Vilket skulle bevisas

- en litteraturstudie om matematiska bevis i svensk gymnasieskola

Ellen Mattsson & Sara Olsson

Ämneslärarprogrammet med inriktning mot arbete i gymnasieskolan

Examensarbete: 15 hp
Kurs: LGMA2G
Nivå: Grundnivå
Termin/år: HT 2018
Handledare: Jan Stevens
Examinator: Jonny Lindström
Kod: HT18-3001-002-LGMA2G

Nyckelord: bevis, gymnasieskola, matematikundervisning, matematikdidaktik.

Abstract

This literary study aims at examining the use of mathematical proofs in upper secondary school according to earlier research. The questions at issue are framed by following three questions: ”What is a mathematical proof?”, ”What is the use value and purpose of proofs in upper secondary school math?” and ”How can teaching about mathematical proofs be carried out in upper secondary school?”. The study suggests that a proof must be socially accepted and built in a deductional way to be counted as a proof. The function of proof in upper secondary school mathematics is important because proof is a central part of the mathematics and the curriculum says that proof must be a part of education. The study also describes how proof fills many different educational functions. It can be used as a tool for explanation, give deeper understanding and prepare students for future university studies. Teaching proof is advantageously done in a social context and in ways that which makes proof and its structure visible. Students are through problem solving and creative reasoning able to work with proof to achieve a deeper understanding of mathematics. In the discussion, the purpose of the proof is divided into explicit and implicit knowledge. Explicitly, a proof has a role of explaining and convincing. Implicitly, proof can be used to improve critical thinking and the ability to communicate, as well as to give tools for other parts of mathematics. The literary study shows that all students, regardless of cognitive level, benefits from working with mathematical proof.

Förord

Vi vill inleda med att tacka vår handledare Jan Stevens som under hela skrivprocessen funnits tillgänglig när vi haft frågor och funderingar. Med intresse och engagemang har han kommit med förslag på bra litteratur, förklarat krångliga begrepp och gett oss en förbättrad helhetsbild kring matematiska bevis. Samtidigt vill vi tacka vår kursansvarig Johanna Pejlare som de första dagarna hjälpte oss då vi på vacklande ben försökte konkretisera våra syftpunkter och frågeställningar. Ett stort tack riktas till Erik Persson som med nya ögon kom in och korrekturläste vår text. Avslutningsvis vill vi också tacka vår examinator Jonny Lindström och våra opponenter Fabio Giuliari och Veronica Persson som gav oss konstruktiv kritik på kursens granskningsseminarium.

Innehållsförteckning

Figurförteckning

1 Inledning

Bevis och bevisföring är en av matematikens största grundbultar. Matematiken består av påståenden som behöver bevisas för att anses som sanna. Därför bygger hela den matematiska vetenskapen på bevis. Om matematiken bygger på bevis borde väl elever i skolan kontinuerligt exponeras för bevis och använda sig av dem som en naturlig del i sitt räknande? När vi varit ute på våra VFU-perioder på varsin gymnasieskola i Göteborg har vi mött en helt annan verklighet. Bevis uppfattas av lärarna som något krångligt och svårt som dagens stressade gymnasieelever absolut inte skall behöva utsättas för. Vad har eleverna för nytta av att veta varifrån en formel kommer om de ändå får rätt svar varje gång de stoppar in olika siffror i den?

Vi har själva känt en osäkerhet kring hur vi i framtiden skall undervisa om matematiska bevis. Vår magkänsla har sagt åt oss att ta upp bevis i undervisningen under våra VFU-perioder men vi har inte kunnat motivera det vetenskapligt. En anledning till varför vi valde att skriva om matematiska bevis i vår uppsats är just för att vi var nyfikna på om det gick att vetenskapligt motivera undervisning kring bevis och hur en sådan undervisning i så fall skulle genomföras.

För en gemensam ingång till ämnet inleds vår uppsats i avsnitt tre med en sammanställning av vad vetenskaplig litteratur anser att ett matematiskt bevis är. Avsnittet börjar med en historisk tillbakablick och avlutas med en beskrivning av olika sorters bevis. Avsnitt fyra inleds med en beskrivning av bevisens funktion inom matematiken i allmänhet och fokuserar därefter på bevisens syfte i undervisningen i gymnasieskolan i synnerhet. Då vi klargjort vad ett matematiskt bevis är och vad det har för funktioner behandlar avsnitt fem hur undervisning kring bevis kan ske. Konkreta förslag och olika infallsvinklar presenteras. Avslutningsvis knyter vi samman vår resultatdel och lyfter våra egna tankar kring bevis i vår diskussionsdel i avsnitt sex.

1.1 Syfte och frågeställning

Detta examensarbete är en litteraturstudie med syfte att undersöka vilken funktion matematiska bevis har i svensk gymnasieskola. För att studera ämnet utgår uppsatsen från följande frågeställningar:

i) Vad är ett matematiskt bevis?
ii) Vad har bevis för funktion i undervisning på gymnasieskolan?
iii) Hur kan undervisning kring matematiska bevis genomföras i gymnasieskolan?

2 Material och metod

Detta examensarbete är en litteraturstudie av vetenskapliga texter behandlande matematiska bevis och matematiska bevis i undervisning. I sökandet av litteratur har vi använt oss av databaserna Google Scholar, Göteborgs universitetsbiblioteks Supersök och MathSciNet. Då vi specifikt sökte matematikdidaktiska artiklar använde vi oss av databasen Mathematics Education Database. Sökord vi använt oss av i olika kombinationer är *proof*, *proving*, *mathematical*, *education*, *upper secondary school*, *meaning* och *teachning*. Vi sökte också på de svenska orden *bevis*, *matematik* och *gymnasium* men det gav oss inga relevanta sökträffar. Under den eftermiddagslånga sökkurs vi erbjöds i början av vårt uppsatsskrivande lärde vi att använda flera av sökmotorernas filter och funktioner vilket effektiviserade vårt sätt att söka avsevärt. För att få en bättre uppfattning om artiklarnas tyngd och relevans användes databaserna Ulrichsweb och The Nordic List. Vi har tacksamt använt oss av både Chalmers och Göteborgs Universitets biblioteks personal och digitala hjälpmedel för att få tag i litteratur och söka artiklar.

Inledningsvis valdes flertalet artiklar ut ur de olika databaserna enbart för att deras titlar lät relevanta för vår litteraturstudie. Därefter läste vi artiklarnas abstract för att ytterligare kunna välja bort några artiklar. De artiklar som efter detta fortfarande kändes relevanta läste vi i sin helhet. För att selektera ut vilken litteratur som var mest relevant undersökte vi också hur mycket annan vetenskaplig litteratur citerat och refererat till de artiklar vi valt ut. Denna procedur upprepades under arbetets gång. För att finna ny litteratur inom området sökte vi upp litteratur som i sin tur refererat till de källor vi använt oss av. I de fall vi varit osäkra på en källas relevans har diskussion med handledare förts.

Kirsti Hemmis doktorsavhandling *Approaching Proof in a Community of Mathematical Practice* från 2006 var inledningsvis en grundbult i vår studie. Genom att läsa delar av hennes avhandling fick vi en första introduktion till ämnet. Vi sökte upp litteratur som Hemmi refererat till i sin avhandling för att få en bredare bild av forskningsområdet. Under arbetets gång har vi fortsatt sett vad trovärdiga källor refererat till och använt oss av dem. På så sätt har vi också kunnat se vilka källor som varit ständigt återkommande och som därför känts relevanta för oss att behandla.

3 Matematiska bevis

Vad ett matematiskt bevis är skulle troligtvis besvaras olika beroende på vem som tillfrågas och i vilket sammanhang. Något som i ett klassrum kallas bevis skulle kanske inte godkännas som bevis av den matematiska vetenskapen (CadwalladerOlsker, 2011, s. 33). I boken Nature's Numbers skriver matematikern Ian Stewart (2004) att

> Textbooks of mathematical logic say that a proof is a sequence of statements, each of which either follows from previous statements in the sequence or from agreed axioms - unproved but explicitly stated assumptions that in effect define the area of mathematics being studied. This is about as informative as describing a novel as a sequence of sentences, each of which either sets up an agreed context or follows credibly from previous sentences. Both definitions miss the essential point: that both a proof and a novel must tell an interesting story (Stewart, 2004, s. 47).

Stewart (2004, s. 47) menar dessutom att både en roman och ett bevis måste vara övertygande för mottagaren. Begreppet bevis verkar vara mer komplext än att det går att sammanfatta i en mening. Därför följer först en sammanställning av hur vetenskaplig litteratur presenterar uppbyggnad av matematiska bevis och därefter exempel på olika sätt att bevisa påståenden. Inledningsvis ges en historisk översikt.

3.1 Nedslag i den västerländska historien

I det antika Grekland (700 - 300 f.Kr.) var de första bevisen av visuell karaktär (Grabiner, 2012, s. 148). En påminnelse om det är exempelvis att ordet *teorem* kommer från grekiskans ord för ”att titta på” eller ”betrakta”. Med tiden utvecklades geometrin och logiken i Grekland vilket förenklade sättet att föra argumentationer med bevis. Enligt Grabiner (2012, s. 148-150) finns det flertalet anledningar till varför utvecklingen kring bevis skedde i just Grekland. För det första var grekerna influerade av de matematiska traditionerna från Egypten och Babylonien. För det andra var den grekiska filosofin argumentativ. Slutligen fanns en vilja inom den grekiska vetenskapen att reducera ned saker till sina minsta beståndsdelar. Beståndsdelarna kallade de för element (Grabiner, 2012, s. 148-150).

En vetenskaplig metod som utvecklades inom den grekiska filosofin var deduktiv slutledning. I en deduktiv slutledning är påståenden härledda från tidigare påståenden (Eves, 1997, s. 13). Det gick inte att i all oändlighet härleda påståenden bakåt, och att hamna i cirkelresonemang där påståenden till slut hänvisade tillbaka till varandra var inte heller att föredra. Därför kom de grekiska matematikerna överens om att vissa påståenden skulle accepteras vara sanna utan att kunna bevisas. Dessa accepterade satser kallas *axiom,* och utifrån dessa kunde nu alla andra påståenden inom matematiken härledas (Eves, 1997, s. 13). Kunskap kring hur geometri under 300-talet f.Kr. kunde uttryckas med hjälp av axiom och definitioner är ihopsamlat i Euklides *Elementa* (Heath, 1956, s. 5). Detta verk bestående av 13 delar har spelat en stor roll för matematiken ända in i våra dagar (Krantz, 2010, s. 242). Euklides *Elementa* inleds med en rad definitioner av olika begrepp. Ett exempel är definition nummer två: ”En linje är en längd utan bredd” (Heath, 1956, s. 153). Efter definitionerna följer fem stycken postulat och fem stycken axiom. Från definitionerna, postulaten och axiomen kunde Euklides bygga upp bevis för många teorem (Kline, 1972, s. 87), som exempelvis Pythagoras sats och kongruens.

Under 1600-talet genomgick matematiken i Europa en stor förändring då fokus kring bevis flyttades från geometri till algebra. Influenser från den islamska världens bidrog starkt till den utveckling av algebra som skedde i Europa (Grabiner, 2012, s. 154). Väsentligt för bevisens utveckling i Europa menar Grabiner var då fransmannen François Viète utvecklade ett symbolspråk för matematiken kort innan 1600-talets början. Symbolspråket kom sedan att utvecklas av en rad andra vetenskapsmän. Som exempel tar Grabiner (2012, s. 156) René Descartes som utvecklade de grunder kring ekvationer vi än idag använder i matematikundervisning. Matematiken utvecklades på flera områden då naturvetenskapens framsteg och utveckling fick ett ökat behov av matematik som verktyg (Kline, 1972, s. 250). Isaac Newton och Gottfried Wilhelm von Leibniz utvecklade under 1600-talet på var sitt håll den matematiska analysen vilket blivit ett av huvudområdena inom matematiken (Kline, 1972, s. 356, 370).

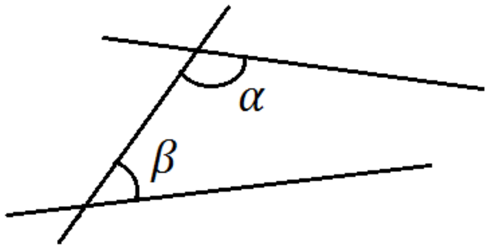
Ett tydligt skifte från det visuella till ren algebra skedde under 1700-talet. Algebraiker menade att det kunde vara vilseledande att följa sin intuition och att algebra istället sågs som det rena och riktiga (Grabiner, 2012, s. 157). Ett av de största bidragen till matematiken och dess bevis under 1800-talet var icke-euklidisk geometri (Kline, 1972, s. 861). Under avsnitt 3.1.1 beskrivs icke-euklidisk geometri mer ingående.

Under 1800-talet rådde delade meningar om vad den riktiga grunden till matematik egentligen var. Som en konsekvens av detta utvecklades tre olika matematiska skolor (Kline, 1972, s. 1192). Logicismen utvecklades av Bertrand Russell och Alfred North Whitehead som menade att matematik och logik hör så tätt samman att de i realiteten är samma sak. Matematiken kunde härledas ur logiken utan nödvändiga axiom (Kline, 1972, s. 1192-1193). Intuitionismen motsatte sig att matematiken helt skulle vara en förlängning av logiken och betonade istället människans intuition och mentala konstruktion (Kline, 1972, s. 1200). L.E.J. Brouwer är den moderna intuitionismens grundare (Kline, 1972, s. 1199). David Hilbert utvecklade formalismen och försökte visa att matematiken var fri från motsättningar genom att skriva och bevisa satser med ett formellt språk (CadwallarOlsker, 2011, s. 34). Han ville utveckla en bas för talsystemet som inte utgick från mängdlära (Kline, 1972, s. 1204). Ett av 1900-talets största matematiska händelser ägde rum 1931 då Kurt Gödel med sitt ofullständighetsteorem motbevisade formalisten Hilberts idé att matematiken kunde vara fri från motstridigheter (CadwallarOlsker, 2011, s. 35). Även om de tre skolornas syn på bevis skiljde sig åt ansåg de alla att bevis var en viktig del av matematiken (Hemmi, 2006, s. 19).

