en helhet och del av ett antal introduceras i boken belyser författarna inte

de begreppen utan det är någonting en erfaren person som har lärt sig hur en del av en helhet ser ut och en del av ett antal kan se ut i matematiken som ser det. I alla de andra böckerna skrivs det ut i skrift när eleverna ska läras sig de begreppen.



Figur 15: Icke kontextuell (Almström & Tengvall, 2016, s. 153).

5.2 Sammanfattning

I läroböckerna är den kombinerade formen vanligast som innehåller en kombination mellan visuell och symbolisk form. De uppgifter som endast innehöll visuell form förekom också relativt ofta i läroböckerna. Det var endast ett läromedel som symbolisk form förekom – Singma matematik 3A. Kontextuella och icke kontextuella uppgifter förekom i alla böcker förutom en då den läroboken endast innehöll icke kontextuella uppgifter. Det var i boken Koll på matematik 3A. Bilderna som fanns i uppgifterna var geometriska figurer och inte kopplade till vardagliga situationer.

6. Diskussion

I kommande avsnitt kommer tidigare forskning, teoretisk anknytning, metoddiskussion och fortsatt forskning att diskuteras.

Syftet med studien var att identifiera vilka möjligheter läroböcker erbjuder elever att utveckla deras begreppsförmåga inom området tal i bråkform. Fokus låg på att undersöka bråk som del av helhet och bråk som del av antal. För att kunna uppnå syftet ställdes följande frågor; Hur används representationsformer i avsnitten del av helhet och del av antal i matematikböcker och vilka dominerar och i vilken kontext framställs uppgifterna i del av helhet och del av antal? Resultatet grundar sig på de fyra läroböcker som har analyserats – Singma matematik 3A, Mondo matematik 3A, Matte Eldorado 3A och Koll på matematik 3A. De representationsformer som förekom i läroböckerna har analyserats utifrån Der-Chings (2017) representationsformer symbolisk, skriftlig, visuell och kombinerad form som synliggör olika sätt att presentera en uppgift på. Analysen utgick även från huruvida de uppgifter som förekom i läroböckerna är kontextuella eller inte. Det har visat sig att de representationsformer som dominerar är visuell och kombinerad form där kombinationen mellan visuell och symbolisk form var den vanligaste. Nästan alla läroböcker som har analyserats innehåller kontextuella och icke kontextuella uppgifter. Det var bara i en bok som innehöll icke kontextuella uppgifter. Det har också visat sig att de kontextuella uppgifterna från Singma matematik 3A endast förekom under avsnittet del av ett antal, lika så som i Matte Eldorado 3A. I Koll på matematik 3A var det endast fem uppgifter som övade del av ett antal utav 22 uppgifter. De andra bestod av bråk som del av en helhet.

6.1 Resultatdiskussion

6.1.1 Visuell representationsform

Huvudresultatet i studien är att de representationsformer som förekommer i de fyra läroböcker som har analyserats var symbolisk, visuell och kombinerad form. De representationsformer som dominerade var visuell och kombinerad form. I den kombinerade formen var kombinationen mellan visuell och symbolisk form den vanligaste. I likhet med vad forskning visar stämmer det överens med vad Der-Ching (2017) får fram i sin studie. I studien framkom det att i den ena

boken förekom fler uppgifter med bildstöd för att förtydliga begreppen och uppgifterna. Det här kopplas till representationsformen visuell form. Det förekom ett stort urval av bildpresentationer för att visa det matematiska begreppet på ett tydligare sätt för eleven så som i de läroböckerna som har analyserats i den här studien. Den visuella formen förekom i tre av fyra läroböcker som har analyserats. Det kan i Diagram 1 utläsas att det i en lärobok förekom det inga uppgifter som var i visuell form. Den visuella formen kan vara enligt Der-Ching (2017) ett användbart hjälpverktyg när eleverna ska lära sig tal i bråkform. Uppgifterna är oftast utformade på ett lättare sätt, dock ger det inte lika mycket utmaning för eleverna.

