LICENTIATUPPSATS

Matematisk och pedagogisk kunskap

– Lärarstudenters uppfattningar av begreppen funktion och variabel

Mikael Borke

CHALMERS | GÖTEBORGS UNIVERSITET

Matematiska Vetenskaper
Chalmers Tekniska Högskola och Göteborgs Universitet
SE – 412 96 Göteborg

Matematisk och pedagogisk kunskap
– Lärarstudenters uppfattningar av begreppen funktion och variabel
Mikael Borke

Matematiska Vetenskaper
Chalmers Tekniska Högskola och Göteborgs Universitet
SE - 412 96 Göteborg

Tryck: Ineko AB, Göteborg, 2017

Abstract

The concepts of function and variable are important in compulsory and upper secondary schools, and at the university. Teachers' mathematical knowledge, as well as their pedagogical knowledge, have an effect on their teaching. The aim of this thesis is to investigate student teachers' *concept images* (Tall and Vinner, 1981) and *mathematical knowledge for teaching* (Ball et al., 2008) of the concepts of function and variable. Questionnaires and follow-up interviews were used to collect data.

Six categories of student teachers' explanations of the concept of function are identified: *expression, dependence on a variable, rule, correspondence, machine, and relationship between variables.* Most of the student teachers' explanations of the concept of variable are that it is a quantity that can vary. Almost all the student teachers interpret the word "variable" as *independent* variable. They demonstrate concept images of the concept of a function, which includes constant functions, piecewise defined functions, and that a functional value should be uniquely determined. However, some of them display potential conflict factors in their concept images.

The student teachers demonstrate *knowledge of content and students* of the concepts of function and variable, when they reason about students' difficulties with the concepts. They demonstrate *specialized content knowledge* of the function concept, when they choose appropriate representations of functions for different purposes. A student teacher demonstrate *specialized content knowledge* of the concept of variable, when suggesting that teachers should distinguish two aspects of the concept: the varying aspect of a variable, and variable in the sense of an unknown number in connection with equations which has a unique solution.

Keywords: function, variable, student teacher, concept definition, concept image, conception, mathematical knowledge for teaching

Förord

Jag vill tacka alla dem utan vars hjälp jag inte hade kunnat genomföra studierna i föreliggande uppsats. Först vill jag tacka mina handledare Johanna Pejlare, Jesper Boesen och Samuel Bengmark för alla kloka tankar samt ert tålamod och engagemang.

Jag vill också tacka forskarskolan CUL för gemensamma kurser och konferenser, dessutom vill jag tacka alla doktorander och temaledare Cecilia Kilhamn i CUL-temat UULMON för att ni har läst och kommenterat delar av mina texter.

Jag vill även tacka Annette Mitiche, Jörgen Dimenäs och Tommy Gustafson i projektledningen för Brobyggaren samt Frank Bach och Peter Nyström, som har hjälpt mig att få kontakt med studenter på den korta ämneslärarutbildning Brobyggaren. Jag vill också rikta ett stort tack till alla studenter som har besvarat enkäter eller deltagit i intervjuer.

Slutligen vill jag rikta ett speciellt tack till Mats Andersson, Jana Madjarova, Laura Fainsilber, Reimond Emanuelsson, Åse Fahlander, Mohammad Asadzadeh, Peter Kumlin, Michael Patriksson och Jovan Pankovski på matematiska vetenskaper. Dessutom tackar jag Niklas Rudbeck för värdefulla samtal om begreppsbildning.

Innehållsförteckning

Tabell- och figurförteckning

Inledning

Jag har i min roll som gymnasielärare i matematik intresserat mig för de svårigheter som elever uppvisar om grundläggande matematiska begrepp, till exempel bråk, negativa tal, ekvationer och funktioner. Detta långvariga intresse motiverade mig att skriva en magisteruppsats om gymnasieelevers förståelse för begreppet funktion (Borke, 2014). Enligt min erfarenhet som gymnasielärare i matematik kan förståelse för begreppen variabel och funktion ge elever förutsättningar att även förstå begreppen gränsvärde och derivata av en funktion samt kontinuitet. I min roll som lärarutbildare har jag mött flera lärarstudenter som också uppvisar svårigheter med vissa centrala matematiska begrepp. Jag vill framhålla att lärare behöver förstå dessa begrepp och dessutom behöver de kunskaper om elevers svårigheter med begreppen.

Ball, Thames och Phelps (2008) har skapat en modell för de kunskaper som lärare behöver för att kunna undervisa i matematik. Modellen, som kallas *mathematical knowledge for teaching*, innefattar olika kunskapskategorier; två av dessa benämns *specialized content knowledge* respektive *knowledge of content and students*. Ett exempel på lärares *specialized content knowledge* om begreppet funktion är förmåga att välja lämplig representation av en funktion för ett visst syfte. Ett exempel på *knowledge of content and students* om begreppet funktion är att förutsäga elevers uppfattningar och missuppfattningar av begreppet.

Det finns en konsensus om att lärares kunskap om det matematiska innehållet har betydelse för deras undervisning (Ball m fl, 2008). Det har emellertid efterfrågats studier som belägger att lärares matematiska kunskaper påverkar undervisningens kvalitet och elevers prestationer (Hill, Rowan & Ball, 2005; Hill m fl, 2008). Flera studier om lärares matematiska kunskaper är kvalitativa, exempelvis Liping Mas (1999) studie, där hon jämför amerikanska och kinesiska lärares undervisning i aritmetik och geometri. Hennes resultat visar att de kinesiska lärarna har en djupare förståelse av elementär matematik än deras amerikanska kollegor. Hill, Rowan och Ball (2005) visar i en kvantitativ studie att amerikanska lärares *specialized content knowledge* om det matematiska innehållet i årskurs ett och tre är signifikant relaterat till en förbättring av elevers prestationer (Hill, Rowan & Ball, 2005).

Shulman (1986) beskriver *pedagogical content knowledge* som att den innefattar de mest användbara metoderna för att undervisa om ett visst ämnesstoff så att det blir begripligt för eleverna. *Pedagogical content knowledge* innefattar dessutom kunskaper om elevers svårigheter och missuppfattningar av stoffet. Baumert m fl (2010) visar i en kvantitativ studie att lärares *pedagogical content knowledge* har en avsevärt positiv effekt på elevers lärande i matematik.

