GÖTEBORGS UNIVERSITET

Logaritmen igår, idag, imorgon

Från historia till klassrum

Hansson, Viktor
& Törnkvist, Linus

Ämneslärarprogrammet med inriktning mot arbete i gymnasieskolan

Examensarbete:	15 hp
Kurs:	LGMA2G
Nivå:	Grundnivå
Termin/år:	HT/2017
Handledare:	Laura Fainsilber
Examinator:	Johanna Pejlare
Kod:	HT17-3001-003-LGMA2G

Keywords: Logarithms. History of logarithms. Napier. Mathematics education. Understanding logarithms. Prosthaphaeresis. Slide rule.

Abstract

This paper is a literary analysis focused on the history of logarithms and how different ways of introducing logarithms could be perceived by students. This subject matter may be the most difficult for students to grasp in their upper-secondary mathematics education. To explore why that is we examine three questions. ‘How did the concept logarithms develop through the history of mathematics?’, ‘Wherein lies the difficulty of the concept of logarithms?’ and ‘Is there a better way to introduce logarithms than via Euler’s definition?’. We ask these questions to give ourselves, as future teachers in mathematics, the means to better engage with our students regarding this topic. The study is comprised of two main parts. The first highlights the history of the logarithm concept by tying it to milestones which culminates in Euler’s definition as the inverse of the exponential function. The second part explores students’ difficulties with the logarithm concept and how to better facilitate learning for students about the subject matter. The conclusion of the study indicates that there are several ways you could introduce logarithms to make it more comprehensive for students, some of them are more in depth than others. One of the more interesting ways is through the history of logarithms.

Förord

Denna studie har öppnat våra ögon för logaritmer. Något som tidigare känts svårt och jobbigt har nu blivit intressant och roligt. Lärdomarna vi fått genom arbetet kommer definitivt vara av nytta i vår framtida lärarroll. Vi vill tacka vår handledare Laura Fainsilber för hennes goda råd som underlättade vid skrivandet av arbetet. Vi vill även tacka Johanna Pejlare för bland annat lån av räknesticka.

Innehållsförteckning

Figurförteckning

1. Introduktion

Logaritmer är en del av matematiken där många elevers kunskaper är bristfälliga. Av egna erfarenheter från gymnasietiden verkade logaritmer vara något bortkopplat från resten av matematiken. De introducerades med till synes ologiska regler där till exempel multiplikation inom logaritmuttrycket omvandlas till addition av två logaritmuttryck men även som invers av exponentialbegreppet. Hur går dessa två aspekter ihop? Kan logaritmer beräknas eller är det bara en magisk knapp på miniräknaren som används slaviskt utan större eftertanke? Utan mer utförlig förklaring om logaritmens natur lämnades det till det förflutna och resten av gymnasietiden avklarades utan dessa kunskaper. Det pragmatiska förhållningssättet från gymnasieskolan (fokus på direkta beräkningar och konstant tillgång till logaritmlagarna) ledde till svårigheter i eftergymnasial utbildning då varken logaritmlagarna låg på minnet eller förståelsen för begreppet fanns.

Om våra framtida elever ställer oss frågan "men vad är logaritmer egentligen" vill vi kunna ge ett svar som konkretiserar begreppet samt visar eleverna att logaritmen inte är bortkopplad från resten av matematiken. För att kunna göra detta var vi själva tvungna att nå en fördjupad förståelse för begreppet. På denna grund undersökte vi logaritmens historia vilket visade sig vara mer häpnadsväckande än vad vi kunde trott. Djupet av historien gav inspirerande tankar, men konkreta förslag på hur logaritmen kan förklaras behövs för att ge oss medel för undervisning av begreppet. Därför tog vi även del av didaktisk litteratur angående logaritmer.

Vi reflekterade även över det ifrågasatta konceptet att en människa torde lära sig matematiken kronologiskt som människan har lärt sig den genom tiderna. Detta kanske inte är den mest accepterade matematikdidaktiska teorin, men det skapar onekligen funderingen om hur vi lär oss matematik idag och om det går att optimera undervisningen genom att anta ett historiskt perspektiv.

1.1 Syfte och frågeställning

Syftet med litteraturstudien är att utöka förståelsen för problematiken kring logaritm-begreppet hos gymnasieelever samt redogöra för möjligheten att introducera logaritmen på ett sätt där eleverna får möjlighet till en djupare förståelse. För att åstadkomma detta behandlar studien följande frågeställningar:

1. Hur utvecklades logaritmbegreppet genom matematikens historia?
2. Var ligger svårigheten i logaritmbegreppet?
3. Finns det bättre sätt att introducera logaritmer än via Eulers definition?

För att besvara frågeställningarna delas resultatet upp i två delar. Den första delen redogör för logaritmens historia, för att besvara hur logaritmbegreppet utvecklades. Den andra delen redogör för logaritmens didaktiska svårigheter, möjliga undervisningsupplägg och dess roll i skolan, vilket besvarar de två andra frågeställningarna.

Vi kommer inte beskriva alla specifika metoder de aktuella matematikerna använde för att tillverka sina logaritmtabeller och dylikt. Relevansen väger inte upp för den plats och tid det skulle ta att förklara detta på ett begripligt vis. Istället kommer vi göra en mer överskådlig beskrivning av logaritmens historia för läsarens skull.

2. Material och metod

Då arbetet är en litteraturstudie baserades vår metod på att hitta artiklar, studier, böcker och dylikt för att få den information vi behövde. Vi använde oss av sökmotorerna Google Scholar, Chalmers Summon, ERIC, Gupea och MathEduc. Dessutom letade vi information om matematikhistoria via MacTutor. För information om svenska skolan använde vi Skolverkets kursplaner för matematik samt fyra specifika kursböcker för relevanta kurser i matematik, vilka var *Matematik 5000 Kurs 2c Blå Lärobok*, *Matematik 5000 Kurs 3c Blå Lärobok*, *Exponent 2c* och *Matematik Origo 2c*.

Ett tidigt försök att hitta svensk litteratur gjordes med svenska sökord, men på grund av bristfälliga resultat gjordes resterande sökningar på engelska. Sökningen fortsatte i ERIC med sökorden "logarithm" och "teaching" av resultatet plockade vi ut ungefär åtta artiklar där alla förutom en var strikt kopplade till den didaktiska delen av frågeställningarna och den sista var kopplad till logaritmens historia. För att hitta ytterligare litteratur sökte vi via MathEduc på "logarithm" och lyckades därmed hitta mer litteratur om matematiken i fråga. För att hitta mer information om logaritmens historia sökte vi på "logarithm" genom MacTutor där vi fick en översikt som sedan hjälpte oss hitta de specifika aktörerna som var centrala vid utvecklingen av logaritmer. MacTutor hade även biografier för dessa relevanta matematiker. Att studera artiklars referenser för mer information var en metod vi flitigt använde oss av. Till exempel fick vi mer ingående litteratur om logaritmens historia genom biografiernas referenser, vilket också gav oss mer specifika sökord som till exempel "Tycho Brahe prosthaphaeresis" och "De la controverse entre Messrs. Leibniz et Bernoulli". Litteratursökningen gav oss informationen som behövdes för att sammanställa resultatet för logaritmens historia. Efter det krävdes ytterligare litteratur för att skriva resultatet för didaktiken, detta söktes via Summon och ERIC med bland annat sökorden "study teaching logarithms" och "understanding logarithms".

3. Historia

En tillbakablick på logaritmens historia visar att idén inte utvecklades för att uppfylla funktionen som invers till exponentbegreppet. Istället var det ett verktyg för att multiplicera stora tal med varandra (Pierce, 1977). Utan räknemaskiner och logaritmer tog det väldigt lång tid att utföra stora multiplikationer, alltså behövdes en metod som kunde underlätta för matematikerna vid till exempel astronomiska beräkningar (Cajori, 1909). Innan vi går in på logaritmens myntning studerar vi föregångare till den tidiga logaritmen som fyllde en liknande funktion, vilket var att omvandla multiplikation eller division till enklare uttryck av addition och subtraktion.

3.1 Quarter square multiplikation och babylonierna

En metod för att multiplicera stora tal kallas quarter-square-metoden. För att beskriva matematiken bakom metoden utgår vi ifrån uttrycket

$$\frac{(x+y)^2}{4} - \frac{(x-y)^2}{4}.$$

Utvecklar vi båda täljarna får vi

$$\frac{x^2+2xy+y^2}{4} - \frac{x^2-2xy+y^2}{4}.$$

Ställer vi sedan upp detta på ett gemensamt bråk och förkortar har vi kvar $\frac{4xy}{4}$, som förkortat är xy. Räknar vi ut vad det första uttrycket är har vi alltså indirekt räknat ut produkten genom att utföra en addition, två subtraktioner och två tabelluppslagningar. För att använda quarter-square-metoden för att multiplicera två tal x och y tas alltså först summan z och differensen w av dem fram. Sedan slås z och w upp i en tabell för att få fram fjärdedelen av deras kvadrater, och differensen av dessa tal är den sökta produkten av x och y.

Den första kända publikationen med användbara tabeller för faktisk användning av denna metod kom först så sent som 1817, detta var långt efter att logaritmbegreppet myntades. 1690 publicerade Hiob Ludolf (1624–1704) tabeller med kvadrater tillsammans med idén om att de kunde användas för multiplikation (McFarland, 2007). Ayoub (1993) påstår även att metoden användes runt 1600.

Från den babyloniska matematiken har vi inga direkta spår av metoden. Däremot har det hittats stentavlor med tabeller av kvadrater till "halv-tal" (1, 1.5, 2, 2.5, etc.). Om dessa använts vid multiplicering av stora tal eller haft någon annan användning är oklart. Vad som är klart är dock att de hade verktygen för att göra det. Eftersom $\frac{(x+y)^2}{4}$ är ekvivalent med $(\frac{x+y}{2})^2$ (McFarland, 2007).

3.2 Astronomi och Tycho Brahe

Under 1500-talet var astronomin en av de mest avancerade vetenskaperna där stora beräkningar behövde utföras med hög precision; till exempel användes det minst 6 värdesiffror för beräkningar på årets längd. (Waldvogel, 2014).

Betrakta den trigonometriska identiteten

$$cos(a)cos(b) = \frac{cos(a+b) + cos(a-b)}{2}.$$

Formeln delar en särskild egenskap med logaritmer, just att vi kan överföra en produkt av två tal till addition av två tal (Boyer, 1968). Uttrycket är en av de formler som används för det som kallas prosthaphaeresis vilket betyder addition och subtraktion på grekiska. Begreppet kommer beskrivas i detalj i nästa avsnitt. Det var en ytterst aktuell metod under slutet av 1500-talet då många matematiker arbetade med stora tal. Inte minst för att utföra beräkningar inom astronomi där de ofta behövde multiplicera och dividera dem med varandra. Sådana uträkningar tog lång tid och var grunden för många slarvfel (Villarreal-Calderon, 2008). För att undvika slarvfel och minska arbetsbördan för matematiker som utförde beräkningarna spred sig prosthaphaeresis (Pierce, 1977).

Grunden till begreppet syns redan på 1000-talet av den egyptiske matematikern Ibn Yunus (950–1009) som kunde åtminstone en del av metoden (Høg, 2009; Boyer, 1968). Men det var inte förrän slutet av 1500-talet som det blev vida känt och använt av gemene matematiker, inte minst av den kände astronomen Tycho Brahe (1546–1601). Det var också från Tycho Brahe som det spreds till John Napier (1550–1617) som då fick upp ögonen för metoden, vilket gav honom inspiration till sin utveckling av logaritmbegreppet (Boyer, 1968).

Det kan tyckas krångligt att omvandla multiplikation och division av stora tal till addition och subtraktion av tal i trigonometrisk form. Men eftersom det fanns tabeller med relativt bra noggrannhet under senare delen av 1500-talet kunde prosthaphaeresis användas för att få ett satisfierbart närmevärde från uträkningar (Pierce, 1977). En sådan tabell kommer från den franske matematikern François Viètes (1540–1603) verk som publicerades 1579, där han räknade ut värden till tabeller för de sex trigonometriska funktionerna sinus, cosinus, tangens, cosekant, sekant och cotangens i sin bok *Canon mathematicus*. I boken räknade han ut värdet av funktionerna till närmaste bågminut (Boyer, 1968). Därav var det enkelt att hitta korresponderande värden till de trigonometriska funktionerna i tabellerna där dessa värden kunde användas för prosthaphaeresis. Men hur gör vi då om vi vill använda metoden? Detta undersöks i följande avsnitt.

3.2.1 Prosthaphaeresis metod

Som konstaterat har vi formeln

$$cos(A)cos(B) = \frac{cos(A+B) + cos(A-B)}{2}.$$

Den fungerar utmärkt när vi vill multiplicera tal och vi kan även använda oss av den liknande sinus produkten

$$sin(A)sin(B) = \frac{cos(A-B) - cos(A+B)}{2}.$$

Vi gör ett exempel med den förstnämnda likheten. Det första vi behöver göra är att skala ner våra tal så de ligger mellan 0 och 1, det vill säga inom värdemängden för cosinus och sinus. Säg att vi till exempel vill multiplicera $x = 2156$ och $y = 708$, för detta behöver vi skala ner båda talen så vi får 0.2156 från x och 0.708 från y. Sedan behöver vi hitta värdena i vår tabell för att veta hur många grader de motsvarar, och då visar det sig att

$$arccos(0.2156) \approx 77.55° \text{ och } arccos(0.708) \approx 44.93°.$$

Då vet vi att vår vinkel $A \approx 77.55°$ och $B \approx 44.93°$. Nästa steg blir då att addera samt subtrahera våra vinklar A och B med varandra,

$$77.55° + 44.93° = 122.48° \text{ och } 77.55° - 44.93° = 32.62°.$$

Det vi behöver göra nu är att ta reda på cosinus av våra nya vinklar för att sedan addera dem med varandra och dela det med två. Genom vår cosinus-tabell finner vi att

$$cos(122.48°) \approx -0.5370 \text{ och } cos(32.62°) \approx 0.8423.$$

Addition och halvering leder oss till

$$\frac{-0.5370 + 0.8423}{2} = 0.15265.$$

Eftersom vi skalade ner talen blir det sista steget är att skala upp dem lika mycket som de skalades ner. Decimaltecknet flyttades fyra steg för 2156 och tre steg för 708, alltså behöver decimaltecknet flyttas sju steg åt andra hållet för att återfå rätt skala. Vilket gör att vi hamnar på talet 1526500. Om vi utför multiplikationen i sin helhet är $2156 \cdot 708 = 1526448$, alltså gav prosthaphaeresis ett relativt bra närmevärde utan att behöva utföra multiplikationen. För att få ytterligare noggrannhet behöver fler decimaler användas (Villarreal-Calderon, 2008; Pierce, 1977).

Om vi istället vill utföra division via metoden används att $\frac{1}{y} = cos(a)$ alltså är $y = sec(a)$, via sambandet går det att använda samma metod och då multiplicera $x \cdot \frac{1}{y}$. Med detta i åtanke väljer vi två tal som ska divideras, exempelvis $x = 973$ och $y = 78$. Sedan skalas x så att det går att hitta definierade värden och då ser vi i tabellerna att $arccos(0.973) \approx 13.34°$ och $arcsec(78) \approx 89.27°$. Därefter går det att använda formeln som vi gjorde tidigare:

$$\frac{cos(13.34 + 89.27) + cos(13.34 - 89.27)}{2} = \frac{-0.2183 + 0.2431}{2} = 0.0124.$$

Efter detta skalar vi tillbaka talet och får att $\frac{973}{78} \approx 12.4$, ett relativt bra närmevärde till den verkliga kvoten som är ungefär 12.47 (Pierce, 1997; Boyer, 1968).

3.3 Michael Stifel och Jost Bürgi

Även om prosthaphaeresis var en fungerande metod blev den relativt kortlivad. Beräkningsmetoden användes i ungefär 30 år tills logaritmen tog över som en liknande men bättre metod (Boyer, 1968).

1544 publicerades Michael Stifels (1487–1567) bok *Arithmetica integra*, där han bland annat presenterar de geometriska och aritmetiska talföljderna i figur 1 nedan och hur dessa kan användas för att ta reda på vad multiplikation och division mellan talen i nedre raden är, utan att behöva utföra någon multiplikation/division. (Waldvogel, 2014). För att förklara hur produkten av två tal i den nedre raden kan hittas beskriver Stifel exemplet att multiplicera 8 med 32. Först summeras talen i övre raden med samma position i sidled, 3 för 8 och 5 för 32. Sedan är produkten talet i nedre raden som har samma position i sidled som summan har i övre raden. Alltså är $8 \cdot 32 = 256$ eftersom $3 + 5 = 8$. På liknande sätt är $\frac{128}{8} = 16$ eftersom $7 - 3 = 4$ (Stifel, 1990).