För att göra en koppling till hur de visuella uppgifterna var utformade i avsnitten del av en helhet och del av ett antal blev den visuella formen mest synlig under de uppgifter som behandlade del av en helhet. I en av läroböckerna fick eleverna i uppgifterna som behandlade del av en helhet ange hur stor del av smörgåsen som var tagen av den hela smörgåsen. Här blir eleverna tvingade att ta hänsyn till helheten vilket Nagy (2017) menar är en viktig del att lära sig då elever har uppvisat svårigheter kring det här. Dock är uppgifterna i boken utformade på likadant sätt vilket gör att eleverna går miste om att få syn på olika varianter av en helhet. I en annan lärobok var uppgiften som innefattade visuell form också under avsnittet del av en helhet. Det var inga visuella uppgifter som förekom under del av ett antal. I en tredje lärobok fick eleverna med hjälp av den visuella formen öva lika mycket på del av en helhet och del av ett antal. Även här var det dock inte stor variation mellan uppgifterna då de i varje uppgift skulle ange hur stor del av figuren som var målad. Å ena sidan får eleverna flera möjligheter att öva på samma sak men å andra sidan får eleverna inte chans att prova själva att dela upp någonting i lika stora delar med hänsyn till helheten. De får heller inte syn på kontrasten, att någonting kan delas olika (Nagy, 2017).

6.1.2 Kontextuella och icke kontextuella uppgifter

Huruvida i vilken kontext en uppgift förekom i visade sig vara, efter att analysen var gjord, kontextuell och/eller icke kontextuell. Alla läroböcker innehöll båda två förutom ett läromedel som endast innehöll icke kontextuella frågor. Uppgifter som är kontextuella hjälper elever att förstå vikten av matematik i vårt vardagliga liv (Der-Ching, 2017). Likaså nämner även Nagy (2017) att det för elever blir lättare att få fram det rätta svaret när de fick höra uppgiften i en konkret kontext där cirklarna föreställde pizzor. I uppgiften skulle eleverna svara hur stor del av två cirklar som var skuggade där hela den ena cirkeln var skuggad och en del var skuggad i den andra. Det fanns läroböcker som innehöll noll uppgifter som eleven kunde koppla till vardagen vilket kan leda till att eleverna inte lika lätt utvecklar deras kunskaper inom området del av helhet och del av antal. Det var också den lärobok som innehöll minst sidor med bråk i jämförelse med de andra läroböckerna vilket också kan ha en påverkan på deras lärande att de inte ges tillräckligt med innehåll för att de ska lära sig. De icke kontextuella uppgifterna som förekom i ett utav böckerna bestod endast av fem uppgifter som behandlade del av ett antal och alla uppgifterna var utformade på likadant sätt. Eleverna får här i liten utsträckning chans att öva på del av ett antal. Kilborn (2014) menar att barn måste få en förståelse för det här i tidig ålder. Elever behöver få en stabil grund för att skapa bättre förutsättningar när de ska lära sig andra delar inom matematik. De kontextuella uppgifterna förekom i en utav böckerna både under avsnitten del av en helhet och del av ett antal men skiljde sig åt från en annan lärobok där sådana uppgifter endast förekom under del av ett antal. Likaså i en tredje lärobok förekom de kontextuella uppgifterna endast under avsnittet del av ett antal, således innehåller avsnittet del av en helhet i läroböckerna ytterst få uppgifter som kan kallas kontextuella. Uppgifter som integrerar verkliga situationer hjälper elever att förstå vikten av matematik i vardagen men ökar också deras intresse för matematik samt motivationen när de ska lösa uppgifterna.

I alla fyra läroböcker som har analyserats förekommer det endast uppgifter där eleven till exempel ska ange hur stor del av figuren som är målad eller dela en helhet i fjärdedelar. För att göra en koppling till variationsteorin förekommer det inte någon typ av kontrastering i läroböckerna. Kontrastering innebar att elever måste se kontraster till det som ska läras. De måste kunna erfara en skillnad för att kunna urskilja vilka likheter som finns. Lärandeobjektets kontraster måste påpekas. För att eleverna ska veta vad en helhet eller ett antal innebär behöver de också veta vad det inte är (Lo, 2014). I böckerna förekommer det enbart uppgifter som demonstrerade vad eleverna skulle göra för att uppgiften skulle bli korrekt. De fick inte se några exempel på uppgifter som var fel. Liksom Kullberg m.fl. (2017) är det i matematikundervisningen en viktig sak att belysa att det finns olika sätt att uttrycka matematiskt innehåll.

