GÖTEBORGS UNIVERSITET

Geometriundervisning

Dess ursprung, dess didaktiska ingångar, dess digitala potential

Simon Sandell & Erik Wickenberg
Ämneslärarprorammet med inriktning mot arbete
i gymnasieskolan

Uppsats/Examensarbete: 15 hp
Kurs: LGMA2G
Nivå: Grundnivå
Termin/år: HT/2018
Handledare: Jan Stevens
Examinator: Jakob Björnberg
Kod: HT18-3001-005-LGMA2G

Nyckelord: Geometriundervisning. van Hiele. Piaget. Euklidisk geometri. Digitalisering av skolan. GeoGebra. Digitalahjälpmedel.

Sammanfattning

Rapporten ämnar ge svar på frågor kring geometrins framväxt, den axiomatiska geometrins uttåg ur skolan samt vilka pedagogiska och tekniska hjälpmedel som finns att tillgå i dagens skola. Detta för att ge en god grund för lärare som bedriver eller ämnar bedriva geometriundervisning. Den data som utgör underlaget för att svara på ovanstående frågor hämtades med hjälp av en litteraturstudie.

I resultatets första del skildras en historisk återspegling. Denna inleds med en tillbakablick till antiken och den euklidiska geometrin. Därefter skildras framväxten av geometriundervisning i den svenska skolan från år 1842 till ca 1980. Denna återspegling avslutas med en kort presentation av nutidens krav på geometriundervisning. Efter den historiska skildringen följer en redogörelse för didaktiska ingångar, med fokus på tre forskare. Inledningsvis presenteras teorier och modeller av makarna Pierre och Dina van Hiele. Detta följs av beskrivningar rörande Jean Piagets arbeten, för att sedan avrundas med en kortfattad komparation av deras teorier. I resultatets sista del behandlas digitaliseringen av skolan och tekniska hjälpmedel. Förutom en redogörelse för vad hjälpmedlen innebär gör även författarna till denna text ett försök att anpassa dessa till verklighetstrogna lärandesituationer.
Arbetet avslutas sedan med en diskussion som täcker resultat, metod och framtida forskningsfrågor.

Förord

Geometri har genom årtusenden varit en grundsten inom utbildning. Den har samlat lärare och elever i ett gränsland mellan den konkreta verkligheten och den abstrakta matematiska världen. Få argumenterar idag emot att geometrin skall vara en del av svenska elevers skolgång. Men frågorna som länge hopat sig över skoldebatten är inom vilken form geometriundervisningen skall bedrivas, hur den skall passa in i den moderna skolan och vad förvaltningsmyndigheter inom skolan samt lärarprofessionen vill att eleverna skall ta med sig från denna undervisning. För att bringa klarhet i hur framtiden för geometriundervisning skall se ut bestämde vi oss för att söka svaren på några frågor. Hur har undervisningen i geometri utformats och förändrats genom åren? Vilken forskning och vilka modeller har legat till grund för den utveckling geometriundervisningen haft sedan moderniseringen under 1960-talet? Hur kan geometriundervisning bedrivas med hjälp av den digitala teknik som finns till förfogande? Arbetet har sedan cirkulerat kring att besvara dessa frågor, något som aldrig kunde gjorts utan hjälp från två engagerade personer. Vi vill därför ta tillfället i akt att tacka vår mentor Jan Stevens som med goda råd väglett oss genom denna uppsats. Stort tack riktas även till Johanna Pejlare för expertrådgivning om geometrihistoria samt tips på strukturupplägg och relevanta litterära verk.

Innehållsförteckning

Figurförteckning

1 Inledning

Vid projektets början togs beslutet att skriva ett arbete inom geometri, då detta är ett centralt och uråldrigt ämne inom matematiken. Dessutom delar författarna en förkärlek till historia, varvid geometrihistoria kändes som en passande komponent i uppsatsen. Enighet fanns även gällande att en historisk tillbakablick bidrar med en angenäm samt bildande upplevelse för gemene läsare. Eftersom uppsatsen riktar sig till lärare förefaller det sig även naturligt att pedagogiska ingångar bör återfinnas i denna. Även om den historiska framväxten har en central del i framställningen är det av högsta vikt, för författarna, att arbetet dessutom ligger i tiden. Därför valdes, i resultatets senare del, att fokusera på praxisnära situationer med digitalisering av skolans geometriundervisning som utgångspunkt.

1.1 Syfte

Syftet med detta arbete är att utifrån historiska och nutida analyser formulera en översikt av geometriundervisning i den svenska skolan. Översikten ämnar sedan bygga en grundförståelse för geometriundervisning och ge förståelse för orsaker till geometriundervisningens utveckling. Denna syftar till att översiktligt redogöra för olika tillvägagångssätt och verktyg lärare kan använda sig av i sitt arbete. Ambitionen med arbetet är att genom studier av styrdokument samt historie-, didaktik- och matematikvetenskapliga verk skildra en lärares möjligheter till geometriundervisning i moderna svenska lärandemiljöer, vilket lett fram till följande frågeställningar.

- Hur har geometrins framväxt sett ut inom den svenska skolan?
- Varför övergick den axiomatiska geometrin till dagens geometriundervisning?
- Vad säger relevant ämnesdidaktisk forskning om geometriundervisning?
- Hur kan tekniska hjälpmedel stödja elevers kunskapsutveckling inom geometri?

2 Metod

Arbetet är en litteraturstudie av vetenskapliga artiklar och böcker rörande dåtida samt aktuell forskning om geometri och geometriundervisning. Fokus har varit att, utifrån frågeställningarna, söka och avgränsa ett tvärvetenskapligt område. Området skulle innefatta en historisk bakgrund till geometriämnets framväxt både vetenskapligt och i skolmiljö samt koppla dåtiden till den aktuella geometripraktiken i dagens skola. Utöver den historiska bakgrunden expanderades områdets avgränsning till digitala hjälpmedel i skolan och relevanta delar av den allmänna skoldiskussionen kring läroplansutformning för att kunna besvara frågeställningarna. Metodavsnittet har två delar. En som behandlar litteratursökningen och tillvägagångssätt samt en som illustrerar hur analysen av litteraturöversikten framskridit.

2.1 Litteratursökning

Metoden för att finna litteratur har skiftat beroende på vilken sorts källa som eftersökts. Oftast inleddes sökandet via Google Scholar för att sedan kompletteras med Göteborgs universitetsbibliotek och funktionen Supersök samt databasen ERIC. Dessa valdes ty Scholar har ett mycket brett spektrum och ger många träffar från många olika håll. Supersök har en öppen tillgänglighet till skrifter och ERIC samlar pedagogiska och didaktiska skrifter på ett tillförlitligt sätt som förenklar sökprocessen.

Valen av sökord har skiftat mycket beroende på vilken frågeställning som behandlats. Arbetet inleddes med några primära sökord, vilka var: *Geometriundervisning, skola, geometri, Sverige, historia, didaktik.* Mängden sökord utökades snabbt efter handledning kring vilka sökord som kunde ge mer relevanta träffar samt tips på avhandlingar och böcker som behandlade ämnet. Utifrån de första arbetena som lästes, efter tips från handledare, påträffades nya sökord som *Axiomatisk geometri, Euclides, van Hiele.* Tidigare sökord översattes till engelska och fick då en större mängd träffar men även fler arbeten utförda på avhandlingsnivå eller högre. Allt eftersom arbetet fortskred anpassades även sökorden till att spegla specifika personer eller modeller av intresse. Dessa var till exempel *Tutor Systems, dynamic geometry software, Brousseau, IKT, digitala verktyg, NCM.* Sökorden i kombination med våra informationskällor gav upphov till en mängd olika skrifter. Dessa genomgick en urvalsprocess vilken utgick från de titlar som kändes aktuella beroende på vilken frågeställning som avsågs besvaras. De granskade texterna genomgick även granskning med följande exkulsions- samt inklusionskriterier.

Inklusionskriterier	Exklusionskriterier
Erkända forskare Arbeten på avhandlingsnivå eller över Publicerade i vetenskapliga tidskrifter För arbetet relevant beskrivning	Annat än skandinaviska språk eller engelska. Arbeten under avhandlingsnivå. Tidsmässigt förlegade arbeten.

Om texterna uppfyllde inklusionskriterierna värderades dem som; viktiga texter som skall analyseras i helhet; bitvis viktiga och därför enbart bör analyseras selektivt eller, för arbetet, irrelevanta.

Utifrån analysen av texter uppdagades enligt snöbollsmetoden (Friberg, 2017) flera nya intressanta källor i referenslistorna. De nya texterna som hittades bland källorna låg tematiskt nära den första relevanta texten och ledde därför ofta till inkludering i sökprocessen. De nya källor som upptäckts med snöbollsmetoden analyserades för att nå nya djup av förståelse för diskussioner samt öka medvetenheten av analyserade modeller och argumentation.

De källor som valts för analys ligger i bilaga 1.

2.2 Analys

Analysen började med att de texter som uppfyllde inklusionskriterierna analyserades, varefter ett helikopterperspektiv intogs över det behandlade området. Inledningar lästes och bidrog till en uppfattning om vilka delar ur artiklar, böcker och rapporter som ansågs relevanta och kunde besvara frågeställningarna. Därefter lästes vissa texter mer noggrant och andra mer ytligt. En tydlig bild över det valda ämnet började formas. Detta följdes av en återblick till frågeställningarna för att se om dessa behövde justeras.

Därefter identifierades de olika texterna antingen beroende på vilket område av arbetet de behandlade, eller om texterna behandlade ett tvärsnitt mellan de olika områdena. De definierade områdena var *historisk skildring*, *didaktiska rön*, *digitalisering och geometri* samt *Euklidisk Geometri.* Det bestämdes sedan om dessa texter, inom de olika områdena, bildade en kanon eller om de motsade varandra. Därigenom kunde vissa brännpunkter urskiljas där forskare och författare var samstämmiga eller om det fanns meningsskiljaktigheter och motstridiga rön. Detta bidrog även till en tydligare bild över vilka områden som saknade belysning samt var knapphändiga, alternativt ej behandlade, i den analyserade forskningen. Brister som hittades genererade ett behov av nya skrifter och således även nya sökord. När dessa texter tagits fram konkretiserades oklarheter och motstridiga uppgifter. Då en tydligare bild av de behandlade informationskällornas täckningsgrad växte fram valdes rubriker som skulle presenteras i resultatet. Källorna delades då in i grupper efter vilken källa som behandlade vilken del av resultatet. Grupperna söktes igenom för att se till att frågeställningarna verkligen kunde behandlades i sin helhet med de artiklar som fanns att tillgå. Signifikant för analysen av varje arbete var att de kategoriserades och jämfördes innan de användes som källa i arbetet.

3 Resultat

Resultatet består av tre delar. Den första behandlar i huvudsak hur geometriundervisningen förändrats och formats från 1800-talets axiomatiska skolgeometri till den nya matematikens införande på 1960-talet och hur det ledde till den axiomatiska geometrins exkludering från skolmatematiken. Den andra delen behandlar didaktisk forskning som, till stor del, relaterar till geometriundervisning. Den tredje och sista delen illustrerar hur tekniska hjälpmedel för geometriundervisning som idag finns tillgängliga kan underlätta och förbättra lärandeprocessen.

3.1 Historisk skildring

Den historiska skildringen av geometriundervisningens framväxt baseras huvudsakligen på en analys av fem arbeten. De första tre arbetena är: *speaking of geometry* (Prytz, 2007), *Swedish mathematics curricula, 1850-2014: An overview* (Prytz, 2015) och kapitel 9 i utbildningens revolutioner *Nya matematiken - revolutionen som uteblev* (Prytz, 2017b). Johan Prytz är lektor i Didaktik och Matematik vid Uppsala universitet, och hans verk bygger på historiska sammanställningar av flertalet olika källor med tydlig anknytning till geometriundervisning. Det fjärde arbetet är *Skolans matematik, En kritisk analys av den svenska skolmatematikens förhistoria, uppkomst och utveckling* (Lundin, 2008). Detta är en doktorsavhandling av Sverker Lundin, lektor vid Göteborgs universitet. Det femte och sista arbetet utgörs av exempel från en lärobok aktuell mellan år 1744 till början av 1900-talet vilken är Strömers översättning av *Euklides elementa*. Övriga källor förekommer i mindre omfattning.