Funktionsbegreppet har omfattande tillämpningar inom exempelvis naturvetenskap, teknik och ekonomi; funktioner används då som matematiska modeller för att analysera samband mellan olika variabler. Begreppen funktion och variabel är centrala i grundskolans, gymnasieskolans och universitetens undervisning i matematik.

Tall och Vinner (1981) beskriver den roll som en individs kognitiva strukturer spelar för uppfattningen av ett visst matematiskt begrepp. De skiljer på den formella definitionen av ett matematiskt begrepp (som accepteras av den matematiska gemenskapen) och de kognitiva processer som begreppet uppfattas med. I detta sammanhang introducerar de termerna begreppsdefinition och begreppsbild.

Mot bakgrund av detta har jag valt att dels undersöka lärarstudenters begreppsbilder av begreppen variabel och funktion, dels deras *mathematical knowledge for teaching* om dessa begrepp. Min undersökning är indelad i två delstudier, delstudie A och B. Forskningsfrågorna formuleras med begrepp från de ramverk som beskrivits här i inledningen och som ges en fördjupad beskrivning längre fram i uppsatsen.

Forskningsfråga för delstudie A

Vilka begreppsbilder visar lärarstudenter om begreppen funktion och variabel?

Forskningsfråga för delstudie B

Vilken *specialized content knowledge* respektive *knowledge of content and students* visar lärarstudenter om begreppen funktion och variabel?

Bakgrund

Kapitlet inleds med en historisk bakgrund till begreppen funktion och variabel. Efter detta beskrivs hur några läroböcker för grund- och gymnasieskola samt högskola behandlar dessa begrepp. Vidare refereras de ramverk som används i föreliggande studier samt några empiriska studier, som använder någon av dessa ramverk, som indikerar att studenter och elever har svårigheter med begreppen funktion eller variabel. Dessutom beskrivs två empiriska studier som beskriver lärares kunskaper om begreppen variabel respektive funktion.

Begreppen funktion och variabel

I kapitlet beskrivs funktions- och variabelbegreppens historiska utveckling under de senaste 300 åren. Vidare beskrivs hur några läroböcker för den svenska grund- och gymnasieskolan behandlar begreppen funktion, variabel och kontinuerlig funktion. Dessutom beskrivs hur några svenska och engelska läroböcker för högskolan behandlar dessa begrepp. Dessutom refereras en kvalitativ studie om lärares kunskap om begreppet variabel och en studie om lärares kunskap om begreppet funktion.

Funktions- och variabelbegreppens historiska utveckling

Matematikdidaktikern Anna Sfard argumenterar för en tes om att det finns en parallell mellan å ena sidan de svårigheter som dagens elever möter när de ska lära sig ett nytt matematiskt begrepp och å andra sidan de svårigheter som matematiker har mött i historien, till exempel när de försökte definiera begreppet (Sfard, 1995). Bråting och Pejlare (2015) kritiserar Sfards tes; de anser att hon inte tar hänsyn till det historiska sammanhanget när hon genomför sin undersökning av begreppets historiska utveckling. De menar att det är problematiskt att jämföra ett visst matematiskt begrepp från en tidsperiod, med motsvarande begrepp från en annan tidsperiod, utan att ta hänsyn till att de ingår i olika begreppsliga ramverk, som förändras över tid (Bråting & Pejlare, 2015).

Trots detta ska jag beskriva funktionsbegreppets historiska utveckling under de senaste 300 åren.

Kleiner (1989) skriver funktionsbegreppets historia; en historia om de utmaningar som några av de bästa matematikerna konfronterades med när de försökte definiera begreppet funktion. Han menar att funktionsbegreppets utveckling kan uppfattas som en dragkamp mellan olika bilder av begreppet: Den geometriska bilden, där funktioner representeras med kurvor, den algebraiska bilden, där en funktion uttrycks med en formel och den logiska definitionen av begreppet som en relation, som uppfyller ett visst villkor. Kleiner (1989) anger några faktorer som påverkade funktionsbegreppets utveckling under tidsperioden 1450 – 1650: att talsystemet utvidgades till att omfatta reella tal och även komplexa tal (Bombelli, Stifel); skapandet av symbolisk algebra (Viète, Descartes); naturfilosofers (Kepler, Galilei) matematiska rörelsebeskrivningar samt att matematiker sammanförde algebra och geometri (Fermat, Descartes). När matematiker på 1600 – talet sammanförde algebra och geometri var införandet av variabler samt att kunna uttrycka samband mellan variabler med hjälp av ekvationer viktiga delar. Ekvationer gav flera exempel på kurvor som var potentiella funktioner; vad som saknades var att identifiera oberoende och beroende variabler i en ekvation, menar Kleiner. Av avgörande betydelse för utvecklingen av begreppet funktion under 1700 – talet var problemet med att bestämma en funktion som beskriver formen av en vibrerande elastisk sträng (Kleiner, 1989).

Domingues (2004) menar att de flesta matematiker under 1700 – talet, till exempel l'Hospital och Lacroix, uppfattade en variabel som en storhet som varierar. Domingues benämner denna uppfattning det dynamiska variabelbegreppet. l'Hospital (1661 – 1704) definierade begreppet variabel år 1696:

> Vi kallar de storheter som ökar eller minskar kontinuerligt för *variabla* storheter (Domingues, 2004, s. 18, min översättning).

Lacroix formulerade följande definition år 1797:

> De storheter som anses förändras i storlek, eller skulle kunna göra det, kallas variabel (Domingues, 2004, s. 19, min översättning).

Detta dynamiska variabelbegrepp dominerade ännu in på 1800 – talet; Cauchy formulerade följande definition år 1821:

> Vi kallar det, som successivt kan anta flera värden som skiljer sig från varandra, en variabel storhet (Domingues, 2004, s. 19, min översättning).

Det huvudsakliga undantaget till det dynamiska variabelbegreppet under 1700-talet var Euler, som år 1748, formulerade följande definition:

> En variabel storhet är en obestämd eller universell storhet, vilken innefattar absolut alla bestämda värden (Domingues, 2004, s. 20, min översättning).