& diuisione, ut plene ostendi lib. 1. capite de geomet. progress.
Vide ergo,

0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
1.	2.	4.	8.	16.	32.	64.	128.	256.

Sicut ex additione (in superiore ordine) 3 ad 5 fiunt 8, sic (in inferiore ordine) ex multiplicatione 8 in 32 fiunt 256. Est autem 3 exponens ipsius octonarij, & 5 est exponens numeri 32. & 8 est exponens numeri 256. Item sicut in ordine superiori, ex subtractione 3 de 7, remanent 4, ita in inferiori ordine ex diuisione 128 per 8, fiunt 16.

Figur 1. Ur Stifels *Arithmetica integra* från 1554 (Stifel, 1990, s.237).
Övre raden aritmetisk talföljd, undre geometrisk.

Matematikern, astronomen och urmakaren Jost Bürgi (1552–1632) var en av de som behövde göra stora uträkningar. För att kunna göra dessa utvecklade han ett eget system och konstruerade tabeller vars matematik i grunden liknar den i figur 1. Det är oklart hur bekant han var med Stifels bok när han gjorde detta, men han har i sina instruktioner refererat till en annan matematiker som i sin tur hade sammanfattat Stifels tankar. Stifels tabell kan bara användas för att multiplicera och dividera potenser med basen 2. För att göra sina tabeller användbara valde Bürgi istället basen 1.0001 och avrundade till nio värdesiffror. Genom att manipulera decimaltecknets position kunde han arbeta med såväl små som stora tal med hög precision. För tal som låg mellan två tabellvärden föreslog Bürgi att linjär interpolation skulle användas. Tabellerna hade 23028 uppslagstal, 50 i varje kolumn med 8 kolumner på varje sida. Varför just 23028 stycken är för att $1.0001^{23027} \approx 10$. Om det logaritmerade värdet överstiger 23027 kan antilogaritmen tas fram genom att det sammanlagda logaritmerade värdet subtraheras med 23027 gång på gång tills det kommer under 23027. Sedan slås antilogaritmen upp av det som är kvar. För att få reda på den sökta produkten ska sedan den uppslagna antilogaritmen multipliceras med 10 för varje subtraktion som utfördes (Waldvogel, 2014).

Boken med Bürgis tabeller och instruktioner publicerades först så sent som 1620, efter att Johannes Kepler (1571–1630) över en längre tid försökt övertala Bürgi att offentliggöra sin metod. Tidigare hade de haft en överenskommelse att inte publicera Bürgis innovationer. Endast en begränsad andel av Bürgis resultat finns dokumenterat där det mesta inte kommer direkt från Bürgi själv. Till exempel nämnde Kepler 1594 och astronomen Nicolaus Reimers (1551–1600) 1588 att Bürgi hade en bra metod att använda till sina beräkningar. Det är varken omöjligt eller en självklarhet att de kan ha refererat till prosthaphaeresis (Waldvogel, 2014). Vad vi vet är att Napier publicerade en bok med liknande idéer 1614 (Boyer, 1968).

3.4 John Napier

Även om möjligheten finns att Jost Bürgi kom på logaritmen före John Napier (1550–1617) är Napier ändå personen vi tänker på när vi pratar om logaritmens fader. Han var inte en renodlad matematiker utan en skotsk laird (godsägare) som spenderade en del av sin tid med att skriva om olika ämnen, varav ett av dessa var matematiken. Napier var väldigt avgränsad i sitt intresse för matematiken och ägnade sig bara åt delar som handlade om trigonometri och beräkning (Boyer, 1968). Det var också utifrån trigonometri och beräkning som Napier utvecklade sitt logaritmbegrepp, vilket syns när hans metod granskas. Inspirationen för sitt arbete med logaritmer fick han av tidigare publicerade verk som redovisade geometriska talföljder men också från metoden prosthaphaeresis (Boyer, 1968; Ayoub, 1993).

Napier hörde talas om metoden prosthaphaeresis genom James VI (1566–1625) av Skottlands läkare som i sin tur hade fått reda på metoden av Tycho Brahe. Detta var efter att James VI reste till Danmark 1590 för att träffa sin blivande fru Anne av Danmark. På grund av vädret blev James VI och hans sällskap tvungna att stanna (för att vänta på bättre väder), och av en händelse vistades de nära Tycho Brahes observatorium där de fick göra sitt uppehåll. Under tiden de var där användes Prosthaphaeresis flitigt i observatoriet för astronomiska beräkningar. Här lärde sig läkaren om metoden och senare förde han den vidare till Napier. Detta hjälpte Napier att utveckla sin logaritmmetod. (Boyer, 1968).

Napier utvecklade inte logaritmen som en invers funktion till exponent. Exponentbegreppet var inte ens utvecklat under Napiers tid. Det dröjer många år innan sambandet mellan exponent och logaritm belystes (Cajori, 1909). Istället skulle logaritmen, på samma sätt som prosthaphaeresis, vara ett verktyg för att omvandla multiplikation och division till enklare addition och subtraktion (Boyer, 1968). Napier ville att metoden skulle förhindra onödiga fel som uppstår vid stora och långa beräkningar samt spara tid för matematikerna. 200 år senare intygade Pierre Simon de Laplace (1749–1827) att minskandet av arbete ökade antalet år en astronom kunde arbeta utan att slita ut sig tvåfaldigt (O'Connor & Robertson, 1998).

Napier tros ha börjat utveckla sin logaritm 1594 och det skulle då ta honom 20 år att publicera sitt verk *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* år 1614. Titeln betyder *"A Description of the Marvelous Rule of Logarithms"* (Boyer, 1968, s. 343). Ordet logaritm är något som Napier själv myntade, det kommer från grekiskans *logos* som betyder ratio eller förhållande och *arithmos* som betyder nummer eller siffra (Pierce, 1977; Ayoub, 1993).

Innan förklaringen av Napiers tillvägagångssätt för att utveckla logaritmen är det gynnsamt att notera hur logaritmer går hand i hand med aritmetiska och geometriska talföljder. Säg att vi har två talföljder, en aritmetisk och en geometrisk, exempelvis

$$\begin{array}{ccccccccc} 3 & 6 & 9 & 12 & 15 & 18 & 21 & 24 & 27 \\ 2 & 4 & 8 & 16 & 32 & 64 & 128 & 256 & 512. \end{array}$$

Nu definierar vi termer från den aritmetiska talföljden som logaritmen av motsvarande tal i den geometriska talföljden. Vilket då kommer se ut så här;

$$\begin{array}{ccccccccc} 3 & 6 & 9 & 12 & 15 & 18 & 21 & 24 & 27 \\ log(2) & log(4) & log(8) & log(16) & log(32) & log(64) & log(128) & log(256) & log(512). \end{array}$$

Om vi nu vill multiplicera två tal från vår geometriska talföljd, exempelvis $32 \cdot 16$, kan vi genom våra moderna logaritmlagar utföra beräkningen

$$log(32 \cdot 16) = log(32) + log(16) = 15 + 12 = 27.$$

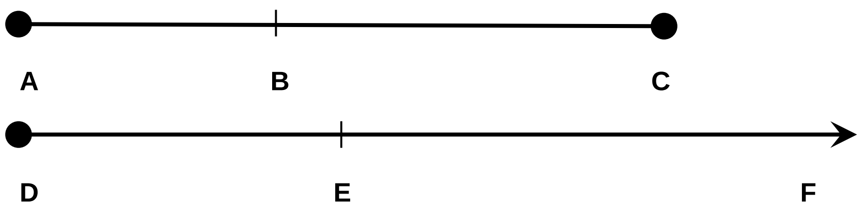
Sedan ser vi att $27 = log(512)$ vilket då innebär att $32 \cdot 16 = 512$ (Pierce, 1977).

När vi utför dessa beräkningar kommer tanken om en logaritms bas inte in i bilden. Det gjorde den inte för Napier heller. Konceptet bas framkommer senare i historien då fler matematiker utvecklar nya tabeller, något vi tar upp i senare avsnitt (Cajori, 1909). Skulle vi vilja definiera logaritmens bas i exemplet ovan skulle den vara $\sqrt[3]{2}$. Metoden fungerar oavsett vilka talföljder som används, men begränsningen ligger i att det endast går att multiplicera och dividera tal från den geometriska talföljden med varandra. Det behövs korresponderande värden mellan den aritmetiska och geometriska följden för samtliga tal för att kunna utföra beräkningarna (Villarreal-Calderon, 2008; Pierce, 1977). Napier, liksom Bürgi, kom undan detta genom att hitta en geometrisk talföljd a^n vars närliggande tal nästan har samma värde. Napier valde av den anledningen $a = 1 - 10^7 = 0.9999999$ (Boyer, 1968).

3.4.1 Napiers logaritm

Napiers metod går hand i hand med aritmetiska och geometriska talföljder, dock hade han inte en algebraisk utgångspunkt. Algebra var inte tillräckligt utvecklat under den tiden för att göra det möjligt, istället hade han en geometrisk grund (Cajori, 1913; O'Connor & Robertson, 1998).

Napier beskrev sin logaritm genom ett förhållande mellan avstånd, visualiserad i figur 2 nedan. Tänk att vi har en begränsad sträcka AC samt en stråle DF som går mot oändligheten. Vi låter B vara en punkt vars startposition är A och som sedan rör sig längs AC, likaså är E en punkt vars startposition är D och sedan rör den sig längs DF. Både E och B har samma utgångshastighet men E har en konstant hastighet, alltså rör den sig lika fort hela tiden oavsett var den är på DF. B har däremot en hastighet som är proportionell mot sträckan BC, alltså kommer B:s hastighet minska ju närmare den kommer punkten C. Proportionaliteten innebär att avstånden BC med konstant tidsintervall kommer bilda en avtagande geometrisk talföljd och eftersom E:s hastighet är konstant kommer avstånden DE bilda en aritmetisk talföljd (Boyer, 1968; Villarreal-Calderon, 2008).



Figur 2. Visualisering av Napiers logaritm. DE är logaritmen av BC.
B och E har samma utgångshastighet från A respektive D.
E:s hastighet är konstant men B:s hastighet är proportionell mot BC.

Med denna grund definierade Napier DE som logaritmen för BC, alltså om vi kallar Napiers logaritm $LN(x)$ är $DE = LN(BC)$ (Boyer, 1968). Ju längre AC är desto större noggrannhet får vår logaritm, Napier valde att sätta $AC = 10^7$, eftersom de trigonometriska tabeller han använde hade sju decimaler noggrannhet (O'Connor & Robertson, 1998).

Logaritmen kan förklaras med följande diskreta exempel där BC är en funktion av tiden; vid $t = 0$ kommer $BC(0) = 10^7$ och sedan minskar avståndet med tiden. Vid $t = 1$ har B flyttat $(1 - \frac{1}{10^7}) = 0.9999999$ av $BC(0)$, alltså kommer $BC(1) = 9\,999\,999$. Vid $t = 2$ kommer B ha flyttat $(1 - \frac{1}{10^7})^2$ av $BC(0)$ vilket gör att $BC(2) = 9\,999\,998{,}0000001$, generellt kan vi säga att B flyttar $(1 - \frac{1}{10^7})^t$ och då kommer $BC(t) = 10^7(1 - \frac{1}{10^7})^t$ där t är Napiers logaritm av BC (Pierce, 1977). I sina tabeller kallade Napier BC för sinus och t dess logaritm (Boyer, 1968). Detta var inte Napiers tillvägagångssätt för att tillverka sina tabeller men det illustrerar hans tankar på ett relativt tydligt vis (Pierce, 1977).

Nu till den stora frågan, hur används Napiers logaritm för att multiplicera tal? Låt

$$P = 10^7(1 - \frac{1}{10^7})^{t_1} \text{ och } Q = 10^7(1 - \frac{1}{10^7})^{t_2}.$$

Av det följer att

$$PQ = 10^{14}(1 - \frac{1}{10^7})^{t_1} \cdot (1 - \frac{1}{10^7})^{t_2}.$$

Med hjälp av potenslag kan detta skrivas om till

$$PQ = 10^{14}(1 - \frac{1}{10^7})^{t_1 + t_2}.$$

Slutligen formuleras detta som

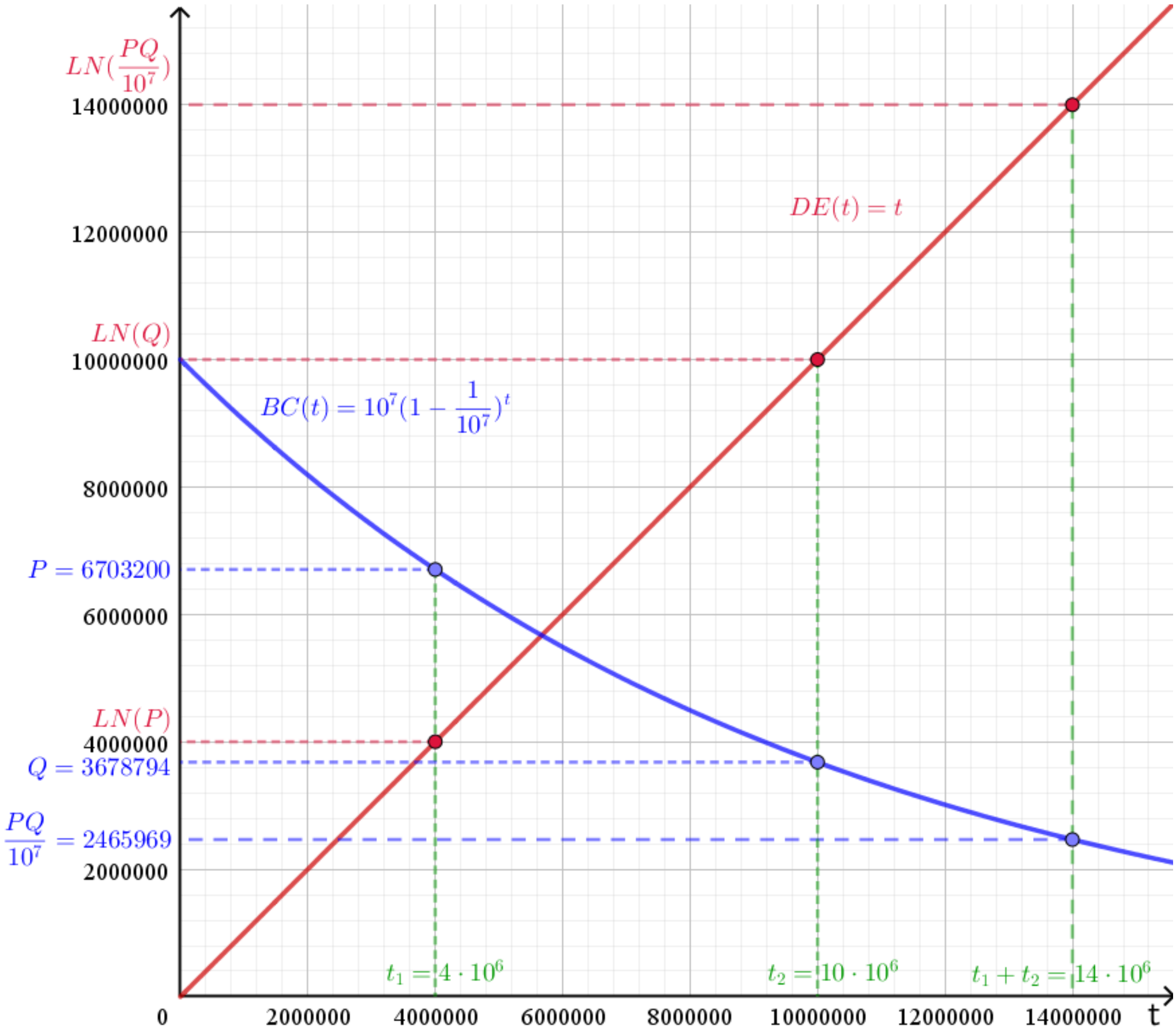
$$\frac{PQ}{10^7} = 10^7(1 - \frac{1}{10^7})^{t_1 + t_2}.$$

I praktiken betyder detta att

$$LN(\frac{PQ}{10^7}) = LN(P) + LN(Q).$$

Division går att formulera med liknande metod vilket då resulterar i

$$LN(10^7 \frac{P}{Q}) = LN(P) - LN(Q).$$



Figur 3. Grafisk beskrivning av Napiers logaritmbegrepp för multiplikation av P och Q. Logaritmera värdena (följ grön vertikal linje från P, Q på kurvan BCtill linjen DE). Addera de logaritmerade värdena. Antilogaritmera summan (följ grön vertikal linje från linjen DE till $\frac{PQ}{10^7}$ på kurvan BC). Multiplicera med 10^7.