Axiomatisk geometri har under större delen av matematikens historia varit den grund på vilken undervisningen i geometri legat. Idag är den axiomatiska geometrin inte en del av den svenska läroplanen och elever är ofta inte längre medvetna om uttryckets innebörd. Dagens skolmatematik är istället utformad för att uppfylla behov som ställs av olika sektorer ute i samhället, exempelvis ekonomiska och vetenskapliga. Kravet på skolan, formulerat i styrdokumenten, är att matematiken skall fokuseras till att ge yrkesmässiga och vardagliga grundförutsättningar (Prytz, 2007). För att visa denna förändring är den historiska skildringen uppdelad i fem delar. Inledningsvis presenteras en bakgrund till den euklidiska geometrin. Sedan följs bakgrunden av fyra delar presenterande förändringar i geometriundervisningen inom den svenska skolan, från folkskolans grundade till införandet av den senaste läroplanen lgy11/lgr11. De första tre perioderna har delats in på följande sätt; 1842-1905, 1905-1962, 1962-1980. Detta till följd av införandet av folkskolan 1842, Realskolan 1905, Grundskole- och Gymnasiereformen 1962 samt den nya matematiken och dess revidering. Avslutningsvis skildras hur geometriundervisning ser ut idag.

3.1.1 Vad är euklidisk geometri?

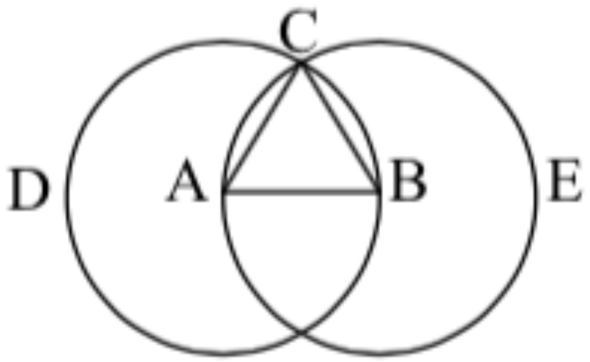
Geometri kommer från början från det grekiska ordet "jordmätning" och byggde på mätning av olika konstruktioner och former. Genom dessa mätningar kunde vissa förhållanden fastställas, exempelvis Pythagoras sats, vilken är en del av skolmatematiken än idag. Dessa förhållanden fastställdes snarare genom empiri än logisk härledning (Friberg, 1981).

Lundin (2008) beskriver att de första källorna innehållande försök till att skapa några grundsatser, kallade axiom, utifrån vilka det skulle vara möjligt att härleda all annan matematik, finns i grekisk antik litteratur. Idén bygger på att skapa intuitiva och otvivelaktiga sanningar som sedan kan kombineras för att bevisa att andra inte lika intuitiva samband existerar. Skapandet av axiom styrs enbart av att de skall vara otvivelaktiga sanningar som självklart inte får strida mot andra axiom.

En av de greker som i efterhand kommit att bli mer känd är Euklides, som fått en gren av geometrin uppkallad efter sig, kallad euklidisk geometri. Den euklidiska geometrin är en del av den axiomatiska geometrin, men tillämpas endast i planet. Euklides framställde ett verk bestående av inte mindre än tretton böcker, kallade Euklides elementa, vilka kom att utgöra grunden för svensk geometriundervisning fram till ca år 1962 (Prytz, 2007). I dessa verk fastställde Euklides sina egna fem axiom, fem postulat och tjugotre definitioner. I denna del av historien ansågs axiom vara av allmän karaktär, medan postulat var deras geometriska motsvarighet. Idag görs ingen större skillnad på dessa (Stolt, 1968).

Att säga att det fanns ett bestämt antal definitioner, axiom och postulat är diskuterbart felaktigt, då flera översättningar av Euklides elementa gjorts och författare velat sätta sin egen prägel (Lundin, 2008). Strömers översättning, gjord år 1744, vilken är den översättning som till stor del låg till grund för svensk geometriundervisning under mer än 100 år, presenterar inte mindre än 35 definitioner, 12 axiom och 3 postulat. Dessutom har det genom historien, som tidigare nämnts, nyanserats vad just ett axiom eller postulat innebär. För att illustrera hur den euklidiska geometrin är uppbyggd följer här ett exempel på hur ett problem löses euklidiskt med hjälp av postulat, definitioner och axiom. Problemet lyder: konstruera en liksidig triangel utifrån en given sträcka AB. Lösningen är tagen ur Strömers Euklides elementa.

Fig.1 Illustration av Euklidisk konstruktion



"Låt AB vara en gifven rät linea som är determinerad: Det begäras at en liksidig triangel måtte upritas på AB.
Tag A för medelpunkt och rita en Cirkel DCB, hvars peripherie går genom B, (a) tag sedan B för
medelpunkt och rita en Cirkel ACE genom A, (a) och drag så ifrån den punkten C, hvarest bägge Cirklarna råkar hvarandra, til A och B tvänne räta lineer CA, CB; (b) Så är ABC den begärte triangelen.

a. 3. postul.
b. 1. postul.
c. 15. defin.
d. 1. axiom.

Ty, efter A är medelpunkten til Cirkelen DCB, så är AC lika stor med AB, (c) och efter B är medelpunkten til Cirkelen ACE, så är CB lika stor
med AB: (c) altså äro bägge lineerna AC och CB lika stor med en och samma linea AB; derföre måste de ock vara sins emellan lika stora (d). Och således äro alla tre sidorna uti triangelen ACB lika stora."

(Strömer, 1884, s.6)

Där de använda postulaten, definitionerna och axiomen är formulerade på följande sätt:

3.postulatet:
"Att taga hvad punkt man vill till medelpunkt och rita en cirkel, hvars peripheri går genom hvad punkt man vill." (Strömer, 1844, s. 2-4)
1. postulatet:
"Att ifrån hvad punkt man vill draga en rät linje till hvad punkt man vill." (Strömer, 1844, s. 2-4)
15. definitionen:
"Cirkel är en platt figur, som inneslutes af en linie hvilken kallas Peripheri eller omkrets, och är sådan, att alla räta linier, som från en viss punkt inuti figuren falla på henne, äro lika stora." (Strömer, 1844, s. 2-4)
1: axiomet
"De, som äro lika stora med ett och samma [eller med lika stora], äro sins emellan lika stora." (Strömer, 1844, s. 2-4)

Den euklidiska geometrin ansågs genom historien vara ett effektivt sätt att träna intellektet (Lundin, 2008), men den praktiska nyttan i geometriska studier kom att diskuteras liksom dess reella användningsområde. Detta kommer presenteras närmare under nästa rubrik.

3.1.2 1842-1905

År 1842 grundades den svenska folkskolan vilket möjliggjorde att utbildningen nådde samhällsklasser som tidigare varit uteslutna från skolans värld. Från tidigt 1800-tal inleddes ett förändringsarbete för att modernisera och individualisera skolmatematiken med allt fler räkneuppgifter och ett mer anpassat språk (Lundin, 2008). Läromedelsutvecklare försökte därför att förändra geometriundervisningen genom att lägga mer vikt vid att ge de studerande praktiskt användbara kunskaper utan att förlora den teoretiska grund på vilken undervisningen stod. Förändringen skulle ske genom en ökad mängd uppgifter med ett tydligare praxisnära fokus. Målet var att överbrygga skillnaderna mellan teori och praktik vid läroverken och på, det under mitten av 1800-talet nyligen omformade, gymnasiet (Lundin, 2008). Denna förändring av skolmatematiken kom dock framförallt att gälla inom aritmetik och algebra.

Geometrin genomgick inte samma övergång under 1800-talet som de andra delarna av skolmatematiken. Lundin (2008) lyfter fram att de nya geometriböckerna som producerades för skolan under perioden inte fick ordentlig genomslagskraft och Euklides elementa förblev istället styrande av undervisningens praxis. Enligt Lundgren (1989) genomgick skolan under 1800-talet en långsam förändring mot att bli mer realistisk. En mer naturvetenskapligt inriktad utbildning började ta form; det industriella samhällets behov av kompetent arbetskraft började för första gången synas i svensk utbildning (ibid.). Lundgren (1989) framhåller att de diskussioner som förts inom naturvetenskapliga kretsar sedan reformationen under 1500-talet börjat få fäste i utbildningsverksamheten med industrins ökade behov på naturvetenskaplig kompetens. Lundgren (1989) menar även att politiska ideologier, framvuxna ur franska och amerikanska revolutionen, vilka ställde allt större krav på en utbildning för alla, långsamt började sprida sig över Europa. En av de ledande profilerna i debatten som fortsatte över hela 1800-talet var amerikanen Samuel Smith (1752-1839). Han förespråkade en realistisk läroplan anpassad för samhällets behov. Geometrin började med denna diskussion att skifta fokus från att enbart vara en övning för intellektet till att bli något praktiskt och användbart på både individnivå och samhällsnivå (Lundin, 2008; Lundgren, 1989). Förändringen av skolan i Sverige skedde dock långsammare än i industrialiseringens hemland och vagga, England. Lundgren (1989) betonar biologen och läraren Thomas Huxley som förgrundsgestalt i förändringen av synen på matematiken i skolan. Thomas Henry Huxley (1825-1895) var en darwinist med liberalistiska ideal som drev utvecklingen av en ny läroplan i England. Huxley ansåg att stora förändringar i läroplanen som inkluderade mer naturvetenskap var en grundförutsättning för vidare industrialisering i England och dess kolonier. Med omformning av läroplanen i England fick matematik en mer central roll som ett naturvetenskapligt ämne och även geometriundervisningen förändrades för att få en mer praktisk funktion. I Sverige gick det dock långsammare och geometriundervisningen behöll en klassisk bildande och intellekttränande ställning under hela 1800-talet och början av 1900-talet.

Sammanfattningsvis började diskussionerna kring geometriundervisningens utformning att ta plats i skoldebatten under 1800-talet. Dock var matematikens ställning svag i den svenska skolan där humanistiska, moralistiska och teologiska studier var långt mer framträdande under perioden. Men med ett allt mer skiftande fokus från en skola enbart utformad efter bildningsidealet, till en ny skola, snarare inriktad mot naturvetenskap, kom geometrins utformning att diskuteras allt mer vilket under 1900-talet kom att leda till stora förändringar.

3.1.3 1906-1962

Under perioden 1906 - 1962 överfördes, från England, USA och Preussen (senare Tyskland) stora delar av den, under tidigare rubrik behandlade, argumentationen kring verklighetsbaserad anpassning av undervisningen till Sverige. Lundin (2008) beskriver hur den svenska skolan bedrev en anpassningsprocess för att skolans verklighet skulle bli mer realistisk och greppbar. Vidare belyses en infallsvinkel som diskuterades och applicerades i kurslitteratursutformning, nämligen att omformulera axiom för användning i skolan. Omformuleringen av axiomen ansågs vara nödvändig för att studenter skulle uppnå en ökad förståelse för ämnesinnehållet. Utmaningen vid förändringsarbetet av axiomen var framförallt att inte mista den stringens som skapats vid åtskilliga och välbetänkta revideringar av Euklides elementa (Prytz, 2007). Dock diskuterades inte enbart omformulering av axiom, utan hela den axiomatiska geometrin ifrågasattes allt mer under perioden. Skolgeometrins nytta i praxisnära situationer och sanningshalten som olika utformningar av axiom inbegrep skapade en stor skepsis kring dess fortsatta nyttovärde för elever. I den nyss beskrivna debatten var även parallellaxiomet ett tydligt framträdande debattämne när det kom till geometrins utformning i skolan. Parallellaxiomet behandlas ingående av Lewis (1920) där följande översättning av Euklides tolfte axiom eller femte postulat, beroende på tolkning, inleder:

"If a straight line falling on two straight lines makes the interior angles on the same side less than two right angles, the two straight lines if produced indefinitely meet on that side on which are the angles less than two right angles"
(Lewis, 1920 s.1)

Lewis (1920) pekar på att den tidigaste kritiken mot Parallellaxiomet visade att axiomet inte var självförklarande, något som anses vara en grundegenskap hos axiom och som de andra axiomen i elementa uppfyller. Kritiken innefattade att Parallellaxiomet från början inte enbart hade samma stringens som övriga axiom och därför borde undvikas. Enligt Lewis (1920) var

Euklides medveten om problemen med axiomet och försökte, utan att lyckas, bevisa det med de andra postulaten och axiomen. Euklides kom fram till att han varken kunde bevisa Parallellaxiomet eller fortsätta arbetet utan det. Under många år gjordes försök att bevisa Parallellaxiomet innan det, mellan 1820 och 1830, förkastades simultant av Nikolaj Lobatjevskij och Janós Bolyai. Lobatjevskij och Bolyai skapade, oberoende av varandra, en hyperbolisk geometri som visade att trianglar har en vinkelsumma som är mindre än 180 grader (Lewis, 1920). Kritiken som vuxit mot Euklides elementa hade enligt Lewis (1920) förändrat synen på euklidisk geometri från sanningar härledda från logiken och naturen till enbart hypoteser. Euklides elementa och verk baserade på den har en stringens och satser bevisade på ett hållbart sätt, men enligt Lewis (1920) finns det många delar där dessa verk inte är tillräckligt täckande för att kunna anses vara fulländade verk gällande förståelse av geometri.