3.1.1 Invändningar mot axiomens beständighet

Fram till 1800-talet satte de flesta matematiker sin totala tillit till Euklides *Elementa*. Geometrin var en oföränderlig kunskap och eftersom den tillhörde den värld som var designad av Gud var den perfekt. Viss tveksamhet hade dock ända sedan *Elementan* sattes samman riktats mot Euklides femte axiom eftersom det inte var lika självklart och övertygande som de övriga axiomen (Kline, 1972, s. 863). Parallellaxiomet säger att:

> När en rät linje skär två räta linjer, och de båda inre vinklarna på samma sida om den skärande räta linjen är mindre än två räta vinklar, kommer de båda räta linjerna, om de förlängas obegränsat, att skära varandra på den sida om den skärande räta linjen som de två inre vinklarna ligger. (Heath, 1956, s. 153)



Figur 1. Illustration av parallellaxiomet.

Det skulle dröja fram till 1800-talet innan kritiken mot det femte axiomet fick sitt riktiga genomslag. Teorin som invänder mot Euklides femte axiom kallas icke-euklidisk geometri. Den började utvecklas av olika personer oberoende av varandra under lång tid men Nikolaj Lobatjevskijs, János Bolyais och Carl Friedrichs Gauss publikationer kring ämnet har varit starkt bidragande till teorins utveckling (Kline, 1972, s. 878). Ett exempel på när parallellaxiom inte går att tillämpa är om linjer studeras på en sfär. Om en storcirkel på en sfär ses som en linje finns ingen annan linje parallell med den storcirkeln, då storcirklarna alltid skär varandra i två punkter. En storcirkel är en cirkel på en sfär vars mittpunkt är samma punkt som sfärens centrum (Vretblad & Ekstig, 2006, s. 202).

3.2 Uppbyggnad av bevis

de Villiers (1990, s. 19) menar att det inte finns någon strikt mall för hur ett matematiskt bevis skall vara uppbyggt. För det första finns det inga av naturen givna mallar för hur ett bevis skall skrivas på ett logiskt korrekt sätt. För det andra menar de Villiers (1990) att forskare ofta skriver riktat till en specifik mottagare och att de därför kan utelämna delar av beviset. Om den tänkta mottagaren exempelvis är en annan matematiker kan rutinmässiga uträkningar utelämnas. Ett helt korrekt bevis med alla uträkningar är därför ovanligt, oftast finns bara tillräckligt med uträkningar för att övertyga mottagaren. Vad som anses vara det bästa beviset är beroende på vilket syfte det skall tjäna (CadwallarOlsker, 2011, s. 41). Ett kort men ändå meningsfullt bevis kan anses bättre om det främst skall övertyga läsaren, medan ett mer utförligt bevis är bättre om syftet är att förklara. Det finns också en estetisk aspekt i matematiska bevis som påverkar bevisets utformning. Korta och kärnfulla bevis anses ofta som extra eleganta, men i slutändan är det främst den personliga smaken som bestämmer om ett bevis upplevs vackert eller inte (Hersh, 1993, s. 393).

3.2.1 Deduktion

Som nämnts i avsnitt 3.1 insåg matematikerna redan i antikens Grekland behovet av att bevisa matematiska antaganden. De ansåg att matematiken skulle bygga på deduktiva resonemang och inte på experiment (Eves, 1997, s. 10). Matematikerna i antikens Grekland menade inte att experiment skulle uteslutas från matematiken, experiment var fortfarande viktiga för att utveckla matematiken, men en påstående var tvunget att bevisas deduktivt (Eves, 1997, s. 10). En allmän deduktiv slutledning bygger på att en har några premisser, påståenden. Utifrån premisserna kan en slutsats härledas och om premisserna är sanna är också slutsatsen sann (Eves, 1997, s. 6). Den deduktiva uppbyggnaden som finns i bevis är vad som skiljer bevis från argument. Ett argument har inte några krav på deduktion utan kan exempelvis vara en visualisering. Det råder delade åsikter kring distinktionen eftersom vissa påstår att bevis är ett visst sorts argument (Hemmi, Lepik & Viholainen, 2013, s. 358). För att veta att något är sant behöver det bevisas. Om en däremot vill visa att hypotesen är falsk räcker det att en hittar ett motexempel då antagandet inte stämmer. En behöver alltså inte bevisa att antagandet är falskt utan ett motexempel är tillräckligt (Velleman, 1998, s. 84).

3.2.2 Bevisens formalitet

År 1993 skriver Jaffe och Quinn i artikeln *Theoretical mathematics: toward a cultural synthesis of mathematics and theoretical physics* att de upptäckt en trend där matematiken tenderar att dras från riktiga bevis till mer experimentella och intuitiva resonemang. De ser en stor risk med trenden eftersom det ibland fått förödande konsekvenser. Matematiken bör hålla fast vid mer stränga bevis eftersom de motverkar felaktiga satser och antaganden (Jaffe & Quinn, 1993, s. 7). Som svar på kritiken skriver Thurston (1994) en essä *On proof and progress in mathematics*. Där diskuterar han vikten av att en matematiker kan bidra till att människor blir intresserade och förstår matematik. Thurston, (1994, s. 161-162) menar att människor främst vill förstå bevis och inte i första hand är intresserade av bevisens formalitet. Han påpekar i sin essä att formella bevis måste finnas och bör konstrueras på ett sådant sätt att det går lätt att följa och upptäcka fel, men att förståelsen av bevis är mer centralt än bevisets stränghet (Thurston, 1994, s. 169). Flertalet personer responderar på Jaffe och Quinns artikel. Även om åsikterna är många menar Hanna (2000, s. 12) att alla är eniga om att det är viktigt att tydliggöra om en sats vilar på ett formellt bevis eller på ett heuristiskt argument eftersom det finns en skillnad mellan dem. Heuristik är en metod där rimliga antaganden görs för att upptäcka ny kunskap. En heuristik är osäker och icke-deduktiv och är därför inte logiskt argumentativ eller ett rättfärdigande av en hypotes (Nationalencyklopedin, 2018).

3.2.3 Social acceptans

Hemmi (2006, s. 16) beskriver bevis som ett medel för att rättfärdiga kunskap inom matematiken. Fortsatt menar hon att matematiska bevis kan ses som en artefakt och som ett verktyg för att producera ny kunskap och upprätthålla en kontinuitet av kunskap mellan olika generationer (Hemmi, 2006, s. 38-39). Bevis har alltså en kommunikativ funktion att förmedla kunskap, vilket möjliggör granskning av påståenden. Det krävs en social acceptans och granskning för att bevis skall räknas som riktigt (Cabassut, Conner, İşçimen, Furinghetti, Jahnke & Morselli, 2012, s. 170). Manin (2010, s. 45) skriver: ”A proof becomes a proof only after the social act of ’accepting it as a proof’. This is true for mathematics as it is for physics, liguistics, or biology”.

3.3 Olika sätt att bevisa

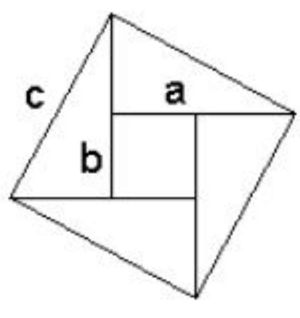
För att konkretisera vad ett bevis är följer nedan fyra exempel på olika matematiska bevis.

3.3.1 Direkt bevis

I ett direkt bevis härleds en sats från förutsättningar i en logisk följd, utan omvägar (Vretblad & Ekstig, 2006, s. 30). Ingen mer information än vad som finns i satsen behöver tillföras (Cupillari, 2012, s. 9). Nedan följer ett exempel på ett direkt bevis.

Pythagoras sats. $a^2 + b^2 = c^2$.

Bevis. A är arean av den stora kvadraten.



Figur 2. Pythagoras sats. (Cut the Knot, 2018)

$$A = c^2 = \frac{4ab}{2} + (a-b)^2 = 2ab + a^2 - 2ab + b^2 = a^2 + b^2.$$

Då är $a^2 + b^2 = c^2$ v.s.b.

3.3.2 Kontrapositionsbevis

Ett kontrapositionsbevis är vanligt inom matematiken och tillhör tillsammans med motsägelsebevis gruppen indirekta bevis. Om ett påstående S kan uttryckas genom implikationen $p \rightarrow q$, kan ett kontrapositionsbevis av påstående S uttryckas som $\neg q \rightarrow \neg p$ (Antonini & Mariotti, 2008, s. 402). Vretblad och Ekstig (2006, s. 70) tydliggör detta med ett exempel:

Antag att a är ett heltal och att a^2 är ett jämnt tal.

Påstående. a är ett jämnt tal.

Bevis. Om a inte är ett jämnt tal så är a udda och kan då skrivas på formen $a = 2b + 1$ där b är ett heltal. Då är:
$a^2 = 4b^2 + 4b + 1 = 2(2b^2 + 2b) + 1 = 2c + 1$.
a^2 är därför udda.
Ovan har vi visat att om a är ett udda tal så är dess kvadrat udda. Samma sak gäller för ett jämnt tal, om kvadraten är jämn så är talet jämnt.

3.3.3 Motsägelsebevis

Ibland kan inte ett kontrapositionsbevis användas och då passar ett motsägelsebevis bättre (Velleman, 1998, s. 94). Om ett påstående S skall bevisas med ett motsägelsebevis väljs D, ett falskt påstående, som motsäger påstående S. Genom att ändå försöka bevisa att påstående D är sant kommer beviset komma fram till att det är falskt och därför måste påstående S vara sant (Velleman, 1998, s. 94). Antonini och Mariotti (2008, s. 404) förklarar ett motsägelsebevis på följande sätt: om påståendet S är sant och kan uttryckas med implikationen $p \rightarrow q$, kan påstående S uttryckas som ett motsägelsebevis $p \wedge \neg q \rightarrow r \wedge \neg r$, där r är vilken proposition som helst.

Nedan följer ett klassiskt exempel på ett motsägelsebevis.

Påstående. Talet $\sqrt{2}$ är irrationellt.

Antagande.
Antag att $\sqrt{2}$ är ett rationellt tal. Ett rationellt tal går att skriva på formen $\frac{a}{b}$.
Antag att det finns två heltal, a och b, sådana att det går att skriva $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ (1)
Antag vidare att bråktalet är förkortat så långt som möjligt, SGD(a,b) = 1.

Bevis.
Kvadrering av båda led i (1) ger:
$2 = \frac{a^2}{b^2}$.
Multiplikation av båda led med b^2 ger:

$2b^2 = a^2$ (2)
Eftersom VL innehåller en faktor 2 medför det att a^2 är ett jämnt tal, och då även att *a* är ett jämnt tal[1].
Eftersom SGD(*a*,*b*) = 1 och *a* är ett jämnt tal medför det att *b* är ett udda tal.
Då *a* är ett jämnt tal kan *a* skrivas
a= *2m*, där *m* är ett heltal.
Insättning av *a* = *2m* i (2) ger:
$2b^2 = 4m^2$.
Förkorta båda led med 2:
$b^2 = 2m^2$.
Talet 2 i HL indikerar att b^2, och då även b, är ett jämnt tal. Detta strider mot det tidigare visade, att b är ett udda tal.
Antagandet om att $\sqrt{2}$ är ett rationellt tal har lett fram till en motsägelse och därför är $\sqrt{2}$ ett irrationellt tal v.s.b.

3.3.4 Matematisk induktion

Ett induktionsbevis börjar med ett påstående *P(n)* som beror av ett naturligt tal, *n*. Beviset skall visa att påståendet stämmer för alla *n*. För att bevisa med induktion används en princip i tre steg:

1. Basfall. Visa att ett påstående gäller för ett basfall, *n=1*.
2. Induktionsantagande. Antag att påståendet gäller för något *n=k*.
3. Induktionssteg. Visa att påståendet även kommer att gälla för *n=(k+1)*.

Nedan följer ett exempel på ett induktionsbevis.

Visa att $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ gäller för alla $n \in \mathbb{N}$.

Bevis.
Basfall.
$P(1) = 1 = \frac{1*2}{2}$

Induktionsantagande.
Vi antar att vårt påstående stämmer för $P(n)$, om *n=k.*

$$1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

Induktionssteg.
Visa att P(n) gäller då *n=(k+1):*

$$1 + 2 + \cdots + k + (k+1) = \frac{k(\,k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Alltså gäller att $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ för alla $n \in \mathbb{N}$ enligt induktionsprincipen, v.s.b.

[1] bevis till varför a är ett jämnt tal om a^2 är ett jämnt tal visas under avsnitt 3.3.2.

Att induktion fungerar som ett matematiskt bevis följer av Peanos axiom för naturliga tal. Peanos axiom återfinns i Edmund Landaus bok *Foundations of Analysis* (1966, s. 2). Fem av Peanos ursprungliga nio axiom beskriver de naturliga talen.