I introduktionen till området del av helhet och del av antal i en av läroböckerna blir det inte tydligt för eleverna att det är det de ska lära sig då författarna väljer att inte benämna del av helhet och del av antal i ord utan bara genom att visa med hjälp av geometriska figurer. Det viktiga är då att läraren är lyhörd och noterar att författarna har valt att inte benämna begreppen och visa för eleverna vad det är som de ska lära sig. Dessutom ska läraren också vara medveten om vad lärandet syftar på och det går inte att bara prata om lärandet utan att vi nämner det som ska läras, alltså lärandeobjektet (Lo, 2014). Lärandeobjektet fokuserar på vad som ska läras i början av en process och det är då extra viktigt att läraren inte blir passiv bara för att hen har läroboken som till största del styr undervisningen.

6.2 Metoddiskussion

Undersökningen baseras på en analys av fyra olika läromedel. Analysen utgick ifrån Der-Chings (2017) definiering av fyra olika representationsformer samt hur uppgifter är kontextuella eller icke kontextuella. Hade jag valt att använda mig av ytterligare instrument för att samla in resultat hade jag vid förmodan fått ett djupare resultat. Två läromedel valdes bort på grund av att de inte innehöll tal i bråkform då det behandlades i b-boken som är avsedd för termin två. Kravet för att ett läromedel skulle kunna användas till analysen var att de skulle behandla tal i bråkform och vara anpassade för första terminen i årskurs tre. Det gjorde att två läromedel valdes bort och hade studien innehållit fler böcker hade tillförlitligheten av studien höjts. Hade analysen gjorts av någon annan person hade resultatet också kunnat se annorlunda ut.

Ett bekvämlighetsurval (Bryman, 2011) gjordes när läroböckerna skulle väljas ut och kanske hade det varit mer fördelaktigt att välja böcker som är vanligt förekommande under den verksamhetsförlagda utbildningen.

Vad som också har påverkat insamlingen av data har givetvis varit Der-Chings (2017) representationsformerna samt hur uppgifterna i läroböckerna har tolkats som kontextuella och/eller icke kontextuella utifrån hur de har definierats av honom. På grund av att analysverktyget som nämns ovan bygger på forskning styrker det resultatet. Dock kan en felkälla ha uppstått då vissa uppgifter i läroböckerna var svårtolkade. Det är också svårt att få reda på om eleverna lär sig tillräckligt mycket genom att endast göra en tolkning av läromedel då jag inte vet hur lärarna väljer att använda läroboken. Märker läraren att eleverna inte behärskar ett arbetsområde efter att ha arbetat med det i läroboken, eller inte får tillräckligt med kunskap genom boken kanske hen väljer att komplettera med stenciler eller liknande.

7. Slutdiskussion

7.1 Slutsatser

Det är viktigt att läroböcker i matematik utgår från läroplanen (Skolverket, 2018), att uppgifterna innehåller olika och betydande representationsformer samt att de innefattar uppgifter som kan kopplas till elevens vardag. Dock tror jag inte att bara för att några uppgifter inte är kontextuella att det hämmar elevernas utveckling. De geometriska figurerna är naturligtvis också objekt som eleverna känner igen. Men är en uppgift utformad i elevnära kontext främjar det elevens lust till att lära samt att få möjlighet till att lära. Den representationsform som dominerade i de läroböcker som har analyserats var den kombinerade formen. Den förekom i alla läroböckerna. Dock var det i endast två läroböcker som den förekom under både del av en helhet och del av ett antal avsnittet. Eleverna fick i uppgifterna stöd från både bilder och symboler.

Under avsnittet del av en helhet i var det endast en lärobok som innehöll uppgifter som var kontextuella. I de andra böckerna under avsnittet förekom det endast icke kontextuella uppgifter i form av geometriska figurer. Däremot innehöll avsnittet del av ett antal i böckerna fler kontextuella uppgifter. Det var endast en lärobok som inte innehöll sådana uppgifter under avsnittet. Vad som ska ha i åtanke är att läroböckerna som har analyserats innehåller olika många sidor med bråk vilket påverkar resultatet. Det var en lärobok som innehöll några få uppgifter som bestod av symbolisk form. En teori om vad det kan bero på är att den representationsformen är mer vanligare i de högre åldrarna då eleverna generellt sätt har nått en högre kunskapsnivå inom matematiken. Det anses förmodligen inte behövas ha stöd från bilder i uppgifterna när de ska lösa dem. Ytterligare en slutsats som kan dras efter analysen är att det i läroböckerna finns bra möjligheter för eleverna att utveckla deras begreppsförmåga inom områdena del av helhet och del av antal sett till de betydande representationsformerna. Dock visar det sig att eleverna i en av böckerna inte får möjlighet att kunna göra en koppling mellan skolmatematiken och matematiken i vardagen på grund av att avsnittet inte innehåller några uppgifter som är kontextuella. Forskningsfrågorna besvaras på så sätt att jag i studien fick reda på representationsformer används i avsnitten del av en helhet och del av ett antal i matematikböcker samt vilken typ av representationsform som dominerar. Genom resultatet besvarades också frågan i vilken kontext uppgifterna framställs i under del av en helhet och del av ett antal.

