GÖTEBORGS UNIVERSITET

Sjätteklassares förkunskaper inom grundläggande aritmetik

Kerstin Weijdegård

Självständigt arbete L6XA1A

Handledare: Djamshid Farahani

Examinator: Florenda Gallos Cronberg

Rapportnummer: HT17-2930-044-L6XA1A

Sammanfattning
Titel: Sjätteklassares förkunskaper inom aritmetik
Title in English: Sixth graders prior knowledge within arithmetic
Författare: Kerstin Weijdegård
Typ av arbete: Examensarbete på avancerad nivå (15 hp)
Handledare: Djamshid Farahani
Examinator: Florenda Gallos Cronberg
Rapportnummer: HT17-2930-044-L6XA1A
Nyckelord: procedurell, konceptuell, begreppsutveckling, begreppsförståelse, begreppsbild, procept, proceptuellt tänkande, taluppfattning

Matematik är ett ämne som många elever inom skolan verkar uppleva som utmanande. Genom PISA-undersökningar har det framgått att svenska elevers matematikkunskaper har försämrats, vilket gör det intressant att undersöka det matematiska området. En tänkbar orsak till de sjunkande resultaten kan vara brister i begreppsutvecklingen. Den här studien undersöker fyra elever i årskurs 6 med syftet att synliggöra elevernas begreppsutveckling och deras förkunskaper inom aritmetik. Det här görs genom att studera elevernas val av strategier och vad som avgör dessa val. Arbetet grundar sig i ett intresse av att få insikt om vilka utmaningar elever möter på en elementär nivå och vad som kan ligga bakom svårigheter som upplevs inom matematik. Studien behandlar taluppfattning, med specifikt fokus på addition och subtraktion, vilka klassas som förkunskaper för årskurs 4-6. Fokus ligger på aritmetikens symboler och specifikt symboler som representerar tal, addition och subtraktion. Utgångspunkten är en huvudforskningsfråga samt två tillhörande delfrågor vilka lyder:

Hur löser elever i årskurs 6 grundläggande aritmetiska uppgifter från årskurs 3?

- Vilka strategier använder de och varför?
- Går det att urskilja effektiviteten av strategierna i lösandet av grundläggande aritmetiska uppgifter?

Min studies kartläggning av elevernas begreppsutveckling gjordes genom en skriftlig diagnos som eleverna utförde under ett intervjutillfälle där förklaringar om tillvägagångssätt skedde muntligt. Ett resultat av rätt eller fel svar presenteras i uppsatsen och en analys beskriver elevernas språkliga konstruktioner genom citat, kopplat till teorin om begreppsbilder (Tall & Vinner, 1981), teorin om tre matematiska världar (Tall, 2004), samt proceptuellt tänkande (Gray & Tall, 1994). Genom analysen framgår det att en variation finns i elevernas utvecklade uppfattning om dualiteten som matematikens symbolspråk innefattar. Det innebär att symboler kan uppfattas både som en process och ett begrepp och att skillnaden ligger i förmågan att obehindrat växla mellan dessa för att smidigt lösa en uppgift. Enligt den här studien påverkas den flexibla växlingen av elevens möjlighet att bygga vidare utifrån befintliga kunskaper för att lösa mer komplexa uppgifter. Ambitionen med studien är att lärare skulle kunna använda ett liknande tillvägagångssätt för att synliggöra aspekter av elevers begreppsförståelse för att främja begreppsutvecklingen.

Innehåll

1. Inledning

Utgångspunkten för det här examensarbetet ligger i en förundran över elevers olika sätt att ta sig an matematik. Inget annat ämne i skolan verkar ha en så stor spridning på elevernas kunskapsnivåer som matematik, där vissa elever har förmågan att knäcka den matematiska koden, medan andra elever kämpar sig igenom krävande ansträngningar för att lösa elementära aritmetiska uppgifter. För många är matematik obegripligt och kan framstå som rent trolleri. Vad är det som gör att matematik skapar så skilda utmaningar för olika elever? Utifrån svenska elevers sjunkande resultat i PISA 2012 skapades ett behov av att studera elevers matematikkunskaper. Trots att resultaten i PISA 2015 steg, når de ännu inte upp till 2003-års resultat och därmed är debatten kring elevers matematikkunskaper fortfarande aktuell, vilket gör att intresset att studera det här kunskapsområdet kvarstår.

En möjlig förklaring till de låga resultaten skulle kunna vara brister i elevernas begreppsuppfattning. Det här arbetet fokuserar därför på begreppsutvecklingen hos elever i årskurs 6 genom deras förmåga att lösa elementära aritmetiska uppgifter. Begreppsutvecklingen kan synliggöras genom att undersöka hur elever uppfattar matematikens symbolspråk. Om elever i årskurs 6 ska uppnå kunskapskraven är det viktigt att kunskapskraven för årskurs 3 har uppnåtts. Därför ämnar den här studien undersöka elevers begreppsutveckling inom aritmetik som anses vara förkunskaper för målen i årskurs 4-6.

Studien som har gjorts grundar sig även i min föregående litteraturstudie där olika perspektiv på procedurellt och konceptuellt lärande i matematik synliggjordes genom delar av den forskning som finns inom det här området. En slutsats var att procedurellt och konceptuellt lärande inte står i motsats till varandra utan istället är två sidor av samma mynt. Utifrån det arbetet skapades ett intresse för Gray och Talls (1994) teori om *procept* och *proceptuellt tänkande* då begreppet procept på ett intressant och övergripande sätt beskriver den kognitiva utvecklingen som matematik kräver. Begreppet procept utgör delvis den teoretiska ramen för den här studien.

I min studie framkommer det att det finns vissa skillnader i elevernas tillvägagångssätt då de löser elementära aritmetiska uppgifter, vilket kan härledas till möjligheten att använda befintliga kognitiva scheman. Genom en skriftlig diagnos och samtal med eleverna om val av strategi på den skriftliga delen framkommer variation i deras språkliga konstruktioner som synliggör olika grader av begreppsutveckling. Variationen ligger i den utvecklade förmågan att uppfatta symboler både som process och begrepp. Symboler i den här studien är de som representerar tal, addition och subtraktion.

Studien presenteras genom en disposition som utgörs av sju olika delar. Närmast i följd introduceras studiens syfte och frågeställningar, vilket följs av en genomgång om aritmetikens roll, matematiska begrepp och procedurell samt konceptuell kunskap. Därefter presenteras studiens teoretiska ramverk och därpå en detaljerad beskrivning av studiens metod. Till sist framförs resultatet och analysen och avslutas med en diskussion och slutsats samt förslag till fortsatt forskning.

1.1 Syfte

Syftet är att synliggöra elevers begreppsutveckling och deras förkunskaper inom aritmetik, vilket görs genom att studera elevernas val av strategier och vad som avgör dessa val. Studiens tillvägagångssätt och analys är menad att vara ett verktyg i lärares kartläggning av elevers matematiska kunskaper som kan ligga till grund för planering av undervisning samt formativ bedömning.

1.2 Frågeställningar

Hur löser elever i årskurs 6 grundläggande aritmetiska uppgifter från årskurs 3?

- Vilka strategier använder de och varför?
- Går det att urskilja effektiviteten av strategierna i lösandet av grundläggande aritmetiska uppgifter?

2. Bakgrund

Aritmetiken, som på grekiska betyder räknelära, är den äldsta formen av matematik. Den inkluderar läran om tal och dess egenskaper, samt hur talen fungerar inom de fyra elementära räknesätten, addition, subtraktion, multiplikation och division. Begreppet tal rymmer kategorierna naturliga tal, heltal, rationella tal och reella tal. Den här studien syftar enbart till att fokusera de naturliga talen, alltså de positiva heltalen, inom räknesätten addition och subtraktion. Grundläggande aritmetik återfinns i kursplanen för matematik (Skolverket, 2016) under centralt innehåll för årskurs 1-3. Då eleverna inträder årskurs 4 ska de, enligt läroplanen, ha utvecklat kunskap om de naturliga talen, menat deras egenskaper, hur talen kan delas upp, vilka symboler som används samt kunskap om de fyra räknesättens egenskaper och samband. Det här är förutsatta förkunskaper till det centrala innehållet för årskurs 4-6, vilka ligger till grund för utvecklingen av förmågorna i kunskapskraven. Enligt Lgr11, kunskapskraven för årskurs 6 (Skolverket, 2016), ska eleverna utveckla förståelse om matematiska begrepp och lära sig att använda dem på lämpligt sätt. Den här studien väljer framför allt att fokusera begreppet tal, men även begreppen addition och subtraktion genom de symboler som finns för dessa inom aritmetik.

2.1 Matematiska begrepp

Matematiska begrepp är, enligt Madeleine Löwing (2011), nödvändiga för att matematiska problem ska bli begripliga och kunna bearbetas. Hon framhåller lärares gemensamma syn på matematiska begrepp som en framgångsfaktor för elevers begreppsutveckling. En svårighet dock, menar Löwing, är att faktiskt definiera matematiska begrepp och därför uppmanar hon till användandet av en didaktisk ämnesteori för undervisning av matematik i skolan. En didaktisk ämnesteori innebär en teori vilken ramar in matematiken i skolan. En del av den didaktiska ämnesteorin är en ämnesanalys, vilket är ett analysverktyg som ämnar kartlägga skolans matematik, vilka begrepp som ska läras, hur en elev tillägnar sig dem samt vilka förkunskaper som krävs för att gå från en begreppsnivå till en mer avancerad nivå. Syftet med den didaktiska ämnesteorin är att skapa en förståelse kring förförståelsen som en individ behöver för att ett lärande i matematisk ska ske. Den didaktiska ämnesteorin utgör således en teoretisk grund för hur innehåll i matematikundervisningen kan väljas ut och hur det kan presenteras för eleverna. Genom en didaktisk ämnesanalys kan en kartläggning göras av begrepp och på så vis blir de begreppsliga strukturerna synliga, hävdar Löwing (2016). Vidare menar Löwing (2016) att kartläggningen kan utgöra bedömningsgrund för kvaliteten i elevernas matematiska kunskaper. Materialet diamantdiagnoser (Skolverket, 2013), som används i den här studien och som Löwing varit med och utvecklat, bygger på en sådan kartläggning och anses därför som en lämplig utgångspunkt för datainsamlingen.

Att förstå och kunna använda begreppet tal och därmed kunna operera med talen förutsätter en grundläggande taluppfattning, betonar Löwing (2011). Om operationer ska kunna ske med flyt krävs det kunskap om talens uppbyggnad och deras egenskaper. Taluppfattning innebär bland annat kunskap om talens ordning och dess grannar så att det med flyt, och utan större ansträngning, går att se 6+1=7 och 8-7=1. Det innebär vidare förmågan att behärska positionssystemet med basen 10 och därtill 10- och 100-talsövergångar, så att talet 18 lätt kan ses som 10+8. Taluppfattning inkluderar även några grundläggande räknelagar så som de kommutativa och associativa räknelagarna, där a+b=b+a och (a+b)+c=a+(b+c). Vidare är det viktigt att kunna dela upp tal i bland annat termer så att talet 10 kan ses som 8+2, talet 7 kan ses som 2+5 och 8+7 kan delas upp i 8+2+5 vilket ger 10+5. Kunskap om dessa delar är en förutsättning för ett flyt i matematiska operationer precis som avkodning av bokstäver är en nödvändighet för att kunna läsa med flyt utan att medvetet tänka på hur man ska göra (Löwing, 2011). Därutöver lyfter Löwing fram vikten av att se talens egenskaper som mönster. Genom att utforska mönster framträder till exempel talens möjlighet att delas upp i udda och jämna tal.

Inom taluppfattning hör också förmågan att, med flyt, behärska de grundläggande operationerna addition och subtraktion. Enligt Löwing (2011) krävs ett flyt i operationerna för att minska ansträngningen som behövs vid mer omfattande beräkningar som till exempel problemlösning. Att behärska addition och subtraktion innebär inte enbart en förståelse om de olika strategierna utan det inkluderar även en förmåga att tillämpa strategierna på lämpligt sätt i olika situationer. Löwing (2011) uppmuntrar till att öva på de grundläggande kombinationer som finns inom addition och subtraktion så att dessa kan utföras med flyt och möjliggöra upptäckten av återkommande mönster. Då elever opererar med strategierna måste ett antal begrepp koordineras, men eleven använder sig egentligen inte av dessa begrepp utan av den egna uppfattningen av begreppen. Här poängterar Löwing lärarens viktiga roll i att ta reda på hur eleven uppfattar olika begrepp och reda ut eventuella missuppfattningar, vilket har varit en inspiration till den här studien.

2.2 Räknefärdigheter och begreppsförståelse (procedurell och konceptuell kunskap)

Madeleine Löwing (2016) lyfter den starka kopplingen mellan begreppsförståelse och räknefärdighet. Hon menar att det är viktigt för elever att behärska basfakta på ett sätt där baskombinationer är automatiserade. Det innebär bland annat att det underlättar för elever att räkna om de har automatiserat subtraktions- och additionstabellen så att elementära beräkningar som 8+7 och 14-6 inte kräver några större ansträngningar. Löwing (2016) hävdar att utantillkunskaper inte är en motsättning till förståelse, utan att dessa två aspekter av lärande snarare kompletterar varandra och samverkar. Ett utantillärande av basfakta kan således utrusta elever med en förutsättning att kunna generalisera inom mer komplexa talområden och vidga deras förståelse. På så vis läggs mindre uppmärksamhet på att ”räkna” och mer på att se sambanden.

Löwings (2016) syn på räknefärdigheter och begreppsförståelse kan liknas vid definitioner av begreppen procedurell och konceptuell kunskap. En tidig definition av procedurell och konceptuell kunskap som ofta citeras kommer från Hiebert (1986) där den första anses handla om att utföra regler och procedurer, medan den andra handlar om kunskap rik på kopplingar som utgör en sammanhängande väv av kunskap. Definitionerna har därefter utvecklats av ett flertal teoretiker, däribland Star (2005) som menar att konceptuell kunskap omfattar begrepp och principer och procedurell kunskap är regler och procedurer, men där båda typerna kan vara mer eller mindre utvecklade. Således kan även procedurell kunskap vara rik och sammanhängande. Gray och Tall (1994) hävdar, i likhet med Löwing (2011), att det inte finns någon dikotomi mellan procedurell och konceptuell kunskap utan att det snarare rör sig om två delar som stödjer varandra.

3. Teoretiskt ramverk

Den teoretiska ansatsen för den här studien utgår från det konstruktivistiska perspektivet på lärande. Knut Illeris (2015) beskriver att den konstruktivistiska synen på lärande innebär att människan själv konstruerar sin förståelse av omvärlden. Således formas kunskap individuellt där förkunskaper spelar en avgörande roll. Lärande sker därmed inte genom någon överföring från en person till en annan utan det är en process vilken är individuell. Inom det konstruktivistiska fältet ligger Tall och Vinner (1981) samt Grays (2004) teori om *begreppsbild*, *begreppsdefinition* samt *tre matematiska världar*, vilka används som teoretiska verktyg för analys i den här studien.