1. 0 är ett naturligt tal.[2]
2. För varje naturligt tal x, är dess efterföljare x' ett naturligt tal.
3. För alla naturliga tal x och y gäller x = y, omm x' = y'.
4. För varje naturligt tal n, är n'= 0 falsk. Inget naturligt tal har 0 som efterföljare.
5. Om K är en mängd sådan att;

   i) 0 finns i K

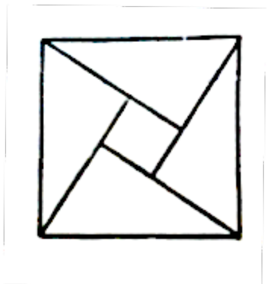
   ii) för varje naturligt tal x och om x finns i K, medför att x' finns i K,

   medför i) och ii) att K innehåller alla naturliga tal.

Det sista axiomet kallas induktionsaxiomet.

3.4 Visuella bevis

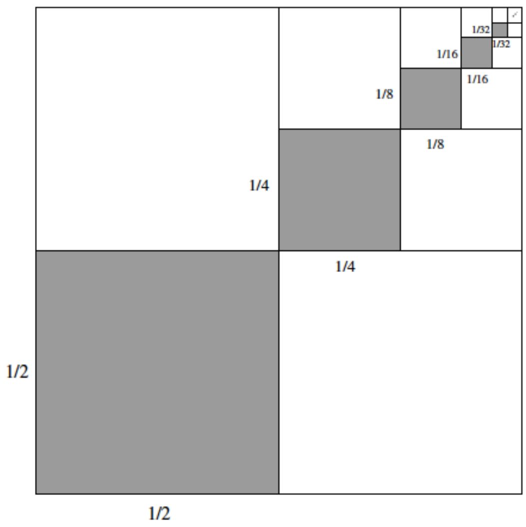
På 1100-talet nedtecknade den indiska matematikern Bhãskara ett bevis i form av en bild på Pythagoras sats (Heath, 1956, s. 355). Enligt Bhãskara talade bilden tillräckligt mycket i sig själv och har därför ingen beskrivande text. Istället skrev han endast dit ordet "Skåda!" (Siu, 2012, s. 432).



Figur 3. Bhãskaras illustration av Pythagoras sats. (Heath, 1956, s. 355)

Idag går åsikterna inom forskningsfältet isär gällande om visuella bevis kan räknas till traditionella bevis. Det finns åsikter inom forskningsfältet som menar att en visuell representation aldrig kan bli mer än ett komplement till ett traditionellt bevis medan andra menar att de visuella representationerna kan vara ett bevis i sig (Hanna & Sidoli, 2007, s. 74). Det flesta hävdar dock att enbart en visuell representation ej kan tillskrivas titeln som ett riktigt bevis, men att det fortfarande kan vara en viktig del av ett bevis. Nedan finns ett exempel på en visualisering hämtad från Borwein & Jörgenson (2001, s. 898) som visar att $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2})^{2n} = \frac{1}{3}$. I texten nedan diskuteras huruvida en visuell representation kan räknas som ett bevis utifrån Borwein och Jörgensons (2001) åsikter.

[2] I Landaus (1966) bok står det att 1 är ett naturligt tal men idag är det vanligare att skriva 0 än 1.



Figur 4. En visualisering som visar att $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2})^{2n} = \frac{1}{3}$. (Borwein & Jörgenson, 2001, s. 899)

När Borwein och Jörgenson (2001, s. 899) diskuterar visuella bevis tar de upp tre villkor som anses nödvändiga för ett matematiskt bevis. Reliabilitet är det första villkoret. Oavsett vem som möter beviset, eller när det sker, skall beviset leda till samma resultat varje gång. För det andra skall ett bevis vara konsistent. Det innebär att beviset och dess innehåll skall vara förenligt med övrig matematisk vetenskap. Slutligen skall ett bevis vara upprepbart även för andra personer. Borwein och Jörgenson (2001, s. 899) hänvisar till Lakatos bok *Proofs and refutations: the logic of mathematical discovery* (1976) där en imaginär dialog mellan en lärare och hans elever sker kring ett bevis. De menar att Lakatos beskriver ett logiskt formellt bevis som väl valda och entydiga meningar som följer efter varandra. Det finns en tydlig struktur som utgår från strikta deduktiva konventioner. Borwein och Jörgenson (2001, s. 899) menar att en visuell representation kan ha svårt att leva upp till denna struktur då läsaren exponeras för alla bevisets delar på en gång. Det kan vara svårt att avgöra var man skall börja, vilka delar som är viktiga, vad som följer av vad och så vidare. Risken finns att läsaren drar egna slutsatser som inte är korrekta. En visuell representation tenderar också att inte vara lika generaliserbar (Borwein och Jörgenson, 2001, s. 899-900).

Borwein och Jörgenson (2001, s. 900) listar fyra nyckelfunktioner för hur visuella representationer skulle kunna ses på med lika strikta ögon som logiska formella bevis. Inledningsvis vore det önskvärt med mer dynamik. Parametrarna skulle kunna variera för att representationen inte skall bli statisk för det specifika fallet. Därefter borde det finnas en vägledning genom beviset som visar en lämplig väg som läsaren kan gå. För det tredje borde en flexibilitet erbjudas där läsaren ges möjlighet att själv undersöka beviset, exempelvis för att hitta eventuella motbevis. Avslutningsvis vore det önskvärt med en öppenhet där läsaren har tillgång till bakomliggande beräkningar och detaljer kring beviset för att själv kunna granska det.

4 Bevisens funktion

Avsnitt fyra beskriver inledningsvis vilka olika funktioner matematiska bevis kan ha generellt. Därefter presenteras under avsnitt 4.2 vilka funktioner bevis har i undervisning.

4.1 Bevisens funktion enligt Bell och de Villiers

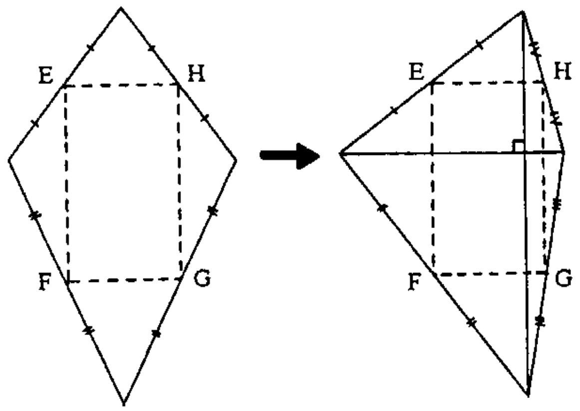
Matematiska bevis har genom historien främst setts som ett sätt att verifiera ett påstående (de Villiers, 1990, s. 17). Bell (1976), och senare de Villiers (1990), har lagt fram fler syftespunkter som tillsammans med verifikation anses rama in bevisens olika funktioner. Bell (1976, s. 24) menar att det finns tre syften med bevis i matematiken; *verifikation, upplysning* och *systematisering*. De tre syftena har de Villiers (1990, s. 18) utvecklat och därefter lagt till två punkter; *upptäckande* och *kommunikation*. de Villiers (1990, s. 23) understryker att listan med de fem punkterna om bevisens syften är långt ifrån fullständig. Till den skulle exempelvis bevisens estetik och sitt eget självförverkligande kunna adderas.

Det första syftet är att verifiera om ett påstående är sant eller inte, verifikation (Bell, 1976, s. 24). de Villiers (1990, s. 18) använder ordet övertygelse i sin artikel vid sidan om ordet verifikation. Beviset skall ge mottagaren ett svar på om påståendet går att lita på. Hemmi (2006, s. 45) menar dock att en övertygelse till en student kan ges på andra sätt än enbart genom ett bevis. Övertygelsen kan erhållas genom auktoriteter, i form av läroböcker, lärare eller genom härledningar från andra accepterade resultat. de Villiers (1990, s. 19) menar att intuition och kvasi-empiri också kan göra att läsaren tror att ett påstående är sant. de Villiers använder begreppet kvasi-empiri när han refererar till icke-deduktiva metoder som experimentellt eller intuitivt resonemang. Speciellt används begreppet för gissningar eller satser som analyseras på ett icke-deduktivt sätt (de Villiers, 2004, s. 398). I motsats till att ett bevis skall övertyga menar de Villiers (1990, s. 18) att övertygelsen om att ett påstående är sant kan ge motivation till att bevisa påståendet. Övertygelse behöver alltså i den meningen inte alltid komma efter ett bevis (de Villiers, 1990, s. 18).

Att ge en förklaring till varför ett påstående är sant är det andra syftet med bevis (de Villiers, 1990, s. 19). Bell (1976, s. 24) använder ordet upplysning, i avseendet att bevis skall ge en insikt och förståelse till varför någonting är riktigt. Han understryker vikten av detta syfte, genom att skriva att ”ett bra bevis förväntas ge en insikt till varför en sats är sann” (Bell, 1976, s. 24). Att se många numeriska exempel på en metod kan leda till att en litar på en uträkning, men det ger ingen egentlig förklaring till *varför* metoden fungerar (de Villiers, 1990, s. 19).

Det sista Bell lyfter fram är att matematiken kan organiseras och struktureras upp med hjälp av bevis, systematisering (Bell, 1976, s. 24). Intuition och kvasi-empiri kan inte på samma sätt visa hur matematiken hänger samman som bevis kan (de Villiers, 1990, s. 20). de Villiers (1986, s. 10) poängterar dock att systematisering av matematik ofta varit en omorganisering av redan befintligt material. Han pekar på flertalet fördelar med systematisering. För det första är det en hjälp för att finna ej önskvärda implicita antaganden och cirkelargument. För det andra kan det förenkla och leda till en mer sparsam presentation av matematiska bevis. För det tredje ger systematisering en bra översikt över matematiska områden. Slutligen bidrar det till en enklare applicering då enbart delar av en struktur behöver undersökas. Det går sedan att lita på att resten av strukturen stämmer (de Villiers, 1986, s. 9-10). Matematikens mest kända exempel på systematisering med hjälp av bevis är Euklides *Elementa*.

Ett av de två syften som de Villiers tillför till Bells lista är bevisens roll i upptäckandet av ny matematik (de Villiers, 1990, s. 21). de Villiers påstår att det funnits motstridigheter i frågan om bevis direkt kan leda till nya upptäckter. Det finns en uppfattning om att bevis bara används för att konfirmera nya upptäckter. de Villiers (1990, s. 21) menar istället att deduktiva bevis kan leda fram till helt nya resultat. För att illustrera upptäckande med hjälp av bevis lyfter han fram ett exempel: en hypotes läggs fram att mittpunkterna på sidorna (E, F, G och H) av en drake alltid ger en rektangel. de Villiers (1990, s. 21) menar att det genom ett deduktivt bevis (bilaga 1) kan konstateras att intilliggande sidor i draken inte behöver vara lika långa, men att diagonalerna i draken alltid måste vara vinkelräta för att punkterna E, F, G och H skall ge en rektangel. Resultatet kan bidra till en utveckling och en generalisering av den ursprungliga hypotesen, något han påstår hade varit svårt att upptäcka utan det deduktiva beviset.



Figur 5. de Villiers exempel på att bevis kan medföra upptäckande av ny matematik. (de Villiers, 1990, s. 21)

Det sista syftet som de Villiers (1990, s. 22) lyfter fram är kommunikation. Bevis kan vara ett verktyg för att förmedla och ta del av matematik. Då bevis synliggör matematik öppnar de upp för möjlighet till granskning och utveckling. Han betonar den sociala interaktionen som en förutsättning för att sprida matematik.

4.2 Bevisens funktion i undervisning

Nedan följer en redogörelse kring bevisens funktion i gymnasieskolan. Inledningsvis undersöks hur begreppet bevis behandlas i ämnesplanen i matematik.

4.2.1 Bevis i ämnesplanen för matematik

En anledning till varför undervisning kring bevis sker i gymnasieskolan är att bevis står nämnt som ett centralt innehåll i den av Skolverket utgivna ämnesplanen för matematik. I ämnesplan för matematik (2018) framgår det i vilka kurser bevis skall behandlas. Nedan följer en lista över de ställen där bevis och härledningar nämns explicit i ämnesplanen för matematik (Skolverket, 2018):

- **I Matematik 1b och 1c:** ”Illustration av begreppen definition, sats och bevis, till exempel med Pythagoras sats och triangelns vinkelsumma.” (Skolverket, 2018, s. 6, 9).
- **I Matematik 3b och 3c:** ”Härledning och användning av deriveringsregler för potens- och exponentialfunktioner samt summor av funktioner.” (Skolverket, 2018, s. 21, 24).

- **I Matematik 3c:** ”Bevis och användning av cosinus-, sinus- och areasatsen för en godtycklig triangel.” (Skolverket, 2018, s. 24).
- **I Matematik 4:** ”Användning och bevis av de Moivres formel.” (Skolverket, 2018, s. 27), ”Hantering av trigonometriska uttryck samt bevis och användning av trigonometriska formler inklusive trigonometriska ettan och additionsformler.” (Skolverket, 2018, s. 27), ”Olika bevismetoder inom matematiken med exempel från områdena aritmetik, algebra eller geometri.” (Skolverket, 2018, s. 27) och ”Härledning och användning av deriveringsregler för trigonometriska, logaritm-, exponential- och sammansatta funktioner samt produkt och kvot av funktioner.” (Skolverket, 2018, s. 27).
- **I Matematik 5:** ”Induktionsbevis med konkreta exempel från till exempel talteoriområdet.” (Skolverket, 2018, s. 30).