I de fyra läroböcker som har analyserats visar resultatet att det skiljer sig med uppgifter av tal i bråkform. Med tanke på det kan en slutsats dras att kontextuella uppgifter i en av läroböckerna kan förbättras. Symbolisk form förekom endast i en lärobok till skillnad från vad teorin visade där symbolisk form förekommer mer frekvent. Studien visar att det skiljer sig mellan läroböckernas innehåll sett till representationsformer samt huruvida uppgifterna är kontextuella eller inte vilket man som lärare bör vara medveten om.

7.2 Didaktiska implikationer

Arbetet har gett mig en tydligare bild av hur olika läromedels innehåll framställs i form av olika representationsformer och huruvida uppgifterna är kontextuella eller inte.

Som blivande lärare har det gett mig en tanke om att endast använda läromedel i undervisningen inte alltid är gynnsamt för eleven, beroende på hur läromedlet är uppbyggt och vad det innehåller. Dock är läromedlet en bra utgångspunkt som ger instruktionsidéer för olika arbetsområden men även som en lektionsplanerare för läraren. Oftast använder lärare de läromedel som finns tillgängligt på skolan de arbetar på. Av erfarenhet från den verksamhetsförlagda utbildningen

ser jag att läroböcker i matematik är dominerande. Lärare har tyckt att de inte är helt nöjda med materialet men att de trots allt väljer att fortsätta ha det som undervisningsmaterial.

7.3 Fortsatt forskning

I studien har endast böckerna under första terminen analyserats och för att få en helhetsbild hade det varit av intresse att analysera böckerna som berör termin två i årskurs tre. Det skulle även vara intressant att använda fler läroböcker vid analysen för att få ett bredare perspektiv. Avslutningsvis skulle det vara intressant att undersöka hur lärare använder sig av läroböckerna i deras undervisning och även ta reda på hur de ställer sig till läroböcker i undervisningen.