3.1 Ett konstruktivistiskt perspektiv om lärande

En av de främsta teoretikerna som förknippas med konstruktivismen är Jean Piaget (Illeris, 2015). En viktig aspekt, enligt Knut Illeris (2015), i Piagets lärandeteori är det som behandlar synen på lärandet som en jämviktsprocess. Piaget ansåg att en individ strävar ständigt efter att upprätthålla en jämvikt i samspelet med omvärlden genom adaptation (Illeris, 2015). Det innebär att individen hela tiden anpassar sig till omgivningen samtidigt som hen försöker anpassa omgivningen till sina egna behov. Adaptionen sker i ett samspel mellan två processer, assimilation och ackommodation, vilka har en tendens att balansera varandra. Begreppet assimilation står för ett lärande som införlivas i redan existerande strukturer. Dessa strukturer kan till exempel vara kunskapsstrukturer eller förståelsesätt som Piaget kallade scheman. Ackommodation däremot handlar om ett lärande som inte passar in i de existerande strukturerna, vilka därför kräver en omstrukturering. Piaget menade att ett lärande sker då något nytt ska kopplas samman med de redan existerande strukturerna. Ett lärande genom ackommodation innebär en större mental ansträngning i jämförelse med processen assimilation eftersom en omstrukturering krävs för att uppnå jämvikt.

3.2 Begreppsbild och begreppsdefinition

Matematik kan anses vara ett ämne med precisa definitioner för begrepp och regler, men Tall och Vinner (1981) hävdar att den psykologiska verkligheten skiljer sig stort från den formella matematikens värld. Varje individ, menar de, har en egen uppsättning av kognitiva strukturer som formar förståelsen av matematiska begrepp. Innan vi möter matematiska begrepp i skolan har vi mött flera av dessa koncept i vår omvärld. Det här betyder, menar Tall och Vinner, att en viss individs begreppsdefinition mer eller mindre kan stämma överens med den formella definitionen. Det innebär vidare att en individs begreppsförståelse är uppbyggd av en varierad mängd mentala bilder och tillsammans bildar de en komplex kognitiv struktur som varierar från person till person. Begreppsbild (*concept image*) är ett begrepp som Tall och Vinner (1981) använder för att beskriva den totala kognitiva strukturen som associeras med ett visst begrepp.

> We shall use the term *concept image* to describe the total cognitive structure that is associated with the concept, which includes all the mental pictures and associated properties and processes. (Tall & Vinner, 1981, s.152)

Begreppsbilden, menar Tall och Vinner (1981), rymmer individens olika tolkningar och förståelse, vilket innefattar alla mentala bilder, associerade egenskaper och processer kring begreppet. Många begrepp som vi använder till vardags är inte formellt definierade, utan vi lär oss att förstå dem genom erfarenheter och genom att använda dem i lämpliga kontexter. Begreppsförståelsen förfinas efter hand då individen möter ny stimuli och mognar, vilket kan ske med eller utan formella definitioner. Under utvecklingsprocessen ges ofta konceptet ett namn, eller en symbol, som gör det möjligt för oss att kommunicera om och mentalt manipulera begreppet. De kognitiva strukturerna som färgar förståelsen av ett begrepp är dock, enligt Tall och Vinner, betydligt mer storslagna än det som blir synligt genom en symbol.

> It is more than any mental picture, be it pictorial, symbolic or otherwise. During the mental processes of recalling and manipulating a concept, many associated processes are brought into play, consciously and unconsciously affecting the meaning and usage. (Tall & Vinner, 1981, s. 151-152)

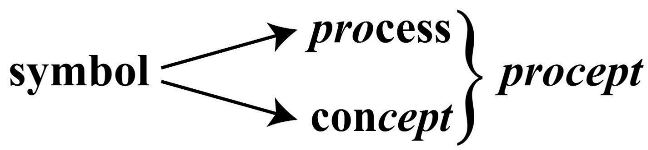
Under en mental process då ett begrepp ska erinras och manipuleras sker både medvetna och omedvetna associativa processer, vilka påverkar både betydelsen och användandet av begreppet. Ibland sker konflikter mellan olika aspekter av begreppsbilden och individen kan då uppleva förvirring. Då en elev först möter begreppet subtraktion görs det i samband med positiva heltal, och eleven observerar antagligen att svaret alltid minskar då ett tal subtraheras från ett annat. En sådan observation är del av elevens begreppsbild, men den aspekten kan komma i konflikt med andra aspekter då negativa tal introduceras. Det blir då svårt för eleven att hålla samman begreppsbilden till en helhet och eleven upplever följaktligen förvirring. Det ska dock poängteras att en elev inte nödvändigtvis behöver uppleva en mental konflikt i alla sammanhang. En elev som löser 1/2 + 1/4 korrekt kanske anser att samma strategi går att tillämpa för 1/2 + 1/3, vilket resulterar i att eleven inte känner av någon konflikt, trots ett felaktigt svar. Det är således enbart då motsägande aspekterna av begreppsbilden är aktiva samtidigt som en känsla av konflikt eller förvirring uppstår.

3.3 De tre matematiska världarna

För att beskriva de kognitiva processerna som ligger till grund för utvecklandet av matematiska kunskaper presenterar Tall (2004) en teori om tre matematiska världar. Syftet med de tre matematiska världarna är att, med en teori, skildra den kognitiva utvecklingen som sker när matematisk förståelse formas. Begrepp utvecklas hos en individ då den personliga begreppsbilden (Tall & Vinner, 1981) genomgår en förändring genom någon form av ny stimuli. Det finns enligt Tall (2004) tre olika typer av begrepp; geometriska, symboliska och axiomatiska. Dessutom, menar Tall, finns det inte bara denna åtskillnad vad gäller begrepp, utan det finns också tre väldigt olika kognitiva utvecklingar som härbärgerar tre distinkta matematiska världar.

Den första växer fram ur vår uppfattning av världen. Den består av vårt tänkande om saker som vi uppfattar och som vi känner med våra sinnen, vilket inkluderar både den fysiska världen och vår mentala sinnesvärld. Genom reflektion och genom alltmer sofistikerat språk går det att föreställa sig koncept ur sinnevärlden, som t.ex. en rak linje. Begrepp utformas på så vis genom vår perception av det vi möter med våra sinnen. Tall (2004) benämner den här kognitiva utvecklingen den konceptuella-förkroppsliga världen (*conceptual-embodied world*).

Den symboliska världen, som den här studien är placerad i, innefattar, enligt Tall (2004), den kognitiva utvecklingen som sker när vi beräknar och manipulerar aritmetik, algebra och matematisk analys. Den här världen namnger Tall den proceptuella-symboliska världen (*proceptual-symbolic world*). I den här världen börjar de kognitiva processerna med händelser, som att peka och räkna, vilka därefter inkapslas till begrepp med hjälp av symboler. Inkapslingen i symboler gör det möjligt för oss att obehindrat växla mellan processer att göra matematik och begrepp att tänka om. Gray och Tall (1994) har synliggjort att symboler, som till exempel 4+3, innehåller en dubbel betydelse, där den ena är processen addition och den andra är begreppet summa. Mötet med symbolen 4+3 kan därmed frammana både en process att räkna (addition) och/eller ett begrepp att tänka om (summa). Fenomenet där en symbol tillåter oss att med flyt växla mellan process och begrepp är grunden till Gray och Talls (1994) utvecklande av begreppet procept. Det är just den dubbla betydelsen som symboler representerar och de kognitiva processerna som sker vid mötet med symbolerna som ämnas fångas med begreppet procept (se figur 1).



Figur 1. Symbolen representerar både process och koncept vilket tillsammans bildar procept. (Tall et al., 2001, s.85)

Det är av vikt, anser Gray och Tall (1994), att process och begrepp inte hålls isär i teorier om matematisk begreppsutveckling eftersom det inte synliggör symbolers ambiguitet. Därmed blir begreppet procept av nytta för representationen av symbolers dualitet. Gray och Tall (1994) väljer att definiera begreppet procept genom två olika steg där ett elementärt procept först beskrivs:

> An elementary procept is the amalgam of three components: a process which produces a mathematical object, and a symbol which is used to represent either process or object. (s.121)

Den första delen av definitionen inkluderar symbolernas möjlighet att frammana antingen en process eller ett begrepp. Siffror är, menar Gray och Tall (1994), elementära procept. Symbolen 3 kan således frammana processen att räkna ”ett, två, tre” och själva begreppet, talet 3. För att begreppet även ska representera den kognitiva verkligheten har de formulerat en komplettering:

> A procept consists of a collection of elementary procepts which have the same object. (Gray & Tall, 1994, s.121)

Ett procept innehåller således en samling av elementära procepts, vilka delar samma objekt. Anledningen till att de skapade en andra del till definitionen var för att inkludera den växande komprimeringen av kunskap som är typisk, enligt Gray och Tall (1994), för framgångsrika matematiker. Det innebär att symboler ses både som en flexibel representation av process och begrepp, och som ett och samma objekt för en mängd olika symboliska representationer. Således inkluderar proceptet 6 processen att räkna till 6, och en samling av andra representationer, såsom 3+3, 4+2, 2+4, 8-2 etcetera. Alla dessa symboler anses av barnet representera samma objekt, 6, där den enda skillnaden är att objektet har tagits fram genom olika processer. Objektet kan brytas ner (*decompose*) och byggas upp (*recompose*) på ett flexibelt sätt. Hur procept ser ut beror på barnets kognitiva utveckling. Det börjar med en enkel kognitiv struktur som sedan växer internt. Ett elementärt procept är på så vis bara det första stadiet av ett procept. Förmågan att flexibelt manipulera symboler som process och begrepp genom att fritt växla mellan de olika symboliska representationerna benämner Gray och Tall (1994) proceptuellt tänkande (*proceptual thinking*) vilket, enligt dem, är det som utmärker framgångsrika matematiker:

> It is proceptual thinking that gives great power through the flexible, ambiguous use of symbolism that represents the duality of process and concept using the same notation. (s.122)

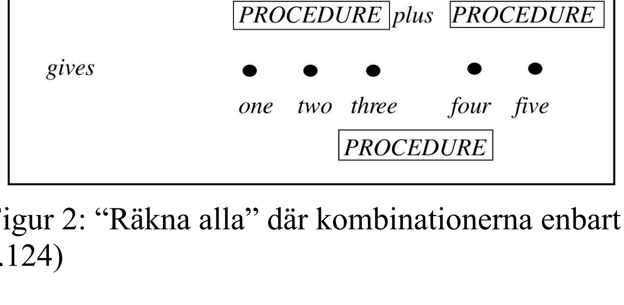
Den tredje världen kallar Tall (2004) för den formella axiomatiska världen (*formal-axiomatic world*). Utgångspunkt här är attribut uttryckta i formella definitioner som används i form av axiom för att precisera matematiska strukturer. Istället för att utgå från erfarenhetsbaserade objekt, utgår man från formella bevis för att deducera attribut och bygga upp sekvenser av satser.

Enligt Tall (2004) går varje individ sin egen väg genom de matematiska världarna som successivt blir mer och mer sofistikerade. I varje värld kommer individen att möta hinder vilket gör att tidigare matematiska kunskaper omprövas och omarbetas. Dessa hinder bemöts på individuella sätt vilket resulterar i individuella utvecklingar där vissa tar ett steg till en mer sofistikerad begreppsnivå medan andra utvecklar alternativa uppfattningar som kan leda till misslyckanden. Den här studien omfattar enbart den symboliska världen och avser synliggöra individuella utvecklingar inom aritmetik varpå Talls beskrivning av den andra världen anses lämplig som grund för analysen.

3.4 Proceptuellt tänkande inom aritmetik

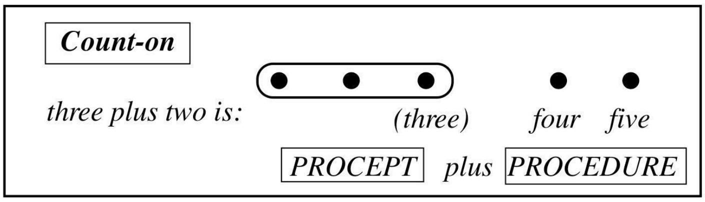
Tall et al. (2001) anser att procept är roten till människans förmåga att skapa mening kring matematiska symboler. Procept är en kognitiv förmåga som möjliggör att individen obehindrat kan växlar mellan olika representationer.

Då barn först lär sig räkna görs detta oftast med en koppling till fysiska objekt och därmed finns i början en stark koppling mellan den perceptionella och den symboliska världen. Emellertid är en sådan föreställning begränsad till objekt som kan visualiseras, vilket blir problematiskt då högre tal introduceras. Följaktligen krävs mer effektiva strategier för att ta steget in i den symboliska världen där det kognitiva minnet inte kan belastas med mentala bilder kopplat till fysiska objekt. Det som krävs, hävdar Tall et al. (2001), är att lämna de fysiska objekten och istället använda symbolismens versatila kraft genom procept. Ett flexibelt användande av procept, anser Gray och Tall (1994), är grundläggande för utvecklingen av aritmetik. Det går att tillämpa procept på olika kända strategier som barn använder för addition och subtraktion. På så vis går det att synliggöra den utvecklingsprocess som går från processen ”att räkna” enkla aritmetiska uppgifter till att istället använda procept. Strategin ”räkna alla” (*count-all*) involverar, som exemplifieras nedan (se figur 2), tre olika bi-processer där objekten i de två olika delarna först räknas var för sig, och därefter räknas båda delarna tillsammans.



Figur 2: “Räkna alla” där kombinationerna enbart består av procedurer (Gray & Tall, 1994, s.124)

Det är så här barn först lär sig räkna. Strategin att ”räkna alla” är en process som bara involverar procedurer och inte användandet av procept. I jämförelse inkluderar den något mer sofistikerade strategin ”räkna från” (*count-on*) både procept och procedur. Således ses den första delen som ett tal, ett procept, och sedan utförs en procedur för att lägga till den andra delen (se figur 3).



Figur 3: Strategin “räkna från” där första talet är ett procept, men där en procedur krävs för att addera 2 (Gray & Tall, 1994, s.124)

Barnet har här utvecklat ett elementärt procept som används i första delen för att slippa räkna alla, men för att lyckas lägga till två objekt måste barnet gå igenom processen att räkna från 3 och upp till 5. Den här strategin kan, enligt Gray och Tall (1994), leda till två kvalitativt olika utfall, där den antingen används som en additionsprocedur (att räkna) eller som ett procept. Proceduren ”räkna från” är en utveckling av ”räkna alla” som involverar färre steg. Trots färre steg är det fortfarande en procedur där input och output inte nödvändigtvis länkas samman till en ny befintlig kunskap (*known fact*). Därmed är symbolerna 3+2 och symbolen 5 inte direkt sammankopplade. ”Räkna från” som ett procept resulterar däremot i en produkt som ses både som en process och som ett begrepp. I det här fallet representerar symbolerna 3+2 samtidigt en additionsprocess och produkten av den processen, summan 5. Då talen i uppgiften, 3+2, och deras summa, 5, kan hållas i minnet samtidigt blir resultatet en meningsfull befintlig kunskap som kan föreställas som en flexibel kombination av procept och procept, vilket i sin tur producerar ytterligare ett procept (se figur 4).