I Eulers variabelbegrepp finns ingen variation.

Bourbaki[1] formulerade, år 1939, följande definition av variabelbegreppet:

> En bokstav kan beteckna antingen ett *fixt* element eller ett *godtyckligt* element (även kallad en *variabel,* ett *argument,* eller ett *generiskt* element) i en mängd. När ett godtyckligt element ersätts med ett *fixt* element i en relation, säges det godtyckliga elementet ges detta *fixa* element som *värde* (Bourbaki, 2004, s. 347, min översättning).

Johann Bernoulli (1667 – 1748) formulerade den första formella definitionen av begreppet funktion år 1718:

> Man kallar en funktion av en variabel en storhet, som är sammansatt på något sätt av denna variabel och konstanter (Kleiner, 1989, s. 284, min översättning).

Leonhard Euler (1707 – 1783) definierade begreppet funktion som ett *analytiskt uttryck* år 1748:

> En funktion av en variabel storhet är ett analytiskt uttryck som, på viket sätt som helst, är sammansatt av denna variabla storhet och tal eller konstanta storheter (Kleiner, 1989, s. 284, min översättning).

Euler ansåg att ett *analytiskt uttryck* kan innehålla de fyra algebraiska operationerna, rötter, exponentialfunktioner, logaritmer, trigonometriska funktioner, derivator och integraler. Han ansåg dessutom att funktioner kan vara envärda eller flervärda (Kleiner, 1989). Efter en tvist med Jean le Rond d'Alembert (1717 – 1783) angående problemet med den vibrerande strängen formulerade Euler en andra definition av begreppet funktion år 1755:

> Om några storheter beror av andra storheter på ett sådant sätt att om de senare förändras så kommer även de förra att genomgå förändring, då kommer de förra storheterna att kallas funktioner av de senare. Denna benämning är generell och innefattar varje metod med vilken en storhet kan bestämmas av andra storheter. Om, därför, x betecknar en variabel storhet så kommer alla storheter som på något sätt beror av x eller bestäms av den att

[1] Bourbaki är en kollektiv pseudonym för en grupp matematiker som var verksamma i Frankrike.

> kallas för funktioner av den (Bråting & Pejlare, 2015, s. 256, min översättning).

Diskussionen om problemet med den vibrerande strängen, som påbörjades 1747, fick konsekvenser för funktionsbegreppets utveckling; begreppet utvidgades till att även innefatta funktioner som är styckvis definierade med olika analytiska uttryck på olika intervall (Kleiner, 1989).

Gustav Lejeune Dirichlet (1805 – 1859) var en av de tidiga förespråkarna för matematisk stringens. Han hade ambitionen att definiera begreppet funktion som en godtycklig relation, som inte nödvändigtvis måste uttryckas med ett *analytiskt uttryck* eller en kurva. Han formulerade följande definition av begreppet funktion år 1829:

> y är en funktion av en variabel x, definierad på intervallet $a < x < b$, om det till varje värde på variabeln x i detta intervall motsvarar ett bestämt värde på variabeln y. Det är oväsentligt på vilket sätt denna motsvarighet etableras. (Kleiner, 1989, s. 291, min översättning)

Dirichlet föreslog ytterligare en definition av begreppet funktion år 1837:

> Om en variabel y är så relaterad till en variabel x att när ett numeriskt värde tilldelas x, så finns det en regel enligt vilken ett unikt värde för y bestäms, då sägs y vara en funktion av den oberoende variabeln x (O'Connor och Robertson, 2016, min översättning).

Kleiner (1989) menar att Dirichlet var den förste matematiker som uppfattade en funktion som ett generellt samband, vilket framgår när han konstruerade följande funktion, som kallas *Dirichlets funktion*: $D(x) = \begin{cases} c, & om\ x\ rationell \\ d, & om\ x\ irrationell \end{cases}$ (Här betecknar *c* och *d* två olika reella tal.) Dirichlets funktion var det första explicita exemplet på en funktion som inte definierades med ett *analytiskt uttryck* eller var given av en kurva. Den var dessutom det första exemplet på en funktion som är diskontinuerlig överallt, menar Kleiner.

Den moderna definitionen av begreppet funktion formuleras med hjälp av mängder; Bourbaki formulerade en definition av funktionsbegreppet år 1939, som är generell i meningen att den kan tillämpas på andra element än tal:

> Låt E och F vara två mängder, som kan vara lika eller olika. En relation mellan ett variabelt element x i E och ett variabelt element y i F kallas ett funktionssamband i y om det för alla x i E finns ett unikt y i F som är i den givna relationen med x. Vi ger namnet funktion till den operation som på detta sätt associerar med varje element x i E det element y i F som är i den givna relationen med x; y kallas värdet av funktionen i elementet x och

> funktionen sägs vara bestämd av det givna funktionssambandet. Två ekvivalenta funktionssamband bestämmer samma funktion. (Bourbaki, 2004, s. 351, min översättning).

Bourbaki formulerade, år 1954, ytterligare en definition av begreppet funktion:

> Om f är en funktion, F dess graf och x ett element i funktionens definitionsmängd, så är relationen $y = f(x)$ ekvivalent med $(x, y) \in F$ (Bourbaki, s. 81, min översättning).

Detta innebär att en funktion kan tolkas som en mängd av ordnade par. Denna definition benämns Bourbakis mängdteoretiska definition av begreppet funktion som en mängd av ordnade par, från år 1954, i föreliggande uppsats.

Begreppen variabel och funktion i svensk grund- och gymnasieskola

För matematiken i den svenska grundskolans årskurs 7-9 anger Skolverket följande centrala innehåll som kan associeras till begreppen variabel och funktion:

> Innebörden av variabelbegreppet och dess användning i algebraiska uttryck, formler och ekvationer. Funktioner och räta linjens ekvation. Hur funktioner kan användas för att undersöka förändring, förändringstakt och andra samband (Skolverket, 2017a).