Euklides elementa låg som tidigare nämnts till grund för geometriundervisning och läroböcker. Men med den ökande och rättfärdigade kritiken som framförts mot elementa växte viljan allt mer för att reformera skolan i helhet och den axiomatiska geometriundervisningen sågs som allt mer förlegad i sin utformning (Lundin, 2008).

Utöver den vetenskapliga kritiken mot Euklides elementa som presenterades under 1800-talet beskriver Prytz (2007) hur skolan uppfattade den euklidiska geometrin som vardagsfrämmande för eleverna. Som exempel på detta anges hur geometrin kunde uppfattas som distanserad från verklig praxis eftersom det fanns väldigt lite eller helt saknades area-, volym-, och längdberäkning i skolans geometriläroböcker. Dessa beräkningar är element inom geometrin med tydliga användningsområden. Argumentet för den axiomatiska geometrins fortskridande var fortsatt att den fungerade som utmärkt träning för logiskt tänkande och att det, genom övning i bevisföring, bidrog till att utveckla ett allmänt kritiskt förhållningssätt (ibid.).

Under 1800-talet började det, som tidigare nämnts, att ställas krav inom matematikundervisningen som innebar att läroböckerna skulle erbjuda elever fler övningsuppgifter för att möjliggöra ett mer självständigt arbete. Euklides elementa kunde inte leva upp till dessa krav, varför röster, även av denna anledning, gjorde sig hörda för en förnyelse av läroböcker och undervisnings inriktning (Lundin, 2008).

Inom de västerländska skolorna pågick under början av 1900-talet en diskussion kring hur läroplanerna skulle vara utformade, med avseende på moralistisk, ideologisk eller rationell grund (Lundgren, 1989). Det som kom att få störst genomslag i Sverige var enligt Lundgren (1989) den rationella grunden. Den rationella läroplanens ideologiska grund handlar om vilka funktioner utbildningen har i samhället och att skolan skall sträva mot att ge elever användbara kunskaper för samhället och näringslivet. Denna grund för skolans utformning kom att påverka geometriundervisningen. Den axiomatiska geometrin, som enbart syftade till att gynna det logiska tänkandet, kritiserades allt mer och nya influenser från framförallt USA fick mer utrymme i moderniseringsarbetet av skolan.

Diskussionerna, vilka var snarlika de tidigare beskrivna från 1800-talet, mynnade under 1900-talets början ut i att alternativa geometriläroböcker ökade i popularitet. Dessa läroböcker var utformade på ett sådant vis att räkneuppgifter successivt blev svårare, vilket möjliggjorde ett mer självständigt arbete för eleverna. Fokus låg ofta på att satser och bevis skulle göras mer tillgängliga för elever genom att framstå som naturliga. Exempelvis kunde de bygga på symmetrier och vikningar. Dessa läroböcker var under 1930-talet mer populära än de som rigoröst följde Euklides elementa. Men även om ett läroboksskifte hade inträffat utgjorde fortfarande den axiomatiska metoden grunden inom geometriundervisningen, om än förenklad för eleverna (Prytz, 2007)

Kring 1930-talets slut debatterades det huruvida den axiomatiska metodens existens skulle vara närvarande i den svenska realskolan över huvud taget (Prytz, 2007). Denna debatt utvecklades under kommande trettio år och Sverige blev under 1950-talet en del av New Mathematics, vilken var en rörelse som kom att förändra hela skolmatematiken från grunden.

3.1.4 1963-1980

Under 1960-talet kom två stora skolreformer, lgy63 samt lgy69, vilka förändrade matematiken inom skolan och så även geometrin, som under en lång tid varit oförändrad. Johan Prytz (2017a) nämner i "utbildningens revolutioner" att skolreformerna under 1960-talet innebar ett nytt sätt att se på utbildningen och dess koppling till vetenskap. Tidigare hade skolämnena i stor utsträckning varit speglingar av vetenskapliga discipliner. Den nya skolan skulle istället bygga på en vetenskaplig utformning av undervisningen, framarbetad med upptäckter hos de nya vetenskaperna: psykologi och pedagogik. Utöver rön från de nya vetenskaperna skulle skolan utformas med hjälp av avnämnarundersökningar, där personer, insatta i olika ämnen, fick förtydliga vilka behov deras ämne eller bransch önskade att skolan skulle ge elever rent kunskapsmässigt. Dessutom gjordes storskaliga försök att i klassrum nå en fungerande metodik som sedan kunde appliceras i alla Sveriges skolor för att få en jämlik och rättvis utbildning. Utifrån ovan beskrivna tankegångar kring den nya skolan infördes även den *nya matematiken.*

Den *nya matematiken* var en rörelse som växte fram i USA och Frankrike under 1950-talet. Den ämnade minska skillnaderna mellan den utdaterade skolmatematiken som lästes på högskoleförberedande kurser och den moderna matematiska vetenskapen som universitetens verksamhet byggde på. Bland annat eftersöktes en mer analytisk geometri, där algebraiska metoder kunde tillämpas för att lösa geometriska problem. Den analytiska geometrin ansågs nämligen förbereda eleverna bättre inför fortsatta studier (Prytz, 2017a).

Omformningen av de högskoleförberedande kurserna medförde ett behov att reformera övrig skolmatematik. Det allmänna expertutlåtandet betonade möjligheten att bygga om skolmatematiken från första klass till sista kurs på gymnasiet så att hela matematikundervisningen byggde på en enda lång progression, till skillnad från förut då aritmetik, algebra och geometri i många fall hanterats som vitt skilda ämnen, helt utan koppling till varandra (Prytz, 2017b). Ombildningen av matematiken medförde att geometrin fick en sekundär prioritering. Att träna rationellt tänkande hade varit det största argumentet för studier inom euklidisk geometri. Vid reformerna under 1960-talet flyttades fokus från geometri till mängdlära som redskap för att träna det rationella tänkandet då mängdläran ansågs bättre anpassad för lägre årskurser och därför passade bättre in i synen av progression i matematikämnets uppbyggnad (Prytz, 2017b). Geometrin försvann dock inte från skolan. Detta eftersom beräkningar av bland annat areor, omkretsar och volymer ansågs som oumbärliga beståndsdelar inom skolmatematiken. Dessa verklighetsbaserade beräkningar fick dessutom allt större plats under revideringen av läroplanerna under 1970-talet. Från 1960-talets slut tog den analytiska geometrin en allt större plats i skolan och geometrin inkorporerades i algebra och analys (Prytz, 2017b). Detta syns i dagens gymnasiala skolmatematik och behandlas i följande avsnitt.

3.1.5 Hur ser geometriundervisningen ut idag

I den moderna geometriundervisningen ligger ett stort fokus på räknande och tillämpning av satser. Den just nämnda tillämpningen bör dessutom betonas extra mycket eftersom behovet av förståelse för de satser som används inte är i närheten av vad det tidigare varit. Exempelvis saknar gymnasieskolans kursmål för matematik 1 och 2 kriterier gällande utförande av bevis. Det närmaste elever kommer bevisföring är i matematik 1c då de skall kunna illustrera bevis, där Pythagoras sats och triangelns vinkelsumma anges som exempel (Skolverket, 2011). Som tidigare beskrivits fasades den axiomatiska matematiken ut redan 1962 och idag är avsaknaden fortsatt total.

Vid granskning av bilaga 2, vilken är en sammanställning av skolans kursmål kopplade till geometri, uppdagas att ett fokus på analytisk geometri vuxit sig starkt. Här finns även underlag för påståendet att beräkning av figurers sidor samt vinklar även är centrala.

De kursmål som finns för de olika matematikkurserna är dock inte det enda som styr den svenska matematikundervisningen. Exempelvis anger 70% av de lärare som deltagit i Skolverkets undersökning (Skolverket, 2016) att de nationella proven påverkar deras upplägg av undervisning. Genom en kort granskning av ett flertal nationella prov bekräftades slutsatsen om den traditionella, inte algebrabeblandade, geometrins låga ställning inom den svenska skolan (Skolverket, 2018). Granskningen av proven bekräftar att geometrin fortfarande finns kvar i skolan men med tydlig sekundär roll till analys och algebra. Den traditionella geometrin kan ses som mycket ytligt behandlad av styrdokumenten och de nationella proven.

3.2 Geometriundervisningens vetenskapliga grund och didaktiska vinklingar.

Resultatet från granskningen av geometrididaktiken baseras på olika modeller och teorier. Den första delen fokuserar på arbeten framtagna av Dina van Hiele-Geldof och Pierre van Hiele, ett forskande par från Nederländerna. Både Dina och Pierre doktorerade under 1950-talet och deras mest kända modell, de fem nivåerna av tankeutveckling vid geometristudier, ligger i fokus. Många av van Hieles resultat har likheter med Jean Piagets teorier om kognitiv utveckling, vilka behandlas i den andra delen. Tredje delen behandlar kortfattat en jämförelse av de presenterade forskningsrönen.

3.2.1 van Hiele

Det tidigare presenterade paret van Hiele arbetade fram en modell för hur elever lär sig geometri. Modellen är unik i sitt slag inom geometriundervisningen och har varit relevant för hur upplägg av undervisning vuxit fram (Fuys, Geddes & Tischler, 1988). Crowley (1987) presenterar van Hiele-modellen som består av följande fem, förenklade, nivåer av förståelse, vilka bildar en kognitiv trappa:

0: *Visualisering*
Vid detta steg är studenterna medvetna om att det finns någonting runt omkring dem. Geometriska figurer känns igen på sin form snarare än sina egenskaper. Vad som kännetecknar individer som befinner sig på denna nivå är att de kan lära sig det geometriska ordförrådet samt kan identifiera och reproducera olika geometriska former.
Exempeluppgift:
Tag olika geometriska objekt och placera dem framför eleven. Eleven skall därefter gruppera de geometriska objekten utifrån egna kriterier, för att sedan argumentera för dessa (Crowley, 1987).

1: *Analys*
Inom denna nivå kan elever se olika figurers egenskaper. Bland annat kan eleven karaktärisera olika polygoner utefter mängden hörn och kan genomföra empiriska experiment och observationer. Eleven börjar vid detta stadium att se relationer mellan olika figurer men finner det problematiskt att förklara egenskaperna då alla egenskaper hos geometriska figurer inte ännu kan identifieras.
Exempeluppgift:
Urklippta geometriska objekt, av papper, delas ut till eleven. Dessa skall vikas för att eleven skall kunna identifiera symmetrier (Crowley, 1987).

2: *Informell deduktion*
På denna nivå börjar elever abstrahera verkligheten genom att identifiera fler element hos geometriska figurer. Exempelvis kan grader i hörn, parallella sidor och andra mer abstrakta egenskaper hos figurer urskiljas. Inom denna nivå börjar även eleven att logiskt härleda argument och resonemang till grundsanningar, dock utan att kunna identifiera dessa som axiom. Färdigheten att kommunicera på matematiskt språk börjar här att infinna sig.
Exempeluppgift:
Eleven får använda kunskaper om sidor, vinklar och likformighet för att skriva ut identifikatorer för olika geometriska objekt och därefter dela in dem i grupper, vilka särskiljs från andra grupper beroende på just nämnda identifikatorer (Crowley, 1987).

3: *Deduktion*
Eleven inser betydelsen av deduktion i förhållande till ett axiomatiskt system. Grunder till figurers benämning och egenskaper kopplas till axiom och dess roll för att kunna bevisa satser och förhållanden inom geometri. En elev på denna nivå börjar kunna konstruera, och ej endast minnas, ett flertal bevis och samband. Dock är inte tänkandet kring axiom och bevis färdigutvecklat. Språket bör även hålla en hög nivå. Insikt kring olika tillvägagångssätt för bevisföring börjar infinna sig.
Exempeluppgift:
Eleven får ett ofullständigt bevis presenterat för sig. Detta bevis skall slutföras och eventuella felaktigheter skall korrigeras (Crowley, 1987).