Följande är ett exempel över hur multiplikation utförs med hjälp av Napiers logaritm. Först och främst behövs två tal, för enkelhetens skull plockas dessa från Napiers tabeller. Exempelvis $sin(0°57')$ och $sin(1°0')$, enligt tabell är dessa 165799 respektive 174524. Detta stämmer inte överens med sinus idag utan är en skalning med en faktor av 10^7. Anledningen är definitionen av sinus på Napiers tid (Ayoub, 1993). Utföringen av vår beräkning $165799 \cdot 174524$ görs på följande sätt. Först hittar vi korresponderande värden i tabellen som då visar sig vara 41006643 respektive 40482764. Efter det adderas logaritmerna $41006643 + 40482764 = 81489407$. Nästa steg är att hitta det värdet som motsvarar logaritmen 81489407, det visar sig vara ungefär 2909. Det sista steget är att utföra beräkningen $2909 \cdot 10^7$. Vid jämförelse syns det att $165799 \cdot 174524 = 2893 \cdot 10^7$, alltså ett relativt bra närmevärde. Det ger inget exakt svar då Napiers tabeller saknar korresponderande värde för alla logaritmer, 81489407 är en av de logaritmer som saknar korresponderande värde men det närmaste var 2909 (Napier, 1614). Eftersom det ibland inte går att hitta korresponderande värden för logaritmen används interpolering, på detta vis går det att få bättre närmevärden av beräkningar (Ayoub, 1993).

En stor skillnad mellan den moderna logaritmen och den av Napiers konstruktion är att $LN(1) \neq 0$, istället är $LN(10^7) = 0$ som vi sett tidigare. Detta faktum gör att logaritmen är något krångligare att kalkylera med än om, liksom vår moderna logaritm, $LN(1)$ hade varit lika med 0 (Ayoub, 1993). Detta var något som Napier funderade över efter han publicerade sitt verk 1614. Men eftersom Napiers hälsa inte var den bästa efter 20 år av arbete på sitt första verk kunde han inte åta sig jobbet att tillverka nya tabeller, varför han överlät arbetet till Henry Briggs (O'Connor & Robertson, 1999).

3.5 Henry Briggs (bas 10)

Henry Briggs (1561–1630) var professor i geometri på Gresham College i London när Napier publicerade sitt verk 1614 (O'Connor & Robertson, 1999). Det sägs att efter Briggs läst publikationen blev han snabbt en av Napiers största beundrare och försökte anordna ett möte med Napier för att diskutera logaritmen (Cajori, 1909). När de till slut träffades 1615 hos Napier i Skottland föreslog Briggs att en förbättring av logaritmen vore om $log(1) = 0$. Detta var något Napier hade tänkt på tidigare och han ville även att $log(10) = 10^{10}$. Under deras samtal kom de överens om att en logaritm där $log(1) = 0$ och $log(10) = 1$ vore mest användbar. Det var födelsen av logaritmen med bas 10, eller den briggiska logaritmen som den även kallas. Men på grund av Napiers hälsa kunde han inte tillverka nya tabeller, istället valde Briggs att ta på sig jobbet (B. Boyer, 1968; O'connor & Robertson, 1999).

Briggs konverterade inte Napiers existerande tabeller till bas 10, istället räknade han ut logaritmerna genom andra metoder. Briggs märkte att tack vare den valda basen 10 går det att finna en approximation av logaritmer genom ett samband mellan ett givet tals antal siffror och dess logaritm. Han kom fram till att logaritmen av ett tal A med x siffror ligger mellan $x - 1$ och x. Vidare om A kan skrivas som a^y är logaritmen av a mellan $\frac{x-1}{y}$ och $\frac{x}{y}$. Det betyder att till exempel logaritmen av 1024 som har fyra siffror ligger mellan 3 och 4 och eftersom $1024 = 2^{10}$ är logaritmen av 2 mellan $\frac{3}{10}$ och $\frac{4}{10}$. Med dessa samband beräknas logaritmen av till exempel 3 på detta vis;

$$3^{10} = 59049 \Rightarrow 4 < \lg(3^{10}) < 5 \Rightarrow \frac{4}{10} < \lg(3) < \frac{5}{10}$$

$$3^{20} \approx 3.49 \cdot 10^9 \Rightarrow 9 < \lg(3^{20}) < 10 \Rightarrow \frac{9}{20} < \lg(3) < \frac{10}{20}$$

$$3^{40} \approx 1.22 \cdot 10^{19} \Rightarrow 19 < lg(3^{40}) < 20 \Rightarrow \frac{19}{40} < lg(3) < \frac{20}{40}$$

$$3^{60} \approx 4.24 \cdot 10^{28} \Rightarrow 28 < lg(3^{60}) < 29 \Rightarrow \frac{28}{60} < lg(3) < \frac{29}{60}$$

För varje steg som tas finner vi ett snävare intervall för den eftersökta logaritmen. På detta vis fortsatte Briggs tills han fann logaritmen för en mängd primtal med 14 decimaler noggrannhet. Efter detta gick det att konstruera fler tal genom logaritmlagar, exempelvis $lg(9) = lg(3 \cdot 3) = lg(3) + lg(3)$. För att hitta logaritmen av större primtal använde han en mer avancerad metod (Henderson, 1930; Villarreal-Calderon, 2008).

Under 1617, alltså samma år som Napier dog, publicerade Briggs sin första tabell under namnet *Logarithmorum Chilias Prima.* Tabellen innehöll logaritmen för alla naturliga tal från 1 till 1000 med 14 decimalers noggrannhet (Boyer, 1968). Briggs slutade dock inte där, han fortsatte tills 1624 då han publicerade *Arithmetica Logarithmica* där tabeller för de naturliga talen 1 till 20000 och 90000 till 100000 var inkluderade. I publikationen uppmanade Briggs fler människor att räkna ut logaritmen för de naturliga talen mellan 20000 och 90000 (O'Connor & Robertson, 1999). Briggs spenderade sina sista år med att beräkna logaritmen för de vanligaste trigonometriska funktionerna, dock lyckades han inte fullända sitt verk innan han dog 1630 (Cajori, 1909). De fullständiga tabellerna med alla naturliga tal mellan 1 och 100000 publicerades 1628 av Adrian Vlacq (1600–1667) från Nederländerna (O'connor & Robertson, 1999). Det var också Vlacq som till slut fulländade logaritmtabellerna för de trigonometriska funktionerna 1633, tre år efter Briggs död (Cajori, 1909; Thompson & Pearson, 1925).

3.6 John Speidell och Nicolaus Mercator (bas e)

Den första publikationen om logaritmen med basen e kom 1619 i den engelska matematikläraren John Speidells (fl. 1600–1634) *New Logarithmes* (Cajori, 1909). I den angav han $log(10) = 2302584$, som kan jämföras med vad idag beskrivs som $ln(10) = 2.302585$. (Villarreal-Calderon, 2008). Publikationen byggde vidare på Napiers verk (med en skillnad att värdet på logaritmen växte med växande indata) och bestod endast av tabeller med samma antal decimaler på talen som Napier hade. Alphonse Antonio de Sarasa (1618–1667) publicerade sedan kopplingen mellan logaritmer och hyperboliska areor 1649 (Burn, 2016).

1668 publicerar Nicolaus Mercator (1620–1687) *Logarithmotechnia* där han beskriver hyperbeln med ekvationen $y = \frac{1}{1+a}$. Högerledet utvecklar han till en oändlig serie. Detta kan göras genom att först ersätta täljaren med $1 + a - a$, således får vi $\frac{1+a-a}{1+a}$. Nu kan vi bryta upp detta i två bråk, $\frac{1+a}{1+a} + \frac{-a}{1+a}$ som vi förenklar till $1 - \frac{a}{1+a}$. Bryter vi nu ut a ur det kvarvarande bråket är HL $= 1 - a\left(\frac{1}{1+a}\right)$. Men tidigare har vi visat att $\frac{1}{1+a} = 1 - a\left(\frac{1}{1+a}\right)$, alltså kan högerledet utvecklas med samma metod till $1 - a\left(1 - a\left(\frac{1}{1+a}\right)\right)$. Detta kan då förenklas till $1 - a\ + aa\left(\frac{1}{1+a}\right)$. Upprepar vi denna metod oändligt många gånger får vi den oändliga serien $1 - a + aa - aaa + aaaa - aaaaa\ ... = \frac{1}{1+a}$. (Om vi här algebraiskt "integrerar" båda leden får vi det vi idag kallar Mercatorserien, Taylorutvecklingen av naturliga logaritmen.) Efter att ha utvecklat HL räknar sedan Mercator ut integralen term för term för $a = 0.1$ och $a = 0.21$, vars resultat han kopplar till logaritmer antagligen med hjälp av Gregorius Saint-Vincents (1584–1667) och Alphonse Antonio de Sarasas framsteg

(Cajori, 1913). Mercator är först med att använda benämningen naturlig logaritm för logaritmen med basen e, men nämner inte själva talet e (O'Connor & Robertson, 2001).

Napiers verk för praktiskt användande kom snabbt att överskuggas av andras mer användarvänliga publikationer. Faktumet kvarstår dock att det var Napier som lade grunden för den utvecklingen, vilket är varför han anses vara just logaritmens fader (Ayoub, 1993).

3.7 Leonhard Euler (nuvarande definition)

Som vi tidigare nämnt var logaritmen från början definierad i form av geometriska och aritmetiska talföljder. Denna form av definition gav upphov till tvetydigheter, en av dessa oklarheter var om det existerar logaritmer för negativa tal. De två kända matematikerna Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646–1716) och Johann Bernoulli (1667–1748) var av olika uppfattningar kring negativa tals logaritmer. Leibniz hävdade att sådana logaritmer inte existerar och Bernoulli var av motsatt åsikt (Cajori, 1909). Leibniz och Bernoulli debatterade detta via brevväxling som pågick i mer än ett år, mellan 16:e mars 1712 och 29:e juli 1713 (Bal, 2014).

Ett av Bernoullis argument var att eftersom $(-a)^2 = a^2$ måste $log((-a)^2) = log(a^2)$, vilket medför att $2log(-a) = 2log(a)$ och då skulle $log(-a) = log(a)$. Det var en av anledningarna som gav honom uppfattningen att logaritmen för ett tal a är samma som logaritmen för $-a$ (Cajori, 1909). Leibniz skrev bland annat att en logaritm är korresponderande tal mellan en geometrisk och aritmetisk talföljd, enligt den dåvarande definitionen, och att den geometriska talföljden aldrig kan ha både negativa och positiva tal i sin utveckling. Båda parterna fortsatte argumentera för sina ståndpunkter tills Leibniz till slut skrev att han inte hade tid att motbevisa Bernoullis påståenden, varpå Bernoulli svarade att han inte tyckte Leibniz argument var övertygande och att hans idé att $log(-a) = log(a)$ var korrekt i det sista brevet. Av de två matematikernas brev blev det tydligt att definitionen för logaritmer inte var tillräcklig för att enas om ett svar på frågan och att det krävdes en ny definition (Bal, 2014).

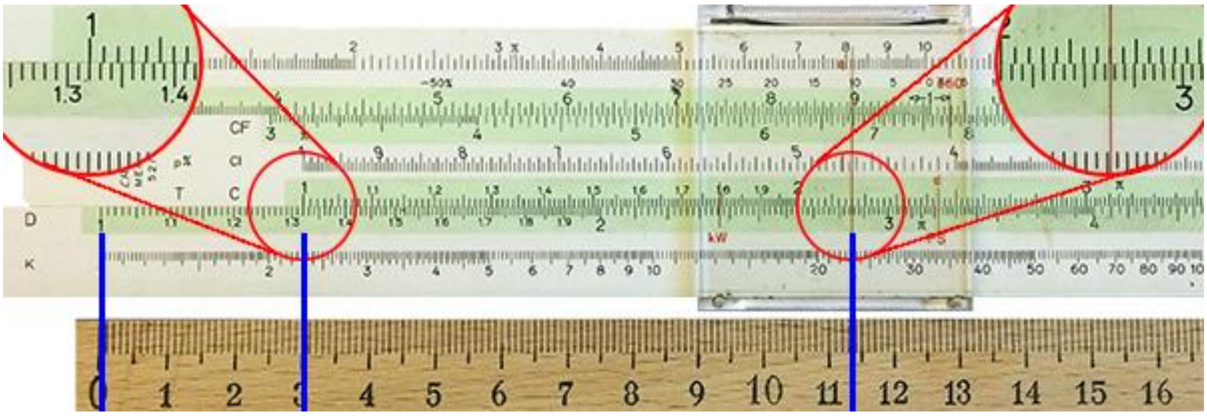
Johann Bernoullis favoritelev Leonhard Euler (1707–1783) skrev till Bernoulli 1727 och gav för- och motargument till logaritmer för negativa tal, men Bernoulli stod fast vid sina tankar om $log(-a) = log(a)$ oavsett Eulers argument. Långt senare skrev Euler två artiklar om ämnet. Den första med titeln *sur les logarithmes* 1747 och den andra *De la controverse entre Messrs. Leibniz et Bernoulli sur les logarithmes des nombres negatifs et imaginaires* 1749, den förstnämnda publicerades inte förrän över hundra år senare men den andra utgavs 1751 (Bal, 2014). Den andra artikeln innehåller först utdrag från Bernoulli och Leibniz brevväxling där Euler ger för- och motargument till båda parternas påståenden. Bland annat påpekade Euler att eftersom $log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \ldots$ (vilket är den kända Mercatorserien som beskrevs i avsnitt 3.6) skulle $log(-1) = -2 - \frac{4}{2} - \frac{8}{3} - \frac{16}{4} - \frac{32}{5} - \ldots$ när $x = -2$, och då borde $log(-1)$ inte kunna vara 0, alltså kan inte $log(-a) = log(a)$ (Euler, 1751). Det finns dock ett tydligt problem med Eulers argument då Taylorutvecklingen för $log(1+x)$ endast är definierat för $-1 < x < 1$. Men även om vissa av Eulers argument är bristfälliga på grund av hans liberala användning av oändliga summor kvarstår ändå faktumet att definitionen för logaritmer inte var tillräcklig för att besvara problemet (Bal, 2014).

Efter den inledande delen av artikeln fortsätter Euler med att ge en lösning till problemet. Mer specifikt bevisar han först att varje tal A har oändligt många logaritmer men att alla förutom en av logaritmerna är imaginära/komplexa om A är positiv och att samtliga logaritmer är imaginära/komplexa om A är negativ. Han identifierar också fyra olika problem med generella lösningar till dem alla. De två första problemen handlar om hur det går att hitta alla logaritmer för ett godtyckligt positivt respektive negativt tal. Det tredje problemet är hur alla logaritmer för ett godtyckligt komplext tal hittas. Det fjärde och sista problemet gäller hur det tal som korresponderar mot en godtycklig logaritm hittas (Euler, 1751). Artikeln *sur les logarithmes* som publicerades 1862 innehöll liknande information, men beviset för att alla tal har oändligt många logaritmer gjordes på ett annorlunda sätt. Den kände matematik-historikern Florian Cajori (1859–1930) hävdade att *sur les logarithmes* var mer övertygande än artikeln som publicerades 1751 (Bal, 2014).

Förutom sina bevis för logaritmer av negativa tal gav Euler oss även den moderna definitionen för logaritmen. Han skrev att om $y = a^x$ definieras logaritmen av y med basen a som x, alltså $x = log_a(y) \Leftrightarrow y = a^x$. Definitionen blev publicerad i Eulers *Introductio* vilken han skrev någon gång mellan 1743 och 1744 men den publicerades först 1748 efter en lång väntan på tryckpressen (Bradley & Sandifer, 2007).

3.8 Räknestickan

Räknestickans historia började med Napiers publicering av logaritmen 1614 följt av matematikern Edmund Gunter (1581–1626) som 1620 markerade en logaritmskala på en linjal för att slippa slå i tabeller vid utförandet av mindre beräkningar. Första räknestickan skapades 1622 av matematikintresserade William Oughtred (1574–1660) som placerade två skjutbara logaritmskalor bredvid varandra. Han hade då reducerat multiplikation till att rada upp två tal och läsa av på en skala (Stoll, 2006).



Figur 4. Modern räknesticka av modell Faber-Castell 52/80 Mentor.