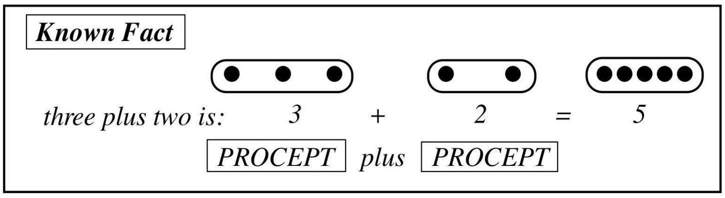


Figure 4: (Meningsfull) befintlig kunskap som är procept adderat med procept (Gray & Tall, 1994, s.124)

Gray och Tall (1994) hävdar att det finns en distinktion mellan befintlig kunskap som skapas genom det här flexibla tankesättet och den som kommer från utantillärande. Ett utantillärande leder inte nödvändigtvis till förståelse. De menar vidare att skillnaden ligger i hur befintlig kunskap används och huruvida olika befintliga kunskaper flexibelt kan kopplas ihop för att lösa en uppgift. Då en elev möter 4+5 är det möjligt att hen beskriver att ”fyra plus fyra blir åtta, och då ska det vara en mer vilket är nio.”. Språket som eleven använder här visar på den flexibla möjligheten att bryta ner och bygga upp de olika beståndsdelarna på ett proceptuellt sätt. Ett proceptuellt tänkande, menar Gray och Tall (1994), innebär vidare att addition och subtraktion inte bara ses som varandras inverser, utan då befintliga kognitiva scheman används är dessa två räknesätt så nära sammankopplade att de istället ses som en flexibel reorganisation av varandras delar.

Symboler, menar Gray och Tall (1994), innefattar både procedurell och konceptuell förståelse. Konceptuell förståelse, enligt Gray och Tall, innebär att samband kan göras mellan olika representationer av, t.ex. objektet 3, där alla delar av 3 är tillgängliga. Således kan symbolen 3 även ses som 1+1+1, 2+1, 1+2, 4-1, vilka delar samma objekt, och tillsammans formar de proceptet 3. Alla dessa olika proceptuella strukturer gör det möjligt att, på ett varierat sätt, bryta ner (*decompose*) och bygga upp (*recompose*) siffran 3. Alla dessa olika former av 3 bygger på så vis upp en konceptuell struktur, rik i samband, där siffran 3 symboliserar alla relationer, både de konceptuella och de procedurella, samt alla processer och dess produkter. Kombinationen av konceptuell och procedurell förståelse är det som Gray och Tall (1994) ämnar beskriva med proceptuellt tänkande. Det här går i samklang med Löwings (2016) ståndpunkt som lyfter den starka anknytningen mellan begreppsförståelse och räknefärdighet. Proceptuellt tänkande innefattar procedurer, men det inkluderar även lättheten att flexibelt se symbolismen antingen som en utlösare av procedurer eller som ett mentalt objekt som kan brytas ner, byggas upp och manipuleras på en högre kognitiv nivå. Gray och Tall (1994) föreslår därför att det som ofta delas upp i procedurell och konceptuell kunskap mer distinkt skulle kunna delas in i procedurell och proceptuell kunskap, där den senare inkluderar båda typer av kunskap. Gray och Tall hävdar vidare att det mångtydiga användandet av symboler är roten till ett mäktigt matematiskt tänkande som möjliggör en frigörelse från korttidsminnets begränsade kapacitet.

4. Metod

Den här studien utgår från en kvalitativ forskningstradition. Enligt Bryman (2011) har kvalitativ forskning en tonvikt på ord, till skillnad från kvantitativ forskning där tyngdpunkten ligger på mängden av insamlad data samt siffror. Bryman (2011) menar därmed att fokus i kvalitativ forskning ligger på en förståelse kring deltagarnas tolkning av verkligheten i en viss miljö. Den här studien avser att fånga elevernas egna tolkningar av enkla uppgifter i det aritmetiska området inom skolmatematiken genom kvalitativa intervjuer. Tyngden ligger på hur eleverna, genom språkliga konstruktioner, tolkar aritmetikens symboler, och om dessa tolkningar kan ge information om olika grader av begreppsutveckling. Tolkningarna analyseras med hjälp av en etablerad teori om elevers kognitiva utveckling inom matematik, vilket gör att studien intar en deduktiv karaktär snarare än en induktiv.

Metoden i den här studien tar inspiration från Madeleine Löwings (2016) undersökning där diamantdiagonser har används för att synliggöra elevers begreppsutveckling. Tanken bakom diamantdiagnoserna, menar Löwing (2016), är att läraren, med diagnoserna, kontinuerligt ska testa den didaktiska ämnesteorin i fyra olika steg, varav tre av dessa steg ligger till grund för den här studiens valda metod. Det första steget innebär en skriftlig diagnos som eleverna utför, och det andra är att titta på lösningsfrekvensen och upptäcka mönster i felsvaren. Det tredje steget, som är intervjuer, ger möjligheten att synliggöra elevernas tankesätt. Det sista steget, som den här studien inte inkluderar, är att hitta nya förklaringssätt för att eleverna ska utveckla förståelse. Löwing (2011) menar att det är av stor vikt att göra kunskapsuppföljningar för att avgöra om eleverna har nått de utsatta kunskapsmålen. Hon anser att diamantdiagnoserna utgör ett utmärkt underlag för bedömning och därmed används dessa diagnoser som instrument i den här studien.

4.1 Pilotstudie

Genom att först göra en pilotstudie blev det möjligt att förbättra utformningen av metoden och syftet för huvudstudien. I pilotstudien intervjuades en elev i årskurs 6. Syftet var att testa både intervjuteknik och lämpliga uppgifter inom aritmetik. Uppgifter valdes ut från sex olika diamatdiagnoser (Skolverket, 2013) inom talområdet 1-999, och de var således uppdelade i sex olika delar på två A4-papper. Varje del, i de fyra första delarna, bestod av sex additionsuppgifter och sex subtraktionsuppgifter inom grundläggande aritmetik för huvudräkning (se Bilaga 1). De två sista delarna innehöll två uppgifter vardera för skriftlig addition och subtraktion (se Bilaga 2).

Eleven ombads att lösa alla uppgifter inom varje del och därefter fick eleven förklara sitt tillvägagångssätt. Innan eleven löste uppgifterna blev hen instruerad om att intervjuarens intresse var att få veta hur eleven kommit fram till ett visst svar, och att tyngden inte låg på att generera ett korrekt svar. Insamlingen av data gjordes genom ljudinspelning och intervjun transkriberades därefter. I pilotstudien framkom det att många av de utvalda uppgifterna var relevanta för studiens syfte, men omfånget var för stort då intervjun tog över 40 minuter där slutet kändes stressigt och en uppgift inte hanns med. En farhåga innan pilotstudien var att eleven inte skulle vara van vid att uttrycka sina tillvägagångssätt och att intervjuaren skulle behöva ställa många följdfrågor. En problematik med att ställa följdfrågor skulle kunna vara att intervjuaren leder eleven till svaren. Under pilotstudien och genom transkriberingen framkom det dock att eleven snabbt lärde sig att, med ord, beskriva sina tankesteg utan att flera följdfrågor behövdes. Det framkom också att elevens språkliga konstruktioner var tillräckliga för att kunna göra en analys. Vid vissa tidpunkter under intervjun gavs inte tillräckligt med betänketid och intervjuaren lade då ord i deltagarens mun. Den reflektionen togs med i huvudstudiens intervjuer då intervjuaren tog en mer subtil roll. Pilotstudiens utformande var relevant och utöver en minskning av antalet uppgifter, och några utbyten av uppgifternas svårighetsgrad, gjordes inga andra förändringar.

4.2 Urval av deltagare genom fördiagnos

Urvalet av deltagare har varit målstyrt (Bryman, 2011) vilket innebär att urvalet har gjorts i anknytning till forskningsfrågorna. Då syftet med studien ämnar synliggöra elevers förkunskaper och begreppsuppfattning inom grundläggande aritmetik så var en förutsättning att eleverna skulle vara förtrogna med det valda matematikområdet. Anledning till att elever ur mellanstadiet valdes ut är förknippat med grundlärarprogrammet, inom vilket det här examensarbetet skrivs, där inriktningen är årskurs 4-6.

Elever från årskurs 6 från en skola i en svensk storstad tillfrågades om de ville medverka i studien. Av bekvämlighetsskäl är det en skola som jag själv är bekant med, vilket gjorde det enkelt att få tillräckligt många elever att vilja medverka, samt möjlighet att få tillgång till lektionstid för studiens utförande. Sammanlagt var det 22 elever som från början var med i studiens urvalsgrupp.

Utifrån pilotstudiens uppgifter valdes tre diamantdiagnoser ut som fördiagnos, vilken alla 22 elever deltog i med syftet att välja ut fyra elever för intervju. Anledningen till att enbart fyra elever valdes ut var på grund av begränsad tid för det här examensarbetet. I samråd med min handledare bestämdes det att antalet fyra skulle vara lämpligt då transkribering av intervjuer tar mycket tid, samt genererar mycket data, och fler deltagare skulle innebära en risk för tidsbrist. Val av diagnoser begränsades av tid som kunde tas i anspråk från ordinarie lektionstid, elevers begränsade koncentrationsförmåga, samt utsatt tid för den här studien. Fördiagnosen begränsades därmed till tre diamantdiagnoser, vilka behandlar addition och subtraktion inom talområdet 1-999. De diamantdiagnoserna som valdes var AG4, AS1 och AS2 (Skolverket, 2013)(Se Bilaga 3, 4 & 5). För att lyckas urskilja elever som skulle väljas ut för intervju var det viktigt att diagnosen låg på en svårighetsgrad som kunde synliggöra urvalsaspekter. Utifrån en analys av diagnoserna AG1, 2 och 3 avgjordes att dessa var för enkla och sannolikheten var hög att alla elever skulle klara av uppgifterna med flyt och korrekta svar. Därmed kunde de diagnoserna inte vara ett verktyg i urvalsprocessen. Däremot ansågs AG4 vara av den karaktären som skulle kunna lyfta fram några urvalsaspekter då den behandlar ett större talområde, 1-99, med en högre svårighetsgrad för huvudräkning. Diagnoserna AS1 och 2 valdes på grund av att de behandlar skriftlig räkning inom talområdet 1-999, där en valfri algoritm antas användas.

Fördiagnosen gjordes vid ett tillfälle på skolan där eleverna går. Tidsgränsen, vilken är den rekommenderade tiden att bryta efter, för diagnos AG4 var 10 minuter och 8 minuter vardera för AS1 och AS2. En elev anses behärska området som testas om diagnosen utförs inom 4-5 minuter för AG4 och 3-4 minuter på AS1 och AS2 (Skolverket, 2013). Vid genomförandet antecknades en ungefärlig tid för varje elev. Diagnoserna rättades därefter och en analys gjordes av de fel som fanns.

Efter en sammanställning av resultat och analys framträdde tre olika urvalsaspekter, vilka kunde användas för att välja ut 4 elever från gruppen av 22. Den första aspekten var tiden som diagnosen tog att utföra, vilken kunde synliggöra elever som behärskar eller inte behärskar uppgifterna med flyt. Den andra aspekten var antal fel som gjordes per elev, och den tredje aspekten var typ av fel. De felen som var intressanta, som grund till urval, var fel som var svårtolkade och inte enstaka slarvfel. Vid urvalet av 4 elever användes dessa tre urvalsaspekter, och eleverna valdes därmed ut grundat på en eller flera aspekter (se Tabell 1). Syftet var att göra ett urval utifrån olika typer av aspekter för att vidga möjligheten att få syn på olika begreppsutvecklingar. Enbart en elev (Jonas) valdes ut på grund av att han behärskade diagnoserna med flyt. Två elever (Tilda och Olle) valdes ut eftersom de inte uppvisade samma flyt men klarade diagnoserna några minuter innan tidsgränsen. Både Tilda och Olle hade svårtolkade fel. En elev (Vera) valdes ut på grund av att hon, på alla diagnoser, behövde använda hela den utsatta tiden vilket inte visar på flyt. Hon hade dessutom alla fel på den sista diagnosen.

Tabell 1 Deltagare och urvalsgrunderna

Elev (fiktiva namn)	**Grund för urval**
Jonas	Behärskar med flyt, AG4: 4 minuter, AS1&2: 3 minuter. Bara ett slarvfel.
Tilda	Behärskar ok, AG4: 7 minuter, AS1&2: 6 minuter. Flera svårtolkade fel. Flest antal fel.
Olle	Behärskar ok, AG4: 7 minuter, AS1&2: 6 minuter. Några svårtolkade fel med liknande karaktär.
Vera	Behärskar inte med flyt, AG4: 10 minuter, AS1&2: 8 minuter. Alla fel på AS2 då algoritmen hade glömts bort.

4.3 Val av uppgifter

I likhet med urvalet av deltagare så har valet av uppgifter också varit målstyrt (Bryman, 2011). Forskningsfrågorna avser att undersöka hur elever löser grundläggande aritmetiska uppgifter samt deras begreppsuppfattning och därmed har uppgifterna avgränsats till det aritmetiska matematikområdet. Då tiden för den här studien är begränsad så har en avgränsning gjorts där utvalda uppgifter enbart behandlar addition och subtraktion. Eftersom deltagarna kommer från årskurs 6 har det också varit viktigt att uppgifterna ligger inom talområdet 1-999, där möjlighet finns att analysera den begreppsuppfattning både på en grundläggande nivå och på en nivå med högre svårighetsgrad.