Kursplanerna i grundskolan saknar ordet bevis och nämner endast ett fåtal kompetenser förknippade med bevis (Hemmi et al., 2013, s. 369). Hemmi et al. (2013, s. 369) lyfter också fram att till skillnad från i Estlands och Finlands kursplaner saknas också orden matematisk förståelse i grundskolans kursplan. I svensk gymnasieskolas ämnesplan för matematik nämns begreppet bevis explicit flera gånger, men enbart i b- och c-kurserna samt i de högre kurserna. Det är alltså en stor skillnad i bevisrelaterat innehåll i kursplanen för grundskolan och ämnesplanen för gymnasieskolan (Hemmi et al., 2013, s. 369). Eftersom bevis och utvecklandet av kunskaper kring dem inte finns med i alla kurser i matematik på gymnasiet finns risken att svenska elever som inte läser b- eller c-kurserna går ut skolan utan att ha stött på eller arbetat med matematiska bevis (Hemmi et al., 2013, s. 371).

4.2.2 Bevis som ett förklarande verktyg

Hersh (1993, s. 396) gör en distinktion mellan bevisens syfte inom forskning, där huvudsyftet är att övertyga, och undervisning, där huvudsyftet är att förklara. Distinktionen grundas i att studenter vanligtvis inte ifrågasätter om en sats är sann eller inte vilket medför att bevis inte behövs för övertygelse bland studenterna. Att bevis inte alltid behövs för övertygelse går i linje med Hemmi (2006) och de Villiers (1990) tankar om att övertygelse kan komma från andra auktoriteter, vilket nämndes i avsnitt 4.1. Vidare menar Hersh att hans syfte med bevis i undervisning, exempelvis i universitetskursen *Introduction to Abstract Algebra*, inte heller är att förbereda elever för kommande studier i matematik eftersom få av dem kommer att läsa vidare kurser i ämnet (Hersh, 1993, s. 397). Hersh (1993, s. 396) och Hanna (2000, s. 8) menar istället att huvudpoängen med bevis i undervisning är att förklara och introducera nya begrepp. Det finns andra sätt att förklara begrepp och satser som ej bör förbises, men bevis ger den mest korrekta beskrivningen. Vissa satser kan inte förklaras på något annat sätt än med bevis. Ett sådant exempel är att restklasserna modulo n bildar en kropp om och endast om n är prim (Hersh, 1993, s. 388).

Det finns olika röster kring om bevis kan fungera som förklaring. En del av de kritiska rösterna lyfter Hemmi fram i sin avhandling (2006, s. 43-44). Hemmi sammanfattar denna diskussion med att bevis kan vara helt korrekt utformade och ändå inte vara en förklaring till varför det som skulle bevisas är sant. Det kan bero på att elevernas matematiska förkunskaper inte är tillräckliga. Till exempel kan ett generellt exempel upplevas som en bättre förklaring än ett fullständigt direkt bevis för studenten (Hemmi, 2006, s. 44). Hanna (2000, s. 19) pekar också på tendensen hos elever att de gärna vill prova formeln empiriskt trots att de fått ett bevis visat för sig och trots att de säger sig förstå beviset.

4.2.3 Kritiskt tänkande

Läroplanen för gymnasieskolan beskriver skolans uppdrag. Ett av uppdragen är att ”Eleverna ska träna sig att tänka kritiskt, att granska fakta och förhållanden och att inse konsekvenserna av olika alternativ. På så vis närmar sig eleverna ett vetenskapligt sätt att tänka och arbeta.” (Skolverket, 2011, s. 7). Hemmi (2006, s. 45) framhåller att övertygelse för ett påstående kan erhållas av auktoriteter, förklaringar eller härledningar men poängterar det önskvärda i att övertygelse kommer från kritiskt tänkande. Hon ser gärna att matematikundervisning skulle arbeta mer med att ifrågasätta det uppenbara. Hanna (1995, s. 46) skriver att ”bevis ger budskapet till eleverna att de kan resonera själva, att de inte behöver vika sig för auktoriteter. Således är användning av bevis i klassrummet faktiskt anti-auktoritärt”. När eleverna får jobba med bevis blir de autonoma att kunna skilja på bra och dåliga argument. Att kunna granska argument är enligt ämnesplanen en viktig kunskap. I ämnesplanens betygskriterier för matematik återkommer formuleringen att eleverna skall kunna ”skilja mellan gissningar och välgrundade påståenden” (Skolverket, 2018).

4.2.4 Lärares syn på matematiska bevis i secondary school

Knuth (2002, s. 66) har undersökt 17 lärares uppfattningar om matematiska bevis i secondary school i USA. Två av lärarna undervisar på middle school och resterande 15 lärare undervisar på high school. Resultatet av lärarnas svar kan sammanfattas i följande kategorier: *utveckla logiskt tänkande, kommunicera matematik, synliggöra tänkandet, förklara varför* och *skapa matematisk kunskap* (Knuth, 2002, s. 78–81). Knuth har jämfört sitt resultat med de Villiers (1999) och Bells (1976) fem syftespunkter som återfinns i avsnitt 4.1 och konstaterar att lärarna nämnde alla deras syften förutom att bevis skapar systematisering.

I Knuths (2002, s. 78) undersökning anser 13 av 17 lärare att bevis skapar möjlighet för utveckling av ett deduktivt tänkande både i och utanför matematiken. Några av dem menar att den deduktiva förmågan att observera och dra slutsatser är en färdighet som är värdefull även i många andra sammanhang (Knuth, 2002, s. 78). Flertalet lärare är också eniga om att kommunikation är ett värdefullt syfte som bevis fyller i undervisningen. I klassrummet kan kommunikationen få sitt uttryck genom exempelvis diskussioner kring giltigheten av argument som finns i bevis (Knuth, 2002, s. 79). Enligt fyra lärare kan bevis synliggöra elevernas tänkande (Knuth, 2002, s. 79). Elevernas tänkande och förståelse synliggörs då de i arbetet med bevis i tal eller skrift måste uttrycka hur de kom fram till en slutsats (Knuth, 2002, s. 80).

Sju lärare menar att bevis är viktiga i skolan för att ge eleverna möjligheter att se varför en utsaga är sann istället för att acceptera bevisets giltighet från en auktoritet (Knuth, 2002, s. 80). Med ordet ”varför” menar de att bevis visar varifrån påståendet kommer och hur det kan vara sant. Ingen av lärarna nämner explicit att bevis kan skapa möjligheter till att förklara samband eller ge förståelse inom matematiken. Knuths (2002, s. 81) egna förklaring till att de inte nämner att bevis kan ge förståelse är för att bevis troligen inte fungerat som förklarande verktyg för lärarna när de själv var studenter.

4.2.5 Lärares syn på matematiska bevis i tre nordeuropeiska länder

Hemmi, Lepik och Viholainen (2011) har gjort en mindre studie om gymnasielärares uppfattning kring bevis i skolan. I studien deltar åtta lärare från Sverige, sju från Estland och fem från Finland. Hemmi et al. (2011, s. 140) finner olika syftespunkter kring bevisens funktion i tidigare forskning från de Villiers (1999), Hanna (2000), Weber (2002) och Hemmi (2006). Syftespunkterna är: *verifikation, övertygelse, förklarande, kommunikation,* *systematisering, estetisk, intellektuella utmaningar, upptäckande* och *transfer.* Flera av syftespunkterna har tidigare tagits upp i avsnitt 4.1. Förutom *upptäckande* nämns alla ovanstående punkter av lärarna i undersökningen.

Det vanligaste svaret bland lärarna i undersökningen är att bevis ger en förklaring och förståelse. Ett syfte som enligt Hemmi et al. (2011, s. 141) inte kan identifieras i Knuths undersökning (se föregående avsnitt) men som de finner i sin undersökning är transfer. Transfer i denna kontext handlar om att bevis kan ge eleven nya tekniker som eleven kan använda i andra matematiska problem, men att eleven även får förståelse som kan appliceras utanför matematiken (Hemmi, 2006, s. 223).

De svenska lärarna gör skillnad på bevisens roll på exempelvis det naturvetenskapliga programmet, där de anser att bevis borde tas upp, jämfört med andra program på gymnasiet (Hemmi et al., 2011, s. 150). Liknande gör de finländska lärarna som anser att bevis spelar en större roll i de långa matematikkurserna till skillnad från i de korta (Hemmi et al., 2011, s. 151). I frågan om vilka bevis som är passande i gymnasieskolan nämner fem av sju lärare Pythagoras sats som ett bra bevis att börja med eftersom det tydligt visar varför satsen är sann (Hemmi et al., 2011, s. 150). Inga estländska lärare nämner Pythagoras sats vilket troligtvis beror på att Pythagoras sats behandlas i lägre åldrar i Estland och därför inte finns med i läroplanen för gymnasiet. De svenska lärarna nämner att bevis i geometri, trigonometri och matematisk analys skall behandlas i undervisningen (Hemmi et al., 2011, s. 150).

4.2.6 Förberedelse för universitetsstudier

Som nämnts ovan (avsnitt 4.2.2) skriver Hersh (1993, s. 397) att hans syfte med undervisning om bevis på universitetet inte främst är att förbereda studenter för kommande studier eftersom få av dem kommer läsa vidare. I gymnasieskolan är situationen annorlunda. Ett av de mål som finns på de högskoleförberedande programmen i gymnasieskolan är att eleven: ”på ett nationellt högskoleförberedande program inom gymnasieskolan ges möjlighet att uppnå kraven för en högskoleförberedande examen som innebär att eleven har tillräckliga kunskaper för att vara väl förberedd för högskolestudier” (Skolverket, 2011, s. 9). Undervisningen på högskoleförberedande program har ett ansvar att förbereda eleverna för kommande studier. I Hemmis (2006) avhandling *Approaching proof in a community of mathematical practice* undersöker hon hur elevens relation kring bevis från gymnasiet påverkar elevens arbete med bevis på högskolan. Hon finner ett viktigt samband som visar att det mellan påståendena ”It is difficult for me prove statements” och ”I have had exercise enough in constructing proof in school” finns en negativ korrelation (Hemmi, 2006, s. 161). Studenter som arbetat mycket med bevis i gymnasieskolan har alltså lättare för att arbeta med bevis på universitetet.

5 Undervisning kring matematiska bevis

Det finns en bredd av forskning och teorier om hur undervisning skall utföras. I avsnitt 5 kommer några viktiga faktorer om undervisning kopplat till bevis att tangeras. Inledningsvis presenteras hur undervisning sker utifrån lärares metoder och läroböcker. Därefter presenteras några utvecklande ideér om hur undervisning kan ske.

5.1 Tre lärarstilar

Ett sätt att undersöka hur undervisning kring bevis kan ske är att undersöka hur olika lärare undervisar om bevis. Hemmi (2006, s. 106) ser utifrån sina undersökningar och litteraturstudier tre olika undervisningsstilar som återfinns i undervisning om bevis på universitet i Sverige. De är idealiseringar och går ej att hitta i sina rena former i praktiken, men det är ett sätt för henne att presentera sitt resultat.

5.1.1 Den progressiva stilen

Läraren inom den progressiva undervisningsstilen undviker helst bevis så långt det är möjligt i sin undervisning och menar att bevis främst skall behandlas då eleverna själva upptäcker ett behov av bevis (Hemmi, 2006, s. 107). En av anledningarna är att läraren inte vill skrämma upp eleverna med bevis. De gånger bevis ändå uppkommer i undervisningen synliggörs det inte att det är ett riktigt bevis som studenterna arbetar med. Det finns alltså inget större intresse från lärarens sida att väcka studenternas nyfikenhet kring bevis (Hemmi, 2006, s. 208). Inom konstruktivismen är ett karaktärsdrag att studenten själv får konstruera och leta efter kunskap när hen ser ett behov av det istället för att kunskap skall överföras från lärare till elev (Hemmi, 2006, s. 209). Tendenser till konstruktivism kan ses i den progressiva lärarstilen. Konstruktivismen minskar lärarens roll i undervisningen vilket Hanna och Jahnke (1996, s. 885) anser kan vara problematiskt i undervisning kring bevis. Enligt dem visar studier på att läraren har en viktig roll i undervisning om bevis då läraren exempelvis kan hjälpa eleverna att urskilja vad som anses som ett korrekt argument.

I den progressiva lärarstilen finns också en betoning på att språket i undervisning kring bevis skall vara enkelt och inte allt för symboliskt eller formellt (Hemmi, 2006, s. 207), annars finns en risk att språket kan komma att stå som ett hinder för studentens förståelse. Lärarna inom den progressiva lärarstilen anser att bevis endast är till för en liten grupp av studenter, främst för framtida matematiker och datatekniker (Hemmi, 2006, s. 109). Fokus borde istället läggas på att studenterna skall lära sig räkna (Hemmi, 2006, s. 107).

5.1.2 Den deduktiva stilen

Hos den deduktiva lärarstilen har bevisen en central roll i undervisningen (Hemmi, 2006, s. 209). Studenterna ses kapabla för ett abstrakt tänkande och bör tränas i logik och uppbyggnad av bevis. Ett korrekt, formellt och symboliskt språk anses vara viktigt och borde inte separeras från bevis eller undervisning om bevis (Hemmi, 2006, s. 211). Studenterna bör vänjas och lära sig det matematiska språket redan i skolans värld (Hemmi, 2006, s. 119). Inom den deduktiva stilen anses det inte negativt att studenterna inledningsvis memorerar bevis, även om de inte helt förstår allt (Hemmi, 2006, s. 113). I utantillinlärningen av bevis kan de börja upptäcka regler och strukturer i matematiken. Det finns inga problem med att studenterna konfronteras med komplicerad matematik, förståelsen får växa fram utifrån det som inte är greppbart (Hemmi, 2006, s. 213).