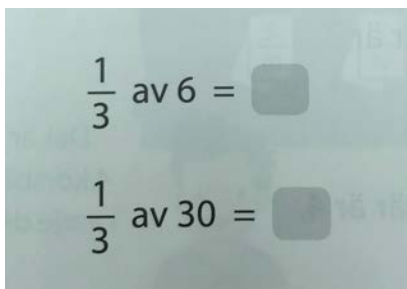
7. Referenser

- Almström, H., & Tengvall, P (2016). *Koll på matematik 3A*. Stockholm: Sanoma Utbildning
- Ball, D. L. (Red.). (1993). *Rational numbers – an intergration of research*. Mahwah New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates
- Baroody, A.J., Lai, M., & Mix, K.S. (2006). The development of young childrens's early number and operation sense and its implications for early childhood education. In B. Spodek & O.N. Saracho (Eds.), *Handbook of research on the education of young children* (2nd ed.)
- Brorsson, Å. (2017). *Mondo matematik 3A*. Malmö: Gleerups Utbildning AB
- Bryman, A. (2011). *Samhällevetenskapliga metoder*. Malmö: Liber AB
- Der-Ching, Y. (2017). Study of fractions in elementary mathematics textbooks from Finland and Taiwan. *Educational Studies*, 44:2, 190-211, doi: 10.1080/03055698.2017.1347493
- Empson, S. B. (1999). Equal sharing and shared meaning: The development of fraction concepts in a first-grade classroom. *Cognition and Instruction*, 17(3), 283-342. doi: 10.1207/S1532690XCI1703_3
- Engström, A. (1997). *Reflektivt tänkande i matematik: om elevers konstruktioner av bråk*. Stockholm: Almqvist och Wisell International.
- Heikka, L. (2015). *Matematiklärarens målkommunikation: en jämförelse av elevernas uppfattningar, lärarens beskrivningar och den realiserade undervisningen* (Licentiatuppsats) Luleå: Luleå tekniska universitet Hämtad från <http://tu.diva-portal.org/smash/get/diva2:990282/FULLTEXT03.pdf>
- Johansson, M. (2006). *Teaching mathematics with textbooks*. (Doktorsavhandling, institutionen för matematik) Luleå: Hämtad från <http://tu.diva-portal.org/smash/get/diva2:998959/FULLTEXT01.pdf>
- Kilborn, W (2013). *Bråk i kursplanerna och elevers kunskaper om bråk*. Hämtad från <https://larportalen.skolverket.se/LarportalenAPI/api-v2/document/name/P03WCPLAR042104>
- Kilborn, W. (2014). *Tal i bråkform och decimalform – en röd tråd*. Nationellt centrum för matematikutbildning (NCM). Göteborg: Göteborgs universitet
- Kullberg, A., Runesson Kempe, U., & Marton, F. (2017). What is made possible to learn when using the variation theory of learning and teaching mathematics?. *ZDM Mathematics Education*, 49:559-569. doi: 10.1007/s11858-017-0858-4
- Lo, M-L. (2014). *Variationstero – för bättre undervisning och lärande*. Lund: Studentlitteratur AB
- Löwing, M. (2016). *Diamant – diagnoser i matematik: ett kartläggningmaterial baserat på didaktisk analys* (Avhandling, Göteborg studies in educational sciences, 392). Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis. Hämtad från <https://www.skolporten.se/app/uploads/2016/11/gupea-2077-47607-2-4.pdf>
- Mack, N. (1990). Learning fractions with understanding: Building on informal knowledge. *Journal for research in mathematics education*, 21(1), 16-32.
- Nagy, C. (2017). *Fler bråk i matematikundervisningen*. Halmstad: Arkitektkopia
- Olsson, I., & Forsbäck, M. (2016). *Matte Eldorado 3A*. Stockholm: Natur Kultur Läromedel
- Okeeffe, L (2013). A framework for textbook analysis. *International review of contemporary learning research*, No. 1, 1-13.
- Runesson, U. (1999). *Variationens pedagogik. Skilda sätt att behandla ett matematiskt innehåll* (Doktorsavhandling, Göteborg studies in educational sciences). Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.
- Skolverket. (2003) *Lusten att lära – med fokus på matematik*. Stockholm: Statens skolverk

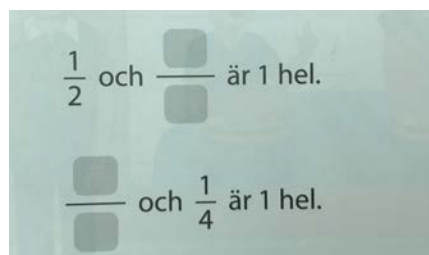
- Skolverket. (2016). *Läroplan för förskolan Lpfö98: Reviderad 2016*. Hämtad från <https://www.skolverket.se/publikationsserier/styrdokument/2016/laroplan-for-forskolan.-reviderad-2016>
- Skolverket. (2018). *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet 2011: reviderad 2018*. (5:e uppl.) Hämtad från <https://www.skolverket.se/download/18.6bfaca41169863e6a65d48d/1553968042333/pdf3975.pdf>
- Säljö, R. (2014). Den lärande människan – teoretiska traditioner. I U. P Lundgren, R. Säljö, C. Liberg (Red.), *Lärande, skola, bildning: grundbok för lärare* (s. 298-301). Stockholm: Natur och kultur.
- Vetenskapsrådet. (1999). *Forskningsetiska principer inom humanistisk-samhällsvetenskaplig forskning*. Stockholm: Vetenskapsrådet.
- Yeap, B-H. (2018). *Sigma matematik 3A*. Stockholm: Natur Kultur Läromdel

Bilagor

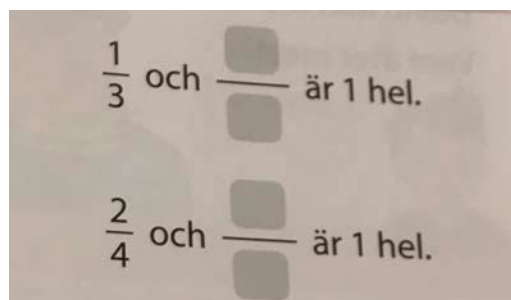
Bilaga 1 Uppgifter som innefattar symboliska form under del av ett antal avsnittet


$$\frac{1}{3} \text{ av } 6 = \square$$
$$\frac{1}{3} \text{ av } 30 = \square$$

(Yeap, 2015)


$$\frac{1}{2} \text{ och } \frac{\square}{\square} \text{ är 1 hel.}$$
$$\frac{\square}{\square} \text{ och } \frac{1}{4} \text{ är 1 hel.}$$