Genom pilotstudien och fördiagnosen blev det möjligt att precisera uppgifterna inför huvudstudien. Slutsatsen från pilotstudien var att alla uppgifter var relevanta, men omfånget var för stort. Utifrån den vetskapen blev det tydligt att antalet uppgifter behövde minskas. Genom analysen av fördiagnosen blev det synligt att flest antal fel från AG4 gjordes i sista delen, nämligen 4a och 4b. I de delarna fanns flera svårtolkade fel som var intressanta och därför var det viktigt att få med uppgifter därifrån. Uppgifterna som valdes var uppgifter som flera elever hade gjort fel på. Dock valdes uppgifter med formen _+40=49 bort då fördiagnosen visade att vissa elever kan tänkas göra fel på dessa uppgifter på grund av att de är ovana vid att tänka från höger till vänster. Del 3 (3a & 3b) från AG4 var jämförbar med del 3 från pilotstudien då generaliseringsförmågan testas i båda, men skillnaden är att uppgifterna från AG4 involverade högre tal vilket ansågs mer lämpligt för årskurs 6. Därför byttes uppgifterna från del 3 i pilotstudien ut mot uppgifter från del 3 i AG4. En majoritet av eleverna hade alla rätt i diagnosen AS1, och de fåtal fel som fanns var enbart slarvfel. På diagnos AS2 fanns 3 elever som hade flera eller alla fel, antingen på grund av att de inte orkade fortsätta eller att de hade glömt algoritmen. Den sistnämnda delen blev intressant vid urvalet av deltagare, men vid närmare analys av studiens syfte beslutades att vetskapen om hur väl deltagarna är förtrogna med en algoritm låg utanför studiens forskningsfokus. Utifrån den slutsatsen beslutades en avgränsning till tal i huvudräkningsform, och inga uppgifter skulle presenteras på ett sätt som uppmanar till användandet av algoritmer. Dock ansågs uppgifterna från AS1 och AS2 vara relevanta eftersom de behandlar ett större talområde, 1-999. Därmed behölls vissa av dessa uppgifter i huvudräkningsform, då AG4 enbart behandlar talområdet 1-99, och inga andra diamantdiagnoser finns för huvudräkning med tal upp till tusen.

En viktig aspekt i valet av uppgifter till huvudstudien var att uppgifterna tillsammans skulle täcka talområdet 1-999 för att kunna synliggöra huruvida eleven har ett flyt i sin flexibilitet och manipulation av de aritmetiska symbolerna, både på grundläggande och mer avancerad nivå. Valet av uppgifter gjordes utifrån lärdomarna från pilotstudien och fördiagnosen, och slutresultatet blev en blandning av uppgifter från AG1, AG3, AG4, AS1 och AS2. Uppgifterna till intervjun var, likt pilotstudien, uppdelad i fem delar men till skillnad från pilotstudien innehöll varje del enbart två additions- och två subtraktionsuppgifter (se Bilaga 6). De fyra första delarna var tryckta på ett A4 papper och den sista delen var tryckt på en egen A4-sida. Anledningen till att den sista delen fick ett eget papper var för att uppgifterna innehöll högre tal och om eleven skulle välja att använda en algoritm, eller annan skriftlig form, så fanns plats att skriva på pappret. Men som beskrivits ovan så var uppgifterna skrivna i huvudräkningsform och ingen uppmaning till att använda en algoritm fanns. Här blev det alltså möjligt att undersöka hur en elev går tillväga vid svårare uppgifter när inget direktiv ges.

Tabell 2 Information kring valda uppgifter

Del	Uppgifter	Diamantdiagnos	Testar
1	4+5, 4+3, 8-4, 6-3	AG1 (2a & 2b)	Dubblor och dubblor +/- 1 Talområde 1-9
2	8+7, 5+9, 14-6, 16-9	AG3 (2a, 3a & 2b)	Dubblor +/- 1 Talområde 1-19 med tiotalsövergångar
3	5+42, 72+6, 77-75, 89-7	AG4 (3a & 3b)	Generaliseringsförmåga Talområde 1-99 utan tiotalsövergångar

4	84+9, 75+8, 91-89, 72-8	AG4 (4a & 4b)	Strategi vid tiotalsövergång Talområde 1-99 med tiotalsövergångar
5	67+86, 347+288, 82-47, 632-427	AS1 (1 & 4) AS2 (1 & 3)	Strategi vid högre talområde Talområde 1-999 med tio- och hundratalsövergångar

4.4 Datainsamling och genomförande

Datainsamlingsmetoden för den här studien har varit kvalitativa, semi-strukturerade intervjuer. Specifikt för semi-strukturerade intervjuer är att de har en relativt tydlig och avgränsad struktur, men det finns en stor frihet för intervjupersonen att formulera svaren på eget sätt (Bryman, 2011). Semi-strukturerade intervjuer valdes på grund av att ett tydligt fokus för studien fanns från början, till skillnad från studier som har ett syfte att allmänt undersöka ett område (Bryman, 2011). Ofta finns, enligt Bryman, en intervjuguide som ramar in olika teman som intervjun ska kretsa kring. Jag har i den här studien skrivit en intervjuguide (se Bilaga 7), som användes som en förberedande struktur inför intervjuerna, men inte under själva intervjun. Intervjuguiden inkluderade den information som skulle ges till eleven innan intervjun, olika aspekter som skulle observeras samt förslag till följdfrågor som skulle kunna ställas. Förutbestämda uppgifter från diamantdiagnoserna, i form av en diagnos i 5 delar, har varit en annan del av strukturen, där uppgifterna har utförts under intervjun i den ursprungliga ordningen. En fördel med kvalitativa intervjuer är att det finns en flexibilitet som gör det möjligt för intervjupersonen att uttrycka sin egen tolkning (Bryman, 2011). Därtill är en fördel med semi-strukturerade intervjuer att de inte är så flexibla att datainsamlingen blir alltför ofokuserad, samt att det blir lättare att jämföra flera fall, vilket den här studien ämnar göra, då strukturen på intervjuerna är densamma. Syftet med den här studien har varit att undersöka elevers tillvägagångssätt då de löser grundläggande aritmetiska uppgifter, vilket gör att elevens egen tolkning av hur uppgiften ska lösas ligger i fokus och därmed är semi-strukturerade intervjuer en lämplig metod.

En nackdel med kvalitativa intervjuer, menar Bryman (2011), är att intervjupersonerna kan avvika från temat och datainsamlingen kan därmed blir svår att bearbeta. Som nämndes tidigare, så har en tydlig struktur på intervjun satt en begränsning där intervjupersonerna inte har haft möjlighet att avvika från forskningsfokuset, och därför har det varit möjligt att jämföra de olika fallen. Ytterligare en svårighet kan vara risken att ställa ledande frågor. För att undvika ledande frågor har jag försökt att använda mig av uppföljningsfrågor där ett förtydligande efterfrågas, samt att tystnad har använts för att låta eleven själv får utveckla sitt svar. Ibland har tolkande frågor fått användas för att fråga eleven om hen tänkte på ett visst sätt i syfte att förtydliga elevens tankesteg. En nackdel med tolkande frågor är att eleven kanske svarar att det var så hen tänkte, men att hen egentligen menade något annat (Bryman, 2011).

Intervjuerna genomfördes under två olika dagar, där två intervjuer gjordes per dag, under november 2017. Varje intervju genomfördes individuellt där eleven skriftligt har löst de fyra olika uppgifterna i respektive del, och efter varje del har de muntligt fått beskriva hur de tänkte då uppgiften löstes. Varje elev valde själv hur lång tid som hen behövde för varje del, men intervjutiden var begränsad till 30 minuter. Eleverna skrev svaren på uppgiftspappret och i vissa fall gjorde deltagarna uträkningar som krävde mer utförligt skrivande än bara svaret. På varje papper skrev eleven sitt namn och sin klass så att sparade papper senare skulle kunna identifieras. För att få de muntliga beskrivningarna att vara så utförliga som möjligt blev eleven, innan intervjun, uppmanad att i detalj försöka beskriva de olika tankestegen som krävdes för att lösa uppgiften. Det tydliggjordes därutöver att syftet med studien inte var att eleven skulle prestera ett rätt svar utan att intresset låg i att ta reda på hur uppgiften löstes. Intervjuerna genomfördes i ett enskilt grupprum beläget mittemot elevernas ordinarie klassrum. Enligt Bryman (2011) är det av stor vikt att intervjun sker på en lugn och ostörd plats, vilket alla fyra intervjuer gjorde. Eftersom intervjuplatsen dessutom var placerad i deras vanliga skolmiljö är det troligt att eleverna kände sig bekväma och trygga.

4.5 Dokumentation och transkribering

Dokumentationen från intervjuerna gjordes genom ljudinspelning för att säkerhetsställa att insamlingsdatan mer exakt skulle representera elevernas språkliga konstruktioner. En ljudinspelning, menar Bryman (2011), gör det möjligt att i intervjun ägna eleven och situationen direkt uppmärksamhet och istället efteråt gå tillbaka och lyssna för att analysera vad som har sagts. Bryman (2011) hävdar att det är av ytterst vikt vid kvalitativa studier att spela in intervjuerna för att fånga intervjupersonernas egna ordalag. Inspelningstiden för varje intervju låg mellan 20-30 minuter och den totala inspelningstiden var ca 107 minuter. Varje intervju spelades in på både en surfplatta och en mobiltelefon ifall något tekniskt problem skulle hindra inspelningen.

Då varje intervju transkriberades låg vikten på elevens språkliga konstruktioner av lösningsstrategier och inte tonfall. Ingen hänsyn har heller tagits till kroppsgester under intervjun eftersom studien enbart fokuserar de språkliga konstruktionerna. Gott om tid har avsatts för transkriberingen då det här är en tidskrävande uppgift, och det är enligt Bryman (2011) viktigt att inte skynda igenom processen eftersom det då lätt uppstår felaktigheter med konsekvensen att kvaliteten blir lidande. Eftersom citat, i den här studien, har en betydande roll i analysen har transkriberingen utförts med målet att så exakt som möjligt återge det som eleverna säger (Bryman, 2011). Transkriberingen ska vara en skriftlig återgivning av tal, men, menar Bryman, viss redigering kan vara nödvändig eftersom talspråket ofta inkluderar verbala tics, såsom ”öh”, vilka ibland kan exkluderas från texten för att göra den mer begriplig. Därmed har vissa verbala tics bortsetts från vid transkriberingen, men utan att ändra innebörden av det sagda.

4.6 Analysmetod

Det finns, enligt Bryman (2011), få etablerade analysmetoder för kvalitativa studier till skillnad från kvantitativ forskning. Den största utmaningen, påpekar Bryman (2011), vid analys av kvalitativ data är omfånget på materialet som ska analyseras. Bryman (2011) menar att det är svårt att värja sig från att analysera all data då den ofta är mycket innehållsrik, och därför är det av vikt att reducera insamlat material till det som är relevant för studiens syfte. Det finns inga entydiga regler om hur den här reduceringen ska gå till, men till skillnad från kvantitativa metoder kan analys av kvalitativ data ske löpande där analysen inte förutsätter att all data är insamlad för att påbörjas. Analysen av den här studiens data påbörjades vid starten av transkriberingen då olika citat analyserades med hjälp av det teoretiska ramverket. Därefter genomgicks all transkriberingsmaterial och lämpliga citat valdes ut i syfte att representera eleverna och för att besvara forskningsfrågorna. De utvalda citaten blev således till analyserbara enheter som kunde struktureras. Strukturen som växte fram innehöll fem olika kategorier som reflekterade uppgifternas struktur. Till sist gjordes en uppdelning av addition och subtraktion där alla fem kategorier ingår i båda.

4.7 Etiska överväganden

Studien har tagit hänsyn till flera etiska principer som täcker kraven om information, samtycke, konfidentialitet och nyttjande (Bryman, 2011). Eftersom studien involverar minderåriga krävs, enligt Bryman (2011), samtycke från föräldrar eller vårdnadshavare. För att hantera samtyckeskravet utformades en samtyckesblankett (se Bilaga 8). I blanketten ingår en samlad information om studiens syfte, om att deltagandet är frivillig samt kan avbrytas vid önskad tidpunkt, och att all information är konfidentiell. Studien introducerades muntligt till alla elever där de etiska kraven förklarades. Det tydliggjordes även att insamlad data endast används till forskningsändamålet och inte som underlag för betyg eller liknande. Totalt fick 50 elever var sin blankett i pappersformat. För att eleverna ska förbli anonyma nämns varken namn på skola eller stad där undersökningen är utförd, samt att elevernas riktiga namn har ändrats till fiktiva.

4.8 Validitet och reliabilitet

Begreppen validitet och reliabilitet används framförallt i kvantitativ forskning för att säkerställa kvalitet, men många forskare menar att dessa begrepp behöver omtolkas och modifieras inom kvalitativ forskning. Bryman (2011) hävdar att kvalitativa forskare har olika kritiska inställningar till begreppen, men ofta handlar det om ett behov att antingen ändra definitionen på begreppen eller hitta nya begrepp som bättre skulle kunna tillämpas på kvalitativ forskning. En problematik kring definitionen av validitet, menar Bryman (2011), är konnotationer som syftar till mätning av något slag, vilken kvalitativ forskning oftast inte intresserar sig för.

Enligt Bryman (2011) är det dock möjligt att anpassa begreppen till kvalitativ forskning utan att ändra dess mening, genom att lägga mindre tyngd på mätningsfrågor. Validitet kan ses som ett mått på kvalitet och därmed syfta till huruvida man identifierar eller ”mäter” det man avser mäta. För att höja validiteten på den här studien har en strävan varit att skapa en intern validitet genom en god överensstämmelse mellan det teoretiska ramverket och den analyserade data (Bryman, 2011). Ett annat sätt att stärka validiteten är att i texten använda exakta citat från deltagarna och genom att alla deltagare har fått samma uppgifter och intervjufråga. En intention har också varit att skapa en extern validitet för att resultatet ska kunna generaliseras till andra sociala miljöer, vilket ofta är en svårighet i kvalitativa studier då urvalet är begränsat. En svag generalisering har således gjorts genom att studiens resultat kan liknas vid resultat från en annan större studie (Gray, 1991). Dock är en sådan generalisering problematisk då bara fyra elever har deltagit. Syftet med studien är att få syn på dessa elevers förkunskaper och begreppsutveckling med en förhoppning om att liknande kartläggning kan utgöra ett verktyg för lärare. Reliabiliteten, enligt Byrman (2011), avser möjligheten för andra forskare att upprepa studien, vilket ofta är en fallgrop för kvalitativa studier då det är omöjligt att replikera sociala miljöer och beteenden. Den här studien har avsett att höja reliabiliteten genom att först göra en pilotstudie och sedan en fördiagnos för att noggrant välja begränsade antal uppgifter med tydlig koppling till vad som antas mätas. På grund av den begränsade strukturen på uppgifterna och intervjufrågorna är sannolikheten stor att andra forskare skulle kunna utföra en liknande studie. Reliabiliteten höjs därtill mer då den här studiens metod är baserad på flera andra studier med liknande karaktär på metoden (Gray, 1991, Löwing, 2016).

5. Resultat och Analys

I den här delen redovisas resultatet på den skriftliga diagnosen först och sedan det som har framkommit under intervjuerna.

5.1 Skriftlig diagnos

I resultatet framkommer huruvida eleverna har klarat de olika uppgifterna i den skriftliga diagnosen. Som beskrivits tidigare var diagnosen indelad i fem olika delar med både additions och subtraktionsuppgifter, varpå resultatet presenteras i två tabeller, (se Tabell 3 & 4), där de olika delarna från diagnosen blivit tilldelade olika bokstäver. Således representerar A del ett, B del två, C del tre, D del fyra och E del fem (se tabell i Bilaga 9). Diagnosdelarna är inom olika talområden (se Tabell i Bilaga 9) och således är A-uppgifterna inom talområde 1-9 och B-uppgifterna är inom talområde 1-19 med tiotalsövergångar. C- och D-uppgifterna är inom talområde 1-99, där den första är utan tiotalsövergångar och den senare är med. E-uppgifterna täcker talområdet 1-999 där både tiotals- och hundratalsövergångar sker. Rätt svar, i tabell 3 och 4, markeras med en grön färg medan ett felaktigt svar markeras med rött. Varje enskild elevs resultat presenteras för sig, och talet i rutan är det som eleven har svarat. I Bilaga 9 finns uppgifterna och de rätta svaren. Nedan visas resultatet i Tabell 3 för addition, vilket följs av Tabell 4 för subtraktion.