Principen för att multiplicera två tal med varandra med hjälp av en räknesticka bygger på att ha två logaritmiska skalor bredvid varandra. Till exempel i Figur 4 där den övre skalan kallas C och den undre kallas D. Avståndet mellan 1:an (skalan börjar på 1 eftersom $log(1) = 0$) och ett godtyckligt tal på skalan representerar logaritmen för det talet. Antilogaritmen för summan av avstånden för två tal är då deras produkt och hittas med fördel med hjälp av pekaren. Att detta gäller kan beskrivas genom logaritmlagen $log(a) + log(b) = log(ab)$. Eftersom $log(a)$ är avståndet mellan 1 och a i C-skalan och $log(b)$ är avståndet mellan 1 och b i D-skalan är $log(ab)$ avståndet mellan 1 och ab i D-skalan. Praktiskt sett placeras 1:an på C-skalan så den ligger ovanför talet på D-skalan som ska multipliceras. Den sökta produkten är då värdet på D-skalan som ligger under det tal vi multiplicerar med på C-skalan. I figur 4 ligger 1:an ovanför 1.32 (som ligger 3 cm in på D-skalan) och pekaren på 2.16 (som ligger $11.35 - 3 = 8.35$ cm in på D-skalan) i övre raden. Således kan produkten, ungefär 2.85 (som ligger 11.35 cm in på skalan), läsas av vid pekaren på D-skalan.

Räknestickan kunde dock inte utmana tabellernas exakthet. Det kom att ta två sekel innan de utvecklades till att ha pekare och en mittdel rörlig i sidled för precisare avläsning och justering. Samtidigt som behovet hade ökat ledde detta till mer utbredd användning, som i sin tur ledde till mer utveckling och specialisering. De utvecklades till att ha mer användbara skalor allmänt och för specifika användningsområden, exaktare skalor, större räknestickor, inkluderande förstoringsglas etc. På bara några sekunder kunde kvadrat- och kubrötter hittas samt multiplikation och division utföras. Med lite möda kunde även mer avancerad matematik utföras. De bästa räknestickorna kunde till slut användas för att göra beräkningar med fem värdesiffrors säkerhet (Stoll, 2006).

De flesta beräkningar inom vetenskapen och ingenjörsverksamheten fram till 70-talet kom att utföras just med hjälp av räknestickan, men svårigheten för gemene man att lära sig använda dem försvann aldrig. När första miniräknaren i fickformat lanserades 1972 beskrevs den som en medtagbar elektronisk räknesticka. Inte många år senare slutade räknestickan tillverkas och dess era var över efter ca. 40 miljoner producerade exemplar (Stoll, 2006).

4. Didaktik

Logaritmer anses generellt sett vara något av det svåraste att lära sig i gymnasiematematiken samtidigt som det är svårt att undervisa om. Även om elever kanske lär sig räkna med hjälp av dem förstår de sig ofta inte på grundprincipen. Flertalet studier pekar just på dessa problem som verkar utbredda och högst aktuella. (Ganesan & Dindyal, 2014).

För att klargöra dessa problem kommer följande del av uppsatsen behandla vad elever har för svårigheter i relation med logaritmer och vad det finns för undervisningsmöjligheter för att tackla dessa svårigheter. Men först en genomgång av vad Skolverket säger ska undervisas om angående logaritmer och en beskrivning av hur svenska författare lagt upp sina läroböcker.

4.1 Logaritmer i läroplanen och -böcker

För att undersöka effektiva undervisningsmöjligheter för logaritmer i gymnasieskolan är det viktigt att först veta vad kursplanerna i matematik säger om ämnet. Den kursplan som undersöks är den reviderade ämnesplanen från 2011 som träder i kraft 30:e juni 2018 (Skolverket, 2017). Det bör poängteras att inget angående logaritmer förändrades genom revideringen, de stora förändringarna handlar om differentiering mellan digitala verktyg och manuella beräkningar.

Logaritmen börjar bli aktuell först i matematik 2b och 2c, kursplanen för matematik 2b behandlar *"begreppet logaritm i samband med lösning av exponentialekvationer"* (Skolverket, 2017, s. 20) och 2c behandlar *"begreppet logaritm, motivering och hantering av logaritmlagarna"* (Skolverket, 2017, s. 24). Dessa två kurser är snarlika men 2c förbereder mer inför senare matematikkurser och är därför mer ingående. Sedan innehåller kurserna 3b och 3c även delar som berör logaritmen, främst *"härledning och användning av deriveringsregler för potens- och exponentialfunktioner samt summor av funktioner"* (Skolverket, 2017, s. 28) och även *"introduktion av talet e och dess egenskaper"* (Skolverket, 2017, s. 32) vilket gäller båda kurserna. Dessa säger inte explicit något om logaritmer men de uppkommer naturligt vid behandling av talet e och exponentialfunktioner. Matematik 4 behandlar *"egenskaper hos trigonometriska funktioner, logaritmfunktioner, sammansatta funktioner och absolutbeloppet som funktion"* (Skolverket, 2017, s. 36) samt *"härledning och användning av deriveringsregler för trigonometriska, logaritm-, exponential- och sammansatta funktioner samt produkt och kvot av funktioner"* (Skolverket, 2017, s. 36). Samtliga matematikkurser på gymnasiet ska också behandla problemlösning kopplat till matematikhistoria enligt det centrala innehållet, kunskapskraven uttrycker att eleverna skall kunna relatera alla kursers innehåll till matematikhistoria (Skolverket, 2017). Som vi sett i kapitel 3 i och med redovisning av logaritmens historia finns det möjligheter att inkorporera logaritmen i det centrala innehållet och kunskapskraven via detta. Förutom det centrala innehållet i kurserna måste läraren också förhålla sig till de sju förmågorna och samtliga av dem går att relatera till logaritmbegreppet.

Läroplanen specificerar inte exakt hur läraren ska lägga upp sin undervisning och därför finns det en del handlingsutrymme för hur detta kan göras. Följande kommer en jämförelse av hur logaritmer presenteras i matematikböckerna *Matematik 5000 Kurs 2c Blå Lärobok*, *Exponent 2c* och *Matematik Origo 2c*.

I *Matematik 5000 Kurs 2c Blå Lärobok* introduceras exponentialfunktioner innan logaritmer, där exponent identifieras via grafisk lösning och funktionsvärden undersöks för olika värden på exponenten för givna funktioner. Logaritmen introduceras via tiologaritmen som en alternativ lösningsmetod till den grafiska för exponentialekvationer då HL och VL inte enkelt kan skrivas om som potenser med basen 10. Därefter presenteras Eulers definition för tiologaritmen. Efter totalt 3 sidors förklaring är elevernas första logaritmuppgift att bestämma $lg(3)$ med hjälp av räknare. Senare introduceras logaritmlagarna via potenslagarna och ännu senare logaritmer med andra baser, då även Eulers fullständiga definition presenteras. På detta följer historien kort utan talföljderna med en logaritmtabell vars logaritmerade värden är decimaltal, där exempel visar hur multiplikation och division kan utföras med hjälp av tabellen. Logaritmavsnittet avslutas med tillämpningar på exponentialekvationer (Alfredsson, Bråting, Erixon & Heikne, 2011).

I *Exponent 2c* introduceras logaritmer genom en kort sammanfattning av historien efter avsnittet om andragrads- och rotfunktioner. Eleverna ombeds fylla i saknade värden i en tabell med tre talföljder, en aritmetisk från -4 till 4 med differensen 1 och två geometriska från 10^{-4} till 10^{4} med kvoten 10 där ena är uttryckt som potens och den andra som decimaltal. Sedan beskrivs tiologaritmen på ett praktiskt vis som inversen till $f(x) = 10^{x}$ och Eulers definition för tiologaritmen presenteras, det visas också en graf med funktionerna $f(x) = 10^{x}$ och $g(x) = lg(x)$. Efter knappt 6 sidors förklaring kommer första uppgiften för eleverna som är att beräkna $lg(10^{99})$ utan räknare. Senare introduceras logaritmlagarna via potenslagarna och ännu senare logaritmer med andra baser, där de använder notationen ${}^{a}log(x)$. Innan boken övergår till exponentialfunktioner och -ekvationer ges tio diskussisons-frågor om logaritmekvationer och -funktioner till eleverna (Gennow, Gustafsson & Silborn, 2012).

Matematik Origo 2c inleder området relaterat till logaritmer med en aritmetisk talföljd från 1 till 9 med differensen 1 och en geometrisk från 2 till 512 med kvoten 2, samt hur de kan användas som multiplikationstabell. Sedan kommer en del som mestadels går ut på att lösa Exponentialekvationer grafiskt och potensekvationer algebraiskt. Logaritmer introduceras efter det på liknande vis som i *Matematik 5000 Kurs 2c Blå Lärobok*, efter totalt 5 sidors förklaring kommer elevernas första logaritmuppgift som går ut på att via en exponential-funktion grafiskt ta fram vad 10 ska upphöjas till för att bli 200. Sedan följer en kort genomgång av historien, inkluderande en logaritmtabell med instruktioner för hur ett logaritmerat värde hittas, och förklaring på hur till exempel $2^{x} = 5$ kan lösas via den ekvivalenta ekvationen $(10^{lg(2)})^{x} = 10^{lg(5)}$. Efter eleverna jobbat med den lösningsmetoden kommer logaritmlagarna, tillämpningar och logaritmer med andra baser i den ordningen. Till sist sammanfattas logaritmens historia på två sidor, inklusive förklaring för hur multiplikation utförs på en räknesticka och med hjälp av tabeller (Szabo, Larson, Viklund, Dufåker & Marklund, 2012).

I avsnitt 4.4 redovisas flera exempel på undervisningsupplägg som skulle kunna användas för att lära ut begreppet logaritm, men först är det viktigt att tänka på hur logaritmen kan tolkas på olika sätt.

4.2 Sätt att se på logaritmer

Logaritmbegreppet är något många elever behöver lägga ner mycket tid och arbete för att behärska. Många ställer frågan “vad är logaritmer egentligen?” till sin lärare i hopp om att få en bättre förklaring som ger en djupare förståelse för begreppet (Weber, C., 2016). Som lärare behövs det då en stor bredd av möjliga förklaringsmodeller för att kunna ge den nyfikne eleven mer information om ämnet. För att undersöka fler möjliga sätt att undervisa om logaritmer studerar vi först några olika sätt att tolka begreppet på, fem sådana tolkningar kommer redovisas nedan varav de fyra första presenteras av Weber, C. (2016) som möjliga inkörsportar till logaritmbegreppet för elever. Den femte tolkningen är baserad på den historiska informationen från kapitel 3.

4.2.1 Eulers definition

Den första tolkningen och det vanligaste sättet logaritmen introduceras i skolan är som en invers funktion till exponent, alltså Eulers definition $log_a(x) = y$ om och endast om $a^y = x$ (Mulqueeny, 2012). Det är relativt smidigt att ha denna definition som startpunkt då elever redan är bekanta med konceptet invers till exempel från synsättet på subtraktion som invers operation till addition (Weber, C., 2016). En fördel med denna förklaringsmodell är att den ger en tydlig bild av hur en exponentialekvation kan lösas. Exempelvis för att lösa $3^x = 80$ syns det direkt i definitionen att $x = log_3(80)$. Det är också en logisk startpunkt eftersom definitionen är den officiella som används i dagens matematik (Weber, C., 2016).

4.2.2 Multiplikativ mätning

Den andra tolkningen visar att logaritmen kan ses som en sorts multiplikativ mätning i och med att logaritmen visar antalet faktorer som får plats i ett tal. Det går att likna med hur division visar antalet additioner som får plats i ett tal. Om vi exempelvis har $\frac{20}{4}$ kan det tolkas som “hur många additioner av 4 får plats i 20?”, $4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 20$ alltså 5 gånger och då är $\frac{20}{4} = 5$. På liknande vis kan $log_5(125)$ tolkas som “hur många gånger kan 5 multipliceras med sig själv för att ge 125?”, jo $5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3$ alltså är $log_5(125) = 3$. Alltså kan vi kan säga att “logaritmen av ett tal x med bas a visar hur många gånger a kan multipliceras med sig själv för att ge x” (Weber, C., 2016). Det går också att beskriva med ett likvärdigt uttryck; “logaritmen av ett tal x med bas a visar hur många gånger x kan divideras med a för att nå 1”. Alltså $log_5(125)$ visar hur många gånger 125 kan divideras med 5 för att ge 1. $125 \div 5 \div 5 \div 5 = 1$, tre divisioner ger alltså svaret 3 (Vos & Espedal, 2016). Via denna förklaring går det att finna värdet av enklare logaritmer genom successiv division. Det är också tydligt att logaritmen av 0 eller ett negativt tal inte finns (bortsett från komplexa lösningar) eftersom 0 eller ett negativt tal aldrig kan vara 1 oavsett hur många upprepade divisioner med ett positivt tal som görs. En svaghet med representationsformen är att det blir svårt att förklara annat än naturliga tal som exponenter, men det går dock genom en algoritm liknande lång division som kommer redovisas i avsnitt 4.5 om manuell uträkning av logaritmer (Weber, C., 2016).

4.2.3 Beräkning av antal siffror

Den tredje tolkningen säger att logaritm kan ses som beräkning av antalet siffror i ett tal. Antalet siffror i ett tal n i decimala talsystemet kan beskrivas som $lg(n) + 1$. Det innebär att logaritmen av ett tal n är lika med antalet siffror i n minus 1, exempelvis $lg(10000) = 4$ och inte så förvånande har talet 5 siffror. Mer intressant blir det med logaritmen av ett tal som inte är av formen 10^x. Till exempel $lg(800) \approx 2.9$ regeln säger då att 800 bör ha $2{,}9 + 1$ siffror, för att få det verkliga antalet siffror avrundas logaritmen nedåt. Användningsområdet för denna tolkningen ligger i att studera stora potenser för att evaluera hur stort ett tal är. Det kan till exempel att användas för att bestämma vilket tal som är störst av 15^{986} och 16^{980}, dessa tal är så stora att ingen traditionell miniräknare kommer ge ett svar. Därför blir det svårt för elever att svara på frågan endast genom att använda miniräknaren som hjälpmedel. Istället kan de använda logaritmlagen $lg(p^q) = q \cdot lg(p)$ och tänka på logaritmen som ett sätt att räkna antalet siffror. Det skulle visa att $lg(15^{986}) = 986 \cdot lg(15) \approx 986 \cdot 1.176 \approx 1159.6$ vilket då innebär att 15^{986} har 1160 siffror, samma metod för det andra talet visar att $lg(16^{980}) = 980 \cdot lg(16) \approx 980 \cdot 1{,}204 \approx 1180$ som då visar att 16^{980} har 1181 siffror och då är det tydligt att $16^{980} > 15^{986}$ (Weber, C., 2016).

4.2.4 Minskad operationsgrad

Den fjärde tolkningen beskriver logaritmen som ett sätt att minska operationsgraden av ett uttryck. Ett uttrycks operationsgrad syftar på vilka underliggande operationer den innehåller. Addition och subtraktion innehåller inga underliggande operationer, alltså är de av operationsgrad 1. Multiplikation och division däremot går att se som upprepad addition respektive subtraktion, därför är de av operationsgrad 2. Vidare är potenser av operationsgrad 3 då det tolkas som upprepad multiplikation vilket i sin tur är upprepad addition, även rotuttryck hamnar i denna operationsgrad. Logaritmeringen av ett uttryck minskar dess operationsgrader med 1, förutom om det redan är av grad 1 då addition och subtraktion inte har några underliggande operationer. Det går att visualisera genom exempelvis

$$log(\sqrt{pq}) = \frac{1}{2}(log(p) + log(q))$$

där rot omvandlas till division och multiplikation omvandlas till addition. Genom detta tankesättet kan det bli tydligt för elever att det inte går att skriva

$$log(a + b) = log(a) + log(b)$$

eftersom addition inte har någon lägre operationsgrad (Weber, C., 2016).

4.2.5 Relation mellan aritmetiska och geometriska talföljder

Den femte tolkningen är direkt relaterad till logaritmens historia och beskriver logaritmen som ett samband mellan aritmetiska och geometriska talföljder. Denna förklaringsmodell har tidigare redovisats i avsnitt 3.1.4 som förklaring av John Napiers logaritm. Kärnan i modellen ligger i att rada upp två talföljder, en aritmetisk och en geometrisk bredvid varandra

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 9 & 27 & 81 & 243 & 729 & 2187 & 6561. \end{array}$$

Sedan kallar vi talen från den aritmetiska talföljden för logaritmen av de korresponderande talen i den geometriska följden

1	2	3	4	5	6	7	8
$log(3)$	$log(9)$	$log(27)$	$log(81)$	$log(243)$	$log(729)$	$log(2187)$	$log(6561)$

Vi kan multiplicera två tal från den geometriska talföljden genom logaritmlagar. Exempelvis $27 \cdot 243 \rightarrow log(27 \cdot 243) = log(27) + log(243) = 3 + 5 = 8$, och 8 korresponderar mot $log(6561)$. Alltså är $27 \cdot 243 = 6561$ (Pierce, 1977).