(Yeap, 2015)


$$\frac{1}{3} \text{ och } \frac{\square}{\square} \text{ är 1 hel.}$$
$$\frac{2}{4} \text{ och } \frac{\square}{\square} \text{ är 1 hel.}$$

(Yeap, 2015)

Bilaga 2 Uppgifter som innefattar kombinerad form under del av en helhet avsnittet

2 Vilka bråk saknas?

$\frac{1}{3}$ och $\frac{2}{3}$ är 1 hel.

$\frac{2}{4}$ och $\frac{2}{4}$ är 1 hel.

$\frac{3}{5}$ och $\frac{2}{5}$ är 1 hel.

$\frac{4}{8}$ och $\frac{4}{8}$ är 1 hel.

(Yeap, 2015)

3 Vilka bråk saknas?

$\frac{1}{3}$ och $\frac{2}{3}$ är 1 hel. $\frac{1}{9}$ och $\frac{8}{9}$ är 1 hel.

(Yeap, 2015)

4 Vilka bråk saknas?

$\frac{2}{3}$ och $\frac{1}{3}$ är 1 hel.

$\frac{1}{4}$ och $\frac{3}{4}$ är 1 hel.

(Yeap, 2015)

5 Hur många fjärdedelar är $\frac{1}{2}$?

$\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$

$\frac{1}{2}$ halv är lika mycket som 2 fjärdedelar.

(Yeap, 2015)

Vilket bråk visar varje cirkel? Skriv rätt bokstav under.

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{3}{5}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{2}{6}$ $\frac{5}{6}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{2}{8}$ $\frac{5}{8}$

R A S O B K U S L R M S I D E

_____ R _____

Måla bråk så att det stämmer.

K A R U S E L L

(Olsson & Forsbäck, 2016)

Skriv vilken sorts delar som remsorna är vikta i.

tredjedelar

Måla 2 delar. $\frac{2}{3}$

Måla 3 delar. _____

Måla 5 delar. _____


Måla 7 delar. _____

(Olsson & Forsbäck, 2016)

Bilaga 3 Uppgifter som innefattar kombinerad form under avsnittet del av ett antal

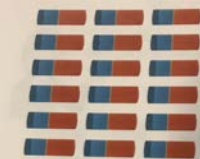
VI ÖVAR

1 Dela i fjärdedelar. Hur många är det i varje del?



$\frac{1}{4}$ av 12 =

(Yeap, 2015)




$\frac{1}{3}$ av 18 =

(Yeap, 2015)




$\frac{1}{4}$ av 16 =

(Yeap, 2015)



$\frac{1}{4}$ av 24 =

Vad är $\frac{3}{4}$ av 24?



(Yeap, 2015)



$\frac{1}{3}$ av 24 =

(Yeap, 2015)


Del av antal

Hur många rutor har chokladkakan? _____ rutor

Måla $\frac{1}{3}$ av chokladkakan.

Hur många rutor målade du? _____ ruta

$\frac{1}{3}$ av _____ rutor är _____ ruta.




(Olsson & Forsbäck, 2016)

Hur många rutor har chokladkakan? _____ rutor


Måla $\frac{1}{3}$ av chokladkakan.


Hur många rutor målade du? _____ rutor


$\frac{1}{3}$ av _____ rutor är _____ rutor.



(Olsson & Forsbäck, 2016)


Hur många bollar är det? _____ bollar 


Måla $\frac{1}{3}$ av antalet bollar. 


Hur många bollar målade du? _____ bollar 

$\frac{1}{3}$ av _____ bollar är _____ bollar.

(Olsson & Forsbäck, 2016)


Hur många bollar är det? _____ bollar 

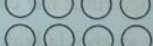
Måla $\frac{1}{4}$ av antalet bollar. 

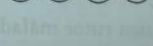
Hur många bollar målade du? _____ bollar 

$\frac{1}{4}$ av _____ bollar är _____ bollar.