Tabell 3 - Addition (se Bilaga 9 för uppgifter och rätta svar)

	Kategori 1		**Kategori 2**		**Kategori 3**		**Kategori 4**		**Kategori 5**	
Elev	A1	A2	B1	B2	C1	C2	D1	D2	E1	E2
Jonas	9	7	15	14	47	78	93	83	153	675
Tilda	9	7	15	14	47	78	93	83	153	635
Olle	9	7	15	14	47	78	93	83	153	635
Vera	9	7	15	14	47	79	93	83	143	735

Inom området addition kunde majoriteten lösa de flesta uppgifterna. De felaktigheter som uppstod skedde i uppgift C2, E1 och E2. Som tidigare nämnts, motsvarar grön färg rätt svar och röd färg fel svar. Totalt antal fel var fyra stycken. Vera var ensam om ett felaktigt svar på uppgifterna C2 och E1, medan både Vera och Jonas hade svarat fel på uppgiften E2. Vera hade flest antal fel, vilka var tre stycken, och Jonas hade ett fel. De övriga två eleverna, Tilda och Olle, hade alla rätt.

Tabell 4 - Subtraktion (se Bilaga 9 för uppgifter och rätta svar)

	Kategori 1		**Kategori 2**		**Kategori 3**		**Kategori 4**		**Kategori 5**	
Elev	A1	A2	B1	B2	C1	C2	D1	D2	E1	E2
Jonas	4	3	8	7	2	82	2	64	35	205
Tilda	4	3	8	7	2	82	2	64	35	205
Olle	4	3	8	7	2	82	2	66	45	215
Vera	4	3	8	7	2	82	2	66	35	205

Resultatet för subtraktion visar att det fanns lika många fel, fyra stycken, som inom addition. Trots felaktiga svar kunde majoriteten av uppgifterna lösas korrekt. De felaktigheter som skedde återfanns i uppgifterna D2, E1 och E2. Återigen motsvarar grön färg korrekt svar medan röd färg visar fel svar. Totalt antal felaktiga svar var fyra stycken. Olle och Vera hade båda fel på uppgiften D2, medan Olle var ensam om felaktiga svar på uppgifterna E1 och E2. Olle hade flest antal fel, vilka var tre stycken, och Vera hade ett fel. De övriga två deltagarna, Jonas och Tilda, hade alla rätt.

Det skriftliga resultatet visar att de flesta eleverna klarade av att lösa de grundläggande aritmetiska uppgifterna för både addition och subtraktion. Det var lika många fel inom addition som inom subtraktion. Tre av fyra fel inom addition återfanns inom talområdet 1-999 och bara ett fel var inom talområdet 1-99 utan tiotalsövergångar. Två av fyra fel inom subtraktion skedde inom talområdet 1-99 med tiotalsövergångar, och de resterande två felen var inom talområde 1-999. Genom det skriftliga resultatet går det således att utläsa att majoriteten av felen uppstod inom de högre talområdena, medan majoriteten av eleverna hade korrekta svar inom de lägre talområdena. Tabellerna ovan visar enbart svaren på de skriftliga uppgifterna. Således ges här bara information om rätt eller felaktigt svar. Det går att se huruvida eleverna har klarat av att räkna ut dessa grundläggande aritmetiska uppgifter, men det är först i analysen av intervjuerna som elevernas tillvägagångssätt blir synliga.

5.2 Intervju

I den här delen presenteras det som framkommit i samtalen med eleverna kring deras tillvägagångssätt för lösningarna av den skriftliga diagnosen. Analys av elevsvar har gjorts i relation till studiens syfte som är att synliggöra elevers förkunskaper och begreppsutveckling genom deras val av lösningsstrategi och vad som avgör dessa val. Det teoretiska ramverket utgör verktyget för analysen.

Analysen presenteras genom samma kategorier som presentationen i resultatet, det vill säga addition presenteras först där utvalda uppgifter och citat ur kategorierna 1-5 analyseras. Därefter presenteras utvalda uppgifter och citat, ur kategorierna 1-5, från subtraktionsdelen. Analysen görs utifrån transkriberingen där citat har valts ut för att representera elevernas tillvägagångssätt och begreppsutveckling.

Addition Kategori 1 - Talområde 1-9 (uppgifter A1 & A2)

Inom det här talområdet visar de flesta eleverna att de har automatiserat baskombinationer eftersom operationerna kan utföras med flyt (Löwing, 2016). När baskombinationer är automatiserade kräver elementära beräkningar ingen ansträngning utan uppmärksamheten kan, enligt Löwing (2016), istället läggas på att se samband. Ingen av eleverna behövde använda strategin "räkna alla", vilket Gray & Tall (1994) menar är tecken på att elementära procept har utvecklats, eftersom symbolerna ses som *tal* och en procedur att räkna alla "objekt" krävs inte. Det tyder på att de flesta, på den här nivån, befinner sig i den andra matematiska världen, den proceptuella (Tall, 2004). I båda uppgifterna, 4+5 och 4+3, uttryckte majoriteten att summan i sig var en befintlig kunskap som kunde ses direkt. Det här tyder på att flera sammankopplade representationsformer finns som eleverna använder sig av för att flexibelt och med flyt manipulera symbolerna. Det vill säga att de har utvecklat flera procept som kan möjliggöra proceptuellt tänkande.

I uppgiften 4+5 var det tre elever, Olle, Tilda och Vera, som visste att svaret var 9 men de kunde också komma fram till svaret genom befintlig kunskap om dubblor +/- 1, antingen 4+4+1 eller 5+5-1. Olle uttrycker att: "4+4 det vet jag ju blir 8, men en 5:a då ska man plussa på 1. Då blir det 9. Ja också kan jag det i huvudräkning". Jonas uttrycker något mer tydligt att den här talkombinationen är en självklarhet för honom, "jag kan det bara! Varje gång jag ser de siffrorna så ser jag liksom 9”, vilket tyder på att Jonas befinner sig i den proceptuella världen (Tall, 2004) eftersom symbolerna 4+5 är en annan representation av 9 och för att växlingen mellan dessa två representationsformer sker obehindrat (Gray & Tall, 1994). Uppgiften 4+3 löstes på liknande sätt av Olle, Vera och Jonas, men Tilda avvek här från den befintliga kunskapen om dubblor +/-1 genom att återgå till den delvis procedurella strategin “räkna från”. Hon förklarar att “då tänker jag bara 4, 5, 6, 7. Alltså att jag liksom räknade det”. Då jag frågade om hon använde fingrarna beskrev hon att hon tänkte stegen i huvudet. Det här innebär, enligt Gray och Tall (1994), inte ett proceptuellt tänkande då vald strategi betyder att eleven inte helt befinner sig i den andra matematiska världen utan snarare i den första (Tall, 2004). I jämförelse med de andra tre kan Tilda inte i det här fallet utnyttja befintliga kognitiva scheman för att med flyt utföra operationen.

Addition Kategori 2 - Talområde 1-19 med tiotalsövergångar (Uppgifter B1 & B2)
Även inom det här talområdet visar eleverna förmågan till proceptuellt tänkande då ingen behövde gå tillbaka till en procedurell strategi utan istället använde de sig på olika sätt av redan existerande kunskap om 10-kompisarna eller dubblor +/-1 för att lösa uppgifterna. Vera löser uppgiften 8+7 genom annan befintlig kunskap, “Ja för 7+7 blir 14 och det är 1 mer så det är 15”, vilket tyder på att 15 i sig inte är en existerande kunskap utan hon använder dubblor och adderar sedan 1 för att komma fram till svaret. Olle använde samma strategi som Vera. Tilda använder istället 10-kompisar för att lösa uppgiften och dessutom visar hon förståelse för den kommutativa lagen; “Jag minns inte om jag tänkte 7+8 eller 8+7, men jag tänkte i alla fall att 8 då är det två tal kvar tills det blir 10 och då finns det bara 5 kvar att lägga på”. Jonas använder också 10-kompisar och därmed visar han och Tilda förmågan att dela upp tal i termer så att 7+8 kan ses som 8+2+5=10+5, vilket innebär att de bryter ner symbolerna och bygger upp de igen. Det här indikerar en god taluppfattning som gynnar begreppsutvecklingen då de smidigt och obehindrat växlar mellan de olika representationsformerna, vilket Gray och Tall (1994) menar är tecken på proceptuellt tänkande.

På uppgiften 5+9 valde tre elever, Olle, Tilda och Vera, att bryta ner och bygga upp symbolerna genom befintlig kunskap om 10-kompisar. Veras beskrivning, “5+9 det är 14. För det är ju 1 kvar tills det blir 10. Och då är det 4 kvar där så då blir det 14”, som är liknande Olle och Tildas, visar förmågan att göra om symbolerna till 9+1+4=10+4. Återigen sker en flexibel pendling mellan representationsformerna och antyder ett proceptuellt tänkande. Jonas har upptäckt ett mönster med talet 9 som de andra eleverna inte uttryckligen känner till då han beskriver “om det är en 9:a där så tar jag alltid den minus 1 [5-1]. Då vet jag att det blir en 4:a och då vet jag att det är 14. Jag kollar först på 5:an och tar [den] minus 1”. Därmed kan han använda redan existerande kognitiva scheman och enbart titta på entalet som ska adderas och subtrahera ett från det och på så vis undvika onödig minnesbelastning, vilket är en stor fördel vid mer komplexa talkombinationer. Utöver det här tillvägagångssättet beskriver Jonas möjligheten att använda 10-kompisarna vilket visar att flera olika representationsformer finns tillgängliga för honom att använda flexibelt.

Addition Kategori 3 - Talområde 1-99 utan tiotalsövergångar (Uppgifter C1 & C2)
Inom det här talområdet fanns vissa skillnader i hur eleverna gick tillväga för att lösa uppgifterna. Då Olle och Vera skulle lösa uppgiften 5+42 användes återigen den befintliga kunskapen om 10-kompisarna, men i det här fallet var syftet att ta reda på om det skulle ske en tiotalsövergång eller inte. Olle säger “Om 2:an, i 42, hade varit en 5:a då hade det blivit större än 40, men nu är det ju inte så för 2:an är ju mindre än 5”. På så vis kan både Olle och Vera gå vidare med att tänka bort 40 och generalisera 5+42 till 5+2. Symbolerna behandlas utifrån en proceptuell uppfattning som gör att manipuleringen sker med flexibilitet och flyt

(Gray & Tall, 1994). Tilda, som använde strategin “räkna från” på uppgiften 4+3, visar även här att möjligheten till proceptuellt tänkande inte alltid är tillgängligt för henne då samma strategi används för 5+42. Likt uppgiften 8+7 väljer hon att, enligt den kommutativa lagen, byta plats på 5 och 2. Hon uttrycker att “då tänkte jag 45+2, istället för 5+42 så jag bytte ut 2:an mot 5:an och så la jag till 2”. När jag frågar henne varför hon byter plats på talen svara hon “jag vet inte, för att det är enklare att räkna 5+2 än 2+5. För då tänker man inte så många steg”. Jag fortsätter och frågar om hon räknar stegen och då svarar hon “ja, jag räknar 6,7 i huvudet.”. I det här fallet använde hon inte fingrarna, dock uttrycker hon att hon gör det ibland, vilket tyder på att hon delvis befinner sig i den första matematiska världen (Tall, 2004). Även på nästa uppgift som är 72+6 byter hon plats på entalen och sedan använder hon återigen strategin “räkna från”.

Jonas, som i kategori 1 och 2 tydligast rört sig i den proceptuella matematiska världen (Tall, 2004), visar även i den här uppgiften att han har upptäckt ett mönster som han drar nytta av. Han beskriver att ”ofta när det är så så tänker jag bort 4:an så tar jag 5+2. Och det kan jag bara. Det där med ojämnt plus två blir ojämnt. 2-hopp det sitter liksom. Den tabellen +2, den kan jag”. Han har sett ett samband mellan addition av 2 med jämt eller ojämnt tal, vilket tyder på att han kopplar ihop talen i uppgifterna med summan. Han har utvecklat förmågan att uppfatta symboler både som process och begrepp, vilket möjliggör en flexibel manipulering av talen. Han använder lämplig befintlig kunskap i olika situationer vilket signalerar ett proceptuellt tänkande (Gray & Tall, 1994). Till skillnad från Jonas har Vera, som svarat fel på uppgiften 72+6, inte automatiserat +2-tabellen. Hon säger “6+2 det är 9...nej det är ju bara 8:a”. Det här skulle kunna vara ett slarvfel utan större betydelse, å andra sidan kan en brist på automatisering av baskombinationer minska antalet tillgängliga representationsformer som möjliggör proceptuellt tänkande (Gray & Tall, 1994).

Addition Kategori 4 - Talområde 1-99 med tiotalsövergångar (Uppgifter D1 & D2)
I den här kategorin börjar vissa mönster träda fram i hur eleverna väljer att lösa uppgifterna. Olle väljer nästan alltid att använda sig av befintliga kognitiva scheman om 10-kompisarna vilket han även gör på uppgifterna 84+9 och 75+8. För att lösa 84+9 beskriver han att “nu är ju 4+9 det är inte 10-kompisar fast det är över så då blir det ju 90-nånting. Och sen körde jag 9+4 och samma sak där, jag kör 9:an till en 10:an”. Han har en proceptuell uppfattning, vilket gör att han flexibelt kan manipulera talen för att bygga upp nya kombinationer. Det här tyder på en god taluppfattning, trots det långa tillvägagångssättet som skulle kunna belasta minnet vid mer komplexa talkombinationer.

Tilda som tidigare uttryckt att hon gärna byter plats på entalen gör även så på dessa två uppgifter. På båda uppgifterna byter hon först plats på entalen och därefter använder hon 10-kompisarna för att bryta ner och bygga upp symbolerna till 89+1+3=90+3 och 78+2+3=80+3. Tilda väljer en lång väg i jämförelse med Jonas, som också använder befintlig kunskap om 10-kompisar, men som går en kortare väg. Han säger “här tänker jag från 84 till 90 är 6 och då är det 3 kvar. Det sitter att det är 3 kvar. Så där tänker jag 84+6+3”. Han löser uppgiften 75+8 på liknande sätt genom att generalisera och bryta ner och bygga upp symbolerna 5+8 till 5+5+3. Hans tillvägagångssätt involverar färre steg än Tildas. Tilda beskriver även att hon “tog 2 från 5 så att det skulle bli 80”, vilket kan tyda på att hon mentalt måste tänka att hon lägger över 2 objekt från en hög till en annan istället för att se talet 5 som 2+3 och därmed tänka 78+2+3. När jag nämner att bytet av ental verkar vara en vanlig strategi för henne motiverar hon bytet med: “Ja jag brukar nog göra så här för jag tycker det är enkelt om man tar såhär bort så att det blir en 10:a och sen lägger jag på resten för då behöver jag inte tänka såhär 8, 9, 10, 11 utan då är det bara att lägga till”. Trots den längre vägen har hon hittat en strategi där hon kommer bort från att räkna varje steg, vilket tyder på att hon delvis befinner sig i den andra matematiska världen.