Skolverket anger följande centrala innehåll i ämnesplanen för gymnasieskolans matematikkurser, Matematik 1c, 2c och 3c på Naturvetenskapsprogrammet, som har anknytning till begreppet funktion:

> Begreppen funktion, definitions- och värdemängd samt egenskaper hos linjära funktioner samt potens- och exponentialfunktioner, representationer av funktioner i form av ord, funktionsuttryck, tabeller och grafer, skillnader mellan begreppen ekvation, olikhet, algebraiskt uttryck och funktion, orientering kring kontinuerlig och diskret funktion samt begreppet gränsvärde (Skolverket, 2017b).

I ämnesplanen för matematik (Skolverket, 2017b) för gymnasieskolans kurser Matematik 1c, 2c och 3c, anges följande matematiska begrepp som är kopplade till mängdlära: talmängder samt definitionsmängd och värdemängd till en funktion. Däremot finns inte det generella begreppet mängd, i betydelsen att elementen kan vara godtyckliga, och inte nödvändigtvis tal; speciellt finns inte begreppet element i ämnesplanen för dessa kurser. Det generella begreppet mängd, som består av godtyckliga element, anges först i ämnesplanen för kursen Matematik 5.

Carlsson, S., Hake, K. & Öberg, B. (2011) definierar begreppet funktion, i ett kapitel om funktioner och algebra, i en lärobok för grundskolans årskurs 9. Läroboksförfattarna skriver att

> Inom matematiken används ordet funktion när man vill beskriva sambandet mellan två variabler. Man kan beskriva en funktion med en graf eller en tabell (Carlsson m fl, 2011, s. *44).*

Funktionsbegreppet exemplifieras med en graf och en tabell över hur temperaturen på en viss ort varierar över tid. Begreppet variabel definieras drygt hundra sidor senare i läroboken:

> En variabel står för ett tal vars värde kan förändras (Carlsson m fl, 2011, s. 170).

Begreppet *formel* exemplifieras med $y = 2x$. Carlsson m fl (2011) definierar begreppet *linjär funktion* som en funktion vars graf är en rät linje:

> Om grafen till en funktion är en rät linje så beskriver grafen en *linjär funktion* (Carlsson m fl, 2011, s. *46).*

Även Alfredsson, Bråting, Erixon och Heikne (2011a) använder termen *linjär funktion* på detta sätt i en lärobok för gymnasieskolans kurs Matematik 1c:

> I matematikkurserna på gymnasiet brukar funktioner av typen $y = kx + m$ kallas för linjära funktioner. Detta är praktiskt eftersom grafen är en rät linje, men det är inte matematiskt korrekt (Alfredsson m. fl., 2011a, s 293).

Jag instämmer i detta och kommer i föreliggande uppsats att använda termen *linjär funktion* om en funktion vars graf är en rät linje, som inte nödvändigtvis går genom origo.

Szabo, Larson, Viklund, Dufåker och Marklund (2011) skriver i ett kapitel om algebra i en lärobok för kursen Matematik 1c, för gymnasieskolans Naturvetenskapsprogram, att uttryck som bara innehåller tal kallas numeriska uttryck, samt att:

> I algebraiska uttryck förekommer också tal beskrivna med bokstäver. Om bokstaven kan anta olika värden kallas den variabel (Szabo m fl, 2011, s. 58).

Läroboksförfattarna skriver om funktionsbegreppet att om y beror av x så kallas y för den beroende variabeln och x kallas oberoende variabel. De liknar en funktion vid en maskin, *som när man sätter in ett värde på den oberoende variabeln ger tillbaka ett värde på den beroende variabeln enligt en regel (s. 162).* Omedelbart efter denna liknelse anges definitionen av begreppet funktion:

> En funktion är ett samband eller ett beroende mellan två variabler. Man säger att y är en *funktion* av x, om det till varje värde på x *endast* finns *ett* bestämt värde på y (Szabo m fl, 2011, s. 162).

Författarna definierar en funktions definitionsmängd som alla de värden som den oberoende variabeln kan anta, värdemängden definieras som alla funktionsvärden som funktionen antar när den oberoende variabeln väljs ur definitionsmängden (Szabo m fl, 2011, s. 165).

Szabo m fl (2012) skriver i läroboken för kursen Matematik 3c att ett sätt att beskriva att en funktion är kontinuerlig är

> att man kan rita hela funktionens graf utan att lyfta pennan (Szabo m fl, 2012, s. 33).

Författarna exemplifierar begreppet diskontinuitet med $f(x) = \frac{x^2+1}{x}, x \neq 0.$ De skriver att

> grafen till funktionen gör alltså ett språng där $x = 0$. Grafen kan därför inte ritas i sin helhet utan att lyfta pennan (Szabo m fl, 2012, s. 33).

Författarnas slutsats är att funktionen f är diskontinuerlig. De drar också den generella slutsatsen att:

> Som regel är rationella funktioner diskontinuerliga för något x men kontinuerliga i olika delintervall (Szabo m fl, 2012, s. 33).

Alfredsson m fl (2011a) ger, i en inledning till funktionsbegreppet, följande definitioner av begreppen variabel respektive funktion:

> Om en bokstav i ett uttryck kan anta olika värden kallas den en variabel (Alfredsson m fl, 2011a, s 10).

> Om sambandet mellan två variabler x och y är sådant att varje x-värde, enligt någon regel, ger ett bestämt y-värde så kan vi säga att y är en funktion av x (Alfredsson m fl, 2011a, s 288).

Dessutom anges vad som menas med en funktions definitionsmängd respektive värdemängd:

> En funktions tillåtna x-värden kallas funktionens definitionsmängd. De värden på y, som de tillåtna x-värdena ger, kallas funktionens värdemängd (Alfredsson m fl, 2011a, s. 288).

Författarna beskriver begreppet funktion med följande exempel som illustreras med en kvadrat med sidan x och arean y.

> Arean, y m^2, av en kvadrat är en funktion av kvadratens sida, x meter. Värdet på arean y är beroende av x. Variabeln x kallas oberoende variabeln och variabeln y kallas beroende variabel (Alfredsson m fl, 2011a, s 288).