4: *Stringens*
Under denna nivå kan elever arbeta inom olika axiomatiska system, vilket möjliggör studerande av icke-euklidisk geometri. Denna nivå är en påbyggnad av nivå 3, där individer som befinner sig på nivå 4 har full förståelse för geometri som något abstrakt.

Paret van Hiele skapade även några riktlinjer vilka lärare måste vara medvetna om för att kunna omsätta modellen i praktiken. Dessa riktlinjner återfinns i ”*The van Hiele model of the development of geometric thought*” (Crowley, 1987) och presenteras under nedanstående benämningar.

Påföljning:
Inlärningsprocessen kan liknas vid olika trappsteg. För att ta sig vidare i sitt lärande är det av största vikt att eleven inte hoppar över något av dessa trappsteg.

Avancemang:
Framsteg genom de olika nivåerna beror snarare på erfarenhet än ålder. Detta eftersom det aldrig finns några metoder som kan förmå elever att hoppa över olika nivåer. Metoder som siktar på att påskynda detta har snarare en tendens att motverka framsteg inom nivåerna. Ett exempel på det sistnämnda är att memorera formler istället för att härleda dem.

Tillämpning och förståelse:
Ett studerat objektet är svårt att förstå innan nästa nivå har nåtts. Det aktuella objektet tillämpas nämligen inom en specifik nivå, medan djupare analyser, vilka tydliggör varför tillämpningen fungerar, infinner sig på nästföljande nivå.

Språkvis:
Varje nivå har sina egna språk och uttryck. Därför kan korrekt språk vid en nivå anses vara felaktigt eller otillräckligt vid en annan, varför de kan behöva modifieras vid nästa nivå.

Felanpassning:
Om ett undervisningsmoment är anpassat till en högre nivå än den en elev befinner sig på, är det omöjligt att uppnå önskad lärandeeffekt från undervisningsmomentet.

van Hiele påvisar vidare hur lärarens roll i klassrummet är viktig. En betydelsefull del av lärarens jobb är att ställa utmanande frågor till elever. En typisk sådan fråga är “Varför?” eller “Hur vet du att den röda bollen är större än den gröna?”. Dessa frågor stimulerar elevers tänkande och är således avgörande för deras utveckling (Crowley, 1987).
Frågor som dessa stimulerar även elever till att vara mer aktiva i klassrummet, på samma sätt som problemlösning tillsammans med andra elever gör, vilket gynnar elevernas matematiska tänkande (Jonsson, Nordqvist, Liljekvist & Lithner, 2014). Slutligen bör det nämnas att van Hiele-nivåerna inte bör betraktas som huggna i sten eftersom att en elev, inom olika lärområden, simultant befinner sig på olika nivåer (Gutiérrez, Jaime, & Fortuny, 1991). van Hiele tillförde ett tydligt vetenskapligt tankesätt kring geometriundervisning och byggde teorier på rön av didaktikern Jean Piaget. Förhållandet mellan Piagets teorier om lärande krockade dock ofta med paret van Hieles modeller, men för att vidare kunna illustrera detta fokuserar nästa stycke på Jean Piaget.

3.2.2 Jean Piaget

Den schweiziske forskaren Jean Piaget intresserade sig, bland mycket annat, för pedagogiska sammanhang. Han var mer intresserad av *hur* individer når fram till ett svar snarare än *om* eleven når fram till ett svar. Av just denna anledning var han kritisk till undersökningar utförda på liknande vis som PISAs matematiktest i skolan, eftersom dessa inte redogör för elevers tankebanor (Säljö, 2014). Piaget betraktade tänkandet som en process snarare än en produkt, och härledde efter detta en stadieteori. Även om Piaget själv inte betonade sin stadieteori speciellt starkt, kom just denna att bli känd hos både sympatisörer och kritiker (Säljö, 2014).

Vuxna befinner sig på *de formella operationernas stadium*, vilket uppnås redan vid tolv års ålder. Färdigheten att tänka logiskt har också utvecklats till vad Piaget benämner *reflektiv abstraktion*. Med detta avses en ökande förmåga att medvetet konstruera erfarenheter på en abstrakt nivå, exempelvis inom matematik. En stor anledning till varför Piaget publicerade sin forskning om kognitiva stadier var för att framhålla vikten av att lärare undervisar på elevers, befintliga, kognitiva nivå (Säljö, 2014). Vidare förklarar Säljö (2014) att Piaget framhöll vikten av att elever samarbetar, upptäcker och utvecklar kunskaper tillsammans, varför han ansåg att arbetsformer i skolan borde anpassas efter detta. Just vikten av att eleven själv får komma till insikt om något, snarare än att läraren förklarar för eleven, är avgörande enligt Piaget.

"kom ihåg att varje gång man alltför tidigt undervisar ett barn om något som barnet kunde kommit underfund med på egen hand, så hindras barnet från att upptäcka detta och därför också från att förstå det fullt ut..."
(Säljö, 2014, s. 283*)*

Enligt Piaget strävar alla levande varelser efter ett ekvilibrium, det vill säga jämvikt mellan en individ och dess omgivning. Ett ekvilibrium uppnås genom kognitiv anpassning, vilken delas in i två samspelande processer: *assimilation* samt *ackommodation*.

Assimilation:
Individer tillskansar sig kunskap genom sina erfarenheter; kognitiva strukturer utvecklas. Denna nyvunna kunskap inverkar på de redan befintliga teorierna en individ besitter och tillsammans utgör de en mer omfattande och berikad kunskap (Säljö, 2014). Ett exempel på detta kan vara en individs upptäckt av att trianglars vinkelsumma alltid verkar vara 180 grader, varför eleven då definierar triangeln som en figur med tre hörn, vars vinkelsumma är 180 grader.

Ackommodation:
Efter att ha påbyggt sina kunskaper med hjälp av assimilation kan en elev, med hjälp av nya erfarenheter, omedvetet skapa en kognitiv konflikt då dessa nya erfarenheter strider mot den kognitiva struktur eleven tidigare skapat. För att uppnå ett ekvilibrium måste då individen ackommodera, det vill säga ändra sin tidigare föreställning (Säljö, 2014). Ett exempel på detta kan vara att den individ, som tidigare beskrivits kommit fram till att vinkelsumman hos trianglar tycks vara 180 grader, får illustrerat för sig hur en triangel skulle se ut på en jordglob, där två hörn är belägna på ekvatorn och det sista på Nordpolen. Denna triangels vinkelsumma överskrider 180 grader, varför eleven behöver ackommodera från sin tidigare föreställning om trianglar, och skapa en ny definition som även fungerar på sfäriska ytor.

3.2.3 Piaget och van Hiele samt övriga kommentarer.

Som tidigare presenterats var paret van Hiele influerade av Piaget i sin forskning. De olika rönen visar dock på att van Hiele i många avseenden var kritiska till Piagets teorier (Nystöm, 1998). Likheterna kan bland annat identifieras med att Jean Piaget anser att lärandet av geometri inte kommer genom beskådning av lösningar och figurer samt repetition av dessa. Snarare hävdar han att deltagande i en konstruktion av exempelvis figurer ökar förståelsen för dessa. Figurerna måste upptäckas av eleven själv, företrädesvis genom logiska resonemang (Clements, 2003). Detta kan liknas vid vad Dina och Pierre van Hiele påpekar gällande instruktioner till uppgifter. Om en lärare förenklar och förminskar ett presentationsinnehåll, så att den lärande lättare kan komma ihåg vad läraren sagt och uttryckt, kommer detta att medföra en lägre grundlig förståelse hos eleven, varför denne inte kommer lyckas avancera till högre nivåer (Clements, 2003).

En uppenbar skillnad mellan Piaget och van Hiele var att Piaget grundande sina kognitiva stadier med ålder som bas, medan van Hiele grundade sina kognitiva utvecklingsnivåer med befintligt utvecklingsstadium som bas, oberoende av ålder (Crowley, 1987; Säljö, 2014).

En annan skillnad är att Piaget ansåg att en uppnådd kognitiv nivå inom ett visst ämne enkelt kunde tillämpas i andra sammanhang. Det vill säga, att en lärande inte tvingas börja om från den lägsta kognitiva nivån när den ställs inför ett nytt ämne. Dina och Pierre van Hiele ansåg att utvecklingsstadierna åter behövde genomgås om eleven utsattes för ett nytt ämne, men att eleven snabbt arbetar sig upp till den nivå där den befann sig i det föregående ämnet (Clements & Battista, 1992).

3.3 Digitalisering i skolan

Digitaliseringen av skolan har undgått få. Många skolor erbjuder till och med egna datorer till sina elever. Till datorerna finns det flera program som kan hjälpa till i undervisningen, såväl för elev som lärare. Några exempel på program och hemsidor som kan stödja matematikundervisningen är GeoGebra, Kahoot samt diverse intelligenta handledarsystem. Implementering av dessa är dock inte problemfritt.

"*Vi får inte tro att skolelever, som några romantikens naturbarn, av sig själva, utan förkunskaper och förförståelse, kan tillgodogöra sig de informationsmängder som tekniken ger tillgång till.*"
(Pedersen, 1998, s. 42)

Att införa tekniska hjälpmedel i skolan torde emellertid vara lättare sagt än gjort. Exempelvis påvisar Pierce & Stacey (2013) hur sammanvävning av teknik och pedagogik inte är helt okomplicerat och således en tidskrävande process. Att implementeringen av digitala hjälpmedel i skolan är tidskrävande påvisar även Jan Hylén (2013), som antyder att det kan ta flera år innan positiva resultat uppnås. Men för att nå en lyckad implementering av teknik i skolan anser Gudrun Malmer (2002), i likhet med teorier beskrivna av van Hiele, att om en elev skall uppnå förståelse samt känna motivation är det avgörande att instruktioner och lärandesituationer befinner sig på elevens kunskapsnivå. Något som både kan förenklas och försvåras med tekniska hjälpmedel.

Även om mycket litteratur är positivt inriktad mot digitaliseringen av skolan går det att finna kritiska inslag. Exempelvis antyder Pedersen (1998) att den nya informationstekniken kan medföra att lärare ersätter värdefulla pedagogiska rumsaktiviteter mot arbete framför datorn. Som exempel ges att datorsimuleringar i naturvetenskapliga ämnen kan ersätta verkliga experiment. Å andra sidan hänvisar Pedersen (1998) även till forskning med positiva resultat, framtagna av Seymour Papert, vilka visar att barns tänkande gynnas av att kommunicera med datorn eftersom barnet blir medvetet om sitt eget sätt att tänka. Vidare nämner Olson (1988) att bra datorprogram kan inspirera lärare till alternativa metoder att bedriva i undervisning. Bilden av att digitala hjälpmedel kan stå till svensk skolverksamhets gunst utvecklas av Jan Hylén som i sin artikel (Hylén & Grönlund, 2011) visar på ett flertal studier som intygar att digitala hjälpmedel främjar elevers motivation till skolan och dessutom bidrar till färre disciplinproblem. Vidare beskriver Hylén (2013) att den höjda motivationen i skolan innebär mer tillägnad tid åt studier, vilket i sin tur kan leda till höjda resultat och ökad måluppfyllelse. Utöver detta visar en studie av Spires, Rowe, Mott & Lester (2011) att elever fått bättre problemlösningsförmåga genom att spela ett mysteriespel på datorn, där det krävts att eleven ställer upp hypoteser samt löser problem inom mikrobiologi, varför Spires et al. (2011) anser att spelbaserat lärande bör användas oftare.

Sammanfattningsvis finns det många hjälpmedel som kan främja undervisningen inom geometri. Denna resultatdel behandlar GeoGebra, Kahoot och intelligenta handledarsystem.

3.3.1 GeoGebra

GeoGebra är ett dynamiskt geometriprogram och ett digitalt verktyg översatt på flera olika språk. Användningsområdena med programmet är breda och går att anpassa till många olika nivåer.