Då Vera löser uppgiften 75+8 fastnar hon och förklarade att det var för att 5+8 går över 10. Här framträder vissa oklarheter kring Veras begreppsbild (Tall & Vinner, 1981) och hennes taluppfattning. När jag frågar vilka steg hon tog svara hon: "5-8 och det blev 3. Att om man gör plus så är det ändå att det blir större så då måste det ändå bli 83". Jag försöker att få ur henne hur hon har tänkt när hon valde att först göra 5-8 men hon svarar bara: "Det vet jag inte". Här blir det lite svårt att tyda hennes tillvägagångssätt och det blir tydligt att hon själv inte riktigt heller vet varför hon gör som hon gör. Dessutom väljer hon att säga "5-8 och det blev 3", vilket inte stämmer och därför kan hennes begreppsbild (Tall & Vinner, 1981) av subtraktion vara bristande. Hon väljer att tänka subtraktion istället för addition, men det är inte tydligt varför och hon kan själv inte förklara hur hon tänker, vilket kan tyda på en bristande taluppfattning.

Addition Kategori 5 - Talområde 1-999 med tio- och hundratalsövergångar (Uppgifter E1 & E2)

På uppgiften 67+86 avviker Vera från de övriga tre genom att välja en algoritm för att lösa uppgiften, och då blir en aspekt synlig som antyder en brist i hennes taluppfattning och begreppsbild (Tall & Vinner, 1981) av addition. När hon ställde upp talen valde hon att skriva det högsta talet först och det lägsta talet under. När jag fråga henne varför hon valde det svarade hon "jag tänkte eftersom det är störst. För Emma [läraren] sa någon gång i 4:an att vi skulle skriva det största talet längst upp". När jag frågar om det hade spelat någon roll i det här fallet svara hon "det vet jag inte förrän jag har räknat ut det. Kanske. Då blir det liksom i fel ordning". Den här beskrivningen tyder på brister i hennes begreppsbild (Tall & Vinner, 1981) av addition och att hennes taluppfattning inte inkluderar den kommutativa lagen. Tilda räknar smidigt ut 67+86 genom huvudräkning, men väljer en algoritm för uppgiften 347+288 eftersom "det är enklare när det är högre tal för då är det inte så mycket att hålla i huvudet samtidigt". När hon i första steget ska addera 7+8 vill hon använda 10-kompisar men fastnar då hon inte vet om hon ska tänka "minus 2 från 7 eller minus 3 från 8 för jag brukar göra så med båda talen, att jag tar så att det blir 10". Det steget kräver extra ansträngning och hindrar ett flyt i operationen. Nästa steg är att addera 1+4+8 och då väljer hon att göra "1+4 så att det blir 5. Sen tog jag 2 från 5 och la till på 8 så att det blev 10 och sen var det 3 kvar", vilket innebär ett flertal steg som kan tyckas onödiga för att det kan belasta minnet.

Subtraktion Kategori 1 - Talområde 1-9 (uppgifter A1 & A2)

Uppgifter som involverar dubblor, vilket 8-4 och 6-3 gör, är enkla för alla fyra eleverna att lösa. Kunskapen om dubblor är en etablerad befintlig kunskap som är automatiserad hos eleverna vilket Jonas, likt de andra tre, tydligt uttrycker "när jag vet att det bara är hälften så går det fort. Det är liksom basic-uppgifterna, de bara sitter". Alla fyra eleverna har således, på den här nivån, utvecklat förmågan att se symboler både som process och begrepp. Därmed rör de sig i den proceptuella världen (Tall, 2004). Det framgår även att alla fyra eleverna ser addition och subtraktion som sammankopplade för att talen flexibelt kan omorganiseras, vilket Gray och Tall (1994) menar är typiskt för proceptuellt tänkande, även om uppgifterna inom aktuellt talområde inte förutsätter att samma flexibilitet finns vid mer avancerade talområden. Tilda beskriver, precis som de andra tre, att "3+3 blir 6 så 6-3 är 3", vilket visar på den flexibla möjligheten att omorganisera delarna från subtraktion till addition helt obehindrat. Det tyder även på att eleverna har, på den här grundläggande nivån, en god begreppsutveckling och att begreppsbilden (Tall & Vinner, 1981) för addition och subtraktion inkluderar ett samband mellan räknestrategierna.

Subtraktion Kategori 2 - Talområde 1-19 med tiotalsövergångar (uppgifter B1 & B2)
För uppgiften 14-6 användes två olika strategier där två elever, Olle och Vera, återigen kopplar ihop subtraktion med addition, medan Tilda och Jonas väljer att bryta upp talen och bygga upp dem i en ny konstellation. Olle säger "ja för det jag vet är att 8+6 blir 14. Till exempel om man gör en 8:a till en 10:a då blir det 16 men nu ska man ju ta bort 2 så då blir det 14", vilket synliggör att han använder sig av flera befintliga kognitiva scheman på ett flexibelt sätt. Redan existerande kunskap här är sambandet mellan subtraktion och addition men det framgår även att 8+6=14 är en befintlig kunskap. Han kan även utnyttja redan existerande kunskap om 10-kompisar för att lösa uppgiften då 10+6 skulle vara 16, vilket förutsätter att svaret måste vara 8 eftersom skillnaden mellan 16 och 14 är 2 och 8+2 är tiokompisar. Hans flyt och flexibilitet i användandet av befintliga kognitiva scheman indikerar ett proceptuellt tänkande (Gray & Tall, 1994).

Vera använder en liknande strategi, men hon förmedlar inte samma flyt och flexibilitet då hon först säger "i min hjärna tog det bara stopp. Vad som blev 6 plus nånting är 14", men efter det fortsätter hon "sen kom jag på att det blev 8". När jag frågar vidare om hur hon kom fram till 8 blir det svårt att tolka hennes tillvägagångssätt då hon inte tydligt kan beskriva sina tankesteg utan säger "ja jag vet inte riktigt. Att det saknas i alla fall 2 upp till 10 [från 8] och då måste det vara 4 kvar för att 4+2 är 6". Hennes redogörelse antyder att hon gick samma väg som Olle, men hennes begreppsutveckling gör sig inte lika synlig, vilket medför en indikation om bristande förståelse då sambanden mellan talen inte uttrycks. Till skillnad från Vera och Olle, löser Tilda och Jonas uppgiften genom att först ta bort 4 för att utnyttja tiokompisarna. Jonas beskriver "där räknar jag minus 4 och 10-2. Jag delar upp det och tar det till 10 och sen vidare", vilket synliggör förmågan att flexibelt omorganisera symbolerna från 6 till 4+2 för att tänka 14-4=10 och sen 10-2=8 där växlandet går mellan flera olika representationsformer . Det sker en obehindrad växling mellan processer och begrepp vilket tyder på proceptuellt tänkande (Gray & Tall, 1994).

På uppgiften 16-9 använder Olle och Jonas redan existerande kunskap om hur 9+nånting fungerar. Jonas uttrycker, som på additionsuppgiften 5+9, att han har förstått ett mönster "varje gång det är 9 då blir det lite så att då är det den plus 1 [6+1], sexan plus 1 blir svaret. Så när det är 9 så hänger de ihop". Både det kända mönstret med talet 9 utnyttjas, samt förmågan att koppla ihop addition med subtraktion, vilket indikerar ett utvecklat proceptuellt tänkande. Olle antyder också att han känner till mönstret då han säger "när man kör med 9:an då måste man alltid ha en större".

Subtraktion Kategori 3 - Talområde 1-99 utan tiotalsövergångar (uppgifter C1 & C2)
På uppgiften 77-75, och även på uppgiften 89-7, framgår det att både Tilda och Vera använder strategier som involverar procedurer som antyder att de rör sig i den första matematiska världen (Tall, 2004). Tilda beskriver "då tänker jag vad 5 behöver för att bli 7 och det behövs ju bara 2 då" vilket uppmanar till att utföra en procedur som hon sedan förklara med "jag räknade 76, 77". Vera gör på liknande sätt men hon föreställer sig en mental bild av tallinjen för att ta reda på "hur många det är kvar tills det blir 77 och då är det två steg". När jag frågar henne om hon bara ser att det är 2 säger hon "alltså jag tänkte det som en tallinje och så hoppade jag två steg" som innebär subtraktionsstrategin "räkna upp" som är kopplad till den första matematiska världen (Tall, 2004) och inte ett tecken på proceptuellt tänkande (Gray & Tall, 1994). Vera gör på samma sätt för uppgiften 89-7 "då tänker jag också som en tallinje från 7 till 9 det är 2". Båda två kan dock se sambandet mellan addition och subtraktion. Jonas tillvägagångssätt till skillnad från Tilda och Veras är att titta på skillnaden mellan 5 och 7, "jag ser på skillnaden mellan de två [5 och 7] och då är det 2". För honom, och för Olle som gör på liknande sätt, är talen procept där symbolerna inte frammanar en procedur att räkna stegen som Tilda och Vera utan istället växlar han med flyt

mellan process och begrepp.

Då Tilda ska lösa uppgiften 89-7 så tänker hon först "att det var 89-87 så då började jag att räkna vad 7 behöver för att bli 9", och då kommer hon fram till svaret 2, men sen kommer hon på att "det inte var minus 87 och då la jag till 80". När jag frågar henne hur hon gjorde för att komma fram till två svarar hon "jag tänkte 7, 8, 9", vilket återigen är strategin "räkna från" som innebär att hon inte befinner sig i den andra matematiska världen (Tall, 2004). Hennes delvis procedurella tillvägagångssätt blir ännu tydligare när jag påpekar att hon även på fördiagnosen hade missat att lägga till tiotalet, och då förklarar hon att "jag tänker nog 9-7 för att det är enklare att räkna 7, 8, 9 än 87, 88, 89 och sen glömmer jag att lägga tillbaka 8". Hennes tendens att glömma att lägga tillbaka tiotalet skulle kunna vara ett tecken på att hennes procedurella tillvägagångssätt belastar korttidsminnet och hindrar proceptuellt tänkande.

Subtraktion Kategori 4 - Talområde 1-99 med tiotalsövergångar (uppgifter D1 & D2)

Inom det här talområdet blir det återigen synligt att Tilda och Vera förlitar sig på proceduren att räkna antal steg och det framgår också att Olle och Vera kan ha en något bristande begreppsbild (Tall & Vinner, 1981) av subtraktion. För att lösa uppgiften 91-89 använder Tilda sina fingrar som konkret hjälpmedel och säger "jag tänkte att jag räknade 89, 90, 91" och Vera ser tallinjen "alltså 89 på en tallinje och upp till 91 är 2. Det är två hopp emellan", där båda tillvägagångssätten är strategin "räkna upp" som innebär att eleverna inte har utvecklat uppfattningen om dualiteten i matematikens symbolspråk och att de därmed delvis befinner sig i den första matematiska världen (Tall, 2004). I jämförelse använder Jonas en strategi som innebär att förmågan att uppfatta symboler både som process och begrepp har utvecklats, vilket gör att han undviker proceduren att räkna stegen genom att tänka "det är lite som 89+1+1". Han växlar på så vis över från subtraktion till addition och ser att uppgiften kan lösas genom symbolerna 89+1+1. Jag ber Jonas jämföra den här uppgiften med 77-75, från kategori 3, där han hade uttryckt att han bara såg att svaret var 2 och då säger han "här får jag tänka lite mer men det går fortfarande snabbt", vilket tyder på att han, med flyt genom symbolerna, kan växla mellan begrepp och process. Här kan det vara svårt att se skillnaden mellan ”räkna från" och så som Jonas tänker. Skillnaden ligger i att den första involverar en procedur att räkna stegen medan 89+1+1 i det här fallet bara är en annan representationsform som Jonas snabbt kan pendla till för att få fram svaret. Han räknar inte stegen utan använder sig av symbolspråket.

Då Olle och Vera ska lösa uppgiften 72-8 kommer båda fram till svaret 66 vilket indikerar en brist i uppfattningen av subtraktion vid tiotalsövergångar. Båda kan se att summan måste vara under 70, men de har svårigheter att hantera att ett ental som är högre ska subtraheras från ett som är mindre. Olle säger "2-8 det går ju typ inte. Så då måste det bli mindre och då blev det 60-nånting. Och sen så 8-2 blir ju 6 så då blev det 66" vilket tyder på att växlandet mellan olika representationer inte sker med flyt för att han inte kan hålla reda på vad som ska subtraheras. Det tyder också på en något bristande uppfattning av subtraktion där begreppsbilden (Tall & Vinner, 1981) inte inkluderar en förståelse för hur subtraktion utförs vid tiotalsövergångar. Vera har liknande svårigheter och uttrycker en osäkerhet då hon säger "alltså då vet jag inte för här är det 2-8 och det är 6", vilket inte stämmer. Hon kan däremot använda befintlig kunskap om talens storlek för att förstå att summan måste slå över till 60 då hon säger "för alltså 8 det är ju större än 2 så det måste ju bli mindre än 70". Trots att hon går igenom uppgiften igen håller hon fast vid uppfattningen att 2-8 blir 6 och att "därför blir det 66". Här använder hon inte tallinjen för hon tycker att det är svårt att hoppa så många steg. Först när jag föreslår att hon delar upp stegen för att hoppa 2 steg bak till 70, säger hon att det sedan är "6 steg kvar att hoppa". Då börjar hon räkna bakåt "70, 69, 68 då har vi hoppat 4 och sen 67, 66 ja det blir 64", vilket gör att hon inser att något gått snett men det är inte tydligt att hon förstår vad. Anmärkningsvärt att hon inte direkt vet att 70-6 är 64 eftersom 6 och 4 är tiokompisar. Procedurerna antyder att hon inte har utvecklat uppfattningen om dualiteten i matematikens symbolspråk. Till skillnad från Vera tänker Jonas direkt "72-2, och om man tar bort 2 från 8 så blir det 6 sen tog jag 70-6 och det vet jag blir 64". Snabbt och smidigt delar han upp 8 till 2+6 för att sedan använda tiokompisarna, vilket innebär att Jonas befinner sig i den proceptuella världen (Tall, 2004).