Alfredsson, Bråting, Erixon och Heikne (2011b) skriver i läroboken för kursen Matematik 3c att en funktion vars graf *kan ritas utan att lyfta pennan* kallas för kontinuerlig. Författarna formulerar följande definition av begreppet kontinuerlig funktion:

> De funktioner vars graf kan ”ritas utan att lyfta pennan” kallas för kontinuerliga. Med matematikens språk kan vi säga att en funktion är kontinuerlig i en punkt x om $|f(x+h)-f(x)|$ kan göras godtyckligt litet genom att välja ett tillräckligt litet h. Om detta gäller för alla x i definitionsmängden är funktionen kontinuerlig (Alfredsson m fl, 2011b, s. 40).

Författarna ger endast ett exempel på en styckvis definierad funktion i en övningsuppgift, som går ut på att bestämma värdet på en parameter så att den styckvis definierade funktionen blir kontinuerlig.

Begreppen variabel, funktion och kontinuitet i läroböcker för högskola

Adams (1995) inleder sin behandling av funktionsbegreppet med att införa följande terminologi och beteckningar:

> För att beteckna att y är en funktion av x skriver vi $y=f(x)$. […] Symbolen x, som benämns oberoende variabel, representerar indata från funktionens definitionsmängd och y, som benämns den beroende variabeln, representerar motsvarande utdata i funktionens värdemängd (Adams, 1995, s. 25, min översättning).

Läsaren uppmanas att tänka på en funktion som ett slags ”maskin” som producerar utdata $f(x)$ i värdemängden när den matas med indata från definitionsmängden. Detta illustreras med en bild av en ”funktionsmaskin”. Adams (1995) fortsätter sin framställning med att formulera följande formella definition av funktionsbegreppet:

> En funktion f på en mängd D till en mängd S är en regel som till varje element x i D ordnar ett unikt element f(x) i S (Adams, 1995, s. 25, min översättning).

Adams (1995) definierar, i ett avsnitt om kontinuerliga funktioner, begreppet kontinuitet i en inre punkt:

> Vi säger att funktionen f är kontinuerlig i en inre punkt c i sin definitionsmängd om gränsvärdet $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$. Om gränsvärdet inte existerar eller existerar, men inte är lika med $f(c)$, säger vi att f är diskontinuerlig i punkten c (Adams, 1995, s. 74, min översättning).

Adams avslutar inledningen till avsnittet om kontinuerliga funktioner med att en funktion är kontinuerlig om den är kontinuerlig i varje punkt i sin definitionsmängd.

Rodhe och Sigstam (2002) formulerar en version av Dirichlets definition av begreppet funktion:

> En variabel y är en funktion av en variabel x, om till varje värde, som x får anta, är ordnat endast ett av de värden som y får anta (Rodhe & Sigstam, 2002, s. 88).

Vidare beskrivs att en variabel kan uppfattas som *något som kan variera.* Författarna framhåller att eftersom y beror av x så benämns y beroende variabel och x oberoende variabel. Rodhe och Sigstam (2002) definierar begreppet kontinuitet i en punkt:

> En funktion $y = f(x)$ är kontinuerlig i punkten c om funktionen är definierad i punkten c och $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$ (Rodhe & Sigstam, 2002, s. 154).

En funktion som är kontinuerlig i varje punkt i sin definitionsmängd säges vara en kontinuerlig funktion.

Persson och Böiers (2010) skriver i en inledning till funktionsbegreppet att:

> Historiskt har man uppfattat en funktion som ett uttryck av något slag, i vilka det ingår en eller flera variabler, i allmänhet betecknade med olika bokstäver (Persson och Böiers, 2010, s. 36).

Som exempel på en funktion ges uttrycket $(x+1)^3$. I inledningen till avsnittet om funktionsbegreppet uttrycker läroboksförfattarna en uppfattning av begreppet som en process:

> En funktion är en regel eller en process som på ett välbestämt och entydigt sätt gör om (transformerar) vissa angivna objekt till nya objekt (Persson och Böiers, 2010, s. 36).

Detta illustreras med en rektangel som får indata och ger utdata. Omedelbart efter detta formulerar läroboksförfattarna den formella definitionen av begreppet funktion:

> En funktion från en mängd M till en mängd N är en regel som till varje objekt i M på ett entydigt sätt ordnar ett objekt i N (Persson och Böiers, 2010, s. 37).

Persson och Böiers (2010) formulerar följande definition av begreppet kontinuitet i en inledning till kontinuerliga funktioner:

> En funktion f säges vara kontinuerlig, i en punkt a, om a tillhör definitionsmängden och om gränsvärdet $\lim_{x \to a} f(x)$ existerar (och därmed automatiskt är lika med funktionsvärdet $f(a)$). Om en funktion är kontinuerlig i varje punkt i sin definitionsmängd kallas den kontinuerlig (Persson och Böiers, 2010, s. 149).

Karlsson och Kilborn (2014) formulerar, i en lärobok i matematikdidaktik för lärare, en definition av begreppet funktion som liknar Bourbakis mängdteoretiska definition från år 1954:

> En funktion är en mängd av ordnade par (x, y) där det inte finns två olika par med samma förstakomponent x (Karlsson och Kilborn, 2014, s. 70).

Individers uppfattningar av matematiska begrepp

I detta avsnitt refereras två av de ramverk som används i föreliggande studier för att beskriva individers uppfattningar av matematiska begrepp: Tall och Vinners (1981) ramverk om begreppsdefinition och begreppsbild av ett begrepp samt Sfards (1991) ramverk som beskriver karaktären av individers uppfattningar av matematiska begrepp i termer av operationell och strukturell uppfattning. Dessutom refereras Hanssons (2006) studier om lärarstudenters uppfattningar av begreppet funktion.

Begreppsdefinition och begreppsbild

Tall och Vinner (1981) använder termen begreppsbild; den består av

> den samlade kognitiva struktur som associeras med begreppet, vilken omfattar alla mentala bilder, associerade egenskaper och processer (Tall & Vinner, 1981, s.152).

En individs begreppsbild av ett visst begrepp utvecklas genom erfarenhet av begreppet och förändras över tid.