5.1.3 Den klassiska stilen

Lärare tillhörande den klassiska stilen uppskattar bevis eftersom de kan vara både vackra och ge en intellektuell utmaning. Genom att jobba med bevis tränas förmågan att resonera logiskt vilket anses vara viktigare än att räkna med siffror (Hemmi, 2006, s. 122). Bevis kan presenteras i undervisningen för att föreläsaren själv tycker det är vackert, om studenterna förstår beviset är sekundärt. För att det vackra skall finnas kvar betonas inte samma stränghet i bevisen som hos den deduktiva läraren (Hemmi, 2006, s. 123–124). Det leder till att den pedagogiska delen av undervisningen ibland glöms bort.

Trots att lärarna inom den klassiska stilen tycker det är viktigt med bevis och ser det som något alla borde lära sig är det inte säkert att de undervisar om det eftersom de anser att studenterna saknar den bakgrundskunskap som behövs eller att det är alltför tidskrävande (Hemmi, 2006, s. 121). Liksom hos den progressiva läraren menar läraren inom den klassiska stilen att det endast är en liten andel av studenterna som förstår sig på bevisen, för resten av gruppen är det mest onödigt med tid eftersom de saknar tillräcklig kunskap (Hemmi, 2006, s. 125). När undervisning kring bevis ändå sker räds inte läraren att använda ett korrekt matematiskt språk. Till skillnad från den progressiva stilen finns ändå en viss intention att väcka elevernas intresse.

5.2 Läroböcker

För att få en bild av hur bevis används i undervisning i den svenska gymnasieskolan kan läromedel studeras. Att studera läroböckers framställning av bevis är relevant eftersom Norström och Löfwall (2005, s. 2) menar att många studier visar att lärare, och i synnerhet matematiklärare, låter innehållet i läroböcker eller lärarguider i matematik ligga till stor grund för undervisning. Det menar även Hemmi och Bergwall (2017, s. 2). Nordström & Löfwall (2005, s. 2) har undersökt två böcker, Matematik 3000 och Liber Pyramid, som utgick från *Läroplan för de frivilliga skolformerna*, Lpf94. I de två läroböckerna hade bevisuppgifter minimalt med utrymme jämfört med andra uppgifter i boken, men även i jämförelse med böcker från Kanada och Frankrike (Nordström & Löfwall, 2005, s. 4). I de svenska läroböckerna som Nordström och Löfwall (2005, s. 6) undersökt är det också svårt att se skillnad på vad som är generella exempel och vad som är bevis (Nordström och Löfwall, 2005, s. 5). Det medför att generella exempel kan uppfattas som ett fullständigt bevis för ett påstående eller en formel. Nordström och Löfwall (2005, s. 6) lyfter fram problematiken med att läroböckerna i matematik undviker matematiska begrepp och att de istället försöker förklara matematiken med vardagliga termer. Även Hemmi (2006, s. 55) menar att bevis i läroböcker använder ett informellt språk. Det kunde skapa förvirring hos eleverna eftersom de enligt Lpf94 skulle kunna skilja på vad som är en gissning och vad som är ett antagande. Matematiska bevis uppkom också främst i läroböckerna i samband med svårare uppgifter som riktade sig till de högpresterande eleverna, vilket var i linje med den dåvarande läroplanen (Nordström och Löwfall, 2005, s. 7).

Till skillnad från läroplanen från 1994 är det i ämnesplanen från 2011 tydligare att undervisning kring bevis skall ske eftersom bevis nämns explicit ett flertal gånger (avsnitt 4.2.1). Därför är det relevant att ställa sig frågan hur läroböcker förhåller sig till bevis i den nya läroplanen. Hemmi och Bergwall (2017) har undersökt två svenska och två finska läroböcker riktade till gymnasiekurser och hur bevis tas upp i böckernas integralkalkyldelar. De har undersökt de två vanligaste läroböckerna i Sverige men påpekar att ingen generell slutsats för läroböcker i Sverige kan dras utifrån dessa två böcker (Hemmi och Bergwall, 2017, s. 12). Resultatet av de delar av böckerna som relaterar till integralkalkyl i de svenska böckerna är att satserna presenteras och argumenteras för i böckerna på ett sätt som inte kan accepteras som riktiga bevis. Presentationerna kan snarare tolkas som induktiva gissningar utifrån empiriska exempel. Dessutom tydliggörs det inte i böckerna att presentationerna inte är fullständiga bevis. Bevisrelaterade uppgifter innehåller moment där eleverna får utveckla argument, härleda formler, testa gissningar eller finna motargument (Hemmi och Bergwall, 2017, s. 4). De svenska läroböckernas uppgifter, relaterade till integralkalkyl, ger få möjligheter att utveckla förmågorna att bevisa och resonera eftersom de innehåller få bevisrelaterade uppgifter. I både de svenska och finska böckerna saknas en orientering i bevistekniker och bevisprinciper (Hemmi och Bergwall, 2017, s. 13).

5.3 Konstruktivistiska förslag

I mitten av 1900-talet dominerade Piagets teori om utvecklingsfaser och konstruktivism skolans pedagogik, men några årtionden senare fick teorierna konkurrens av Vygotskijs sociokulturella idéer (Balacheff, 2010, s. 117). Hemmis ovan nämnda avhandling (2006, s. 22 och s. 26-27) är ett bra exempel på hur forskning kring undervisning i matematik idag influeras av både Piaget och Vygotskij. Hon menar att mycket av forskningen ligger inom det konstruktivistiska paradigmet men att det i hennes avhandling också är viktigt att undersöka området ur ett historiskt och kulturellt perspektiv. Hanna och Jahnke (1996, s. 885) framhåller att det idag är konstruktivism som betonas inom matematikundervisningen. De diskuterar olika metoder att undervisa kring bevis utifrån ett sådant förhållningssätt. En första metod är att ha en klassrumsdebatt där läraren guidar eleverna när de ställer upp ett påstående som de sedan skall bevisa. En annan metod är att eleven först ser en översiktlig bild av ett bevis innan hen går ned på detaljnivå. En liknande metod är att läraren förklarar beviset översiktligt men lämnar förklaringarna på detaljnivå åt eleverna själva. Hanna och Jahnke (1996, s. 885- 886) nämner även ett försök där läraren enbart agerar moderator under gruppdiskussioner.

Gemensamt för ovan nämnda förslag på konstruktivistisk undervisning är enligt Hanna och Jahnke (1996, s. 885) att de ifrågasätter lärarens roll. Läraren skall vara aktiv i klassrummet utan att ta för stor plats eller bara presentera matematiska argument. Om läraren däremot intar en för passiv roll får eleverna inte tillgång till all den kunskap som faktiskt finns tillgänglig hos läraren (Hanna och Jahnke, 1996, s. 887). De anser att effektiva metoder inte skall undvikas enbart på basis av att de kräver aktiva ingripanden från läraren.

Även Bell (1976, s. 25) lyfter fram vikten av den sociala interaktionen i klassrummet när arbete med bevis bedrivs som ett sätt att ge förståelse till eleverna varför bevis är viktiga. Att eleverna finner syften med bevis är också centralt enligt de Villiers (1990, s. 17). Ofta upplevs bevisaktiviteter meningslösa för elever vilket är problematiskt då det medför en låg motivationen till att närma sig bevis. Ett sätt för eleverna att finna ett syfte och uppskatta bevis är att upptäcka bevis som ett redskap för granskning av kunskap i en social kontext (Bell, 1976, s. 25). Vidare menar Bell (1976, s. 25) att en samverkande och undersökande undervisning är ett effektivt sätt för eleverna att finna syfte och uppskatta bevis.

5.4 Heuristik eller formalitet

Simpson (refererad i Hanna, 2000, s. 9) tar upp tankar kring skillnaden mellan att lära sig bevis genom logik och att lära sig bevis genom resonemang och undersökningar. Trots att det är vanligast att lära sig matematik den formella vägen menar Simpson (refererad i Hanna, 2000, s. 9) att det endast gynnar ett fåtal elever då majoriteten av eleverna saknar den förmåga som krävs. Ett heuristiskt tillvägagångssätt där eleverna får undersöka, resonera sig fram och göra kvalificerade gissningar skulle vara mer naturligt för en större andel av eleverna. Hanna

(2000, s. 9–10) skriver fortsatt om undervisare som menar att ett heuristiskt tillvägagångssätt även är bra för förmågan för att motivera[3]. Tidigare har deduktiva bevis ansetts vara det bästa sättet för att utveckla färdigheter kring förmågan att motivera men undervisarna menar här att det ofta leder till utantillinlärning som inte tillför eleverna något. De menar liksom Simpson (refererad i Hanna, 2000, s. 9) att ett undersökande och utforskande arbetssätt där eleverna får använda intuition och ett induktivt arbetssätt borde förespråkas.

5.5 Problemlösning, argumentation och bevis

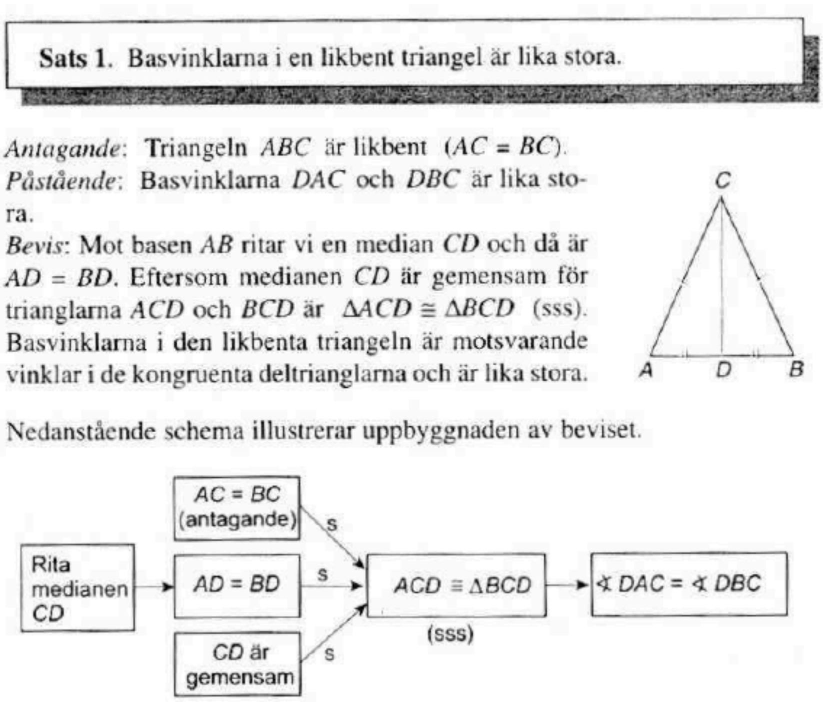
Under avsnitt 3.2.1 behandlas distinktionen mellan bevis och argumentation. Delade meningar råder kring om argumentation ses som en del av bevis eller inte. Vilken syn undervisare har i frågan påverkar utformningen av undervisningen (Hanna & de Villiers, 2008, s. 331). Lärare som skiljer bevis och argumentation åt kommer inte att koppla samman problemlösning med bevis i sin undervisning utan istället fokusera på bevisets deduktiva uppbyggnad. Lärare som ser argumentation som en del av bevis kommer jobba med problemlösning och sedan knyta an argumentet och slutsatser i problemlösningen till logiken (Hanna & de Villiers, 2008, s. 331). Enligt Hanna (2000, s. 14) är både bevis och upptäckande starkt kopplat till problemlösning även om de är två skilda aktiviteter. Ofta används undersökande och experimenterande i problemlösning för att upptäcka mönster som sedan prövas genom ett bevis. I undersökningar och upptäckande kan olika datorprogram vara ett användbart verktyg. Balacheff (2010, s. 133) poängterar att datorerna tillhandahåller sätt att upptäcka och uppleva matematik som inte varit möjligt tidigare. Han lägger extra tonvikt på hur datorprogram för geometri är fördelaktiga för att lära. Det är viktigt att elever förstår att testande och utforskning är ett användbart verktyg i matematiken men att det inte är ett bevis i sig (Balacheff, 2010, s. 133).

När elever själva skapar bevis är en stor utmaning för dem att kunna knyta an argumenten till matematiska bevis och deduktiva resonemang (Hanna & de Villiers, 2008, s. 331). Tidvis har undervisning kring formell logik ibland setts som lösningen på problemet. Det är dock oklart huruvida det hjälper eleverna vid arbete kring matematiska bevis eftersom övergången mellan logiken och deduktionen i bevis inte sker automatiskt (Hanna & de Villiers, 2008, s. 331).

5.6 Bevisens synlighet i undervisning

Hemmi (2006, s. 52) diskuterar bevisens synlighet i undervisning utifrån olika aspekter. En av aspekterna rör bevisens struktur. Vissa matematiker påstår att studenter behöver hjälp att se strukturer i bevis eftersom det går utanför deras förmåga att göra det själva (Hemmi, 2006, s. 55-56). För att visa hur synliggörande av struktur i bevis kan genomföras lyfter Hemmi fram ett exempel från en finsk lärobok för gymnasieskolan. Exemplet visar ett tydligt arbetssätt kring bevis och hur olika delar bygger upp beviset. Hemmi pekar på att detta arbetssätt ger eleverna möjlighet att se de logiska resonemangen i ett geometriskt bevis.

[3] i artikeln används det engelska ordet *justification*.