Subtraktion Kategori 5 - Talområde 1-999 med tiotals- och hundratalsövergångar (uppgifter E1 & E2)

I den sista kategorin blir det, precis som i kategori 4, tydligt att flera elever har samma svårighet som beskrevs ovan där subtraktion av ett högre ental blir utmanande. Olle, som på uppgiften 82-47 har svarat 45 istället för 35, beskriver "jag vet ju att 8-4 det blir ju 4 och sen, nej vänta här har jag nog gjort fel. Jag tänkte 7-2 men det ska vara 2-7, den här var lite krånglig". Han har således upptäckt att det blivit fel och försöker att hitta ett tillvägagångssätt genom att tänka "om jag kör 12-7 det blir ju 3", vilket visar att han har en taluppfattning som gör det möjligt att omorganisera 2 till 12, men det är oklart varför han kommer fram till differensen 3. Men därefter säger han "alltså om jag har 82 då vill jag ha 2:an till ett tvåsiffrigt tal så att jag kan köra 7 minus något så då kör jag 10 där istället" vilket antyder att han kanske tänkte 10-7=3. Det framgår att Olle har svårt att hålla reda på alla olika steg och därför väljer han en algoritm men blir ändå förvirrad för att han gör om 7 till 17 och kommer fram till att 12-17 är 15. Efter ett tag utbrister han dock "ok 35, blir det 35?" för att han har kommit på att 5+7 blir 12 och 4+4 blir 8, men tillsammans skulle 80+12 bli 92 och inte 82, vilket visar att han har lyckats förstå vad som gått snett. Olle har samma svårighet med 2-7 på nästa uppgift, 632-427, då han uttrycker "det här var klurigt! 2 och 7, det är nåt som känns jobbigt med dem", men genom en algoritm ser han att det är just "växlingen" från tiotalen som ställer till det. En antydan finns att Olles tillvägagångssätt, vid mer komplexa huvudräkningsuppgifter, kräver en belastning på korttidsminnet vilket kan orsaka begränsningen i flytet av symbolmanipuleringen.

Vera, som direkt gjorde en algoritm för 82-47, löser uppgiften men när jag frågar henne hur hon hade gjort för att lösa den i huvudet svarar hon "då hade jag räknat från 47 till 82" och när jag frågar henne hur säger hon "48, 49, 50 och så hade jag skrivit upp en massa streck och sen bara räknat strecken". Hennes uttalande kan tolkas som att hon inte har möjlighet att bygga vidare utifrån befintlig kunskap, utan istället måste hon gå igenom en lång procedur med troliga fel i form av missade streck. Således har inte proceptuellt tänkande utvecklats utan hon befinner sig i den första matematiska världen där konkreta föremål skulle behövas för att lösa uppgiften utan en algoritm (Tall, 2004). Jonas som först uttrycker en viss osäkerhet vid uppgiften 82-47 säger "2-7 är 5 så då är det 45, nej vänta nu 2-7, det går inte", vilket gör att han istället byter strategi och tänker "man kan ju ta 47+3 blir 50 och sen plus 30, 33+2 då blir det ju 35". Det här bytet, där han bygger på talet 47 tills det blir 82, innebär en flexibilitet i hans förmåga att använda andra befintliga kognitiva scheman vid osäkerhet, vilket kan vara ett tecken på proceptuellt tänkande. Även på sista uppgiften, 632-427, antyder Jonas ett proceptuellt tänkande då han flexibelt och med flyt växlar mellan olika representationsformer, processer och begrepp utan att belasta minnet. Han uttrycker då att "7+3 då blir det 430 [generalisering av 427+3] … då la jag upp 3 på minnet … från 430 upp till 630 det är 200 … så sen 200 plus 5 [5 från 2 i 632 och 3 från minnet], vilket sker obehindrat och med flyt eftersom han rör sig i den proceptuella världen (Tall, 2004) och kan använda aktuella kognitiva scheman.

6. Diskussion och slutsats

Syftet med den här studien var att synliggöra elevers begreppsutveckling och förkunskaper genom deras val av strategier vid lösandet av grundläggande uppgifter inom aritmetik. Uppgifterna som eleverna har löst är inom ett område vilket ses, enligt läroplanen (Skolverket, 2016), som förkunskaper för årskurs 4-6 och därmed anser jag de lämpliga för att kartlägga elevernas begreppsutveckling då kunskapen som testas är en grund för matematiken i årskurs 4-6. Jag har genom teorin om begreppsbilder (Tall & Vinner, 1981) och tre matematiska världar (Tall, 2004) analyserat elevernas tillvägagångssätt för att synliggöra huruvida de visar tecken på proceptuellt tänkande eller om det finns procedurella begränsningar som hindrar eleverna att utveckla proceptuellt tänkande.

Det blir tydligt genom analysen att en diagnos med information om rätt eller fel svar inte i sig själv ger tillräckligt med underlag för att veta var eleven befinner sig i sin begreppsutveckling och hur elevens begreppsbild (Tall & Vinner, 1981) ser ut. En skriftlig diagnos kan dock ge vägledning om hur många och vilken typ av fel eleverna gör. Genom att notera flyt eller inte flyt genom tiden som diagnosen utförs på går det också att få en föreställning om huruvida eleverna har automatiserat baskombinationer. Tar diagnosen lång tid går det att ana att eleven använder strategier som innebär en större kognitiv belastning. Då är det troligt att eleven inte fullt ut har utvecklat ett proceptuellt tänkande och vissa aspekter kan behöva synliggöras för eleven. Dessa aspekter kan variera från elev till elev och därmed krävs individuella samtal. Ofta är det dock brist på tid för lärare och individuella samtal går inte alltid att genomföra så som den här studien har haft möjlighet att göra. Ett alternativ skulle kunna vara att under lektionstid försöka få syn på de olika begreppsbilderna som existerar och uppmuntra till att dela dessa föreställningar med målet att reda ut missförstånd och lära varandra se mönster som kan bidra till proceptuellt tänkande.

Genom analysen anser jag att alla fyra elever har utvecklat elementära procept då ingen elev var tvungen att räkna alla objekt. Elementära procept innebär dock inte att alla elever har utvecklat procept som kan möjliggöra proceptuellt tänkande där flyt och flexibilitet i manipuleringen av tal som både process och begrepp möjliggör förmågan att fritt växla mellan de olika symboliska representationerna. Det är just procept som är grunden till den här flexibla växlingen och det som Gray och Tall (1994) benämner proceptuellt tänkande. Analysen synliggör därmed att alla elever inte konsekvent befinner sig i den proceptuella världen (Tall, 2004) utan att framför allt två elever även rör sig i den första matematiska världen (Tall, 2004).

Inom talområdet 1-9 framgick att symbolerna 4+5, 4+3 kunde vara representationsformer för summan 9 och 7 där dessa i sig var befintlig kunskap. De flesta hade även redan existerande kognitiva scheman om dubblor, som kan byggas vidare på genom att addera eller subtrahera 1, vilka framstod som ytterligare tillgängliga representationsformer då symbolerna i uppgiften även frammanade 4+4+1, 5+5-1, 3+3+1 eller 4+4-1. En elev återgick till strategin "räkna från" där symbolerna 4+3 frammanade ett fysiskt räknande vilket innebär att eleven befinner sig i den första matematiska världen (Tall, 2004) där varken summan är en befintlig kunskap eller möjligheten finns att utnyttja redan existerande kunskap om dubblor +/- 1. Således behövde eleven räkna stegen från 4 och upp till 7, vilket inom mer komplexa talområden kan bli en belastning för korttidsminnet och hindra proceptuellt tänkande. Uppgifterna 8-4 och 6-3 löste alla fyra elever obehindrat genom proceptuellt tänkande där subtraktion och addition framstod som sammankopplade så att en omorganisering av delarna kunde ske med flyt och flexibilitet, vilket tyder på proceptuellt tänkande (Gray & Tall, 1994). Således har kunskap om dubblor automatiserats och därför är symbolerna i uppgiften bara en annan representationsform för differenserna 4 och 3.

Inom talområdet 1-19 framgick igen att flera elever valde, för uppgifterna 8+7 och 5+9, att använda dubblor +/- 1, men i det här fallet framstod inte summan som befintlig kunskap utan dubblorna utnyttjades för att lösa uppgifterna. Förmågan att bygga vidare utifrån befintliga mentala scheman då svaret inte kan ses direkt innebär ett tecken på proceptuellt tänkande (Gray & Tall, 1994). För dessa additionsuppgifter användes även redan existerande kunskap om tiokompisar och talens uppbyggnad då 8+7 kunde brytas ner och byggas upp till delvis nya termer så att talkombinationen 8+2+5 tog form. Den här omorganisationen kunde, på grund av tillämpningen av befintliga kognitiva scheman, ske med flyt och det blir tydligt att ingen ansträngning behövdes, vilket antyder proceptuellt tänkande. Här framstod även att en elev hade kunskap om den kommutativa lagen då 8+7 kunde ses som 7+8. Även för uppgiften 5+9 kunde befintlig kunskap om tiokompisarna användas för att flexibelt bryta ner och bygga upp symbolerna till 9+1+4 =10+4, där sista steget är en annan representationsform av 14 och således är summan en existerande kunskap som kan ses direkt. Förmågan att på det här viset manipulera symbolerna flexibelt är enligt Gray och Tall (1994) tecken på proceptuellt tänkande. En elev hade ytterligare befintlig kunskap om ett mönster vilket kunde användas för att direkt veta vad 5+9 blir. Att upptäcka mönster är enligt Löwing (2011) en del av taluppfattningen och i det här fallet kan nuvarande mentala scheman om mönster användas för att undvika en minnesbelastning vilket möjliggör proceptuellt tänkande. För subtraktionsuppgiften 14-6 framgick att beståndsdelarna snabbt kunde omorganiseras till 8+6=14 vilket betyder att subtraktion och addition är sammankopplade och antyder proceptuellt tänkande (Gray & Tall, 1994). Det innebär vidare att begreppsbilden, som beskrivs av Tall och Vinner (1981), av addition och subtraktion inkluderar sambandet mellan dessa räknesätt. En elev är dock otydlig i sin formulering då det här sambandet inte uttrycks, även om det används, vilket kan tyda på att en konceptuell förståelse inte finns för sambandet och därmed kan det behöva synliggöras för att bli en del av elevens begreppsbild. På uppgiften 14-6 kunde även tiokompisarna användas och befintliga kognitiva scheman om hur tal kan delas upp i termer för att omorganisera symbolerna 14-6 till 14-4-2, vilket är tecken på proceptuellt tänkande. Två elever kunde återigen använda befintlig kunskap om mönstret med talet 9 för att lösa uppgiften 16-9. Dessa två elever kunde dessutom växla från att se subtraktion som addition utan besvär och den flexibilitet som tillvägagångssättet innebär anser jag vara proceptuellt tänkande.

När uppgifterna kommer till talområdet 1-99, med eller utan tiotalsövergångar, blir det mer tydligt vilka elever som tenderar att falla tillbaka till mer procedurella tillvägagångssätt, vilket jag tolkar som skillnader i begreppsutvecklingen. Samma elev som två gånger innan uttryckt ett vetande om 9:ans mönster, uttrycker på uppgiften 5+42 och 72+6 ett mönster med två-hopp kopplat till jämna och ojämna tal. Jag tycker att det blir tydligt att den här eleven har många olika typer av befintlig kunskap där lämplig kunskap väljs ut beroende på vilka symboler han möter. Vägen genom tiokompisarna, som två andra elever valde, går bra, men innebär fler steg än det tillvägagångssättet som blir möjligt baserat på det kända mönstret om 2-hopp. Det här skulle kunna betyda att proceptens interna struktur (Gray & Tall, 1994) är mer utvecklade hos eleven som har flest tillgängliga befintliga kognitiva scheman, vilket kan leda till högre grad av proceptuellt tänkande. I jämförelse måste en annan elev på flera uppgifter byta plats på entalen för att slippa räkna så många steg men undviker trots allt inte ett procedurellt räknande. Det här tillvägagångssättet innebär att uppfattningen om dualiteten i matematikens symbolspråk inte har utvecklats, vilket jag anser betyder att den här eleven inte har en begreppsutveckling som möjliggör proceptuellt tänkande. Tendensen att ofta byta plats på entalen för att undvika behovet att räkna så många steg antyder att eleven har en begreppsutveckling som inkluderar den kommutativa lagen, men det resulterar inte i att eleven alltid undviker en procedur. Den här eleven och en annan elev använder även konkreta hjälpmedel såsom fingrar och en mental bild av tallinjen, vilket innebär en konkret förankring som kännetecknar den första matematiska världen (Tall, 2004). Således har dessa två elever inte utvecklat uppfattningen om dualiteten i matematikens symbolspråk och därmed befinner de sig inte i den proceptuella världen (Tall, 2004). Båda visar tecken på proceptuellt tänkande vid uppgifter inom talområdet 1-19, men vid högre talområden behövs den konkreta förankringen som innebär procedurer, vilket inte tyder på ett proceptuellt tänkande. Det framgår även, inom det här talområdet, att begreppsbilden (Tall & Vinner, 1981) av subtraktion kan vara bristande för flera elever. Det som utgör en utmaning är att hantera subtraktion när entalet som ska subtraheras är högre än det andra, så som 2-7. Det här kan dessutom komma att bli en konflikt senare när negativa tal introduceras och då begreppsbilden inte inkluderar möjligheten att subtrahera ett högre tal från ett lägre (Tall & Vinner, 1981).

Den största skillnaden som framgår i kategori 5, talområde 1-999, är huruvida eleverna väljer att lösa uppgifterna enligt huvudräkning eller algoritm. Eleverna som i tidigare kategorier använt strategier som återgår till procedurer kopplade till den första matematiska världen (Tall, 2004) väljer oftare att använda algoritmer, vilket skulle stärka min tolkning ovan om att dessa två elever inte helt kan utnyttja symbolers dualitet och kan tolkas som ett hinder för proceptuellt tänkande. Eleven som har upptäckt flest mönster löser alla uppgifterna genom huvudräkning, även om han i den här kategorin måste anstränga sig mer än i de förra. Hans strategier visar på ett flyt och en flexibilitet som skiljer sig från de andra. När han hamnar i en situation där han inte kommer fram till ett svar byter han strategi för att använda andra befintliga kognitiva scheman och på så vis löser han uppgiften. De som ofta använder procedurer visar mindre på den här flexibla förmågan, vilket kan kopplas till Grays (1991) kvalitativa studie där 100 elever intervjuades och där förmågan att flexibelt kunna använda befintlig kunskap ansågs vara skillnaden i elevernas begreppsutveckling.

Genom att undersöka elevernas tillvägagångssätt går det att synliggöra vissa skillnader som tyder på mer eller mindre effektiva strategier. Skillnaden, anser jag, ligger i antal steg som krävs för att lösa uppgiften där olika typer av existerande kunskaper används. Det blir tydligt att eleverna som inte använder befintliga kognitiva scheman utan istället tenderar att använda strategier som återgår till procedurer kopplade till konkreta hjälpmedel inte har samma begreppsutveckling som möjliggör proceptuellt tänkande. Dessa elever befinner sig inte i den andra matematiska världen (Tall, 2004) och uppfattningen om matematiksymbolers dualitet har därmed inte utvecklats för att möjliggöra proceptuellt tänkande.