(Olsson & Forsbäck, 2016)


Hur många bollar är det? _____ bollar 


Måla $\frac{1}{3}$ av antalet bollar. 

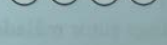
Hur många bollar målade du? _____ bollar 

$\frac{1}{3}$ av _____ bollar är _____ bollar.

(Olsson & Forsbäck, 2016)


Hur många bollar är det? _____ bollar 


Måla $\frac{1}{2}$ av antalet bollar. 


Hur många bollar målade du? _____ bollar 

$\frac{1}{2}$ av _____ bollar är _____ bollar.

(Olsson & Forsbäck, 2016)

Hur många bollar är det? _____ bollar 

Måla $\frac{1}{6}$ av antalet bollar. 

Hur många bollar målade du? _____ bollar 

$\frac{1}{6}$ av _____ bollar är _____ bollar.

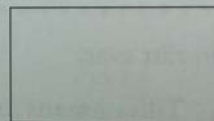
(Olsson & Forsbäck, 2016)

Räkna med ruta och lös uppgifterna.

Fem barn delar lika på en pannpizza.

Ett av barnen vill inte ha sin bit
så Moa får den också.

Hur stor del av hela pizzan får Moa?





(Olsson & Forsbäck, 2016)

Rita och lös. 😊 😊 😞 😊

Hälften av alla smilisar ler.
En tredjedel av dem är sura.
Resten av dem skrattar.
Hur många smilisar skrattar?

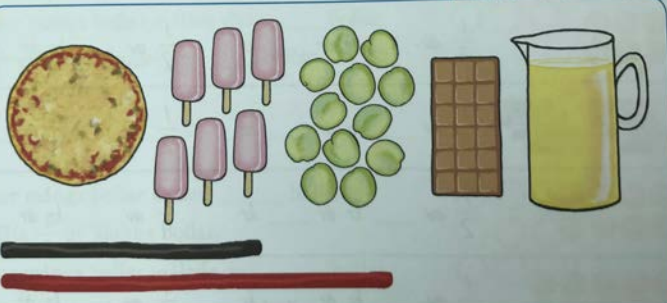
Hälften av smilisarna ler.
En fjärdedel av dem är sura.
En åttondel skrattar.
Hur många av dem är utan mun?

En femtedel av smilisarna skrattar.
Hälften av dem ler.
Resten är sura.
Hur många smilisar är sura?



(Olsson & Forsbäck, 2016)

Tre barn ska dela lika på allt.
Rita och visa hur de delar.

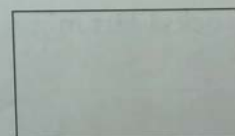


(Olsson & Forsbäck, 2016)

Moa har en ask med 600 pärlor.

Hon ger bort $\frac{2}{3}$ av pärlorna.

Hur många pärlor har hon kvar?



(Olsson & Forsbäck, 2016)



Måla $\frac{1}{2}$ av antalet bollar röda, $\frac{1}{4}$ gula och $\frac{1}{8}$ blå.

(Olsson & Forsbäck, 2016)

Tre barn ska dela på en pannpizza.
Anton tar $\frac{1}{2}$ av pizzan.
Liam och Erik delar lika på det som är kvar.
Hur stor del av hela pizzan får Liam?

(Olsson & Forsbäck, 2016)

Fyra barn ska dela på en pannpizza.
Sara vill ha $\frac{1}{4}$. Lukas vill ha $\frac{1}{2}$ av pizzan.
Mira och Wilma vill dela lika
på det som sedan är kvar.
Hur stor del av pizzan får Wilma?

(Olsson & Forsbäck, 2016)

Sara har en burk med 120 pärlor.
Hon ger $\frac{1}{2}$ av pärlorna till Mira.
Sedan ger hon $\frac{1}{3}$ av pärlorna
som är kvar till Wilma.
Hur många pärlor får Wilma?

(Olsson & Forsbäck, 2016)

Bilaga 4 Uppgifter som innefattar visuell form under del av ett antal avsnittet

Hur stor andel av antalet kulor är målade? Skriv i bråkform.

 <input type="text"/> <input type="text"/>	 <input type="text"/> <input type="text"/>	 <input type="text"/> <input type="text"/>	 <input type="text"/> <input type="text"/>	 <input type="text"/> <input type="text"/>
--	--	--	--	--