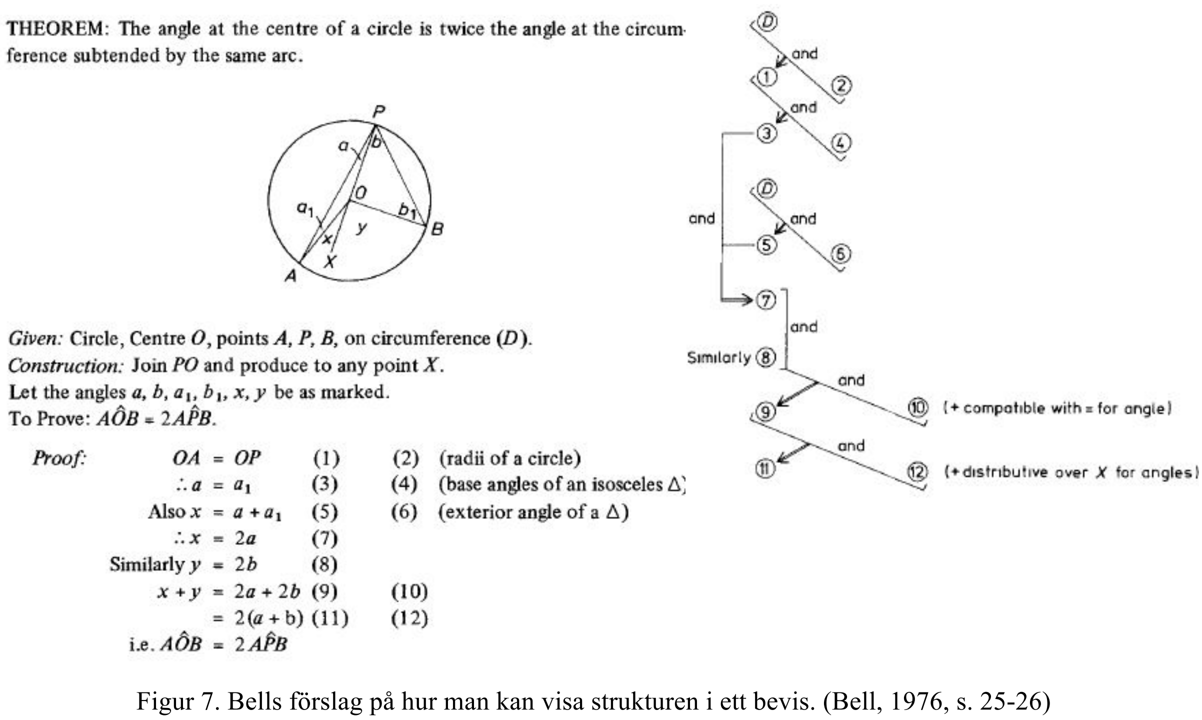
Sats 1. Basvinklarna i en likbent triangel är lika stora.

Antagande: Triangeln ABC är likbent ($AC = BC$).
Påstående: Basvinklarna DAC och DBC är lika stora.
Bevis: Mot basen AB ritar vi en median CD och då är $AD = BD$. Eftersom medianen CD är gemensam för trianglarna ACD och BCD är $\Delta ACD \cong \Delta BCD$ (sss). Basvinklarna i den likbenta triangeln är motsvarande vinklar i de kongruenta deltrianglarna och är lika stora.

Nedanstående schema illustrerar uppbyggnaden av beviset.

Figur 6. Ett exempel på hur en finsk lärobok presenterar den deduktiva strukturen i bevis. (Hemmi, 2006, s. 56)

Bell (1976, s. 26) visar också hur den deduktiva strukturen i bevis kan synliggöras, dels genom ett exempel och dels genom en tabell som liknar det som visats ovan. Genom att se strukturen i bevis ges en möjlighet för eleverna att urskilja vilka krav som ställs på bevis för att de skall accepteras som riktiga.



THEOREM: The angle at the centre of a circle is twice the angle at the circumference subtended by the same arc.

Given: Circle, Centre O, points A, P, B, on circumference (D).
Construction: Join PO and produce to any point X.
Let the angles a, b, a_1, b_1, x, y be as marked.
To Prove: $A\hat{O}B = 2A\hat{P}B$.

Proof:

$OA = OP$	(1)	(2)	(radii of a circle)
$\therefore a = a_1$	(3)	(4)	(base angles of an isosceles Δ)
Also $x = a + a_1$	(5)	(6)	(exterior angle of a Δ)
$\therefore x = 2a$	(7)		
Similarly $y = 2b$	(8)		
$x + y = 2a + 2b$	(9)	(10)	
$= 2(a + b)$	(11)	(12)	
i.e. $A\hat{O}B = 2A\hat{P}B$			

Figur 7. Bells förslag på hur man kan visa strukturen i ett bevis. (Bell, 1976, s. 25-26)

6 Diskussion och slutsats

Inledningsvis vill vi kommentera val av litteratur. Vi har valt att bygga en del av vårt resonemang på Knuths (2002) undersökning som tar sin utgångspunkt i secondary school i USA och Hemmi, Lepik och Viholainens (2011) undersökning som tar sin utgångspunkt i gymnasieskolor i Sverige, Estland, och Finland. Vi anser det problematiskt att de båda undersökningarna är relativt små och inte begränsade till Sverige men eftersom resultatet i undersökningarna är samstämmigt menar vi att det sammantagna resultatet i detta fall går att applicera på svensk gymnasieskola. Vi har även gjort avvägningen att applicera Hemmis (2006) tre lärarstilar från universitetet (avsnitt 5.1) på svensk gymnasieskola då vi själva mött de tre lärarstilarna under våra VFU-perioder på gymnasieskolor i Göteborg.

6.1 Vad är ett bevis?

Vi anser det svårt att rama in och fullständigt ge en bild av vad ett matematiskt bevis är. För att ändå få en konkret bild av bevis lyfter vi i texten fram olika sätt att bevisa satser på (avsnitt 3.3). Under arbetets gång insåg vi att det inte finns någon fullständig lista med olika sorters bevis. De olika sätten går ibland även in i varandra. Ett exempel är att kontrapositionsbeviset (avsnitt 3.3.2) innehåller ett direkt bevis.

Det finns inga krav på hur omfattande och förklarande ett bevis skall vara. Ibland utelämnas uträkningar beroende på vem som är mottagare eller för att beviset annars skulle bli för långt (de Villiers, 1990, s. 19). Vi anser att bevisen i skolan borde vara detaljrika och inte utesluta uträkningar. Anledningen är att elevers matematiska kunskaper är lägre än matematikers, vilket kräver att bevisen i skolan borde vara mer uttömmande än de inom den matematiska vetenskapen. Mer förklarande bevis bidrar till att eleverna enklare kan följa resonemanget för att på så sätt undvika förvirring. Det kan dock konstateras att det finns vissa krav på bevis som måste följas för att det skall anses vara ett bevis. Ett krav är att ett matematiskt bevis skall bygga på tidigare accepterad matematik bestående av satser och axiom. Ett matematiskt bevis kan alltså inte bygga på heuristiska argument som att läsaren utifrån en bild kan se att en sats stämmer (Hanna, 2000, s. 12). Bevis skall vara uppbyggt av en deduktiv slutledning och läsaren skall kunna se hur beviset grundas i tidigare matematik (Hemmi et al., 2013, s. 358). Den deduktiva slutledningen skiljer bevis från att vara ett lösryckt argument.

I resultatet har frågan om en visualisering kan räknas som ett visuellt bevis tagits upp (avsnitt 3.4). Vi finner att svaret på den frågan inte är helt klar. Bevis måste bygga på deduktiva slutledningar och resonemanget skall enkelt kunna följas av läsaren (Thurston, 1994, s. 169). Det sistnämnda är svårt enbart utifrån en bild. Borwein och Jörgenson (2001, s. 900) menar att visuella bevis i så fall borde innehålla en guide som visar läsaren en lämplig väg att gå för att följa resonemanget i beviset. Om en visualisering kräver en vägledning i form av en text, blir då inte texten beviset som stöds av en förklarande bild? Bilden i sig själv kan alltså inte räknas som ett bevis. Vår slutsats är att det utifrån detta perspektiv inte finns visuella bevis så länge de är i behov av en förklaring för att kunna tolkas.

Ett bevis kräver en social acceptans för att det skall kunna fungera som ett bevis (Hanna & de Villiers, 2012, s. 170). Debatten om vad som accepteras som ett bevis eller ej synliggörs i Jaffe och Quinnis (1993) öppna diskussion med Thurston (1994) om vikten av bevisens formalitet, men också i de tre historiska skolorna där uppfattningarna om bevis skilde sig åt (avsnitt 3.1). Genom historien kan vi se att matematiska bevis inte och troligtvis aldrig kan tas för att vara en absolut sanning eftersom matematiken ständigt utvecklas. Icke-euklidisk matematik (avsnitt 3.1.1) är ett exempel på ett ifrågasättande av över två tusen år gammal matematik.

6.2 Bevisens funktion i undervisning på gymnasieskolan

Vi har valt att kategorisera bevisens funktion i undervisning i gymnasieskolan i explicita och implicita funktioner för att på ett tydligare sätt kunna diskutera dem.

6.2.1 Explicita funktioner

Vi har funnit flera undersökningar och åsikter (Hersh, 1993, s. 396; Hanna, 2000, s. 8; Knuth, 2002, s. 79; Hemmi, Lepik och Viholainens, 2011, s. 140) som menar att bevis som ett förklarande verktyg till varför en sats är sann är ett av bevisens främsta funktioner i undervisning. Knuths undersökning visar dock att det inte nödvändigtvis finns en korrelation mellan att ett bevis visar att någonting är sant och att beviset är förklarande (Knuth, 2002, s. 81). Likt lärarna i Knuths undersökning menar Hemmi (2006, s. 43–44) att det finns åsikter och uppfattningar om att bevis inte ger förklaring till varför något är sant på grund av bristande matematiska kunskaper hos eleverna. Utifrån Hemmis och Knuths tankar menar vi att en lärare behöver reflektera över om eleven har tillräckliga förkunskaper för att kunna följa och förstå ett bevis om beviset skall fungera som en förklaring för eleven. Både Hersh (1993, s. 388) och Hemmi (2006, s. 43–44) diskuterar andra sätt att förklara satser och begrepp på. Hemmi (2006, s. 43–44) menar till exempel att ett generellt exempel kan vara mer förklarande än ett bevis, medan Hersh (1993, s. 388) ändå påstår att bevis är det mest korrekta sättet att förklara en sats eller ett begrepp. Hersh påstår också att vissa satser inte förklaras på andra sätt än genom bevis (1993, s. 388). Vi ställer oss frågan om några av de bevis Hersh syftar på återfinns i gymnasieskolans ämnesplaner.

En annan viktig funktion bevis har är att övertyga läsaren (Bell, 1976, s. 24; de Villiers, 1990, s. 18). Denna funktion har dock diskuterats eftersom elever vanligtvis inte ifrågasätter om en sats är sann eller ej (Hersh, 1993, s. 396). En anledning till att elever inte ifrågasätter är att övertygelse kan komma från andra auktoriteter än bevis (Hemmi, 2006, s. 45). Vi anser det viktigt att elever tränas i ett autonomt tänkande i matematiken för att de inte skall acceptera matematik direkt från auktoriteter utan att reflektera över det. Att arbeta med bevis i undervisningen bidrar till att eleven utvecklar ett kritiskt tänkande i matematiken. Bevis är på så sätt en anti-auktoritet (Hanna, 1995, s. 46).

6.2.2 Implicita funktioner

Vi har i vårt arbete upptäckt att bevis har syften och kan besitta funktioner som inte är uttalat självklara. De funktionerna har vi valt att kalla implicita funktioner.

Hemmi (2006, s. 223) tar upp begreppet transfer i förhållande till bevis. Hon menar att bevis kan medföra kunskaper och tankesätt som eleverna kan applicera i, men också utanför matematiken. I avsnitt 4.2.3 diskuteras bevis som ett sätt att skapa ett kritiskt tänkande i matematiken. Vi menar att bevis kan bidra till ett kritiskt tankesätt hos eleverna även utanför matematiken, en så kallad transfer. Vår uppfattning är att många elever har en syn på matematik som en fast och absolut kunskap. Matematiken vilar absolut på en flera tusen år gammal tradition av satser och axiom men det betyder inte att matematiken aldrig kan kritiseras och utvecklas. Vår slutsats är att om eleverna får förståelse för att till och med matematiken behöver granskas och har granskats genom historien förstår de vikten av att göra det även i andra vetenskaper, nyheter och informationsflöden som är mer ombytliga än matematiken är. Vi anser att det kritiska tänkandet är en viktig del av bevisens funktion i gymnasieskolan eftersom det i läroplanen (Skolverket, 2011, s. 7, 9) står beskrivet hur eleverna i skolan skall få träna på att tänka och värdera kritiskt för att de på så vis skall närma sig ett vetenskapligt sätt att tänka.

I avsnitt 6.2.1. framställs bevis som ett verktyg för att ge övertygelse och förståelse till en specifik sats. Vi anser att en implicit funktion är att arbete med bevis även kan bidra till det matematiska lärandet i stort. Den första anledningen till denna slutsats bygger på en aspekt av transfer som behandlas i avsnitt 4.2.5. I avsnittet lyfts Hemmi (2006, s. 223) upp som menar att elever kan finna tekniker i bevis som kan appliceras inom andra områden av matematiken. Den andra anledningen till att bevis bidrar till det matematiska lärandet i stort kan vi dra utifrån Bell (1976, s. 24) och de Villiers (1990, s. 9-10) syftespunkt att bevis bidrar till en systematisering av matematiken. Bevis kan alltså visa elever hur matematiken hänger samman. I Hemmis el at. studie (2011, s. 141) finns systematisering med som ett syfte. Detta syfte tycks dock inte vara självklart bland lärare. I Knuths (2002, s. 78-81) undersökning beskriver ingen av lärarna ett syfte som kan likställas med systematisering. Vi menar likt Bell och de Villiers att bevis kan bidra till systematisering i matematik om kopplingen till tidigare matematik synliggörs för eleverna i bevis.