Definitionen av ett begrepp är de ord som används för att specificera begreppet. En individ kan utveckla en personlig definition av begreppet, som kan avvika från den formella definition som accepteras av den matematiska gemenskapen. En individs frammanade begreppsbild är den del av begreppsbilden som aktiveras vid ett visst tillfälle. Vid olika tidpunkter kan olika delbilder, som till synes kommer i konflikt med varandra, frammanas. Om motstridiga delar av begreppsbilden frammanas *samtidigt* kan individen uppleva en konflikt i sin kognitiva struktur. Tall och Vinner kallar den del av begreppsbilden, som kan komma i konflikt med en annan del av begreppsbilden, för en potentiell konfliktfaktor. En allvarlig typ av potentiell konfliktfaktor är när en del av begreppsbilden är i motsättning med den formella definitionen av begreppet. En sådan konfliktfaktor kan hindra lärandet av en matematisk teori (Tall & Vinner, 1981).

Tall och Vinner exemplifierar innebörden av sitt ramverk med begreppen funktion, gränsvärde av talföljder och funktioner samt kontinuitet. De formulerar följande formella definition av begreppet funktion:

> En funktion är en relation mellan två mängder A och B, där varje element i A är relaterat till precis ett element i B (Tall & Vinner, 1981, s. 153, min översättning).

Det kan vara så att en elev, som har studerat funktioner, inte kommer ihåg begreppets formella definition. Elevens begreppsbild av begreppet funktion kan innehålla uppfattningen att en funktion måste kunna representeras med en och endast en formel. Elevens lärare kan visa den formella definitionen av begreppet funktion och arbeta med det generella funktionsbegreppet en kortare tidsperiod för att sedan ägna en längre tid åt att enbart ge exempel på funktioner som representeras med formler. I ett sådant fall kan eleven utveckla en begränsad begreppsbild av begreppet funktion som innehåller idén att varje funktion kan representeras med en och endast en formel. Eleven kan använda sin begränsade begreppsbild; den kan vara tillräcklig i ett begränsat sammanhang. När eleven sedan möter exempel på funktioner utanför detta begränsade sammanhang, kan det visa sig att hennes begreppsbild är otillräcklig för fortsatta studier (Tall & Vinner, 1981).

Tall och Vinner (1981) genomförde en enkätundersökning med 41 nybörjarstudenter på universitetet om begreppet kontinuitet. Studenterna fick besvara en enkät med frågan: *Vilka av följande funktioner är kontinuerliga? Motivera ditt svar!* Frågan åtföljdes av formler och tillhörande grafer till fem olika funktioner, både kontinuerliga och diskontinuerliga. En av funktionerna var $f(x) = \frac{1}{x}\ (x \neq 0)$, med tillhörande graf inritad i en figur bredvid formeln. Resultatet indikerade att flera studenter hade begränsade begreppsbilder som inte innefattar en osammanhängande graf; de svarade att funktionen är diskontinuerlig. Några studenter som påstod att funktionen är kontinuerlig angav följande motivering: *Den är kontinuerlig eftersom den är given med en enda formel.* Denna motivering stämmer inte med den gängse uppfattningen av begreppet kontinuitet. Dessa studenters begreppsbilder innefattar potentiella konfliktfaktorer som kan komma i konflikt med den formella definitionen av begreppet kontinuerlig funktion, menar Tall och Vinner.

Operationell och strukturell uppfattning

Sfard (1991) har skapat ett ramverk som används för att beskriva individers uppfattningar av matematiska begrepp. Hon använder två olika ord för att beteckna matematikens byggstenar:

> Ordet begrepp kommer att användas när en matematisk idé berörs i sin officiella form – som en teoretisk konstruktion inom ”ett formellt universum av ideal kunskap”. Hela samlingen av interna representationer och associationer som frammanas av begreppet – begreppets motsvarighet i det interna, subjektiva ”universumet av mänsklig kunskap” – kommer att benämnas *conception* (Sfard, 1991, s. 3, min översättning).

Jag översätter hennes engelska term *conception* med uppfattning i föreliggande uppsats. Sfard (1991) menar att en individs uppfattning av ett begrepp kan ha olika karaktär; dels en operationell, där ett begrepp uppfattas som en process dels en strukturell, där begreppet uppfattas som ett objekt. De båda uppfattningarna kompletterar varandra:

> Förmågan att kunna uppfatta en funktion eller ett tal både som en process och som ett objekt är oumbärlig för att kunna tillägna sig en djup förståelse för matematik, oavsett hur man definierar förståelse (Sfard, 1991, s. 5).

Den strukturella uppfattningen av ett visst begrepp är mer abstrakt än den operationella; därför kan man betrakta den strukturella som en mer avancerad fas i en individs utveckling. Den operationella uppfattningen av begreppet kommer därmed att utvecklas tidigare än den strukturella när en individ tillägnar sig ett nytt begrepp.

Man kan föreställa sig begreppet funktion operationellt som en beskrivning av en beräkningsprocess, men man kan även föreställa sig det som ett objekt; exempelvis som en mängd av ordnade par. Den algebraiska representationen av en funktion kan tolkas som en beräkningsprocess, men också strukturellt som en statisk relation mellan två storheter. Sfard framhåller att den grafiska representationen av en funktion, i högre grad än den algebraiska, medger en strukturell tolkning; det är möjligt för en individ att samtidigt uppfatta alla punkter på en funktionsgraf som ett enda objekt (Sfard, 1991).

Sfard argumenterar, med hjälp av funktionsbegreppets historiska utveckling från 1700-talet till modern tid, för att begreppet har uppfattats operationellt långt före de strukturella definitionerna konstruerades. Hon menar att både Eulers definition av begreppet funktion, från år 1748, som ett *analytiskt uttryck* och hans senare definition från 1755 uttrycker en operationell uppfattning av begreppet.[2] Hon framhåller att dessa tidiga definitioner av funktionsbegreppet bygger på begreppet variabel, som var otydligt formulerat och därmed svårt att objektifiera. Hon tolkar funktionsbegreppets historiska utveckling som ett antal misslyckade försök att formulera en strukturell definition av begreppet. Alla försök att översätta matematikers intuitiva uppfattningar av funktionsbegreppet till en strukturell definition ledde slutligen fram till Bourbakis strukturella definition av begreppet funktion som en mängd av ordnade par; en definition som bortser från begreppet variabel och som inte hänvisar till några beräkningsprocesser (Sfard, 1991).