"*En av de mest iögonfallande egenskaperna hos GeoGebra är att det är avsett för undervisning*"
(Lingefjärd, 2009, s.38)

Eftersom programmet är skapat just för undervisnings skull finns det redan färdiga övningar som elever kan experimentera med. Exempelvis nedanstående:

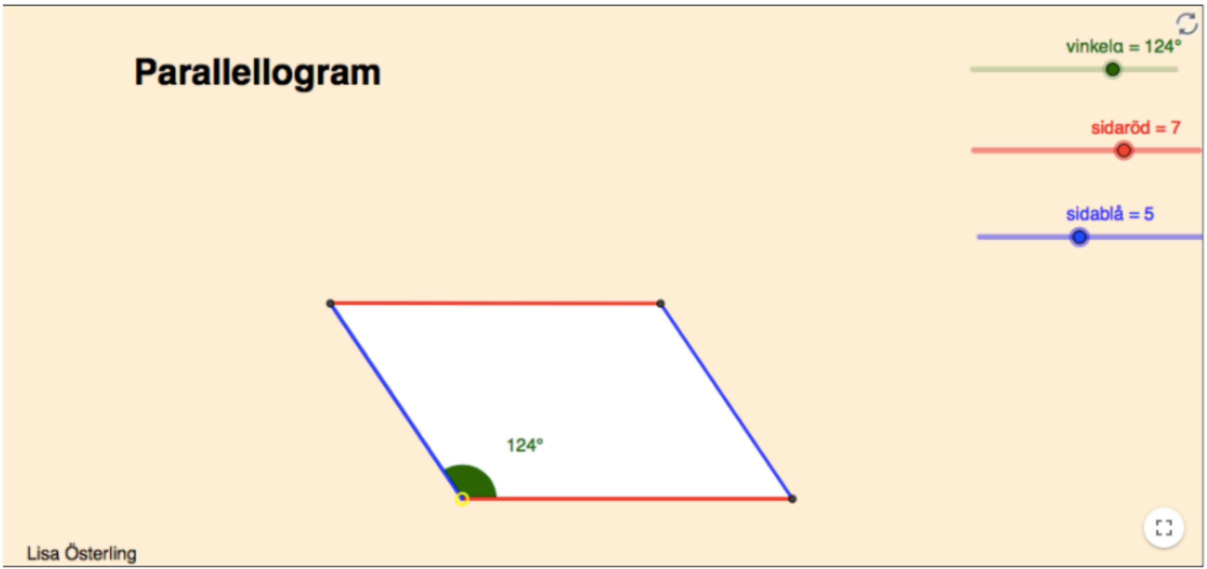
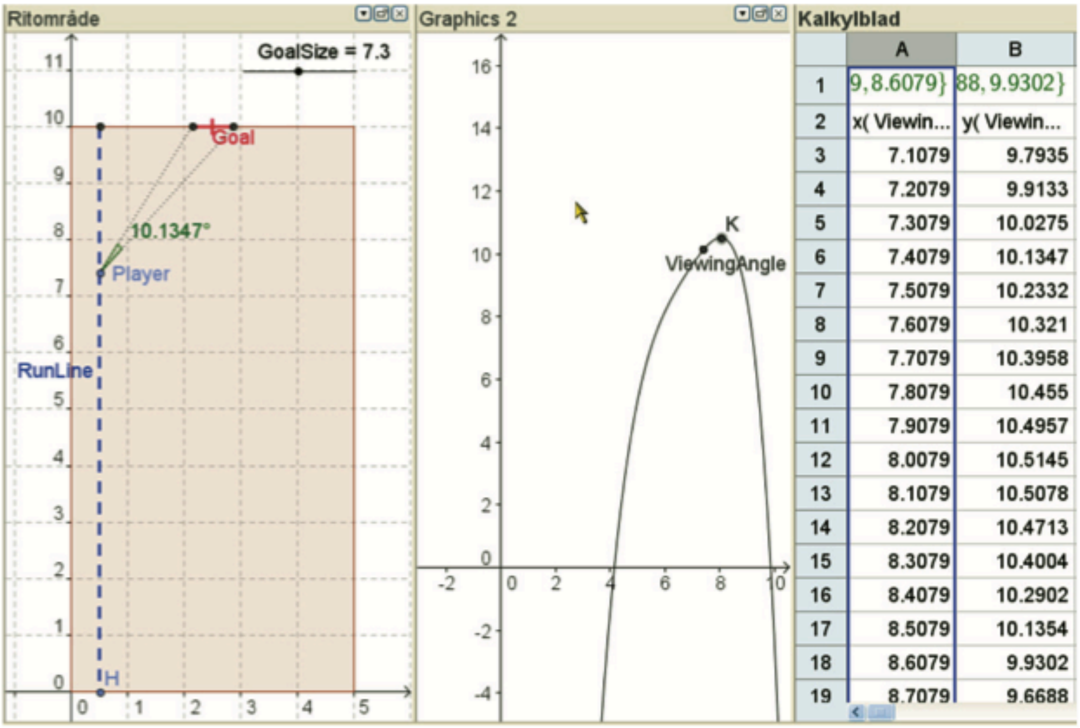


fig.2 (GeoGebra, (u.å))

Här kan elever experimentera och upptäcka vad som händer med vinklarna i en fyrhörning vid förlängning och förkortning av sidorna. Eleven tillåts även se hur fyrhörningens utseende måste förändras vi justering av vinklar. Liknande övningar finns för att exempelvis upptäcka hur räta linjens ekvation beror av sina variabler.

<u>Ett exempel på hur ett bevis kan introduceras med experiment i GeoGebra</u>:
Ett för geometriundervisningen vanligt förekommande bevis för en triangels vinkelsumma är att rita upp en triangel på ett papper, för att sedan dela denna i tre delar med ett hörn tillhörande varje del. Dessa hörn pusslas sedan ihop och det blir synligt att vinkelsumman är 180 grader. Lingefjärd & Jönsson (2009) visar hur detta även enkelt kan åskådliggöras i GeoGebra. Det räcker med att helt sonika rita upp en triangel och be GeoGebra ange vinklarna i hörnen. Sedan kan eleven dra i hörnen, så att vinklarna ändras, och inse att vinkelsumman är bestående. Detta är givetvis inget bevis, men det fyller åtminstone en funktion som experiment och introduktion till efterföljande bevis.

Ett exempel på hur ett optimeringsproblem löses i GeoGebra:
En fotbollspelare löper längs med långsidan av planen och funderar på när hon har den bästa skottvinkeln mot mål. När är skottvinkeln som störst? Med skottvinkel avses den vinkel som uppstår mellan spelaren och målets stolpar. Ovanstående är ett problem som kan lösas på olika svårighetsnivåer. Ett alternativ vore att rita en triangel i GeoGebra där ett av hörnen är fotbollsspelaren och låta de överblivna hörnen vara målstolparna. Genom att be GeoGebra skriva ut vinkeln närmast fotbollsspelaren tillåts den lärande att studera hur denna förändrar sig när spelaren förflyttas kring en rät linje. Lingefjärd & Hall (2012) presenterar en mer avancerad och allmän lösning, oberoende av spelarens avstånd från långsidan. Det senare exemplet kan antas vara avsett för de mer avancerade matematikkurserna på gymnasiet.



	A	B
1	9, 8.6079}	88, 9.9302}
2	x(Viewin...	y(Viewin...
3	7.1079	9.7935
4	7.2079	9.9133
5	7.3079	10.0275
6	7.4079	10.1347
7	7.5079	10.2332
8	7.6079	10.321
9	7.7079	10.3958
10	7.8079	10.455
11	7.9079	10.4957
12	8.0079	10.5145
13	8.1079	10.5078
14	8.2079	10.4713
15	8.3079	10.4004
16	8.4079	10.2902
17	8.5079	10.1354
18	8.6079	9.9302
19	8.7079	9.6688

fig.3 (Lingefjärd & Hall, 2012, s.54)

Sammanfattningsvis är funktionerna och lärandepotentialen i GeoGebra är mångfacetterade. Thomas Lingefjärd tillåts avsluta detta kapitel med ett citat:

”*I GeoGebra kan man skapa ett geometriskt objekt och samtidigt se den algebraiska ekvationen växa fram.*”

- Thomas Lingefjärd (Larsnäs, 2011)

3.3.2 Kahoot

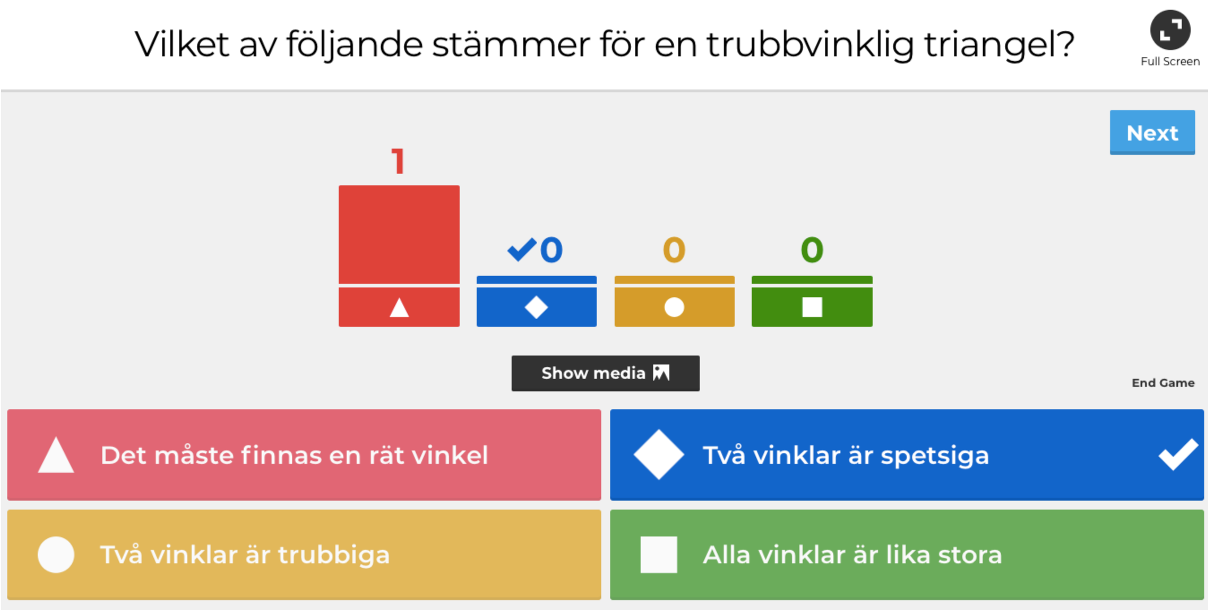
Kahoot är ett digitalt verktyg, vilket lärare kan använda för att producera frågespel. Elever kan enkelt och, om så önskas, anonymt svara på frågorna i sina mobiltelefoner och läraren kan se svarsfrekvensen i olika diagram. Detta är ett enkelt sätt för lärare att se vad elever kan och inte kan.

På ett prov kan det vara svårt för en lärare att se vad en elev verkligen förstår, om frågorna är utformade på ett sådant vis att eleven kan erhålla flera E-poäng från olika områden, eller om E-poäng är kombinerade med C-poäng. Exempelvis kan formuleringen av en fråga på C-nivå göra att en elev inte förstår uppgiften, varför eleven heller inte kommer kunna visa sina kunskaper på E-nivån. För att då synliggöra elevens förståelse kan läraren behöva skapa enpoängsfrågor, vilka kommer förlänga rättningstiden och dessutom göra det svårare att skapa struktur i provet.

I Kahoot skapar läraren ett önskat antal frågor och väljer sedan tidsbegränsning. Frågorna kan ha flera svarsalternativ, och deras utformning kan variera eftersom läraren har flera alternativ att välja på. Dessutom kan elever enkelt göra egna kahooter, och på så vis göra övningsprov eller övningar åt varandra.

Genom att besvara och kreera kahooter använder elever dels sitt kritiska tänkande, men behöver även engagera sig i undervisningen på ett, för både elev och lärare, underhållande vis. Detta är något som Ryan Dellos (2015) påvisar är betydelsefullt för elevers lärande. Vidare framhåller Beverly Icard (2014) att elever gynnas av att använda digitala spel i klassrummet eftersom de får lära sig att hantera framgång och misslyckanden, såväl som att träna sina färdigheter i problemlösning.

fig.4



I figur 4 använder författarna sig av Kahoot för att illustrera hur programmet kan användas i matematikkurs 1, vilken behandlar namngivning av vinklar.