Bevis fungerar också som ett kommunicerande verktyg i gymnasieskolan (Knuth, 2002, s. 79; Hemmi et al., 2011, s. 141; de Villiers, 1990, s. 22). En aspekt i den kommunikativa förmågan hos bevis är att föra vidare kunskap mellan olika generationer. På så sätt slipper varje generation uppfinna hjulet på nytt. En annan aspekt är att bevis skall kunna granskas för att matematiken skall föras framåt. För att ett bevis skall kunna granskas skall det vara förståeligt och begripligt för mottagaren oavsett vem denne är (de Villiers, 1990, s. 22). Det ställer alltså krav på bevisets kommunikativa förmåga. Vi anser att denna aspekt är viktig att lyfta upp och prata med eleverna om eftersom det är en viktig del av ämnets karaktär.

6.3 Undervisning kring matematiska bevis

Vi ställer oss frågan om bevis på gymnasiet kan vara meningsfullt för alla elever oavsett kurs, program eller kunskaper inom matematik. Det finns lärare som anser att bevis tillhör naturvetenskapliga program (Hemmi, Lepik och Viholainen, 2011, s. 150). I läroböcker riktas bevis till de elever som vill jobba med svårare uppgifter (Nordström och Löwfall, 2005, s. 7), och vi kan tydligt se att ordet bevis används mer i de senare matematikkurserna på gymnasiet (Skolverket, 2018). I Hemmis (2006) undersökning bland universitetslärare finns uppfattningar inom den progressiva lärarstilen att bevis är för de studenter som skall studera matematik och datorkunskap på universitetsnivå och i den klassiska lärarstilen ses bevis som en aktivitet som tar onödigt mycket tid för studenter då de saknar tillräckligt med kunskap. Ovanstående noteringar bygger troligtvis på att begreppet bevis är komplext för elever eftersom det är svårt att ringa in vad ett bevis är. Att arbeta med bevis kräver även en viss matematisk förståelse och ett matematiskt språk. Vi vill inte förneka att bevis är och kommer vara komplext för eleverna, men vi skulle vilja påstå att bevis kan användas mer än bara för de elever som går på naturprogrammet, vill jobba med svårare uppgifter eller läser de senare matematikkurserna på gymnasiet. Till skillnad från de åsikter vi lyft fram i texten ovan finns det lärare inom den deduktiva lärarstilen som inte ser problematiken med att studenter får arbeta med mer komplicerad matematik (Hemmi, 2006, s. 213). Likt de universitetslärare som kan klassificeras under denna lärarstil anser vi att bevis inte skall undvikas i undervisning. Utifrån de explicita och implicita funktioner vi lyft i avsnitt 6.2 vill vi uppmana gymnasielärare i matematik att inkludera bevis på alla nivåer och för alla elever. Bevis är inte ett extra moment som skall hinnas med i undervisningen utan ett användbart verktyg. Fortsatt i avsnitt 6.3 lyfter vi upp och diskuterar några av de infallsvinklar vi funnit extra intressanta; synliggörande av bevis och bevisens struktur, matematiskt språk, klassrumsdialog samt problemlösning.

6.3.1 Synlighet

Utifrån vårt resultat menar vi att synliggörande av bevis i undervisningen inte är en självklarhet. Hemmi (2006, s. 107) finner i sin undersökning tendenser hos en del universitetslärare att de undviker bevis i undervisningen så långt det är möjligt och de gånger bevis behövs görs det inte tydligt att det är ett bevis. Huruvida liknande tänkesätt kring bevis finns hos lärare i gymnasieskolan är oklart, men det finns liknande förhållningssätt till bevis i läroböcker för gymnasieskolan. I en del av läroböckerna som bygger på Lpf94 framställs bevis otydligt, vilket kan göra det svårt att urskilja skillnaden på bevis och generella exempel (Nordström och Löfwall, 2005, s. 5). I två nuvarande läroböcker för gymnasieskolan nämns däremot bevis explicit, även om begreppet ibland används felaktigt (Hemmi och Bergwall, 2017, s. 13). Vi ser problematik kring att bevis används inkonsekvent i undervisningen och att det inte är tydligt när ett bevis framträder. En av anledningarna är att en av förmågorna i ämnesplanen för matematik är att kunna använda och beskriva matematiska begrepp (Skolverket, 2018). Då begreppet bevis finns med i ämnesplanen anser vi det viktigt att begreppet synliggöras och förklaras så att eleverna kan identifiera vad ett bevis är. En slutsats vi dragit under arbetets gång är att eleverna gynnas av att under sin gymnasietid få exponeras för och arbeta med olika sorters bevis för att förstå begreppet bevis bättre. Det hjälper dem att se begreppets mångfald och att det kan finnas olika sätt att bevisa samma påstående. Vi har presenterat olika sätt att bevisa under avsnitt 3.3.

En annan aspekt av synlighet gäller bevisens struktur (Hemmi, 2006, s. 52). Elever behöver hjälp att se denna struktur. Då strukturen i bevis studeras synliggörs det deduktiva resonemanget vilket kan bidra till en klarare bild av begreppet bevis (Bell, 1976, s. 26). Två olika förslag på hur man kan arbeta med deduktiva strukturer presenteras i avsnitt 5.6. Därför blir det problematiskt om man som lärare exempelvis låter estetiken vara viktigare än den deduktiva slutledningen i bevis vilket Hemmi (2006, s. 124) kategoriserar som en del av den klassiska lärarstilen. I den deduktiva lärarstilen anses det vara något positivt att en elev inledningsvis lär sig ett bevis utantill även om hen inte helt förstår alla delar (Hemmi, 2006, s. 213). Utifrån det kan eleven se strukturer och skapa förståelse. Simpson (refereras i Hanna, 2000, s. 9–10) menar att utantillinlärning inte ger eleven något meningsfullt. Vi menar att det vid arbete med bevis kan ge eleven en positiv effekt att lära sig ett bevis utantill för att inledningsvis få en uppfattning om bevisets karaktär. Vi poängterar dock vikten av att eleven inte stannar vid utantillinlärningen utan att eleven erbjuds en möjlighet att reflektera och diskutera bevisets uppbyggnad och struktur.

6.3.2 Matematiskt språk och logiska symboler i bevis

Bevis innehåller ett matematiskt språk och logiska symboler som kan vara problematisk för elever att förstå. Det finns olika åsikter om hur strängt det matematiska språket skall vara i undervisning kring bevis. Hos den deduktiva och den klassiska lärarstilen anses det viktigt att språket är formellt och korrekt (Hemmi, 2006, s. 211, 125). En anledning är att studenterna skall lära sig att använda det matematiska språket (Hemmi, 2006, s. 113). Nordstöm och Löfwall (2005, s. 6) betonar också vikten av att matematiska termer används i undervisning kring bevis. Den progressiva lärarstilen förespråkar ett enklare språk för att språket inte skall bli ett hinder för eleverna (Hemmi, 2006, s. 207). Även Thurston (1994, s. 162) poängterar mottagarens förståelse av ett bevis framför dess formalitet. I ämnesplanen lyfts språket fram som en viktig del av matematiken. Enligt den första förmågan i ämnesplanen skall eleverna få möjlighet att träna och utveckla förståelsen av matematiska begrepp (Skolverket, 2018, s. 1). Ett exempel på ämnesplanens betoning av ett matematiskt språk är formuleringen ”Dessutom uttrycker sig eleven **med viss säkerhet** i tal, enkel skrift och handling **samt använder** matematiska **symboler och andra** representationer **med viss anpassning till syfte och situation**.” från kunskapskravet C i kursen Matematik 1a (Skolverket, 2018, s. 4). Liknande formuleringar återkommer i kunskapskrav för andra kurser i matematik på gymnasiet (Skolverket, 2018). Vi anser att bevis är ett bra sätt för eleverna att använda och se nya begrepp och matematiska symboler för att uppfylla ämnesplanens krav. Läraren måste vara uppmärksam på om det språkliga innehållet är känt för eleverna sedan tidigare eller om en introduktion behövs. Det kan bli ett hinder för eleverna om nya begrepp och symboler används utan förklaring.

6.3.3 Bevis som föremål för klassrumsdialog

Bevis har en social och en kommunikativ funktion eftersom de skall förmedla något till en specifik mottagare (Knuth, 2002, s. 79; Hemmi et al. 2011, s. 141; de Villiers, 1990, s. 22). För att eleverna skall få förståelse för detta menar vi att bevis måste inkluderas i en social klassrumskontext. Ett sätt är att klassrummet blir ett forum för diskussioner kring bevis (Hanna & Jahnke, 1996, s. 885). Vi menar att klassrumsdiskussioner om bevisens giltighet och olika strukturer kan bli ett sätt att spegla en av de funktioner bevis haft i historien och fortsatt har i forskningsvärlden idag, där diskussioner är ett redskap för granskning av kunskap i en social kontext.

6.3.4 Problemlösning och konstruktion av bevis

I avsnitt 5.5 har vi lyft fram bevis kopplat till problemlösning. Ett arbetssätt är att låta eleverna upptäcka mönster genom undersökningar och på så sätt komma fram till ett påstående som skall bevisas. I undersökningar för att finna mönster kan datorprogram vara ett användbart verktyg (Hanna, 2000, s. 14). Att arbeta med bevis kopplat till problemlösning är ett arbetssätt vi förespråkar. Det aktiverar eleverna samtidigt som bevis blir en inkluderad del i undervisningen istället för ”något som skall hinnas med”.

Att arbeta med bevis på ett undersökande och resonerande sätt uppfattas som ett naturligt arbetssätt för många elever (Hanna, 2000, s. 9–10). Att eleven själv får konstruera bevis ses som rätt förhållningsätt till bevis i undervisningen enligt den progressiva lärarstilen (Hemmi, 2006, s. 209). Till skillnad från undervisning vi nämnt i föregående stycke anses bevis hos den progressiva stilen inte vara en lärarstyrd aktivitet utan ett verktyg eleven använder när behov uppstår för bevis. För att eleven själv skall kunna konstruera bevis anser vi att en förståelse krävs för vad ett matematiskt bevis är och vilka komponenter som bör ingå. Utmaningen för eleven i bevisskapandet är ofta att kunna knyta an de olika argumenten till ett deduktivt resonemang (Hanna & de Villiers, 2008, s. 331). Vi anser det vara till stor hjälp att eleven, innan hen själv skall konstruera bevis, har fått analysera olika bevis. Det är viktigt att strukturer i bevis har synliggjorts för eleven så att den deduktiva slutledningen i bevisen uppenbaras. När eleven själv konstruerar bevis behöver hen kunna urskilja vad som anses vara korrekta argument. Där har läraren en viktig roll att stötta eleven i urskiljningen (Hanna och Jahnke, 1996, s. 885).

6.3.5 Val av bevis i undervisning

Vår sammantagna slutsats är att alla elever i svensk gymnasieskola, oavsett kognitiv nivå, gynnas av att få se, lära sig och arbeta med bevis. De bevis som nämns explicit i ämnesplanen skall självklart behandlas i undervisningen. Utöver dem anser vi det viktigt att lärare reflekterar kring vilka bevis som är lämpliga att presentera och hur de skall arbetas med i klassrummet. Alla satser som behandlas bör inte bevisas i undervisningen på gymnasiet. Ett exempel på det är Satsen om största och minsta värde (bilaga 2), en sats som vi anser är relevant att behandla i kursen Matematik 3b och 3c. Satsens bevis är komplicerat och svårt men innehållet i satsen uppfattas som självklart. Vi menar att det i sådana fall är viktigt att påpeka för eleverna att satsen har ett bevis för att förtydliga att satsen inte kan tas ur luften, men att beviset inte kommer behandlas i undervisningen. Vi håller med lärarna i Hemmis et al., (2011, s. 151) undersökning att Pythagoras sats, i motsats till Satsen om största och minsta värde, är ett passande bevis att börja med då bevis skall introduceras. Det bevis för Pythagoras sats som vi har valt att presentera i avsnitt 3.3.1 anser vi är ett bra bevis då det kan ge övertygelse och en förklaring till varför satsen är sann.

6.4 Begränsningar och framtida forskning

Vi anser att vår uppsats bidragit till en större förståelse för vilken stor roll bevis haft genom den matematiska historien och fortsatt har idag. Vår uppsats lyfter på flera sätt fram bevisens roll och syfte i undervisningen. Eftersom vi kommit fram till flera fördelar med att undervisa mer kring bevis och samtidigt fått en tydligare bild av begreppet känner vi inte längre en lika stor bävan inför vår egen kommande undervisning om bevis i vår framtida profession.

En uppsats om ett såpass omfattande begrepp som matematiska bevis har många begränsningar. Vi väljer här att lyfta fram tre av de begränsningarna. För det första hade vi önskat använda oss av mer aktuell forskning. Vi har exempelvis haft svårt att hitta relevanta artiklar om bevis kopplade till den svenska gymnasieskolan och den aktuella läroplanen. Flertalet artiklar behandlade datorer och datorprogram fick vi välja bort eftersom mycket av det som skrevs vid milleniets början inte alls är aktuellt idag. För det andra är mycket av vårt resultat begränsat till lärares uppfattning om nyttan med bevis. Vi har därför inte med mycket av vad elever eller objektiv forskning har att säga om bevisens nytta i gymnasieskolan. Avslutningsvis tar vår uppsats inte upp någon fördjupning kring didaktiska svårigheter i undervisning om bevis. Didaktiska svårigheter kan vara det matematiska språket eller att elever ofta kan ha svårt att skilja på vad som är givet och vad som skall bevisas.