6.1 Slutsats

I den här studien har jag utgått från följande frågeställningar:

Hur löser elever i årskurs 6 grundläggande aritmetiska uppgifter från årskurs 3?

- Vilka strategier använder de och varför?
- Går det att urskilja effektiviteten av strategierna i lösandet av grundläggande aritmetiska uppgifter?

Jag anser att jag, utifrån analysen, har fått svar på min huvudforskningsfråga genom att besvara mina två delfrågor. Frågan om hur eleverna löser de aritmetiska uppgifterna kan besvaras med att det varierar beroende på vilken befintlig kunskap som är tillgänglig för eleven. Det här avgör vilka strategier som eleven använder sig av samt hur effektivt tillvägagångssättet är.

Vilka strategier som eleverna använder för att lösa operationerna ser olika ut beroende på vilket talområde uppgiften befinner sig inom. Vid lägre talområden var det fler elever som kunde utnyttja redan existerande kunskaper om dubblor +/- 1, tiokompisar och andra befintliga representationsformer av uppgiftssymbolerna. Det här visar att de flesta eleverna har automatiserat dessa baskombinationer. Här utmärker sig dock en elev som måste använda strategin ”räkna från” som signalerar brister i taluppfattningen. Inom högre talområden framgår en större skillnad mellan elevernas strategier då två elever utmärkande måste använda konkreta hjälpmedel och proceduren ”räkna från”. De andra två eleverna har större möjligheter att använda befintliga kunskaper så som tiokompisar, tals uppbyggnader och mönster.

Det går att urskilja effektiviteten av strategierna genom att se huruvida eleverna använder sig av befintliga kognitiva scheman för att, med flyt, lösa uppgifter där svaret inte direkt kan ses. Strategierna kan sättas i relation med begreppen procept och proceptuellt tänkande, där dessa kan användas för att synliggöra huruvida eleven har utvecklat en uppfattning om dualiteten i matematikens symbolspråk. När en elev använder sig av olika representationsformer för att obehindrat växla mellan dessa så krävs färre steg och mindre ansträngning för att lösa uppgiften. Analysen visar att två elever inte växlar obehindrat mellan representationsformer och därmed uppstår inget flyt i operationen. Dessa två elever befinner sig således i den första matematiska världen. Elever som befinner sig i den första världen har en konkret förankring som inte möjliggör proceptuellt tänkande genom symbolspråkets dualitet. Enbart en elev rörde sig nästan uteslutet i den andra matematiska världen, den proceptuella. Det som antyder att eleven uppvisar ett proceptuellt tänkande är att flera representationsformer användes, vilket möjliggör en obehindrad växling som medför att operationerna kan lösas med flyt. Det som tydligt framgår i resultatet och analysen är att en skriftlig diagnos inte är ett tillräkligt underlag för att veta var eleven befinner sig i sin begreppsutveckling. Således krävs ett samtal med eleven för att synliggöra strategier och användandet av befintliga kunskaper.

Slutsatsen är att elever som har utvecklat en god taluppfattning där bland annat automatiserade baskombinationer, talens uppbyggnad och mönster används för att lösa elementära aritmetiska uppgifter har större möjlighet att tänka proceptuellt eftersom fler befintliga kunskaper kan användas. Det här gör det möjligt för eleven att uppfatta dualiteten i matematikens symbolspråk. Hur befintliga kognitiva scheman utnyttjas för att obehindrat växla mellan flera olika representationsformer, för att med flyt lösa uppgifter, synliggör skillnader i elevernas begreppsutveckling.

7. Vidare forskning

Eftersom jag i min slutsats har kommit fram till att det är elevens användande av befintlig kunskap som avgör huruvida proceptuellt tänkande kan utvecklats så anser jag det lämpligt att föreslå vidare forskning som skulle kunna hjälpa elever att upptäcka symbolspråkets dualitet. I min slutsats menar jag även att det är av vikt att eleven obehindrat kan växla mellan flera olika representationsformer för att med flyt utföra olika operationer vilket motiverar forskning kring hur symbolers dualitet kan synliggöras för eleverna. Det min studie inte har undersökt är hur elever skulle kunna utveckla ett proceptuellt tänkande och därför föreslår jag forskning som skulle kunna undersöka olika didaktiska strategier. Sådana studier skulle kunna syfta till att undersöka vilken slags undervisning som kan erbjuda eleverna möjligheten att få syn på viktiga aspekter som kan bidra till proceptuellt tänkande. Ett förslag är att göra learning studies för att ta fram kritiska aspekter kring begreppen tal, addition och subtraktion.

Referenser

Bryman, Alan (2011). *Samhällsvetenskapliga metoder*. Malmö: Liber AB.

Gray, E. M. (1991). An analysis of divergent approaches to simple arithmetic: preference and its consequences. *Educational Studies in Mathematics, 22*(6), 551-574. doi:10.1007/bf00312715

Gray, E. M., & Tall, D. O. (1994). Duality, ambiguity and flexibility: A proceptual view of simple arithmetic. *Journal For Research In Mathematics Education, 26*(2), 115-141. doi:10.2307/749505

Hiebert, J. (Ed.). (1986). *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Illeris, K. (2015). *Lärande.* Lund: Studentlitteratur.

Löwing, M. (2011). *Grundläggande aritmetik: Matematikdidaktik för lärare.* Lund: Studentlitteratur.

Löwing, M. (2016). *Diamant - diagnoser i matematik. Ett kartläggningsmaterial baserat på didaktisk ämnesanalys* (Report, Gothenburg Studies in Educational Sciences, 392). Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis. Tillgänglig: https://gupea.ub.gu.se/handle/2077/47607

Skolverket. (2016). *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet 2011 (Reviderad 2016).* Stockholm: Skolverket.

Skolverket. (2013). *Diamant - ett diagnosmaterial i matematik*. Hämtad 2017-11-27, från https://www.skolverket.se/bedomning/bedomning/bedomningsstod/matematik/diamant-1.196205

Star, J.R. (2005). Reconceptualizing procedural knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(5), 404-411. doi:10.2307/30034943

Tall, D. (2004). Building theories: The three worlds of mathematics. *For the Learning of Mathematics, 24*(1), 29–32. Hämtat från http://www.jstor.org/stable/40248444

Tall, D., Gray, E., Ali, M.B., Crowley, L., DeMarois, P., Gray, E.M., McGowen, M., ... Yusof, Y. (2001). Symbols and the bifurcation between procedural and conceptual thinking. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, *1*(1), 81-104. doi:10.1080/14926150109556452

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*(2), 151-169. doi:10.1007/bf00305619

Bilagor

Bilaga 1 Uppgiftsblad 1 för pilotstudie

Namn ______________________ Klass ________

1

4 + 4 = __	3 + 5 = __	9 – 4 = __	6 – 3 = __
3 + 3 = __	5 + 4 = __	7 – 4 = __	9 – 5 = __
4 + 5 = __	4 + 3 = __	8 – 4 = __	7 – 3 = __

2

8 + 7 = __	4 + 9 = __	17 – 8 = __	14 – 6 = __
8 + 4 = __	5 + 9 = __	18 – 9 = __	15 – 8 = __
3 + 8 = __	7 + 9 = __	16 – 9 = __	11 – 3 = __

3

14 + 3 = __	13 + 5 = __	19 – 4 = __	16 – 3 = __
3 + 13 = __	5 + 14 = __	17 – 4 = __	19 – 15 = __
14 + 5 = __	4 + 13 = __	18 – 14 = __	17 – 12 = __

4

84 + 9 = __	75 + 8 = __	63 – 8 = __	54 – 6 = __
7 + 65 = __	6 + 78 = __	51 – 49 = __	91 – 89 = __
63 + 8 = __	58 + 6 = __	72 – 8 = __	81 – 3 = __

Bilaga 2 Uppgiftsblad 2 för pilotstudie

Namn ______________________________ Klass ________

Räkna i rutorna till höger.

1

Beräkna 67 + 86

Svar: ____________________

2

Beräkna 264 + 83

Svar: ____________________

1

Beräkna 82 – 47

Svar: ____________________

2

Beräkna 146 – 69

Svar: ____________________

Bilaga 3 Diamantdiagnos AG4 (förtest)

DIAGNOS AG4

Namn ____________________ Klass ________

1a

40 + 30 = __	20 + 70 = __
50 + __ = 90	60 + __ = 80
__ + 30 = 80	__ + 40 = 90

1b

90 – 60 = __	80 – 30 = __
70 – 20 = __	60 – __ = 40
90 – __ = 50	70 – __ = 30

2a

40 + 7 = __	60 + 8 = __
30 + __ = 38	70 + __ = 74
__ + 6 = 36	__ + 40 = 49

2b

95 – 5 = __	68 – 8 = __
56 – __ = 50	84 – __ = 80
__ – 3 = 90	__ – 9 = 70

3a

27 + 1 = __	24 + 2 = __
5 + 42 = __	6 + 62 = __
72 +6 = __	81 + 8 = __

3b

38 – 2 = __	57 – 5 = __
77 – 75 = __	58 – 57 = __
89 – 7 = __	65 – 4 = __

4a

84 + 9 = __	75 + 8 = __
7 + 65 = __	6 + 78 = __
63 + 8 = __	58 + 6 = __

4b

63 – 8 = __	54 – 6 = __
51 – 49 = __	91 – 89 = __
72 – 8 = __	81 – 3 = __

Bilaga 4 Diamantdiagnos AS1 (förtest)

DIAGNOS AS1

Namn ______________________________ Klass __________

Räkna i rutorna till höger.

1

Beräkna 67 + 86

Svar: ________________

2

Beräkna 264 + 83

Svar: ________________

3

Beräkna 429 + 156

Svar: ________________

4

Beräkna 347 + 288

Svar: ________________

5

Beräkna 739 + 468

Svar: ________________

Bilaga 5 Diamantdiagnos AS2 (förtest)

DIAGNOS AS2

Namn ______________________________ Klass __________

1
Beräkna 82 – 47

Svar: ________________

2
Beräkna 146 – 69

Svar: ________________

3
Beräkna 632 – 427

Svar: ________________

4
Beräkna 541 – 275

Svar: ________________

5
Beräkna 703 – 256

Svar: ________________

Bilaga 6 Intervjudiagnos

Namn:_________________ Klass:_____

1.

4 + 5 = __	8 – 4 = __
4 + 3 = __	6 – 3 = __

2.

8 + 7 = __	14 – 6 = __
5 + 9 = __	16 – 9 = __

3.

5 + 42 = __	77 – 75 = __
72 +6 = __	89 – 7 = __

4.

84 + 9 = __	91 – 89 = __
75 + 8 = __	72 – 8 = __

5.

67 + 86 = _____	82 – 47 = _____
347 + 288 = _____	632 – 427 = _____

Bilaga 7 Intervjuguide

Information till eleven:

- Fokus ligger på hur du löser uppgifterna och vilka steg du tar, inte på att producera ett rätt svar.
- Försök att beskriva så noggrant som möjligt hur du gör med detaljer. Försök att berätta om varje steg du tar.
- Jag spelar in men det är bara jag som ska lyssna på det. Jag gör det för att jag inte kommer att minnas allt du säger.
- Gå igenom upplägget: 2 papper med 5 olika delar. Varje del innehåller 4 uppgifter. Du gör en del och sen stannar vi upp för att prata om hur du löste uppgifterna.

Möjliga strategier:

- ”Räkna alla” (additionsstrategi)
- ”Räkna från” (additionsstrategi)
- ”Räkna upp” (subtraktionsstrategi)
- ”Räkna bak” (subtraktionsstrategi)
- ”Ta bort” (subtraktionsstrategi)
- Befintlig kunskap
- Kunskap som byggs vidare på utifrån befintliga kognitiva scheman

Frågor och följdfrågor:

- Kan du försöka att steg för steg berätta hur du gjorde när du löste den här uppgiften?
- Är det något du bara ser eller hur gör du för att komma fram till svaret?
- Berätta varför du valde att…!
- Hur tänkte du då?
- Skulle du kunna göra på ett annat sätt?

Bilaga 8 Samtyckesblankett

Göteborg 2017-10-18

GÖTEBORGS UNIVERSITET

Samtycke för medverkan i forskningsstudie inom matematik

Sammanhang: Examensarbete inom grundlärarprogrammet åk 4-6
Forskande student: Kerstin Weijdegård
Enhet: Göteborgs universitet

Syfte:
Forskningsstudien går ut på att synliggöra elevers matematiska tänkande och analysera deras lösningsstrategier.

Tillvägagångssätt:
Eleverna kommer att få göra en diagnos med några enkla matematikuppgifter.
Därefter kommer några elever att bli intervjuade där de får beskriva hur de tänkte när de tog sig an en uppgift.

Omfattning:
Diagnosen tar ca 15 minuter
Intervjun tar max 30 minuter

Övrig information:
- Deltagandet är frivilligt
- Forskningspersonen har rätt att när som helst avbryta sin medverkan
- Deltagarna är anonyma

Medgivande för deltagande i studien:
Göteborg den ... / ... 2017

....	....
Namnteckning/Vårdnadshavare	Namnförtydligande
....	....
Namnteckning/Vårdnadshavare	Namnförtydligande
....	....
Namnteckning/Barn	Namnförtydligande

Bilaga 9 Uppgiftsdelar och talområde samt intervjudiagnos med rätta svar

Tabell med uppgiftsdelarna och talområde

Kategori	Bokstav	Uppgifter	Testområde
1	A	A1, A2	Talområde 1-9, inga tiotalsövergångar
2	B	B1, B2	Talområde 1-19 med tiotalsövergångar
3	C	C1, C2	Talområde 1-99 utan tiotalsövergångar
4	D	D1, D2	Talområde 1-99 med tiotalsövergångar
5	E	E1, E2	Talområde 1-999 med tiotals- och hundratalsövergångar

Kategori 1 (A)

Addition	Subtraktion
A1. 4 + 5 = 9	A1. 8 – 4 = 4
A2. 4 + 3 = 7	A2. 6 – 3 = 3

Kategori 2 (B)

Addition	Subtraktion
B1. 8 + 7 = 15	B1. 14 – 6 = 8
B2. 5 + 9 = 14	B2. 16 – 9 = 7

Kategori 3 (C)

Addition	Subtraktion
C1. 5 + 42 = 47	C1. 77 – 75 = 2
C2. 72 + 6 = 78	C2. 89 – 7 = 82

Kategori 4 (D)

Addition	Subtraktion
D1. 84 + 9 = 93	D1. 91 – 89 = 2
D2. 75 + 8 = 83	D2. 72 – 8 = 64

Kategori 5 (E)

Addition	Subtraktion
E1. 67 + 86 = 153	E1. 82 – 47 = 35
E2. 347 + 288 = 635	E2. 632 – 427 = 205