Möjligen besvarar Kahoot frågan *om* eleven nått fram till ett svar, snarare än *hur* eleven burit sig åt. Som tidigare beskrivits är detta något Jean Piaget skulle ställt sig kritisk till. I detta arbete presenterar dock Kahoot som ett verktyg bidragande till, bland annat, en tydlig skildring av elevens befintliga kunskapsnivå, vilken lärare sedan kan anpassa sin undervisning efter. Detta har tidigare påvisats vara något som Piaget högaktar gällande elevers inlärning. Dessutom bidrar säkerligen Kahoot till ett ökat aktivt engagemang samt möjligheten för elever att konstruera uppgifter, vilket aktuell forskning visar ger goda lärandeeffekter (Chi, 2009).

3.3.3 Handledarsystem

Intelligenta handledarsystem är e-baserade medierande redskap för undervisningen och är under stadig utveckling. Burns och Capps (1988) beskriver att grundidén för intelligenta handledarsystem är att bygga program för undervisning som går ett steg längre än att enbart vara datorstyrda instruktioner. Systemen skall för att definieras som intelligenta bygga på en artificiell intelligens som skall läsa av studenters förmåga och därefter anpassa instruktioner utifrån individnivå. Detta kan exempelvis ske genom att systemet analyserar hur elever svarar på olika frågor, varpå slutsatser dras om deras befintliga kunskap. Handledarsystemen är således en form av e-läromedel som finns till för att underlätta, bland annat, individanpassade lektionsupplägg. Data från 2012, sammanställd av Nye (2015), visar dock att Sverige ligger långt efter både vad det gäller forskning och användning av intelligenta handledarsystem i skolan. Jämförelsen som Nye (2015) använder visar även att Sverige sticker ut som ett av de västländer som bedriver minst forskning inom området. Grannländerna Danmark, Norge och Finland är lätta att jämföra med och är mer prominenta inom området.

Handledaresystem kan existera inom samtliga ämnesområden men Richard, Fortuny, Gagnon, Leduc, Puertas, Tessier-Baillargeon (2011) presenterar handledarsystem anpassade och avsedda specifikt för geometriundervisning. Dessa system bygger på användandet av dynamiska geometriprogram i undervisningen. Programmen ger eleven instruktioner och uppgifter som beräknas med hjälp av dynamiska geometriprogram. Ett exempel på de dynamiska program som behandlas av Richard et al. (2011) är det tidigare berörda GeoGebra, som illustrerar och förtydligar geometriska samband för eleverna. Systemet bygger på att läraren beslutar vad eleven behöver öva på och sedan sköter programmet stora delar av interaktionen med eleven och kan stegvis guida eleven till olika färdigheter. Richard et al. (2011) beskriver vidare ett samspel mellan lärare, elev och det intelligenta handledarsystemet med hjälp av en modell. Modellen bygger på Guy Brousseaus teorier om lärandemiljö. Lärandemiljön är ett begrepp som av Brousseau & Balacheff (1997) förklaras som att eleven lever i en miljö av kognitiva föreställningar. Genom interaktioner med stoff utmanas lärandemiljöns utformning och ny kunskap bildas således hos studenten. Med hjälp av rätt stoff är lärarens uppgift att skapa obalans i miljön för att eleven skall ta till sig önskade kunskaper. Den didaktiska miljön är en del av lärandemiljön och innehåller bland annat alla de medierande redskap som studenten stöter på i lärandesituationer. Mellan studenten och den didaktiska miljön sker en kommunikation som kan påverkas av läraren. Richard et al. (2011) presenterade nedanstående modell där intelligenta handledarsystem benämns som Tutor agent. Modellen bygger på och visar att läraren tillför och granskar information till och från den didaktiska miljön, vilken benämns i modellen som en del av studentmiljön. Enligt egen tolkning är studentmiljön ekvivalent med Brousseaus lärandemiljö. Det intelligenta programmet ändrar på uppgifter och förklaringar utifrån studentens respons på olika frågor och utformar en virtuell miljö som studenten sedan tar del av och granskar. Handledarsystemet fungerar som ett stöd för läraren men är ingen garanti för bättre och mer anpassad inlärning då det enbart är ett verktyg och måste hanteras på rätt sätt för att ge önskad effekt.

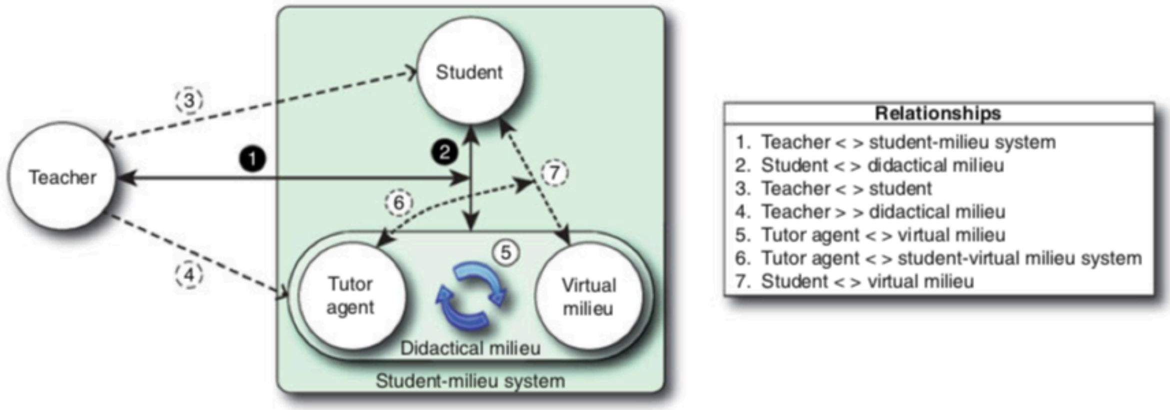


fig.5 (Richard et al, 2011. s. 428)

Ett handledarsystem som inkorporerar dynamiska geometriprogram är GeogebraTUTOR. Detta handledarsystem utger sig för att vara ett stöd för elevers inlärning och ämnar inte vara en ersättning för lärare i skolan. Richard et al. (2011) beskriver nämligen att det finns en viss rädsla hos lärarprofessionen att handledarprogram kan vara konkurrerande med lärarjobben. Men vidare fastslås att handledarprogrammen måste ses som ett komplement till den lärarledda undervisningen och därför inte kan komma att ersätta lärare, utan endast förbättra individualiseringsmöjligheterna i skolan (ibid.).

4 Diskussion

Diskussionen består av två delar: metoddiskussion och resultatdiskussion. Metoddiskussionen utvärderar valda metoder och väger för- och nackdelar med valt arbetssätt. Under resultatdiskussionen behandlas olika intressanta frågeställningar som väckts under arbetets gång. Slutligen innefattar slutsatserna en diskussion kring till vilken nivå frågeställningen besvarats samt frågor för fortsatt forskning.

4.1 Metoddiskussion

Vid litteratursökningens inledning användes den kunskap mentorer besatt för att finna grundläggande sökord, sökfraser och verk. Mentorstyrningen under den inledande fasen satte en tydlig riktning på arbetet. Det ledde oss till flertalet källor som hade varit svåra och tidskrävande att finna vid eget sökande utan vägledning. Uppfattningen av styrningen är att den inte haft någon negativ inverkan på sökprocessen av källor. Visserligen kan flertalet källor med relevant information missats då grundarbetet för sökordsprövning bortprioriteras, men de inledande tipsen på relevanta sökord och verk uppfattas, av oss, som att det haft en positiv inverkan på arbetet. En av anledningarna till att vägledningen uppfattas som gynnande är att den hade en tidseffektiv inverkan och därför möjliggjorde närmare analyser av texter, vilket vi ansåg vara av positiv karaktär trots den eventuellt inlåsande effekt som tipsen kan ha haft på sökprocessen. Då arbetet inleddes med tips på enskilda verk samt att snöbollsmetoden varit en viktig del i sökningen av kompletterande information under detta arbete kan urvalet av litteratur ifrågasättas. Vi anser dock att informationsbehovet som formulerades i frågeställningen täcktes med genomförd metod.

Analysmodellen av texterna anser vi vara väl anpassad till frågeställningen. Texterna som analyserades bildade en översikt över området "geometriundervisning i svenska skolan". För att bygga en översikt över en komplex kontext krävdes analys av flera olika vetenskapliga fält. Att sedan vikta och analysera vitt skilda texter från olika vetenskapliga områden mot varandra ansåg vi som svårt. Skillnaderna i texternas ursprung ledde till att en mer godtycklig analys av texternas vetenskapliga värde utifrån författarens meriter. Vi anser dock detta vara en god metod för att analysera verkens trovärdighet. En del som inte ingick i analysen var den nationella kontext inom vilken texten var skriven. Analysen täcker inte till vilken grad Frankrike, USA, Spanien eller Storbritanniens skolverksamhet är speglande mot den svenska skolverksamheten. Något som upplevdes problematisk att behandla var även att majoriteten av forskningen inte enbart var inriktad mot geometri i skolmiljö. Mycket forskning handlade istället om matematik i skolmiljöer eller allmänna förändringar av skolan, vilka tydligt inte enbart riktats mot geometriundervisning. Dessa, just nämnda, texter vilka var relevanta för granskning, men ej direkt riktade mot det undersökta området, användes i stor utsträckning i kombination med forskning direkt inriktad mot undersökningsområdet för att styrka olika delar av arbetet.

Sammanfattningsvis gick metoden för litteraturöversikten bra. Många relevanta källor granskades på ett systematiskt sätt, vilket gav en god översikt av forskningsområdet och uppfyllde därmed det överliggande målet med metoden: Att få fram ett tillförlitligt resultat.

4.2 Resultatdiskussion

Resultatdiskussionen består av tankar som väckts under arbetets gång. Tankarna speglar de tre huvudpunkterna från resultatet: historisk skildring, didaktiska ingångar och slutligen tekniska hjälpmedel. Här presenteras även förslag på vidare forskning.

4.2.1 Diskussionsfrågor från den historiska skildringen

Under denna del har geometrins framväxt inom den svenska skolan skildrats. Stora delar av studien är baserad på forskning av Johan Prytz. Vid läsning av de resultat som Prytz lägger fram samt jämförelse av Prytzs resultat och andra källor har vissa frågeställningar uppstått. Ett första anmärkningsvärt påstående av Prytz (2007) är att area-, volym- samt längdberäkning knappt förekom i geometriundervisningens material under den tid då verk direkt baserade på Euklides elementa användes som läroböcker. Prytz ger ett fåtal källor för detta påstående men skildrar ej bilden av hur läroböckerna sedan användes i undervisningen. Följden av att inte behandla till vilken grad längd, area och volymberäkning förekom i undervisningen är att studien inte kan redogöra för klassrumsverkligheten. För att ytterligare undersöka till vilken grad uppgifter ej förekom i läroböckerna kollade vi närmare på Strömers Euklides elementa. Där fann vi åtskilliga exempel på behandling av just längd- och areaberäkning (Strömers, 1884). Anmärkningsvärt är att dessa fynd inte återspeglas i Prytzs slutsats.

En del vi anser saknas i framställningen av den historiska skildringen är en tydligare sociologisk analys av vilka krafter som förändrade geometriundervisningen. Vi lyfter på diverse ställen fram industrialiseringens behov. Däremot har svårigheter uppstått vid försök att koppla exakt vilka delar av skolmatematiken som ansågs ha ett större nyttovärde än andra, varför vi anser att det saknas forskning inom detta område. Det uppenbarade sig även att vissa delar av den svenska skolgeometrins historia är mer beforskade än andra. Vi ser framför allt ett glapp kring modern utveckling av geometrin från 1970-talet och framåt vilket är ett möjligt framtida forskningsområde. Exempel på frågeställningar för framtida forskning är: Hur övergick den "nya matematiken" i Sverige till en mer analytiskt inriktad matematik och geometri? Hur påverkade det metriska systemet geometriundervisningen?

Vi har förhoppningar om att eventuella läsare bär med sig ett nyttovärde från vår skildring av geometrins framväxt. Kanske är det svårt att sätta fingret på just användningsmöjligheten detta kapital skapar i avseende till dagens skolpraktik, men detta tillåts Carl Sagan bringa klarhet i genom sitt klassiska citat: "*you have to know the past to understand the present*" (Goodreads, (u.å)).