Under tiden vi arbetat med vår uppsats har två huvudspår kring framtida forskning dykt upp.
Det första gäller konkreta förslag på undervisning om bevis i klassrummet. Vi anser att vårt arbete ger en bra bild över vad ett bevis är och vad de kan ha för olika syften, men hur undervisningen sedan kan realiseras tangeras enbart i slutet. Vi skulle gärna se en fortsatt forskning om konkreta förslag på undervisning utifrån den svenska ämnesplanen i matematik. Det andra området för fortsatt forskning gäller datorernas roll i undervisningen kring bevis. Vi anser att det finns många spännande områden att undersöka vidare kring och utvärdera gällande datorprogram där elever får konstruera eller upptäcka bevis. Att programmering kom med i ämnesplanen för matematik i somras gör frågan fortsatt högaktuell.

7 Källhänvisningar

Antonini, S., & Mariotti, M. A. (2008). Indirect proof: what is specific to this way of proving? *ZDM Mathematics Education, 40*(3), 401-412. doi: 10.1007/s11858-008-0091-2

Balacheff, N. (2010) Bridging Knowing and Proving in Mathematics:
A Didactical Perspective. In G. Hanna, H.N. Jahnke, H. Pulte (Eds.) *Explanation and proof in mathematics: Philosophical an educational perspectives* (pp. 115-136). Boston, MA: Springer US Springer.

Bell, A.W. (1976). A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics, 7*(23), 23-40. doi: 10.1007/BF00144356

Bergwall, A., & Hemmi, K. (2017). The State of Proof in Finnish and Swedish Mathematics Textbooks—Capturing Differences in Approaches to Upper-Secondary Integral Calculus. *Mathematical Thinking and Learning*, *19*(1), 1-18. doi: 10.1080/10986065.2017.1258615

Borwein, P., & Jörgenson, L. (2001). Visible structures in number theory. *The American Mathematical Monthly, 108*(10), 897-910. doi: 10.1080/00029890.2001.11919824

Cabassut, R., Conner, AM., İşçimen, F.A., Furinghetti, F., Jahnke, H.N. & Morselli, F. (2012). Conceptions of Proof - In research and teaching. In G. Hanna & M. de Villiers (Eds.) *Proof and Proving in Mathematics Education: The 19th ICMI Study Vol. 15*, (pp. 169-190). Dordrecht: Springer Netherlands.

CadwalladerOlsker, T. (2011). What Do We Mean by Mathematical Proof? *Journal of Humanistic Mathematics, 1*(1), 33-60. doi: 10.5642/jhummath.201101.04

Cupillari, A. (2011). *The Nuts and Bolts of Proofs: An Introduction to Mathematical Proofs.* (4th ed.). Burlington: Elsevier Science.

Cut the Knot. (2018). *Pythagorean Theorem*. Hämtad 2018-10-30 från http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/

de Villiers, M. (1986). *The Role of Axiomatisation in Mathematics and Mathematics Teaching*. Stellenbosch: University of Stellenbosch.

de Villiers, M. (1990). The Role and Function of Proof in Mathematics. *Pythagoras, 24*(24), 17-24.

de Villiers, M. (2004). The role and function of quasi- empirical methods in mathematics. *Canadian Journal of Science Mathematics and Technology Education, July 2004,* 397-418. doi: 10.1080/14926150409556621

Eves, H. (1997). *Foundations and fundamental concepts of mathematics*. New York: Dover publications.

Grabiner, J. V. (2012). Why proof? A historian’s perspective. In G. Hanna & M. de Villiers (Eds), *Proof and Proving in Mathematics Education: The 19th ICMI Study* Vol. 15, (pp. 147-

167). Dordrecht: Springer Netherlands.

Gunderson, D. S. (2010). *Handbook of Mathematical induction. Theory and applications*. Boca Raton: CRC Press.

Hanna, G. (1995). Challenges to the importance of proof. *For the Learning of Mathematics*, *15*(3), 42-49.

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational studies in mathematics*, *44*(1-3), 5-23. doi: 10.1023/A:1012737223465

Hanna, G., & de Villiers, M. (2008). ICMI Study 19: Proof and proving in mathematics education. *ZDM Mathematics Education, 40*(2), 329-336. doi: 10.1007/s11858-008-0073-4

Hanna, G., & Jahnke, H. N. (1996). Proof and proving. In Bishop A. J., Clements K., Keitel C. Kilpatrick J. & Laborde C. (Eds.) *International Handbook of Mathematics Education, volume 4.* (pp. 877–908). Dordrecht: Springer.

Hanna. G., & Sidoli, N. (2007). Visualisation and proof: a brief survey of philosophical perspectives. *ZDM Mathematics Education, 39*(1-2), 73-78. doi: 10.1007/s11858-006-0005-0

Heath, T. L. (1956). *The thirteen books of Euclid's Elements. Vol. 1, Introduction and Books I, II*. New York: Dover.

Hemmi, K. (2006). *Approaching Proof in a Community of Mathematical Practice* (Doctoral dissertation). Stockholm: Department of Mathematics, Stockholm University. Tillgänglig: http://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:189608/FULLTEXT01.pdf

Hemmi, K., Lepik, M., & Viholainen, A. (2011). Upper secondary school teachers´views of proof and proving-an explorative cross-cultural study. In K. Kislenko (Eds.), *Current state of research on mathematical beliefs XVI. Proceedings of the MAVI-16 Conference, June 26-29 2010* (pp. 137-156). Tallinn: Tallinn University.

Hemmi, K., Lepik, M., & Viholainen, A. (2013). Analysing proof-related competences in Estonian, Finnish and Swedish mathematics Curricula — towards a framework of developmental proof. *Journal of Curriculum Studies, 45(3),* 354-378. doi: 10.1080/00220272.2012.754055

Hersh, R. (1993). Proving is convincing and explaning. *Educational Studies in Mathematics, 24*(4), 389–399. doi: 10.1007/BF01273372

Jaffe, A., & Quinn, F. (1993). “Theoretical mathematics”: toward a cultural synthesis of mathematics and theoretical physics. *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society, 29*, 1-13. doi: 10.1090/S0273-0979-1993-00413-0

Kline, M. (1972). *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. New York: Oxford University Press.

Knuth, E. J. (2002). Teachers' Conceptions of Proof in the Context of Secondary School Mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education, 5*(1), 61-88. doi: 10.1023/A:1013838713648

Krantz, S.G. (2010). The History and Concept of Mathematical Proof. In V. Lundsgaard Hansen, J. Gray (Eds.), *History of mathematics* (pp. 239-268). EOLSS Publishers.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations: the logic of mathematical discovery*. Cambridge: Cambridge University Press.

Landau, E. (1966). *Foundations of Analysis, Third Edition*. New York: Chelsea publishing company.

Manin, Y. I. (2010). *A course in mathematical logic for mathematicians, Second Edition, vol. 53.* New York: Springer-Verlag New York.

Nationalencyklopedin. (2018). *Heuristik*. Hämtad 2018-11-02 från https://www.ne.se/uppslagsverk/encyklopedi/lång/heuristik

Nordstöm, K., & Löfwall, C. (2005). *Proof in Swedish upper secondary school mathematics textbooks - The issue of transparancy.* Paper presented at the CERME 4, Sant Feliu de Guíxols, (pp. 17–21). Spain.

Siu, M. K. (2012). Proof in the Western and Eastern Traditions: Implications for Mathematics Education. In G. Hanna, & M. de Villiers (Eds.), *Proof and Proving in Mathematics Education: The 19th ICMI Study, Vol. 15* (pp. 431–442). Dordrecht: Springer Netherlands.

Skolverket. (2011). *Läroplan, examensmål och gymnasiegemensamma ämnen för gymnasieskola 2011*. Tillgänglig: https://www.skolverket.se/publikationer?id=2705 2018-10-30

Skolverket. (2018). *Ämne - Matematik [Ämnesplan].* Tillgänglig: https://www.skolverket.se/undervisning/gymnasieskolan/laroplan-program-och-amnen-i-gymnasieskolan/gymnasieprogrammen/amne?url=1530314731%2Fsyllabuscw%2Fjsp%2Fsubject.htm%3FsubjectCode%3DMAT%26tos%3Dgy&sv.url=12.5dfee44715d35a5cdfa92a3 2018-10-30.

Stewart, I. (2004). *Nature's Numbers*: *Discovering order and pattern in the universe*. London: Phoenix.

Thurston, W. P. (1994). On proof and progress in mathematics. *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society, 30*(2), 161-177. doi:10.1090/S0273-0979-1994-00502-6

Velleman, D. J. (1998). *How to prove it. A structured approach*. Cambridge: Cambridge university press.

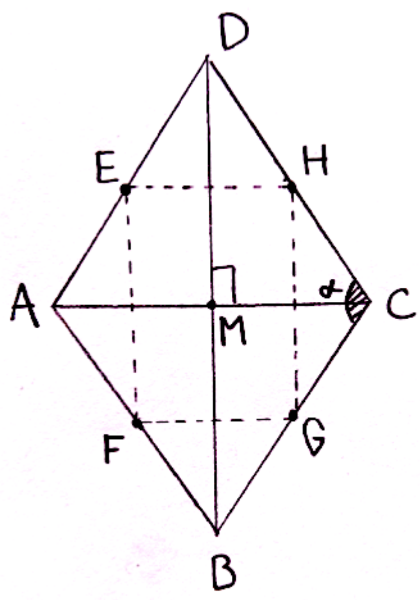
Vretblad, A., & Ekstig, K. (2006). *Algebra och geometri*. Malmö: Gleerups Utbildning AB.

Bilaga 1

Bevis för påståendet i de Villiers exempel

Påstående. Mittpunkterna E, F, G, och H på en drakes sidor bildar alltid en rektangel.
Från den geometriska definitionen av en drake följer att drakens diagonaler är vinkelräta mot varandra.

Bevis. $\triangle BCD \sim \triangle GCH$.
Trianglarna är likformiga eftersom CH/CD = GC/BC och vinkel α är gemensam för triangel BCD och triangel GCH.



Då 2GC = BC, ger likformighet att 2HG = BD.

Från likformigheten följer att GCH är en topptriangel till triangeln BCD.
Således är HG//BD.

På samma sätt är 2EF = BD och EF//BD.
Då är EF = HG och EF//HG.
På samma sätt som innan konstateras enligt topptriangelsatsen att EH = FG och EH//FG.

Eftersom EH//AC och HG//BD, är vinkeln EHG lika stor som den räta vinkeln AMB. Då följer att vinklarna FEH, HGF och EFG är räta.

Då motstående sidor är lika långa och vinklarna mellan sidorna är räta utgör sidorna tillsammans en rektangel v.s.b.

I beviset kan man se att längden på sidorna i draken inte inverkar på förhållandet mellan exempelvis HC och DC eftersom H alltid är mittpunkten på drakens ena sida. Därför gäller påståendet även när sidorna är olika långa (den andra figuren i figur 5 i avsnitt 4.1), så länge AC och BD är vinkelräta mot varandra.

Bilaga 2

Satsen om största och minsta värde

Bevis hämtat ur boken *Analys i en variabel* (Persson & Böiers, 2010, s. 507-508).

Sats. Om funktionen f är kontinuerlig i det slutna begränsade intervallet [a, b] så har f såväl ett största som ett minsta värde i [a, b].

Bevis. Vi visar först att f har ett största värde. Vi använder successiv intervallhalvering och betraktar ett intervall på y-axeln.
Enligt sats[4] är alla funktionsvärden samlade i ett begränsat intervall [A, B]. Låt C vara mittpunkt i detta. Om $f(x) \leq C$ för alla x i [a, b] väljer vi ut intervallet [A, C]. I annat fall väljer vi intervallet [C, B]. Vi kallar det utvalda intervallet för $I_1 = [A_1, B_1]$. Det har tydligen egenskaperna

$$f(x) \leq B_1 \, för \; alla \; x \in [a, b]$$

och

$$f(x_1) \geq A_1 \, för \; något \; x_1 \in [a, b].$$

Om detta förfarande upprepas med successiv intervallhalvering fås en avtagande svit av intervall $I_k = [A_k, B_k]$ och punkter $x_k \in [a, b]$ sådana att

$$f(x) \leq B_k \, för \; alla \; x \in [a, b] \qquad (1)$$

och

$$f(x_k) \geq A_k . \qquad (2)$$

Intervallinkapslingssatsen medför att följderna (A_k) och (B_k) har ett gemensamt gränsvärde M då $k \rightarrow \infty$. På grund av (1) och (2) är

$$A_k \leq f(x_k) \leq B_k .$$

Därmed följer av instängningsregeln att

$$f(x_k) \rightarrow M \; då \; k \rightarrow \infty. \qquad (3)$$

Nu skall visas att talet M i själva verket är funktionens största värde. Gränsövergång i (1) ger att

$$f(x) \leq M \; för \; alla \; x \in [a, b]. \qquad (4)$$

Beviset är klart om det kan visas att det finns ett $\xi \in [a, b]$ med $f(\xi) = M$. Men (x_k) är en begränsad talföljd och enligt Bolzano-Weierstrass' sats som säger ”att ur varje begränsad

[4] Sats. Om funktionen f är kontinuerlig i det slutna begränsade intervallet [a, b] så är f begränsad i [a, b].

talföljd (x_k) kan man välja ut en konvergent delföjld" finns då en delföljd (x_{k_j}) och ett tal ξ så att

$$x_{k_j} \to \xi \text{ då } j \to \infty .$$

Eftersom [a, b] är slutet måste ξ tillhöra [a, b]. Kontinuiteten av f och (3) visar nu att $f(\xi) = M.$
Helt analogt – eller genom att betrakta funktionen –f – visas att f har ett minsta värde i [a,b]. Beviset är klart.