Det går också att skriva om talen i den geometriska följden så de är på formen a^n och se hur exponenterna är identiska med talen i den aritmetiska talföljden.

1	2	3	4	5	6	7	8
3	3^2	3^3	3^4	3^5	3^6	3^7	3^8

På det viset syns tydliga underliggande potensregler såsom $3^3 \cdot 3^5 = 3^{3+5} = 3^8$ vilket visar att istället för att utföra multiplikationen av 3^3 och 3^5 kan exponenterna adderas och därmed hittas svaret i talföljden.

En fördel med förklaringsmodellen är att den gör det relativt enkelt att prata om logaritmer med olika baser endast genom att ändra vilken kvot den geometriska talföljden har. Tankesättet är också av matematikhistoriskt värde, och matematikhistoria ska ingå i alla kurser enligt läroplanen för gymnasieskolans matematik (Skolverket, 2017).

4.3 Elevers svårigheter

Förutom de möjliga synsätten på logaritmer är det också relevant att studera vad elever verkar ha svårt för gällande begreppet. Genom detta blir det tydligare vilka undervisningsmetoder som skulle kunna vara mer eller mindre hjälpsamma för eleverna.

Aziz, Pramudiani och Purnomo (2017) menar att elever generellt sett har dålig konceptuell förståelse för logaritmer, och att detta leder till att de inte hanterar uppgifter om logaritmer korrekt. Vad gäller denna text diskuteras inte generella misstag som Movshovitz-Hadar et al. (Refererad till i Ganesan & Dindyal, 2014) beskriver som räknefel, inkorrekt avläsning av tabeller, misstag i utförande av given algoritm, avsaknad kontroll för framtaget svar eller andra slarvfel. Dock kan missuppfattningar om logaritmer förstås ligga som grund för dessa misstag.

Weber, K. (2002a) problematiserar att exponenter ofta förklaras för elever som upprepad multiplikation, att till exempel $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$. Detta tankesätt räcker inte till för de flesta resonemang som hör till exponenter och logaritmer. Uttryck som $3^{1/3}$ och 3^{-1} är till exempel inte möjliga att tolka utifrån det perspektivet eftersom ett tal inte kan multipliceras med sig själv en tredjedels eller minus en gång. Weber, K. (2002b) redogör för resultatet av sin studie vars syfte var att beskriva en teori för hur elever bygger förståelse för exponential- och logaritmfunktioner, där 15 frivilliga deltagare som var tre veckor in i en för-analyskurs på universitetet svarade på traditionella men även öppna frågor. Alla elever förstod exponentiering som aktion (att ett resultat erhålls efter utförd matematik) men de flesta såg det inte som process (att ett generellt resultat kan föreställas utan någon utförd matematik). Denna tolkning baserade han till exempel på den ställda frågan vad funktionen $f(x) = a^x$

betydde, det bara var två elever som kunde ge en beskrivning utan att ansätta ett värde för x. Trots detta påpekar han att det fortfarande borde vara den bästa utgångspunkten för att elever ska skapa sig förståelse för exponentialfunktioner.

Mulqueeny (2012) påpekar dessutom att när elever kan hantera exponentiella uttryck förutsätts de vara redo för exponentialfunktioner och konceptet invers funktion, det vill säga logaritmfunktioner. Lärares uppfattning är dock att eleverna inte ser sambandet mellan dessa funktioner som det förväntas. Kenney och Kastberg (2013) förklarar att en anledning till detta är att elever inte ser logaritmer som en invers funktion utan som en metod för att lösa exponentialekvationer. I en tidigare studie av Kenney intervjuades två elever där båda kunde lösa ekvationen $log_3(x+4)=2$ genom resonemanget $3^{VL}=3^{HL} \Leftrightarrow x+4=3^2 \Leftrightarrow x=5$. Denna lösningsmetod appliceras av båda även på $log_4(-16)=x$ där de fastnade genom att envetet försöka upphöja 4 med till exempel ett bråk eller negativt tal i tron om att det finns något som fungerar. De tänkte inte i banorna att logaritmfunktionernas definitionsmängd är exponentialfunktionernas värdemängd och att ekvationen då saknar lösning. I Berezovskis (2004) studie undersökte hon aktiviteter och verktyg som kunde användas av elever och hur det påverkade deras förståelse. 27 stycken mer engagerade årskurs-12 elever deltog i tester och diskussioner. En stor andel av eleverna hade inte insett att alla tal kan representeras som en logaritm av något annat tal. Även detta grundades gissningsvis i en oklar bild av logaritmfunktioners värde- och definitionsmängd. Ganesan och Dindyal (2014) ifrågasätter om exponenter ens ska komma före logaritmer i utbildningen eftersom det inte stämmer överens med hur det utvecklades historiskt. Ur ett svenskt perspektiv verkar det råda oklarheter i hur logaritmer bäst introduceras, till exempel har Alfredsson et. al. (2011) och Szabo et. al. (2012) valt att introducera exponentialfunktioner före logaritmer medan Gennow et. al. (2012) valt motsatsen.

Hurwitz (1999) beskriver en problematik kring synsättet att logaritmer är funktioner. Tidigare funktioner som elever har stött på innan logaritmfunktionen har mer konkreta uttryck som går att verbalisera. Den intuitiva naturen hos funktionen $f(x)=x^2$ gör det enkelt för elever att beskriva händelseförloppet som ”det som kommer ut är det som kommer in multiplicerat med sig självt”. Funktionen $f(x)=x+2$ gör det som elever har gjort sedan barnsben, att lägga till 2 till ett tal. Även notationen för logaritmfunktionen har en betydande skillnad. Uttrycket för funktionen $f(x)=log_a(x)$ är förståeligt först efter att eleven förstått uttrycket för den faktiska logaritmfunktionen $log_a(x)=y$ där $a^y=x$. Att beskriva logaritmfunktionen i vardagsord blir mer abstrakt. Med a^y som indata till logaritmfunktionen med bas a är erhållen utdata exponenten y. Kenney och Kastberg (2013) påpekar dock att elever kan vara förberedda för den annorlunda notationen om de i trigonometrin fått reflektera över sinus som funktionen $f(x)=sin(x)$.

Mulqueeny (2012) ställer frågan hur förvirrande termen *log* är i sig. En linjär funktion är en linje och en kvadratisk funktion kvadrerar det inmatade värdet, men inga av dessa ord finns med i notationen. Dessutom står *log* för en funktion samtidigt som det är en symbol som kan manipuleras med hjälp av lagar. Vidare utvecklar hon att elevers osäkerhet vad gäller logaritmuttryckets betydelse kan ha sin grund i en osäkerhet om vad bokstäverna i sig har för betydelse. Detta blir mer komplicerat när det börjar pratas om vanligt förekommande logaritmer där basen inte skrivs ut. Den nedsänkta parametern a finns fortfarande för logaritmen med basen e, men skrivs inte ut. Den logaritmen kallas för den naturliga och uttrycks $ln(x)$ istället för med det ekvivalenta uttrycket $log_e(x)$. För svenska elever i skolorna idag blir det extra förvirrande där olika hjälpmedel som används har olika notationer. Alfredsson et. al. (2011) beskriver i deras bok “*Matematik 5000 Kurs 2c Blå*

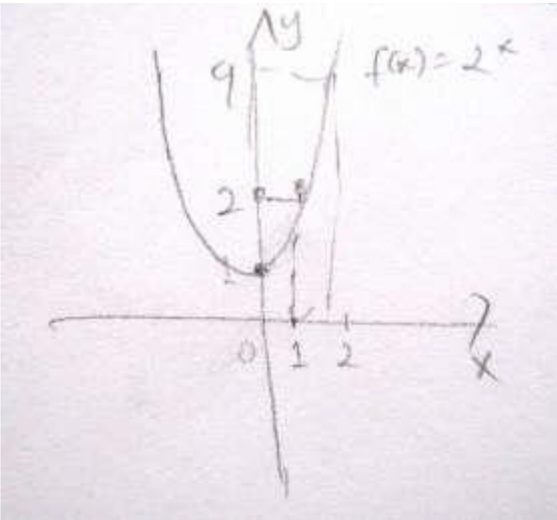
Lärobok” logaritmen med basen10 som $lg(x)$ och i den för kursen 3c (2012) naturliga logaritmen som $ln(x)$. På vanligaste grafritarna uttrycks tiologaritmen som $log(x)$ och naturliga som $ln(x)$. I geogebra skapas en logaritmfunktion med basen e om $log(x)$ matas in. Kenney och Kastberg (2013) konkretiserar detta genom att hänvisa till studien Kenney tidigare utfört där 35 av 59 elever svarade att $ln(x) = log(x)$. Ganesan och Dindyal (2014) menar att om logaritmer inte uttrycks i de förenklade formerna $ln(x)$ och $lg(x)$ utan bara med basen explicit uttryckt på formen $log_a(x)$ så borde förvirringen minska.

Kenney och Kastberg (2013) menar att eftersom elever har tidigare och mer erfarenhet med algebraiska funktioner och dess egenskaper blir det svårt för dem att förstå sig på egenskaperna hos exponential- och logaritmfunktioner då de skiljer sig åt betydligt. Dessutom försöker elever applicera mönster de tidigare stött på i matematiken på just sådana funktioner, ekvationer och uttryck. I en uppföljande intervju till Kennys studie förklarade en elev att $ln(x) - ln(x + 3)$ är lika med -3 med resonemanget att ln tar ut ln, som om de hade varit konstanter i ekvationen $ln(x) - ln(x + 3) = 0$. Weber, C. (2016) har sammanställt vad elever gör för misstag i en mängd olika studier och uttrycker också idén om att elever övergeneraliserar tidigare inlärda regler till att gälla för logaritmer. Liknande men olika sorters felskrivningar inkluderade att

$log(x + y) = log(x) + log(y),\ \ log(x) + log(y) = xy,\ \ log(x) - log(y) = \frac{log(x)}{log(y)},$
$log(xy) = x \cdot log(y),\ \ \frac{log(x)}{log(y)} = log(\frac{x}{y}),\ \ \frac{log(x)}{log(y)} = \frac{x}{y}.$

Det är resonabelt att tro att vissa av dessa felskrivningar även är influerade av en partiell kännedom om logaritmlagarna.

Aziz, Pramudiani och Purnomo (2017) stötte på en visuell övergeneralisering i sin studie om hur 14 indonesiska studenter i turkiska universitet arbetade med logaritmer. I uppgiften att rita upp funktionen $f(x) = 2^x$ plottade en elev upp $f(0)$, $f(1)$ och $f(2)$. Efter det fyllde hen i kurvan, men ritade även upp en speglad linje på andra sidan y-axeln som om det var en jämn funktion likt $f(x) = x^2$. Bild på elevens svar visas nedan i figur 5.



Figur 5. “Example of Over-Generalization” (Aziz et. al., 2017, s.36).

Vos och Espedal (2016) påstår specifikt att de felaktiga omskrivningarna:

$$log(x \cdot y) = log(x) \cdot log(y)$$
$$log(1) = 1$$
$$log(0) = 0$$

Görs på grund av likheten med de följande korrekta omskrivningarna:

$$\sqrt{x \cdot y} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$$
$$\sqrt{1} = 1$$
$$\sqrt{0} = 0$$

$$(x \cdot y)^2 = x^2 \cdot y^2$$
$$1^2 = 1$$
$$0^2 = 0$$

Ett sätt det övergeneraliserande tänkandet kan ställa till det i skapandet av den mentala begreppsbilden även inom logaritmbegreppet är till exempel om en elev bara hanterat logaritmer med en bas större än 1, det vill säga strängt växande logaritmfunktioner. Då kan eleven forma uppfattningen att $log_{0.5}(7) < log_{0.5}(11)$ (Berezovski, 2004). En konsekvens av detta kan bli att synen på logaritmer som verktyg för att lösa problem får ett mer begränsat användningsområde. Vidare beskriver Berezovski hur en elev i testet för hennes studie resonerade att 25^{625} är större än 26^{620} eftersom dess exponent är större. Båda talen är för stora för att räknas ut av miniräknare, men eleven insåg inte att storleksordningen på talen inte förändras om båda talen logaritmeras. Denna typ av övergeneraliserande tänkandet har även Kenney och Kastberg (2013) observerat. I Kenneys studie hade 57 av 59 elever uppfattningen att $log_3(2)$ inte var samma som $log_4(2)$ där 26 av dessa använde samma resonemang för att påstå att $log_a(1)$ skilde sig från $log_b(1)$. Ett liknande resonemang har kanske gjorts hos eleven som omvandlat $log_{25}(5)$ till $log_{5^2}(5) = 2$ i Ganesan och Dindyals (2014) studie om missuppfattningar om logaritmer.

Ganesan och Dindyal (2014) tolkar från sin studie i optimering av undervisningen om logaritmer där 89 elever i Singapore fick svara på olika frågor att de generellt sett inte hade någon klar bild av kopplingen mellan summan av logaritmuttryck och produkten av potensuttryck, vilket är grunden för att kunna förstå varför logaritmlagarna gäller. De lyfter även fram att det verkar oklart för elever att logaritmer inte kan ha negativ bas eller basen 1, vilket kommer från begränsningen av basen i en exponentialfunktion.

DePierro, Garafalo och Toomey (2008) belyser några vanliga svårigheter elever har när det kommer till att använda logaritmer i kemi. Ofta har de svårt att översätta matematiska uttryck till påståenden i meningar som inte innehåller orden *logaritm* eller *antilogaritm*. När de väl kan detta är det ofta genom att lära sig göra det utantill istället för att förlita sig på en djupare förståelse för logaritmer. När ett värde med en enhet logaritmeras inses det inte att det logaritmerade värdet är enhetslöst som DePierro et. al. (2008) påstår att det är. Att den naturliga logaritmen är vanligt förekommande i naturvetenskapen är också något av ett mysterium för eleverna. De saknar en klar uppfattning om $ln(x)$ som primitiv funktion till $\frac{1}{x}$. Dessutom inser inte eleverna att i arbetet med värdesiffror bör ett logaritmerat värde ha en extra värdesiffra för att bibehålla noggrannheten. För att förtydliga detta undersöker vi talet

133. $Log_{10}(133) \approx 2.1239$. Avrundar vi 2.1239 till tre värdesiffror ser vi att som exponent till 10 får vi $10^{2.12} \approx 131.8257$. Med tre värdesiffrors noggrannhet är vårt svar 132, trots att vi utgick ifrån 133. Med fyra värdesiffror är $10^{2.124} \approx 133.0045$. Utvecklar vi $log_{10}(133)$ till $log_{10}(1.33) + log_{10}(100) \approx 0.1239 + 2 = 2.1239$ kan det kännas intuitivt att uttrycka ett logaritmerat värde med en extra värdesiffra utan att varken förlora information eller påstå överdriven noggrannhet.

4.4 Undervisningsupplägg

Det finns ingen ultimat metod för att introducera logaritmer för alla elever eftersom inlärning är individuell, något som passar en elev passar inte nödvändigtvis en annan. Även grupp-dynamiken spelar sin roll, vad som är bäst för en klass behöver inte vara bäst för en annan. Weber, K. (2002b) betonar faktumet att forskare som utbildare har uppfattningen att det behövs bättre sätt att undervisa om logaritmer. Med detta i åtanke redovisas här ett antal möjliga tillvägagångssätt för att introducera logaritmer för en ny klass, alternativt för att förklara begreppet på ett nytt sätt för elever som inte förstod via den tidigare introduktionen.

4.4.1 Upprepad division

Tidigare i avsnitt 4.2 redovisades ett antal sätt att tolka logaritmbegreppet. Ett av dessa sätt var genom upprepad division. Följande undervisningsexempel använder sig av den ingången i hopp om att göra logaritmer mer greppbart. Den centrala frågan är "hur många divisioner behövs för att nå svaret 1?", detta beror på vilket tal vi delar och vad vi delar med. Om till exempel 64 delas med 2 flera gånger ger det $64 \div 2 \div 2 \div 2 \div 2 \div 2 \div 2 = 1$, alltså sex gånger, vilket innebär att $log_2(64) = 6$. Genom detta synsätt kan logaritmen introduceras som $log_a(p)$ där notationen betyder "hur många gånger måste p divideras med a för att ge 1?" (Weber, C., 2016). Vos och Espedal (2016) föreslår en metod med detta som utgångspunkt, metoden är använd i undervisning av deras klasser men det framgår inte i vilken utsträckning de har testat den. Deras förslag inkluderar endast logaritmen med bas 10, därför kommer följande exempel av undervisningsmetod endast beröra denna logaritmbas.