4.2.2 Diskussionsfrågor kring de didaktiska ingångarna

Didaktiska teorier ligger till grund för hur innehåll presenteras inom skolan. Som visats i vår uppsats var exempelvis van Hiele och Piaget inte alltid helt ense, även om dessa levde och verkade under samma tid. Vi anser att teorier med olika utgångspunkt tillsammans väver ihop en tydligare och objektiv bild av hur lärande går till och är typiskt för didaktiskt forskning. Det behöver inte alltid finnas ett rätt och ett fel, men att lärare känner till didaktisk forskning anser vi innebär ömsesidig nytta i lärandesituationer mellan lärare och elev.

Olika didaktiska teorier kommer alltid att finnas så länge forskning bedrivs inom området. Vi har inga avsikter till antydan av att några forskare är mer eller mindre betydande än andra, men detta arbete har en begränsad omfattning och vi har återspeglat teorier från de forskare vi tycker är av högst relevans.

Vi vill gärna tillägga några ord om van Hieles utvecklingsnivåer (se s. 11-12). Vi anser att formuleringen av dessa nivåer är något förlegad, åtminstone inom svensk skola. Exempelvis behandlar nivå tre, *deduktion,* axiom som inte längre tillhör skolmatematiken och lägger stor vikt vid elevens kunnande inom bevisföring vilket idag inte är en lika stor del av matematikundervisningen. Nivåerna upplevs av oss som något irrelevanta i dagens skola då få elever ens når nivå två, *informell deduktion*, och att den eftersökta kunskapen i skolan inte kan föra eleverna till högre nivåer. Detta då många av de kriterier som van Hiele presenterar i modellen inte längre är aktuella, exempelvis förståelse för axiom. Vi uppmuntrar därför till vidare forskning om hur dessa punkter kan moderniseras. Kort sagt: en reviderad van Hiele-modell anpassad för den geometriundervisning, med fokus på den analytiska geometri, som bedrivs idag.

4.2.3 Diskussionsfrågor kring tekniska hjälpmedel

Datoranvändningen inom skola blir en allt mer signifikant del av undervisningen. Tecken på det är exempelvis ett ökat antal personliga datorer subventionerade av skolor samt införandet av programmering i skolan. Vilka tekniska hjälpmedel som används kommer säkerligen att förändras med tiden, men de verktyg vi valt att presentera har åtminstone relevans vid tidpunkten för skrivandet.

Vi har även presenterat belägg för att tekniska hjälpmedel kan stimulera eleverna till ökat intresse och engagemang, vilket kan leda till förbättrad inlärning. Dock anser vi att lämpligheten av tekniska hjälpmedel i olika situationer skiljer sig markant från fall till fall. Därför är det viktigt att besitta kännedom av diverse olika tekniska hjälpmedel, och att forskning tydligt visar i vilka sammanhang de kan gynna eleverna.

I denna uppsats har endast ett fåtal tekniska hjälpmedel presenterats, varför vi uppmuntrar läsare och lärare till att även läsa annan forskning, vilken kan redogöra för fler metoder att applicera digital teknik i undervisning.

En iakttagelse från analysen av texterna, som behandlar tekniska hjälpmedel i skolan, är att det, i viss mån, saknas kritik i framställningen av de olika tekniska hjälpmedlen. Vi upplever att många framställningar är enkelspåriga och inte granskar de tekniska hjälpmedlen på ett kritiskt sätt. Bristen på kritik mot hjälpmedlen medförde att även vi fick svårigheter med den kritiska framställningen av hjälpmedlen i arbetet. Därför ser vi även fortsatta kritiska granskningar av olika tekniska hjälpmedel som ett viktigt forskningsområde för vidare studier.

5 Referenslista

Boaler, J. (1997). *Experiencing school mathematics: Teaching styles, sex, and setting*. Buckingham: Open University Press.

Brousseau, G., & Balacheff, N. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics : Didactique des mathématiques, 1970-1990*(Mathematics education library, 19). Dordrecht ; London: Kluwer Academic.

Burns, H. L., & Capps, C. G. (1988). Foundations of intelligent tutoring systems: An Introduction. I Polson, M.C., Richardson, J.J. (Ed), *Foundations of Intelligent Tutoring Systems.* Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates

Crowley, M. L. (1987). The van Hiele model of the development of geometric thought. I M. Montgomery Lindquist(Ed.), *Learning and teaching geometry, K-12*, 1-16.
Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Clements, D. H. (2003). Teaching and learning geometry. *A research companion to principles and standards for school mathematics*, 151-178

Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, 420-464

Chi, M. T. (2009). Active-constructive-interactive: A conceptual framework for differentiating learning activities. *Topics in cognitive science*, *1*(1), 73-105.

Dellos, R. (2015). Kahoot! A digital game resource for learning. *International Journal of Instructional Technology and Distance Learning*, *12*(4), 49-52.

Friberg, F. (2017). *Dags för uppsats : Vägledning för litteraturbaserade examensarbeten* (Tredje upplagan ed.). Lund: Studentlitteratur.

Friberg, J. (1981). Methods and traditions of Babylonian mathematics: Plimpton 322, Pythagorean triples, and the Babylonian triangle parameter equations. *Historia Mathematica*, *8*(3), 277-318. DOI: https://doi.org/10.1016/0315-0860(81)90069-0

Fuys, D., Geddes, D., & Tischler, R. (1988). The van Hiele model of thinking in geometry among adolescents. *Journal for Research in Mathematics Education. Monograph*, *3*, i+1-196. DOI: https://doi.org/10.2307/749957

Gutiérrez, A., Jaime, A., & Fortuny, J. M. (1991). An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the van Hiele levels. *Journal for Research in Mathematics education*, 237-251.

Hylén, J. (2013). *Digitalisering i skolan–en kunskapsöversikt.* (*Ifous rapportserie*, 2013:01*).* Stockholm: Ifous och FoU Skola/Kommunförbundet Skåne

Hylén,J., & Grönlund,Å (2011): Bättre resultat med egen dator: En dator per elev – en forskningsöversikt, i *Datorn i Utbildningen*, nr 1, 2011. http://www.janhylen.se/wp-content/uploads/2011/04/1-1-DiU.pdf

GeoGebra, (u.å). Parallellogram. Hämtas 2018-10-08 från https://www.geogebra.org/m/bGBaC9ty#material/Vqf2MjZW

Goodreads. (u.å). Carl Sagan. Hämtad 2018-10-17 från https://www.goodreads.com/quotes/194992-you-have-to-know-the-past-to-understand-the-present

Icard, S. B. (2014). Educational technology best practices. *International Journal of Instructional Technology and Distance Learning*. 11(3), 37-41.

Jonsson, B., Norqvist, M., Liljekvist, Y., & Lithner, J. (2014). Learning mathematics through algorithmic and creative reasoning. The Journal of Mathematical Behavior, Vol. 36, 20–32.

Larsnäs, M. [Mats Larsnäs]. (2011, 18 oktober). *Matematikundervisning med digitala hjälpmedel* [Videofil]. Hämtad 2018-10-17 från: **https://www.youtube.com/watch?v=Nav_hEHtRJU&t=230s**

Lewis, F. P. (1920). History of the parallel postulate. *The American Mathematical Monthly*, *27*(1), 16-23.

Lingefjärd, T. (2009). GeoGebra–för de yngre. *Nämnaren, 1, 38-41*.

Lingefjärd, T., & Jönsson, P. (2009). Matematiska undersökningar med fria programvaror. *Tangenten*, 2, 36-44

Lingefjärd, T., & Hall,J . (2012). Vad varje matematiklärare borde kunna. *Nämnaren, 3*, 51-55

Lundgren, U. P. (1995). *Att organisera omvärlden*. Liber. Stockholm.

Lundin, S. (2008). *Skolans matematik : En kritisk analys av den svenska skolmatematikens förhistoria, uppkomst och utveckling* (PhD dissertation). Uppsala.: Acta Universitatis Upsaliensis, Tillgänglig: http://uu.diva-portal.org/smash/record.jsf?pid=diva2%3A172874&dswid=-8726

Malmer, G. (2002). *Bra matematik för alla. Nödvändig för elever med inlärningssvårigheter.* Lund: Studentlitteratur

Nye, B. D. (2015). Intelligent tutoring systems by and for the developing world: A review of trends and approaches for educational technology in a global context. *International Journal of Artificial Intelligence in Education*, *25*(2), 177-203.

Nyström, P. (1998). Bedömning av kvalitet i matematikkunskaper. *En jämförelse mellan Skolverkets betygskriterier, SOLO-taxonomin och van Hieles nivåer av tänkande (Pm nr 141). Umeå universitet, Enheten för pedagogiska mätningar, Umeå.*

Olson, J. (1988). *Schoolworlds/Microworlds. Computers and the Culture of the Classroom. Elmsford:* Pergamon Press

Pedersen, J. (1998). *Informationstekniken i skolan. En forskningsöversikt. (ELOÏS-projektet-rapport, 1998) Linköping: P*edagogiska institutionen, *Linköpingsuniversitet*

Pierce, R., & Stacey, K. (2013). Teaching with new technology: four 'early majority'teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *16*(5), 323-347.

Prytz, J. (2007). *Speaking of Geometry: A study of geometry textbooks and literature on geometry instruction for elementary and lower secondary levels in Sweden, 1905-1962, with a special focus on professional debates* (Doctoral dissertation, Matematiska institutionen).

Prytz, J. (2015). Swedish mathematics curricula, 1850-2014: An overview. In *Dig where you stand" 3. Proceedings of the Third International Conference on the History of Mathematics Education. Uppsala: Uppsala University*.

Prytz, J. (2017a). Governance of Swedish school mathematics—where and how did it happen? A study of different modes of governance in Swedish school mathematics, 1910-1980. *Espacio, Tiempo y Educación*, *4*(2), 43-72. DOI: https://doi.org/10.14516/ete.180

Prytz, J. (2017b). Nya matematiken – revolutionen som uteblev. I Berg, A., Larsson, E., Michaëlsson, M., Westberg, J., & Åkerlund, A. (2017). Utbildningens revolutioner: Till studiet av utbildningshistorisk förändring. *professional debates* (Doctoral dissertation, Matematiska institutionen).

Richard, P.R., Fortuny, J.M., Gagnon, M., Leduc, N., Puertas, E., Tessier-Baillargeon, M., (2011). ZDM Mathematics Education 43(3): 425-439. DOI: https://doi.org/10.1007/s11858-011-0320-y

Skolverket. (2011). Läroplan för gymnasieskolan. Tillgänglig:
https://www.skolverket.se/undervisning/gymnasieskolan/laroplan-program-och-amnen-i-gymnasieskolan/gymnasieprogrammen/amne?url=1530314731%2Fsyllabuscw%2Fjsp%2Fsubject.htm%3FsubjectCode%3DMAT%26lang%3Dsv%26tos%3Dgy%26p%3Dp&sv.url=12.5dfee44715d35a5cdfa92a3

Skolverket. (2016). Jämförelser mellan 2003 års öch 2015 års enkät. Stockholm: Skolverket.
https://www.skolverket.se/sitevision/proxy/publikationer/svid12_5dfee44715d35a5cdfa2899/55935574/wtpub/ws/skolbok/wpubext/bilaga/Blob/pdf568.pdf;jsessionid=B50EC307DBD727C263A57CBA39152FE2?k=568

Skolverket. (2018). Gamla prov och exempeluppgifter i gymnasieskolan. Hämtad 2018-10-20, från: https://www.skolverket.se/undervisning/gymnasieskolan/nationella-prov-i-gymnasieskolan/forbereda-och-bestalla-prov-i-gymnasieskolan/gamla-prov-i-gymnasieskolan

Spires, H. A., Rowe, J. P., Mott, B. W., & Lester, J. C. (2011). Problem solving and game-based learning: Effects of middle grade students' hypothesis testing strategies on learning outcomes. *Journal of Educational Computing Research*, *44*(4), 453-472. DOI: https://doi.org/10.2190/EC.44.4.e

Stolt, B. (1968). *Geometri-euklidisk och icke-euklidisk*. Stockholm: Bokförlaget Prisma.

Strömer, M. (1884). (Ed.15)*De sex första jemte elfte och tolfte böckerna af Euclidis elementa, eller grundliga inledning till geometrien*. Stockholm : F. & G. Beijers förlag.