Sfard urskiljer tre steg i en individs begreppsutveckling: *Interiorization* är det tillstånd i individens begreppsutveckling då en individ blir bekant med den

---

[2] För en formulering av Eulers definitioner av begreppet funktion, se avsnittet om funktions- och variabelbegreppens historiska utveckling i föreliggande uppsats.

process som i slutändan kommer att ge upphov till ett nytt begrepp, till exempel algebraiska manipulationer som ger upphov till funktioner. Det inträffar då individen lär sig begreppet variabel och tillägnar sig förmågan att använda en formel för att bestämma värdet på den beroende variabeln. *Condensation* är det tillstånd då sekvenser av operationer betraktas som en helhet. Individen kan då uppfatta en process som en helhet, utan att behöva gå in på detaljer. Att en individ kan betrakta en funktion som en helhet är ett belägg för att individen har nått detta tillstånd. Till slut kan individen rita grafer, sätta samman två funktioner och bestämma inversen till en given funktion. Det tillstånd, i individens begreppsutveckling, där *interiorization* av ett begrepp på högre nivå börjar, kallas *reification*. I fallet med funktionsbegreppet kan *reification* beläggas med individens förmåga att lösa differentialekvationer eller med hennes förmåga att tala om allmänna egenskaper hos olika processer som utförs på funktioner, till exempel invertering av en funktion eller ett erkännande av att beräkningsbarhet inte är ett nödvändigt kännetecken på den mängd av ordnade par som kan betraktas som en funktion (Sfard, 1991).

Lärarstudenters uppfattningar av begreppet funktion

Hansson (2006) undersöker lärarstudenters begreppsbilder av begreppet funktion, genom att låta dem rita begreppskartor över de associationer som de gör i samband med följande ekvationer: $y = x + 5$, $y = \pi x^2$, $xy = 2$. Ekvationerna kan associeras med exempelvis rät linje, cirkelns area respektive hyperbel. Studenterna utformade innehållsrika begreppskartor, men det saknades ofta meningsfulla förbindelser mellan de olika matematiska begreppen i kartorna.

Hanssons slutsatser är att flera lärarstudenter inte ser att ekvationen $y = x + 5$ kan uppfattas som att den representerar en funktion och att ekvationen har två variabler som kan uppfattas som beroende respektive oberoende variabel. Funktionsbegreppet uppfattades oftast operationellt, som ett beroende mellan två variabler, och sällan som ett objekt med en uppsättning associerade egenskaper. Nästan alla studenterna uppfattade en funktion som en formel, ett algebraiskt uttryck eller en ekvation. De utelämnade begreppen definitionsmängd och målmängd när de beskriver funktionsbegreppet; en förklaring kan vara att de inte är bekanta med mängdbegreppet, menar Hansson.

Funktionsbegreppet är sällan välutvecklat i de begreppskartor som studenterna utformar, vilket indikerar att deras begreppsbilder av begreppet funktion inte är rika. Deras begreppsbilder förefaller vara indelade i olika separata fack, med få förbindelser med varandra. Detta kan hindra studenterna från att konstruera rika kognitiva strukturer för begreppet. Bristen på förbindelser mellan de olika delarna av kartorna kan få konsekvenser för studenternas förmåga att variera sina resonemang och relatera till andra begrepp. Detta kan i sin tur få konsekvenser för den undervisning som de kommer att utforma i rollen som yrkesverksamma lärare i framtiden, menar Hansson.

I samband med den ”nya matematiken[3]” användes Bourbakis mängdteoretiska definition av begreppet funktion, från år 1954, som en mängd av ordnade par. Hansson (2006) framhåller att denna definition är statisk och att den kritiserades för att inte stödja elevers förståelse av funktionsbegreppet.

Lärares kunskaper

I detta avsnitt beskrivs ramverket *mathematical knowledge for teaching* som har utvecklats av Deborah Balls forskargrupp vid University of Michigan. De betonar att deras ramverk ska ses som en utveckling av Shulmans (1987) kunskapskategorier *content knowledge* och *pedagogical content knowledge* (Ball m fl , 2008). Dessutom beskrivs hur Nyikahadzoyi (2015) skisserar lärares *mathematical knowledge for teaching* om begreppet funktion. Slutligen refereras två empiriska studier som använder ramverket *mathematical knowledge for teaching* för att beskriva lärares kunskaper om begreppen funktion respektive variabel.

Shulmans kategorisering av lärares yrkeskunskaper

Shulman (1986, 1987) och hans kollegor undersöker hur nya lärares goda ämnesförberedelser översätts till de kunskaper som behövs för att undervisa i ett skolämne, till exempel matematik, naturvetenskap, historia eller engelska. Shulman kritiserade den förhärskande föreställningen av lärarkompetens som fokuserade på allmänna aspekter av undervisning.

Shulman kategoriserade lärares yrkeskunskaper för undervisning i följande sju kategorier: *allmän pedagogisk kunskap, kunskap om elever, kunskap om utbildningens sammanhang, kunskap om utbildningsmål, kunskap om kursplaner, content knowledge* och *pedagogical content knowledge (PCK)* (Shulman, 1987, s. 8). Enligt Ball m fl

[3] Under 1960 – talet reformerades skolmatematiken i västvärlden med den så kallade ”nya matematiken”.