Undervisningen inleds med en förklaring av hur logaritmen av ett tal kan tolkas med hjälp av upprepad division, detta exemplifieras genom att använda till exempel talet 1000 som divideras med 10 (basen av logaritmen) tre gånger för att ge 1, alltså är $lg(1000) = 3$. När eleverna förstår konceptet kan de själva testa med exempelvis $lg(100000)$ eller $lg(10^n)$, metoden har en relativt låg tröskel då eleverna endast behöver utföra enkla divisioner. Sedan kan eleverna bekanta sig med enkla logaritmekvationer, det går exempelvis att lösa ekvationer av formen $lg(x) = q$ genom frågan "vilket tal x behöver q divisioner av 10 för att ge 1?". Även ekvationer som liknar $lg(4x + 2) = 2$ går att lösa då eleverna vet att $lg(100) = 2$ och därmed måste $(4x + 2) = 100$, alltså är $x = 24.5$. Det blir snabbt uppenbart för eleverna att inte alla tal kan ge 1 vid upprepad division av 10 och då kommer frågan, vad kan sägas om logaritmen av de tal som inte når 1 vid upprepad division? Om till exempel $lg(6000)$ ska evalueras används upprepad division av 10 ännu en gång vilket då resulterar i att division tre gånger ger 6 och fyra gånger ger 0.6, vilket är mindre än 1. Rimligtvis borde då $3 < lg(6000) < 4$, alltså kan eleverna göra en väldigt grov uppskattning av vad logaritmen ligger mellan. Logaritmlagen $log(pq) = log(p) + log(q)$ kan nås genom att studera sambandet mellan två logaritmer, till exempel $lg(6000)$ och $lg(600\,000)$.

Eleverna kan resonera fram att $lg(600\,000)$ borde vara exakt 2 större än $lg(6000)$ då $lg(600\,000) = lg(6000 \cdot 10^2)$ alltså behövs två extra divisioner med 10. På grund av detta måste $lg(6000) + 2 = lg(600\,000)$ vilket visar ett specialfall av logaritmlagen i fråga. Denna undervisningsmetod ger eleverna möjlighet att först lära sig logaritmen via en enkel process (upprepad division) vilket sedan kan byggas vidare på. Enligt författarnas erfarenheter ger detta bättre resultat än introduktion via den traditionella Euler definitionen där logaritmen introduceras som invers till exponent (Vos & Espendal, 2016).

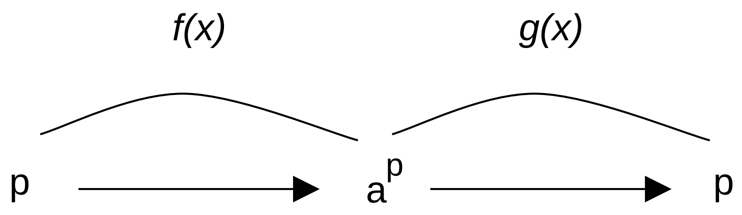
4.4.2 Notationsbyte

Hammack och Lyons (1995) föreslår en ändring i notation, istället för log_a använder de $a^{\square}$ vilket läses som "a-ruta", detta är en metod författarna har använt i sin undervisning som ett alternativ till Eulers definition där logaritmen ses som invers till exponent. Undervisningen börjar med exempel istället för definitioner. Ett sådant exempel kan vara $3^{\square}(81) = x$ vilket läses som "3-ruta av 81 är lika med x" alltså vilket tal ska vara i rutan för att 3 upphöjt till något ska vara 81, eleverna får ge ett svar som förhoppningsvis är 4. När eleverna fått förståelse för konceptet kan mer komplicerade exempel gås igenom, exempelvis $3^{\square}(\frac{1}{3}) = x$ där eleverna behöver tänka lite extra för att nå slutsatsen $x = -1$. Genom fler exempel såsom $3^{\square}(\sqrt{3}) = \frac{1}{2}$, $2^{\square}\left(\frac{1}{8}\right) = -3$, $27^{\square}(3) = \frac{1}{3}$ får eleverna en bättre bild av begreppet. Det är såklart viktigt att läraren motiverar svaren för alla exempel. Det kan visas att $3^{\square}(-3) = x$ inte finns då potensen av 3 aldrig är lika med ett negativt tal oavsett vilken (reell) exponent som används. Det kan även visas genom att studera grafen $f(x) = 3^x$ och grafen till funktionen $g(x) = 3^{\square}(x)$ (vilket är identiskt med logaritmen med bas 3). Efter denna introduktion konstateras att $a^{\square}(x)$ brukar skrivas som $log_a(x)$ och då är eleverna redo att använda den traditionella notationen.

Introduktionen med "a-ruta" kan ses som en brygga till logaritm-notationen för att göra begreppet mer tillgängligt för elever. "A-ruta" visar tydligt vad funktionen åstadkommer medan $log_a(x)$ kan bli förvirrande. Exempelvis är $a^{\square}(a^x) = x$ tydligare än $log_a(a^x) = x$ för en elev som aldrig stött på logaritmfunktionen innan (Hammack & Lyons, 1995).

Hurwitz (1999) beskriver en liknande metod för att introducera logaritmen vilken han använt i sin undervisning. Han menar att om logaritmen introduceras som $log_b(x) = a \Leftrightarrow b^a = x$ är det svårare för eleven att använda sina gamla kunskaper om funktioner. Med notationen $f(x)$ visar vi eleven att hen kan substituera in ett valt tal x i funktionen, exempelvis om $f(x) = x^2$ och vi är ute efter då $x = 3$ kan eleven enkelt via $f(3) = 3^2$ lösa uppgiften. Om logaritmens introduceras med $f(x)$ notation kan det bli enklare för eleverna eftersom de redan är vana vid det tankesättet.

Logaritmfunktionen kan introduceras på detta vis genom att exempelvis studera exponentialfunktionen $f(x) = 3^x$ och konstatera att exponentialfunktionen måste ha en invers då den är injektiv. För att hitta en invers till funktionen säger vi att en funktion $f(x)$ lägger på en exponent och således måste det finnas en invers funktion $g(x)$ som plockar ut exponenten. (Hurwitz, 1999). Detta illustreras nedan i figur 6.



Figur 6. Visualisering av en funktion f(x) som lägger på en exponent samt g(x) som plockar ut en exponent.

Det kan vara fördelaktigt att låta eleverna testa funktionen $g(x)$ med till exempel $g(4^2) = 2$ eller $g(7^9) = 9$. Efter detta kan tal som inte är skrivna på potensform evalueras, exempelvis $g(16) = x$. Då märker eleverna att funktionen $g(x)$ kan ge flera svar exempelvis $g(4^2) = 2$ eller $g(256^{1/2}) = \frac{1}{2}$. Men om $g(x)$ är en funktion kan inte flera värden ur dess definitionsmängd korrespondera mot samma värde i dess värdemängd, därför behöver notationen för bas introduceras till funktionen för att inte göra den tvetydig. Detta kan göras via notationen $g_b(x) = y$ vilket då enkelt kan skrivas om till $log_b(x) = y$, via detta kan eleverna stegvis ta sig fram till logaritmfunktionen och kanske på det sättet lära sig lättare (Hurwitz, 1999).

4.4.3 Introduktion via potens

Ett annat sätt att introducera logaritmer förespråkas av Gamble (2012), metoden är testad av honom för elever i amerikanska high school och college. Han tycker att elever har en tendens att memorera lagarna och reglerna utan att lära sig själva innebörden av logaritmbegreppet. Därför introducerar han logaritmen genom att först låta elever skissa upp grafer för exponentialfunktioner som exempelvis $y = 2^x$ eller $y = 3^x$, efter det får de kontrollera sina skisser via digitala hjälpmedel för att se om de stämmer. Via graferna kan eleverna undersöka samband mellan exponentialfunktionerna som till exempel att $a^0 = 1$, vilket är en av potenslagarna. När eleverna studerar graferna introduceras även några andra potenslagar såsom $a^p a^q = a^{p+q}$, $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$ och $(a^p)^q = a^{pq}$ enkelt eftersom eleverna har möjlighet att visualisera dem via exempelfunktionerna.

Efter detta låter Gamble (2012) eleverna utforska 10^x och undersöker hur ett närmevärde för x kan hittas om till exempel $10^x = 48$ eller $10^x = 643$ genom att pröva sig fram med olika x. Detta görs genom insikten att för alla tal mellan 10 och 100 måste x vara mellan 1 och 2, och för alla tal mellan 100 och 1000 måste x vara mellan 2 och 3. Sedan får eleverna testa sig fram tills de hittar ett relativt bra närmevärde till x för att nå talen i fråga. För exempeltalen 48 och 643 är $x \approx 1.681241$ respektive $x \approx 2.808211$. Efter detta kan läraren (via potenslagarna som förklarades innan) konstatera att multiplikationen av talen kan nås genom $48 \cdot 643 \approx 10^{1.681241} \cdot 10^{2.808211} = 10^{1.681241+2.808211} = 10^{4.489452} \approx 30863.99$. Uppskattningen ligger väldigt nära det exakta $48 \cdot 643 = 30864$. Efter denna demonstration får eleverna testa att dividera 643 och 48 genom potenslagar. Därefter kan konceptet enkelt överföras till logaritmer genom att testa $lg(48)$ och $lg(643)$. Då kan eleverna se sambandet $10^a = x \Leftrightarrow lg(x) = a$ vilket är den moderna logaritmdefinitionen, det som återstår är genomgång av logaritmlagar och betydelsen av olika baser.

4.4.4 Undervisning med historia i fokus

Matematikhistoria är av stor vikt när det gäller att lära sig matematik då det bland annat underlättar för elever när det gäller att förstå matematiska bevis, metoder och koncept eftersom de får en bättre uppfattning av hur begreppen kom till. Matematikens historia ger en nyanserad bild av hur begrepp utvecklades. Det är tydligt att det inte alltid är en enda röd tråd som leder till begreppen vi använder idag utan att det är många människors hårda arbete som successivt bygger på de matematiska koncepten tills användbara definitioner nås. Denna nyanserade bild kan bidra till att elever som annars inte skulle visa stort intresse för matematik får en mer positiv attityd till ämnet (Panagiotou, 2010). Alltså vore det fördelaktigt att introducera logaritmen genom ett historiskt perspektiv, men det vore orimligt tidsmässigt att gå igenom alla historiska stadier. Ett exempel på hur en introduktion av logaritmen via dess historia skulle kunna läggas upp redovisas därför nedan, exemplet är baserat på Toumasis artikel från 1993 och även tidigare information från kapitlet om logaritmens historia.

Förutsatt att eleverna är bekanta med aritmetiska och geometriska talföljder kan logaritmens introduceras via dess historia genom att först undersöka förhållandet mellan aritmetiska och geometriska talföljder, detta kan göras genom att till exempel visa eleverna dessa talföljder

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 & 64 & 128 & 256 & 512 & 1024 \end{array}$$

Efter detta ombeds eleverna att multiplicera två tal från den geometriska följden. Efter flera exempel kan sambandet mellan talföljderna poängteras, nämligen att det räcker att addera de korresponderande talen från den aritmetiska talföljden och att svaret då är det korresponderande talet i den geometriska. Exempelvis om vi vill utföra $8 \cdot 16$, då adderas de korresponderande talen $3 + 4 = 7$ och sedan syns det att 7 korresponderar mot 128, alltså är $8 \cdot 16 = 128$. Genom omskrivning av den geometriska följden till formen 2^n ser eleverna hur den aritmetiska följden är identisk med exponenterna och därmed är den underliggande potenslagen $a^x a^y = a^{x+y}$ enkel att se. Det går också att nå andra potenslagar via följderna, exempelvis division av tal från den geometriska följden vilket då leder till $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$. Ännu en möjlighet är att evaluera den n:te roten av ett tal från den geometriska talföljden genom att dividera det korresponderande talet från den aritmetiska talföljden med n. Exempelvis $\sqrt[5]{1024}$ där 1024 korresponderar mot 10, alltså delas 10 med 5 vilket är 2, och 2 korresponderar mot 4 alltså är $\sqrt[5]{1024} = 4$. Eleverna skulle sedan kunna skriva ner egna aritmetiska och geometriska talföljder för att kontrollera om sambandet fungerar för andra följder (Toumasis, 1993). Poängen här är att relationen mellan talföljderna förenklar svårare uträkningar till simpla subtraktioner och additioner, vilket också var kärnan till begreppet historiskt sett.

Nästa steg skulle då kunna vara att generalisera talföljderna till

$$\begin{array}{cccccccc} a & 2a & 3a & 4a & 5a & 6a & \dots & na \\ b & b^2 & b^3 & b^4 & b^5 & b^6 & \dots & b^n \end{array}$$

Via detta kan en funktion $f(b^n) = na$ definieras eftersom termerna korresponderar mot varandra. Via detta nås likheterna

$$f(p) + f(q) = f(pq)$$
$$f(p) - f(q) = f(\frac{p}{q})$$
$$f(p^t) = tf(p)$$
$$f(\sqrt[t]{p}) = \frac{1}{t}f(p)$$
där p och q är tal från talföljden b^n.

Vid denna punkt är det lägligt att kommentera om John Napier som använde detta samband för att utveckla logaritmen, och att han kallade termerna i den aritmetiska talföljden för logaritmen av de korresponderande talen från den geometriska talföljden. Då är en naturlig fortsättning att logaritm-notationen $log(x)$ introduceras. Som exempel kan vi säga att $log(2) = 1$ eller $log(16) = 4$ vilket då relateras till talföljderna från det första exemplet. Genom att byta ut den geometriska talföljden 2^n mot till exempel 3^n där $log(3) = 1$ och $log(81) = 4$ noteras att $log(2) = log(3)$ och $log(81) = log(16)$. Via detta kan vi konstatera att det krävs något som urskiljer de olika geometriska talföljderna för att deras logaritmer inte ska bli identiska med varandra, därmed introduceras bas till logaritmbegreppet och då är till exempel $log_2(16) = 4$ samt $log_3(81) = 4$. Med denna grund kan logaritmlagarna gås igenom (Toumasis, 1993). När eleverna då lärt sig logaritmlagarna passar det bra att återgå till en mer traditionell beskrivning där logaritmen förklaras som invers funktion till exponentfunktionen via sambandet $a^y = x \Leftrightarrow log_a(x) = y$.

4.5 Manuell uträkning av logaritm (för den nyfikne eleven)

Weber, C. (2016) tar upp att elever kan uppfatta logaritmer som en knapp på miniräknaren, som en slags mattemaskin eller till och med som ett π-liknande tal. Med det i åtanke kan det vara intressant att undersöka hur en logaritm kan beräknas manuellt. En varierad mängd uppgifter i matematikböckerna *Matematik 5000 Kurs 2c Blå Lärobok* (Alfredsson et. al., 2011), *Exponent 2c* (Gennow et. al., 2012) och *Matematik Origo 2c* (Szabo et. al., 2012) handlar om att räkna ut logaritmer utan miniräknare, men då är det logaritmer där värdet som logaritmeras enkelt kan skrivas om som en potens vars bas matchar logaritmens.

Istället för att använda Taylorutvecklingen för $ln(x)$ för att manuellt beräkna värdet av en logaritm beskriver Weber, C. (2016) följande mer lättförståeliga metod. Den bygger på synsättet att logaritmer representerar antalet (inte nödvändigtvis ett heltal) faktorer av basen som får plats i ett tal, att logaritmer är upprepad division på liknande sätt som division är upprepad subtraktion. Beskriven genom exemplet att räkna ut $log_7(467.34)$ fungerar den så här: Dividera 467.34 med 7 gång på gång tills kvoten är under 7. Det går tre gånger, ty $467.34 \div 7 \div 7 \div 7 = 1.362507$, vilket ger oss entalssiffran 3 för logaritmen. Upphöj sedan kvoten 1.362507 med 10, vilket i detta exempel resulterar i 22.048972. Dividera detta med 7 gång på gång tills kvoten är under 7 igen. Tiondelssiffran för logaritmen är antalet gånger det gick att utföra divisionen det vill säga 1 ty $\frac{22.048972}{7} = 3.149853$. För varje extra önskad decimals noggrannhet på logaritmen upprepas denna cykel. Varför detta fungerar kan vi beskriva med följande matematiska resonemang:

$$log_7(467.34) = log_7(7^3 \cdot 1.362507) = 3 + \frac{10}{10}log_7(1.362507) =$$

$$= 3 + \frac{1}{10} log_7(1.362507^{10}) = 3 + \frac{1}{10} log_7(22.048972) = 3 + \frac{1}{10} log_7(7 \cdot 3.149853) =$$
$$= 3 + \frac{1}{10} log_7(7) + \frac{1}{10} \cdot \frac{10}{10} log_7(3.149853) = 3 + 0.1 \cdot 1 + \frac{1}{100} log_7(3.149853^{10}) \ldots$$

Vi upphöjer till 10 eftersom det decimala talsystemet har basen 10. Ett logaritmuttryck i utvecklingen kommer aldrig bli så stort att det influerar siffran i positionen innan eftersom det hade krävt att den kvarblivande kvoten varit 7, ty $log_7(7^{10}) = 10$. Men kvoten kommer alltid vara $1 \leq$ och < 7, alltså kommer logaritmuttrycken vara $0 \leq$ och < 10 (Weber, C., 2016).