Säljö (2014) Den Lärnade Människan - teoretiska traditioner. I Lundgren, U, P. (Ed.), Säljö, R. (Ed.) & Liberg, C (Ed.) . (2014). *Lärande, skola, bildning. Grundbok för lärare. (3. utg) (s 251-309)*. Stockholm: Natur & Kultur

6 Bilagor

Bilaga 1
Alla dessa källor är inte delar av arbetet men samtliga har genomgått analysen.

Källor som behandlar geometrihistoria

Berg, A., Larsson, E., Michaëlsson, M., Westberg, J., & Åkerlund, A. (2017). Utbildningens revolutioner: Till studiet av utbildningshistorisk förändring.

Lundgren, U. P. (1995). *Att organisera omvärlden*. Liber. Stockholm.

Lundin, S. (2008). *Skolans matematik: en kritisk analys av den svenska skolmatematikens förhistoria, uppkomst och utveckling* (Doctoral dissertation, Acta Universitatis Upsaliensis).

Prytz, J. (2007). *Speaking of Geometry: A study of geometry textbooks and literature on geometry instruction for elementary and lower secondary levels in Sweden, 1905-1962, with a special focus on professional debates*(Doctoral dissertation, Matematiska institutionen).

Prytz, J. (2015). Swedish mathematics curricula, 1850-2014: An overview. In *Dig where you stand" 3. Proceedings of the Third International Conference on the History of Mathematics Education. Uppsala: Uppsala University*.

Prytz, J. (2017a). Governance of Swedish school mathematics—where and how did it happen? A study of different modes of governance in Swedish school mathematics, 1910-1980. *Espacio, Tiempo y Educación*, *4*(2), 43-72.

Prytz, J. (2017b). Nya matematiken – revolutionen som uteblev. I Berg, A., Larsson, E., Michaëlsson, M., Westberg, J., & Åkerlund, A. (2017). Utbildningens revolutioner: Till studiet av utbildningshistorisk förändring. *professional debates* (Doctoral dissertation, Matematiska institutionen).

Richardson, G. (2010). *Svensk utbildningshistoria – Skola och samhälle förr och nu*. Lund: Studentlitteratur.

Senk, S. L. (1985). How well do students write geometry proofs?. *The mathematics teacher*, *78*(6), 448-456.

Skolverket. (2011). Läroplan för gymnasieskolan. Tillgänglig: **https://www.skolverket.se/undervisning/gymnasieskolan/laroplan-program-och-amnen-i-gymnasieskolan/gymnasieprogrammen/amne?url=1530314731%2Fsyllabuscw%2Fjsp%2Fsubject.htm%3FsubjectCode%3DMAT%26lang%3Dsv%26tos%3Dgy%26p%3Dp&sv.url=12.5dfee44715d35a5cdfa92a3**

Skolverket. (2016). Jamförelser mellan 2003 ars öch 2015 ars enkät. Stockholm: Skolverket.
https://www.skolverket.se/sitevision/proxy/publikationer/svid12_5dfee44715d35a5cdfa2899/55935574/wtpub/ws/skolbok/wpubext/bilaga/Blob/pdf568.pdf;jsessionid=B50EC307DBD727C263A57CBA39152FE2?k=568

Strömer, M. (1884). (Ed.15)*De sex första jemte elfte och tolfte böckerna af Euclidis elementa, eller grundliga inledning till geometrien*. Stockholm :F. & G. Beijers förlag.

Svensson, A. & Ståhl, M. (2005) *Geometri i gymnasiematematiken – En jämförande studie av svenska och finska matematikböcker*. Tsunami

Ulin, B. (1998) Mer rymd åt geometrin!. *Nämnaren*, *4*, 23-25.
Lewis, F. P. (1920). History of the parallel postulate. *The American Mathematical Monthly*, *27*(1), 16-23.

Källor som behandlar matematikdidaktik

Brousseau, G., & Balacheff, N. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics : Didactique des mathématiques, 1970-1990* (Mathematics education library, 19). Dordrecht ; London: Kluwer Academic.

Crowley, M. L. (1987). The van Hiele model of the development of geometric thought. *Learning and teaching geometry, K-12*, 1-16.

Clements, D. H. (2003). Teaching and learning geometry. *A research companion to principles and standards for school mathematics*, 151-178

Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, 420-464

Chi, M. T. (2009). Active-constructive-interactive: A conceptual framework for differentiating learning activities. *Topics in cognitive science*, *1*(1), 73-105

Fuys, D., Geddes, D., & Tischler, R. (1988). The van Hiele model of thinking in geometry among adolescents. *Journal for Research in Mathematics Education. Monograph*, *3*, i-196.

Gutiérrez, A., Jaime, A., & Fortuny, J. M. (1991). An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the van Hiele levels. *Journal for Research in Mathematics education*, 237-251.

Herbst, P. G. (2006). Teaching geometry with problems: Negotiating instructional situations and mathematical tasks. *Journal for Research in Mathematics Education*, 313-347.

Holmberg, B. (2011). Analysera mera i geometri. *Nämnaren*, *4*, 10-15.
Senk, S. L. (1985). How well do students write geometry proofs?. *The mathematics teacher*, *78*(6), 448-456.

Johansson, J. (2004). Om bevis i gymnasiematematiken: En studie av gymnasieelevers syn på, attityd till och kunskap om matematiska bevis

Kuzniak, A., & Rauscher, J. C. (2011). How do teachers' approaches to geometric work relate to geometry students' learning difficulties?. *Educational studies in Mathematics*, *77*(1), 129-147.

Löwing, M., & Kilborn, W. (2010). Elevers kunskaper i mätning och geometri. *Nämnaren nr*, *1*, 10-17.

Malmer, G. (2002). *Bra matematik för alla. Nödvändig för elever med inlärningssvårigheter.* Lund: Studentlitteratur

Nyström, P. (1998). Bedömning av kvalitet i matematikkunskaper. *En jämförelse mellan Skolverkets betygskriterier, SOLO-taxonomin och van Hieles nivåer av tänkande (Pm nr 141). Umeå universitet, Enheten för pedagogiska mätningar, Umeå.*

Skolverket. (2015). Modul: Didaktiska perspektiv på matematikundervisningen 1 Del 4: Didaktiskt kontrakt. Hämtad 2018-10-17 från **https://larportalen.skolverket.se/LarportalenAPI/api-v2/document/path/larportalen/material/inriktningar/1-matematik/Grundsärskola/460_didaktiskaperspektivpamatematikundervisningen1_SAR/4_didaktisktkontrakt/material/flikmeny/tabA/Artiklar/SK_04A_01_didaktisktkontrakt_OH.docx**

Skott, J., Jess, K., Hansen, H. C., & Lundin, S. (2010). *Matematik för lärare δ Didaktik.* Malmö: Gleerups

Sweller, J. (1993). Some cognitive processes and their consequences for the organisation and presentation of information. *Australian Journal of Psychology*, *45*(1), 1-8.

Säljö (2014) Den Lärnade Människan - teoretiska traditioner. I Lundgren, U, P. (Ed.), Säljö, R. (Ed.) & Liberg, C (Ed.) . (2014). *Lärande, skola, bildning. Grundbok för lärare. (3. utg) (s 251-309)*. Stockholm: Natur & Kultur

Källor som behandlar teknik i skolan

Brousseau, G., & Balacheff, N. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics : Didactique des mathématiques, 1970-1990* (Mathematics education library, 19). Dordrecht ; London: Kluwer Academic.

Dellos, R. (2015). Kahoot! A digital game resource for learning. *International Journal of Instructional Technology and Distance Learning*, *12*(4), 49-52.

Farkell-Bååthe, S. (1996). Datorn–ett värdefullt pedagogiskt hjälpmedel.

GeoGebra, (u.å). Parallellogram. Hämtas 2018-10-08 från https://www.geogebra.org/m/bGBaC9ty#material/Vqf2MjZW

Holmberg, B. (2011). Analysera mera i geometri. *Nämnaren*, *4*, 10-15.

Hylén, J. (2010). Digitaliseringen av skolan.

Hylén, J. (2013). Digitalisering i skolan–en kunskapsöversikt. *Ifous rapportserie*, *1*, 09-003.

Hylén,J., & Grönlund,Å (2011): Bättre resultat med egen dator: En dator per elev – en forskningsöversikt, i *Datorn i Utbildningen*, nr 1, 2011. http://www.janhylen.se/wp-content/uploads/2011/04/1-1-DiU.pdf

Icard, S. B. (2014). Educational technology best practices. International Journal of Instructional Technology and Distance Learning. 11(3), 37-41.

Jones, K. (2000). Providing a foundation for deductive reasoning: Students' interpretations when using dynamic geometry software and their evolving mathematical explanations. *Educational studies in mathematics*, *44*(1-2), 55-85.

Larsnäs, M. [Mats Larsnäs]. (2011, 18 oktober). *Matematikundervisning med digitala hjälpmedel* [Videofil]. Hämtad 2018-10-17 från: **https://www.youtube.com/watch?v=Nav_hEHtRJU&t=230s**

Lingefjärd, T. (2009). GeoGebra–för de yngre. *Nämnaren, 1, 38-41.*

Lingefjärd, T. (2009). GeoGebra i gymnasieskolan.

Lingefjärd, T., & Jönsson, P. (2009). Matematiska undersökningar med fria programvaror. *Tangenten*, 2, 36-44

Lingefjärd, T., & Hall,.J (2012). Vad varje matematiklärare borde kunna. *Nämnaren, 3*, 51-55

Nilsson, L. E. (2000). Pojken som nörd och flickan som användare: tankar kring skolan, stereotypier, jämställdhet och IKT

Nye, B. D. (2015). Intelligent tutoring systems by and for the developing world: A review of trends and approaches for educational technology in a global context. *International Journal of Artificial Intelligence in Education*, *25*(2), 177-203.

Pedersen, J. (1998). *Informationstekniken i skolan. En forskningsöversikt. (ELOÏS-projektet-rapport, 1998) Linköping:* pedagogiska institutionen, *Linköpingsuniversitet.*

Pierce, R., & Stacey, K. (2013). Teaching with new technology: four 'early majority'teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *16*(5), 323-347.

Quaresma, P., Santos, V., & Marić, M. (2018). WGL, a web laboratory for geometry. *Education and Information Technologies*, *23*(1), 237-252.

Richard, P.R., Fortuny, J.M., Gagnon, M., Leduc, N., Puertas, E., Tessier-Baillargeon, M., (2011). ZDM Mathematics Education 43(3): 425-439. DOI:https://doi.org/10.1007/s11858-011-0320-y

Sollervall, H., Ryan, U., Lingefjärd, T., & Helenius, O. (2015). Del 2. Orkestrering av matematikundervisning med stöd av IKT.

Spires, H. A., Rowe, J. P., Mott, B. W., & Lester, J. C. (2011). Problem solving and game-based learning: Effects of middle grade students' hypothesis testing strategies on learning outcomes. *Journal of Educational Computing Research*, *44*(4), 453-472.

Bilaga 2

Följande kursmål anges för de olika matematikkurserna enligt skolverket
(Skolverket, 08-10-2018)

1c:

- Begreppen sinus, cosinus och tangens och metoder för beräkning av vinklar och längder i rätvinkliga trianglar.
- Begreppet vektor och dess representationer såsom riktad sträcka och punkt i ett koordinatsystem.
- Addition och subtraktion med vektorer och produkten av en skalär och en vektor.
- Matematisk argumentation med hjälp av grundläggande logik inklusive implikation och ekvivalens samt jämförelser med hur man argumenterar i vardagliga sammanhang och inom naturvetenskapliga ämnen.
- Illustration av begreppen definition, sats och bevis, till exempel med Pythagoras sats och triangelns vinkelsumma.

2c:

- Begreppet kurva, räta linjens och parabelns ekvation samt hur analytisk geometri binder ihop geometriska och algebraiska begrepp.
- Användning av grundläggande klassiska satser i geometri om likformighet, kongruens och vinklar.

3c:

- Egenskaper hos cirkelns ekvation och enhetscirkeln för att definiera trigonometriska begrepp.
- Bevis och användning av cosinus-, sinus- och areasatsen för en godtycklig triangel

4:

- Hantering av trigonometriska uttryck samt bevis och användning av trigonometriska formler inklusive trigonometriska ettan och additionsformler.
- Algebraiska och grafiska metoder för att lösa trigonometriska ekvationer, såväl med som utan numeriska och symbolhanterande verktyg.
- Olika bevismetoder inom matematiken med exempel från områdena aritmetik, algebra eller geometri.

5:

Inga explicit uttalade krav.