5. Diskussion och slutsats

För att ge vår syn på och problematisera arbetet kommer vi i detta kapitel diskutera vissa delar av litteraturstudien där vi har synpunkter värda att lyftas. De tre frågeställningarna; ‘Hur utvecklades logaritmbegreppet genom matematikens historia?’, ‘var ligger svårigheten i logaritmbegreppet?’ och ‘Finns det bättre sätt att introducera logaritmer än via Eulers definition?’ och kommer också belysas.

5.1 Metod

Något som är värt att poängtera om metoden är att bristen på svensk litteratur skulle kunna innebära att resultatet inte har en tillräckligt tillfredsställande koppling till svensk skola. Dock ger det ett lite mer internationellt perspektiv och genom studerande av svenska läroböcker har vi sett att den informationen från didaktiklitteraturen stämmer relativt bra överens med hur det ser ut i svenska skolan. En annan del som är värd att påpeka är att vi genom litteraturen relaterad till historiedelens resultat ibland inte kunde hitta originalkällor eller att originalkällorna var skrivna på andra språk än svenska och engelska. Alltså var det inte möjligt för oss att ta del av vissa källor.

5.2 Historia

En av våra frågeställningar är ‘hur utvecklades logaritmbegreppet genom matematikens historia?’ vilken besvarades i kapitel 3 genom en redogörelse för logaritmens historia. Det finns ett antal delar av detta som är intressanta att diskutera vidare, vilket görs nedan.

Många av de texter vi studerat förklarar de historiska matematikernas metoder med mer modern matematik för att det ska vara lättförståeligt. Detta medför en viss oklarhet kring de faktiska metoder matematikerna använde. Av de artiklar vi läst har vissa varit mer tydliga än andra om detta och därför har vi gjort vårt bästa för att ge en så rättvis historisk bild som möjligt. Angående prosthaphaeresis var en del oklar, enligt Ayoub (1993) fanns inte notationen för cosinus och tangens under tiden Napier tillverkade sin logaritm. Men prosthaphaeresis formlerna som redovisats i samtliga texter och som fanns innan Napier utvecklade logaritmen innehåller cosinus, kanske skrev de om $cos(x) = sin(x + \frac{\pi}{2})$ och därmed använde formlerna på det viset, eller så hade de helt enkelt ett annat sätt att skriva cosinus. Ingen av de andra artiklarna vi studerat har belyst detta men det ändrar såklart inte innebörden av prosthaphaeresis och att det verkligen använts som metod.

En annan intressant fråga är om logaritmbegreppet hade utvecklats annorlunda om Bürgi var den som publicerade sina upptäckter först. Napiers metod med perspektivet att två punkter rörde sig på linjer var tämligen komplicerad och tog längre tid att förstå än Bürgis tillvägagångssätt. Kanske hade andra aktörer blivit involverade och utvecklat begreppet på ett annorlunda sätt om Bürgis logaritm blev känd före Napier. Dock verkar det som att begreppet naturligt utvecklades till vad det är. Efter Napier blev det mycket mer greppbart via Briggs logaritm med bas 10 och det fortsatte förbättras tills Euler gav den nuvarande definitionen, som bland annat inte är lika tvetydig när det gäller negativa tal. Vi tror att även om Bürgi skulle publicerat sin logaritm före Napier hade begreppet ändå utvecklats till den nuvarande definitionen där den relaterar direkt till exponentbegreppet.

Vi funderade även på om användandet av räknestickan förr i tiden ledde till bättre förståelse för logaritmer. Motsatsen torde vara omöjlig då de vid varje utförd multiplikation beskådade en visuell representation av det mest centrala med logaritmerna, nämligen sambandet $log(xy) = log(x) + log(y)$. Frågan borde kanske istället vara hur mycket bättre förståelse användandet ledde till. Idag kan till exempel elever se logaritmer som tal likt π. Men även om $log_2(5)$ liknar π i aspekten att det är ett irrationellt tal så utgör logaritmbegreppet mycket mer än så.

Angående logaritmens historia undrar vi hur dess framtid ser ut. Användningen av ett begrepp som är skapat för att underlätta beräkningar via hjälpmedel (till exempel tabeller, räknestickor och miniräknare) borde förändras med tiden, eftersom hjälpmedlen utvecklas till att bli bättre och bättre. De mest avancerade räknestickorna, de största tabellerna för logaritmvärden och de mekaniska datorerna var alla fantastiska men används inte längre. Om logaritmer är speciellt svårt att greppa borde redskapen utvecklas så denna svårighet undviks, det kanske räcker att hantera exponentialekvationer utan logaritmbegreppet. Redan nu kan vi se detta i till exempel *WolframAlpha*, om vi skriver in $5^x = 12$ ger den ge oss lösningen för x utan att vi behöver veta vad logaritm är. Idag har vi knappen $log(x)$ på miniräknaren, någon dag i framtiden beordrar vi antagligen AI:n att visa en projektion för utvecklingen av en bakteriekultur baserat på en mängd datapunkter. Förståelse för logaritmer blir specialkunskap och gemene man förväntas bara förstå sig på exponentialfunktioner. Att skolan med tiden har lagt mer fokus på digital kompetens (användande av hjälpmedel) indikerar kanske på denna framtid.

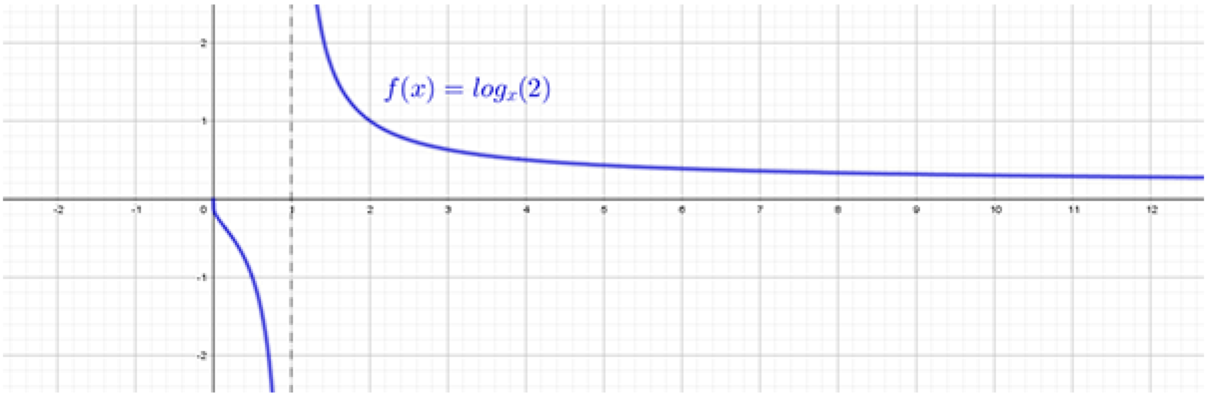
5.3 Svårigheter

Med frågeställningen 'var ligger svårigheten i logaritm-begreppet?' menar vi vad de största hindren generellt är för elever att bilda sig förståelse för logaritmer. Missuppfattningar som hindrar möjligheten för praktiskt användande och ytterligare förståelse blir då mer centrala än sådana av en mer abstrakt natur. Dessa hinder tror vi att undervisningen borde fokusera på att överkomma.

Att utveckla förståelsen från heltalsbaser och -exponenter till reella baser och exponenter är enligt vår uppfattning ett stort hinder för eleverna, detta inkluderar att visualisera kontinuerliga exponential- och logaritmfunktioner. De flesta elever har inga större svårigheter med att räkna ut enkla logaritmer likt $log_3(27)$ eftersom $27 = 3^3$. Men problem uppstår när till exempel $log_3(25)$ ska beräknas. I avsnitt 4.5 beskrev vi hur godtyckliga logaritmer kan räknas ut utan att använda någon logaritmfunktion. Det lägger dock knappast grunden till en bra förklaringsmodell för en elev som inte ännu sett hur matematiken hänger ihop, utan istället något för den som redan byggt upp en gedigen förståelse att fördjupa sig i. Istället för att försöka sig på en potens med reell bas och/eller exponent efter arbetet med endast heltalskomponenter är det kanske bättre att gå över till en rationell bas eller exponent.

Ett annat stort hinder tror vi är övergeneraliseringar. Mycket av undervisningen i matematik handlar om att generalisera specifika lärdomar, vilket kan leda till att elever underskattar matematikens komplexitet. Det är inte bara vad gäller logaritmer som övergeneralisering är ett problem, men den annorlunda strukturen av logaritmlagarna gör att problemet förstärks i denna delen av matematiken. Antingen har de lagarna framför sig och kan ha svårt att hitta ett mönster som liknar det som de redan lärt sig, eller så har de inte dem framför sig och kan dra paralleller som inte existerar. Det värsta är kanske om eleven tänker rätt, men på grund av övergeneralisering inte lyckas formulera tanken matematiskt korrekt Då kommer facit att säga ”du har fel” och eleven kan då tolka att hen tänkte fel, vilket förstås kan skapa seriösa problem i elevens lärandeprocess.

Ytterligare ett av de stora hindren anser vi vara notationen och den tvetydiga framställningen av logaritmer som tal och som funktion, vilket gör det svårt för eleverna att relatera logaritmfunktionen till de tidigare funktionerna som stötts på. Eleverna stöter oftare på funktioner uttryckta $f(x)$ än tal uttryckta $f(a)$. Raka motsatsen gäller för logaritmer där de stöter på tal uttryckta $log_a(b)$ oftare än funktioner uttryckta $log_a(x)$. I synen på logaritm som funktion, ska eleverna ersätta $f(x)$ eller x^2 med $log_a(x)$ i vanliga funktions-beskrivningen $f(x) = x^2$ för att förena logaritmfunktionen med deras tidigare uppfattning av funktioner? Om funktionen skrivs i ord likt $f(x) = \textit{multiplicera talet x med sig själv}$ kan det kännas intuitivt att ersätta vänsterledet och då få $log_2(x) = \textit{exponenten då x skrivs som potens med basen}$ 2. Men det går att ersätta högerledet och få $f(x) = log_2(x)$. En aspekt av logaritmen som vi aldrig tidigare reflekterat över är funktionen $f(x) = log_x(a)$, illustrerad i figur 7. Av någon anledning har vi inte funnit den intressant eller ens tänkt på den. Trots undersökande av logaritmbegreppet genom arbetet fick vi ingen mental bild över hur en sådan funktion skulle kunna se ut. Ur ett logaritmfunktionsperspektiv är det kanske ett sätt för oss att uppleva de svårigheter elever har med att visualisera traditionella logaritmfunktioner.



Figur 7. Funktionen $f(x) = log_x(2)$ med vertikal asymptot i $x = 1$
och horisontell asymptot i $y = 0$ då x går från 1 till ∞.

En intressant fråga är om det hade resulterat i djupare förståelse hos eleverna om inte logaritmlagarna fanns med i formelbladen för de nationella proven i matematik, eller i alla fall inte i de senare matematikkurserna. Att elever lär sig använda lagarna bättre när de finns med i formelbladen är kanske en självklarhet eftersom de inte behöver minnas lagarna korrekt för att använda dem. Övergeneraliseringarna torde även minska med lagarna till hands. Det går att spekulera om förståelse för logaritmer korrelerar med förmågan att kunna räkna med deras lagar, men vår bedömning av våra personliga erfarenheter är att vi inte byggde upp någon förståelse den vägen. Om det hade gynnat förståelsen att behöva plugga in lagarna är för oss också oklart, det är lätt att rekonstruera alla lagar genom att bara minnas att $lg(10) = 1$, $lg(100) = 2$ och $lg(1000) = 3$ för att sedan testa sig fram vad som fungerar.

Om elevers förståelse för en logaritms bas är ofullständig drabbar det oftast inte elevens förmåga att lösa uppgifter (förutom sådana som explicit är frågor angående logaritmers baser), och är inte nödvändigtvis ett för stort hinder för förståelsen av det inversa förhållandet till exponentialfunktionen. Om basen inte är mer än ett sätt att ange skalan för ett specifikt förhållande, hur viktig kan den vara? Till exempel gäller $log_4(9) = log_2(3)$, något som inte är uppenbart för oss även efter en fördjupning inom området på två månader. Problematiserar vi basen för exponentialfunktionen på samma vis kan vi ställa frågan; vad har funktionen $f(x) = e^{2x}$ för bas? Är det viktigt nog för logaritmförståelsen att inse hur basen där är ungefär 7.39? Detta är ingen meningslös insikt, frågan är om den är mer viktig än någon annan.

Det är förståeligt att elever tror att negativa tal kan logaritmeras. Undersöker vi Eulers identitet $e^{i\pi} = -1$ och logaritmerar båda leden med naturliga logaritmen får vi $i\pi = ln(-1)$. Alla tre matematik 2c-böcker vi undersökt tar upp komplexa tal innan logaritmer men vi tror inte att detta är den främsta förklaringen till deras uppfattning om logaritmering av negativa tal. Eftersom ett av sätten elever får logaritmer förklarat för sig är att logaritmens värde är exponenten hos en potens med samma bas som logaritmen. Med det resonemanget är det logiskt att $log_{-2}(-8) = 3$ eftersom $(-2)^3 = -8$. Detta tankesätt förstärks om det till en början endast eller främst är heltalsexponenter som hanteras i arbetet med logaritmer. Om kopplingen mellan aritmetiska och geometriska talföljder görs med en negativ kvot blir det, likt exemplet ovan, inte problematiskt att "logaritmera" negativa tal. Huruvida det är problematiskt eller ej om elever har denna missuppfattning kanske informeras av faktumet att Leibniz och Bernoulli var oense om hur logaritmen av negativa tal borde definierats.

En svårighet som vi tidigare tänkt på som inte uppkommit i litteraturstudien är oklarheten kring om det är exponenten av värdet eller logaritmens exponent som flyttas ner. Det vill säga om $log(x^2) = 2 \cdot log(x)$ eller $(log(x))^2 = 2 \cdot log(x)$ gäller. Något som förvirrar är att vid derivering uttrycks det på liknande vis att en exponent tas ner. Detta har stundtals varit förvirrande för oss båda under våra egna utbildningar. Vi tänker att det också borde vara det för andra personer, inte minst gymnasieelever.

Vi håller inte med om påståendet att när ett värde kopplat till en enhet logaritmeras så försvinner enheten. I dimensionsanalys hanteras enheter matematiskt på samma sätt som tal. Dessutom kan meter bytas ut till 100 centimeter. Logaritmerar du 10 meter eller 1000 centimeter torde du få samma svar eftersom de är ekvivalenta uttryck. Mot argumentet att det bara är SI-enheter som försvinner kontrar vi med att en enhet i sig har ett värde, ett avstånd är ett avstånd som kan beskrivas med ett tal. Den meningen försvinner inte bara för att vi har definierat en meter som en viss längd. Ponera att vi vill med logaritmers hjälp räkna ut arean av en rektangulär yta på $0.6m \cdot 15m$;

$$ln(0.6m) + ln(15m) = ln(x) \Leftrightarrow ln(0.6) + ln(m) + ln(15) + ln(m) = ln(x) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -0.510826 + 2.708050 + 2 \cdot ln(m) = ln(x) \Leftrightarrow 2.197224 + ln(m^2) = ln(x) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2.197224 = ln(x) - ln(m^2) \Leftrightarrow 2.197224 = ln(\tfrac{x}{m^2}) \Leftrightarrow 9 = \tfrac{x}{m^2} \Leftrightarrow x = 9m^2.$$

Om logaritmering hade tagit bort enheten, lägger antilogaritmeringen då tillbaka den? Hur vet den vad för enhet som ska uppstå? I exemplet ovan togs m bort, men vi behöver få tillbaka m^2 för att det ska stämma. Dock anser vi detta vara en icke-fråga, ett mer pragmatiskt synsätt är att logaritmer inte hanterar enheter.

En av svårigheterna som framkom genom resultatet behandlade noggrannheten hos logaritmerade värden. Vi tror inte det är värt att tackla detta på gymnasiet. Det kan diskuteras om vi ens håller med det matematiska resonemanget.

5.4 Synsätt

I avsnitt 4.2 beskrev vi fem olika sätt att se på logaritmer. Det finns enligt oss vissa nämnvärda aspekter angående synsätten, därför diskuteras dessa synsätt här och vi sätter ord på våra tankar om dem.

Logaritmens definition som invers till exponent där $log_a(y) = x \Leftrightarrow a^x = y$ (Eulers definition) ger en bra helhetsbild av begreppet logaritm så länge eleven förstår tankesättet. Dock kan det vara för abstrakt och svårt att förstå för elever om det är deras första introduktion till logaritmbegreppet.

Synen på logaritm som multiplikativ mätning (tanken att logaritmen av ett tal a med bas b är lika med hur många gånger b behöver multipliceras med sig själv för att producera a) anser vi kunna vara hjälpsamt vid förklaring av logaritmer då den relaterar till fundamentala kunskaper om matematik. Multiplikation är upprepad addition och en exponent är upprepad multiplikation. Men addition är invers operation till subtraktion och division invers operation till multiplikation. Så om division kan förstås som upprepad subtraktion borde det underlätta att förstå logaritmering som upprepad division. Görs detta har logaritmer beskrivits utifrån de fyra räknesätten vilket kan vara mer begripligt än om den introduceras som inversen till exponentialfunktionen.

Synen på logaritm som beräkning av antalet siffror i ett tal ger inte en särskilt nyanserad bild av begreppet, inte minst eftersom den bara inkorporerar logaritmen av bas 10 på grund av att vi använder oss av det decimala talsystemet. Det går att visualisera logaritmen av andra baser på liknande vis genom att ändra talbasen som eleverna räknar med, men även om det hade hjälpt elever träna mer på andra talbaser skulle det ta bort fokus från logaritmbegreppet. Vidare är användningsområdet av detta synsätt väldigt begränsad, det mest användbara verkar vara att möjligheten att jämföra tals storlek. Synsättet behöver en bredare bild av begreppet för att vara till nytta vid till exempel lösning av exponentialekvationer.

Synen på logaritm som ett sätt att minska operationsgraden av ett uttryck belyser en intressant aspekt av logaritmen. Att uttryck vi vill beräkna blir av en mindre operationsgrad kommer åt kärnan i begreppets historia, just att det användes för att omvandla multiplikation och division till enklare addition och subtraktion. Men även detta synsätt saknar kopplingen mellan logaritm och exponentialekvationer vilket är en väldigt central del av begreppet.

Det historiska synsättet med geometriska och aritmetiska talföljder ger en nyanserad bild av logaritmer som är av matematikhistoriskt intresse. Synsättet kan lätt byggas vidare på för att elever ska inse kopplingen mellan exponentbegreppet och logaritmbegreppet. Genom att studera mellanliggande värden i den geometriska talföljden kan vi observera hur logaritmen kan vara ett rationellt tal. Om vi lägger till värden mellan $1\ 2\ 3\ 4$ och $2\ 4\ 8\ 16$ så att vi får de aritmetiska och geometriska talföljderna;

1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
2^1	$2^{1.5}$	2^2	$2^{2.5}$	2^3	$2^{3.5}$	2^4
2	$2\sqrt{2}$	4	$4\sqrt{2}$	8	$8\sqrt{2}$	16

Via dessa talföljder går det att visualisera $log(a) = b$, där ett reellt tal a korresponderar mot ett rationellt tal b, vilket är svårt via andra synsätt.

5.5 Undervisningsupplägg

Varje undervisningsupplägg som redovisades i avsnitt 4.4 har för- och nackdelar när det gäller introduktion av logaritmbegreppet. Nedan redogör vi för våra tankar kring några av undervisningsuppläggen och förklarar vad vi tycker om dem.

Vi nämnde tidigare att synsättet om logaritm som multiplikativ mätning var något vi gillade, Vos och Espedals (2016) undervisningsförslag som beskrevs i avsnitt 4.4.1 relaterar till synsättet. Trots detta tycker vi inte undervisningsförslaget verkar vara ett bra upplägg då vi inte tror att det kan förbättras till att ge en uppfattning om logaritmens förhållande till exponentialfunktionen. Vi hade hellre sett en annan introduktion av logaritmen och att synsättet om multiplikativ mätning användes för att koppla logaritmen till de fyra räknesätten för att ge kontext till begreppet. Vidare är metoden för upprepad division med 10 av tal som är tiopotenser trivial, om eleverna ens bemödar sig att utföra beräkningen krävs ingen reflektion över vad de gör och därmed kan nog syftet med liknelsen gå förlorad. Ur ett sociokulturellt perspektiv (Vygotsky, 1978) är uppgiften inte utmanande nog för att eleven ska befinna sig i ZPD och därmed är metoden inte ett effektivt sätt att lära sig något nytt.

Ett undervisningsupplägg vi tyckte var bra kom från Hurwitz (1999) där logaritmen introduceras via en funktion som plockar ut en exponent. Upplägget bygger på tidigare erfarenheter av funktioner och ger eleverna gradvis en uppfattning om vad en logaritm är. Vi tycker att det verkar gynnsamt att ta en väg där tidigare erfarenheter och lärdomar såsom funktionsbegreppet kommer till godo. Vos och Espendals (2016) förslag där logaritmen introduceras genom upprepad division bygger också vidare på tidigare kunskaper. Men skillnaden är att "lyft av" metoden utvecklas till något som förklarar att logaritmen är inversen till exponentbegreppet, denna möjlighet är inte synlig genom undervisnings-upplägget med upprepad division. Enligt Piaget och Cooks (1952) konstruktivistiska synsätt skulle en introduktion via Eulers definition $log_a(y) = x \Leftrightarrow a^x = y$ innebära att eleverna behöver ackommodera informationen då deras tidigare erfarenheter inte är tillräckliga för att byggas vidare på. Men om begreppet introduceras i flera steg för att understryka kopplingen med tidigare kunskaper såsom funktionsbegreppet kan eleverna istället assimilera kunskapen vilket leder till att de lättare kan ta till sig informationen.

Upplägget för introduktion av logaritm via dess historia verkar väldigt lovande, den ger inte bara matematikhistorisk kontext utan bygger även vidare för att förstå sambandet med exponentialbegreppet. Det centrala för introduktionen är sambandet mellan aritmetisk och geometrisk talföljd, detta kan hjälpa elever att visualisera olika logaritmbaser då det baseras på vilken geometrisk talföljd som används. Det är möjligt att introduktionen via historia tar mer tid än introduktionen genom Eulers definition, men samtidigt ger logaritmens historia ett större djup och kommer ändå till slut fram till att logaritm är invers till exponent. Det kan vara värt att ta den extra tiden för att eleverna ska få bättre grepp om logaritmer eftersom det är många elever som har svårt för det, dessutom kommer de få öva på andra delar av matematiken som till exempel talföljder och potenslagarna under tiden.

Genom informationen som redovisats i arbetet, främst genom kapitlet om undervisnings-upplägg kan frågeställningen 'finns det bättre sätt att introducera logaritmer än via Eulers definition?' besvaras. Om vi i nuläget själva skulle välja ett undervisningsupplägg skulle det vara via det historiska perspektivet då vi tror att en historisk ingång till begreppet vore mest gynnsamt för eleverna även om det skulle ta extra tid. Om den vägen inte skulle gå på grund av tidsbrist eller annat hinder vore notationsbyte ett bra val som introduktion till logaritmen.

5.6 Framtida forskning

Frågeställningarna har besvarats med hjälp av den litteratur som hittats, dock känner vi att det skulle behövas ytterligare forskning kring området. Den forskning vi hittat har främst varit kvalitativa studier där några få specifika klasser testats på sina kunskaper eller deras respons till ett visst undervisningsupplägg. Vidare har ingen av artiklarna riktat sig specifikt mot svenska skolan och dess elever. Därför bör effekter vid introduktion av logaritm i den svenska skolan kartläggas för att studera vilka av de svårigheter som framställts gäller för svenska elever och till vilken grad, samt om det finns andra besvärligheter som dyker upp. En mer inriktad studie av logaritmintroduktion i svenska skolan kan ge ett mer konkret (det vill säga mindre spekulativt) svar på hur begreppet bör presenteras för att så många elever som möjligt ska förstå sig på det. Det vore gynnsamt om studien testar olika undervisnings-upplägg, och kontrollerar för externa faktorer så gott det går, för att klargöra effekterna tydligare.

Det kan dock vara problematiskt att jämföra utbildningsformer för att komma fram till det bästa upplägget. För detta krävs en långsiktig kvantitativ studie då en kortsiktig studie inte kan mäta det önskade målet att uppnå ihållande kunskap. Eftersom en sådan studie inte är helt enkel att organisera kan det ändå vara av värde att satsa på kvalitativa studier för att få någon uppfattning om förståelsen av logaritmer hos svenska gymnasieelevers likväl nyantagna högskolestudenter. Även om de kvalitativa studierna inte ger lika generaliserbara resultat är det bättre än inga resultat alls, så länge tolkningen av resultaten är passande. Vidare kan det debatteras om det ens går att få några generaliserbara resultat då studierna handlar om elevers lärande. Människor lär sig på olika sätt alltså är det mycket möjligt att det inte finns något ultimat tillvägagångssätt för att introducera begrepp som logaritm. Oavsett behövs sådan forskning för att veta om forskning på området ens kan ge generaliserbara resultat.

Referenser

Alfredsson, L., Bråting, K., Erixon, P., & Heikne, H. (2011). *Matematik 5000 Kurs 2c Blå Lärobok*. Stockholm: Natur & Kultur.

Alfredsson, L., Bråting, K., Erixon, P., & Heikne, H. (2012). *Matematik 5000 Kurs 3c Blå Lärobok*. Stockholm: Natur & Kultur.

Ayoub, R. (1993). What is a Napierian Logarithm? *The American Mathematical Monthly, 100*(4), 351-364. doi:10.2307/2324957

Aziz, T. A., Pramudiani, P., & Purnomo, Y. W. (2017). How do college students solve logarithm questions? *International Journal on Emerging Mathematics Education, 1*(1), 25-40. doi:10.12928/ijeme.v1i1.5736

Bal, D. (2014). Leibniz, Bernoulli and the logarithms of negative numbers. Hämtad från http://www.math.cmu.edu/~dbal/files/LeibBernLogs.pdf

Berezovski, T. (2004). *An inquiry into high school students' understanding of logarithms* (Doctoral dissertation, Faculty of Education).

Boyer, C. B. (1968). *History of mathematics*. New York: John Wiley & Sons. Hämtad från https://archive.org/stream/AHistoryOfMathematics/Boyer-AHistoryOfMathematics#page/n19/mode/2up

Bradley, R., E., & Sandifer, C., E. (2007) *Leonhard Euler: Life, Work and Legacy*. Amsterdam: Elsevier.

Burn, B. (2016). Early tables resembling those of natural logarithms. *BSHM Bulletin: Journal of the British Society for the History of Mathematics, 31*(2), 112-122. doi:10.1080/17498430.2015.1116052

Cajori, F. (1909). *A history of mathematics.* London: Macmillan & Co., Ltd.

Cajori, F. (1913). History of the Exponential and Logarithmic Concepts. *The American Mathematical Monthly, 20*(1), 5-14. doi:10.2307/2973509

DePierro, E., Garafalo, F., & Toomey, R. (2008). Helping students make sense of logarithms and logarithmic relationships. *Journal of Chemical Education, 85*(9), 1226. Retrieved from http://proxy.lib.chalmers.se/login?url=https://search-proquest-com.proxy.lib.chalmers.se/docview/211923038?accountid=10041

Euler, L. (1751). *De la controverse entre Messrs. Leibniz et Bernoulli sur les logarithmes des nombres negatifs et imaginaires.* Översatt från franska till engelska av Stacy G. Langton. Hämtad oktober 2, 2017 från http://eulerarchive.maa.org/docs/translations/E168en.pdf

Gamble, M. (2005). Teaching Logarithms Day One. *The Mathematics Teacher, 99*(1), 66-67. Retrieved from http://www.jstor.org/stable/27971863

Ganesan, R., & Dindyal, J. (2014). An Investigation of Students' Errors in Logarithms. *Mathematics Education Research Group of Australasia*. Hämtad från http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED572604.pdf

Gennow, S., Gustafsson, I. M. & Silborn, B. (2012). *Exponent 2c*. Malmö: Gleerups.

Hammack, R., & Lyons, D. (1995). A SIMPLE WAY TO TEACH LOGARITHMS. *The Mathematics Teacher, 88*(5), 374-375. Hämtad från http://www.jstor.org/stable/27969370

Henderson, J. (1930). The Methods of Construction of the Earliest Tables of Logarithms. *The Mathematical Gazette, 15*(210), 250-256. doi:10.2307/3607194

Hurwitz, M. (1999). WE HAVE LIFTOFF! INTRODUCING THE LOGARITHMIC FUNCTION. *The Mathematics Teacher, 92*(4), 344-345. Retrieved from http://www.jstor.org/stable/27970977

Høg, E. (2009). 400 years of astrometry: from Tycho Brahe to Hipparcos. *Experimental Astronomy*, *25*(1–3), 225–240. https://doi.org/10.1007/s10686-009-9156-7

Kenney, R., & Kastberg, S. (2013). Links in Learning Logarithms. *Australian Senior Mathematics Journal*, *27*(1), 12-20.

McFarland, D. D. (2017). Quarter-squares revisited: earlier tables, division of labor in table construction, and later implementations in analog computers. *UCLA CCPR Population Working Papers*.

Mulqueeny, E. (2012). *How do students acquire an understanding of logarithmic concepts?*. Kent State University. Hämtad från http://proxy.lib.chalmers.se/login?url=https://search-proquest-com.proxy.lib.chalmers.se/docview/1140497429?accountid=10041

O'Connor, J. J., & *Robertson, E. F. (April 1998) Napier biography*. Hämtad September 23, 2017, från http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Napier.html

O'Connor, J. J., & Robertson, E. F. (Juli 1999) *Briggs Biography.* Hämtad September 28, 2017, från http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Briggs.html

O'Connor, J. J., & *Robertson, E. F. (September 2001) The number e*. Hämtad Oktober 2, 2017, från http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/HistTopics/e.html

Panagiotou, E. N. (2011). Using history to teach mathematics: The case of logarithms. *Science & Education*, *20*(1), 1-35. doi:10.1007/s11191-010-9276-5

Piaget, J., & Cook, M. T. (1952). *The origins of intelligence in children*. New York, NY: International University Press.

Pierce, R. (1977). A Brief History of Logarithms. *The Two-Year College Mathematics Journal*, *8*(1), 22-26. doi:10.2307/3026878

Skolverket. (2017). *Matematik.* Hämtad Oktober 9, 2017, från https://www.skolverket.se/polopoly_fs/1.261632!/MAT.pdf

Stifel, M. (1990). *Arithmetica integra*. apud Iohan Petreium.

Stoll, C. (2006). When Slide Rules Ruled. *Scientific American, 294*(5), 80-87. Retrieved from http://www.jstor.org/stable/26061456

Szabo, A., Larson, N., Viklund, G., Dufåker, D., & Marklund, M. (2012). *Matematik Origo 2c*. Stockholm: Sanoma Utbildning.

Thompson, A., & Pearson, K. (1925). Henry Briggs and His Work on Logarithms. *The American Mathematical Monthly, 32*(3), 129-131. doi:10.2307/2299634

Toumasis, C. (1993). Teaching logarithms via their history. *School Science and Mathematics, 93*(8), 428-434. doi:10.1111/j.1949-8594.1993.tb12274.x

Villarreal-Calderon, R. (2008). Chopping Logs: A Look at the History and Uses of Logarithms. *The Mathematics Enthusiast*, *5*(2), 337–344. Hämtad från http://scholarworks.umt.edu/tme/vol5/iss2/15

Vos, P., & Espedal, B. (2016). Logarithms - a meaningful approach with repeated division. *Mathematics Teaching*, (251), 30-33. Retrieved from http://proxy.lib.chalmers.se/login?url=https://search-proquest-com.proxy.lib.chalmers.se/docview/1807707610?accountid=10041

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Waldvogel, J. (2014). Jost Bürgi and the discovery of the logarithms. *Elem Math*, *69*(3), 89-117. Hämtad från https://www.sam.math.ethz.ch/sam_reports/reports_final/reports2012/2012-43_fp.pdf

Weber, C. (2016). Making logarithms accessible – operational and structural basic models for logarithms. *Journal Für Mathematik-Didaktik, 37*(S1), 69-98. doi:10.1007/s13138-016-0104-6

Weber, K. (2002a). Developing Students' Understanding of Exponents and Logarithms. Hämtad från http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED471763.pdf

Weber, K. (2002b). Students' Understanding of Exponential and Logarithmic Functions. Hämtad från http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED477690.pdf