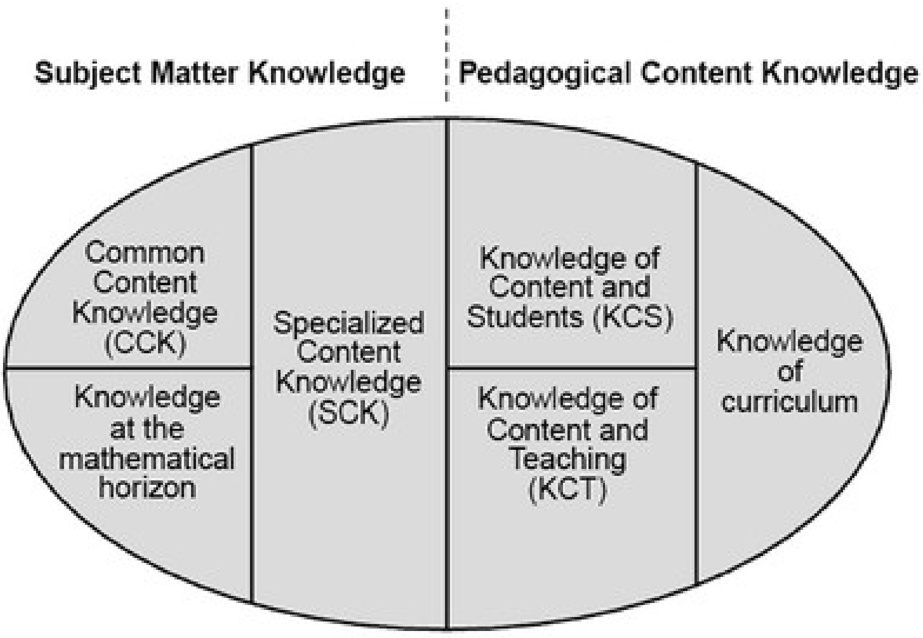
(2008) var Shulmans avsikt med dessa kategorier att belysa den roll som lärares kunskaper om ett undervisningsinnehåll spelar för undervisning. Ball och hennes kollegor påpekar att de fyra förstnämnda kategorierna är inriktade mot allmänna aspekter av lärares kunskaper för undervisning, medan de tre sistnämnda definierar ämnesspecifika aspekter.

Shulman (1987) anser att *PCK* är av speciellt intresse eftersom den identifierar en kunskapsbas för undervisning. Shulman (1986) definierar PCK som att den innefattar de mest användbara sätten att representera ett visst ämnesstoff så att det blir begripligt för andra. *PCK* innefattar dessutom kunskaper om vad som gör lärandet av ett visst stoff lätt eller svårt, och kunskap om de uppfattningar och missuppfattningar som elever kan ha med sig till undervisningen.

Ramverket *mathematical knowledge for teaching*

Deborah Ball leder en forskargrupp, som är inriktad mot lärares kunskaper för undervisning i matematik, vid University of Michigan. Gruppen utvecklade under år 2001 ett stort antal flervalsfrågor som representerar matematiska förmågor som är specifika för undervisning inom områdena taluppfattning, operationer med tal samt mönster, funktioner och algebra. Frågorna, som skulle ställas till matematiklärare i årskurs 1-6, kan användas för att särskilja mellan lärares matematiska kunskaper. Forskarnas slutsatser är att lärares kunskaper för undervisning i matematik är specifika för ett visst matematiskt område, snarare än relaterade till en allmän faktor, exempelvis intelligens eller allmän matematisk förmåga (Hill, Schilling, & Ball, 2004).

Forskargruppen har konstruerat en modell för de matematiska kunskaper som behövs för det arbete som matematiklärare utför. Modellen, som benämns *mathematical knowledge for teaching*, beskriver de arbetsuppgifter som ingår i matematikundervisning. Balls forskargrupp uppfattar sin modell som en förfining av Shulmans (1986) kunskapskategorier CK och PCK till en mer detaljerad modell bestående av flera olika delar. Modellen åskådliggörs i nedanstående diagram (Se figur 1).



Figur 1: Modellen *mathematical knowledge for teaching* (Ball m fl, 2008)

Figur 1 visar sambandet mellan ramverket *mathematical knowledge for teaching* och två av Shulmans (1986) ursprungliga kategorier; *pedagogical content knowledge* och *subject matter knowledge*, som sammanfaller med det som ovan benämns *content knowledge*.

Ball m fl (2008) framhåller att det finns gränsdragningsproblem med deras modell; det är inte enkelt att särskilja kategorierna, vilket inverkar på noggrannheten i deras definitioner av kategorierna. Forskargruppens målsättning är att lokalisera *mathematical knowledge for teaching* i det sammanhang där den används, men hur sådan kunskap används av lärare är outforskat. Hur man fångar olika aspekter av lärares tänkande och hur olika kunskapskategorier kommer till användning i samband med undervisning, behöver utredas.

Ball och hennes forskargrupp fokuserade sin forskning på att beskriva de krav som ställs på att bedriva undervisning genom att ställa sig följande frågor: Vilka är de återkommande arbetsuppgifterna i samband med undervisning i matematik? Vilka matematiska kunskaper och förmågor krävs för att utföra dessa arbetsuppgifter? På vilket sätt ställer undervisning krav på matematiska resonemang, insikter, förståelse och förmågor? Vilka aktiviteter krävs för att utveckla undervisning där matematiken behandlas med integritet, elevers idéer tas på allvar och där det matematiska arbetet är såväl en kollektiv som individuell ansträngning?

Forskargruppen använde data i en nationell databas, som dokumenterar ett års matematikundervisning i en klass i årskurs 3 i en amerikansk kommunal skola, för att besvara ovanstående frågor. Uppgifterna i databasen inkluderar ljud- och videoinspelningar av lektioner, transkriptioner av dessa inspelningar, kopior av elevarbeten, läxor, miniprov och dessutom lärares planeringar och anteckningar. Forskarna använde dessutom sin erfarenhet av undervisning för att besvara ovanstående frågor (Ball m fl, 2008).

Nedan följer en beskrivning av fyra av de kunskapskategorier som används i ramverket *mathematical knowledge for teaching*: *common content knowledge (CCK), specialized content knowledge* (SCK), *knowledge of content and students* (KCS) och *knowledge of content and teaching* (KCT). Kunskapskategorierna *knowledge at the mathematical horizon* och *knowledge of curriculum* kommer inte att behandlas i denna uppsats.

Common content knowledge

Kunskapskategorin *common content knowledge* (CCK) är matematiska kunskaper och förmågor som *inte* är unika för undervisning, utan för vilken matematikanvändare som helst. Till exempel kan andra yrkesgrupper än matematiklärare beräkna differensen av två flersiffriga heltal med hjälp av en subtraktionsalgoritm (Ball m fl, 2008).

Nyikahadzoyi (2015) beskriver lärares *mathematical knowledge for teaching* om begreppet funktion. Han framhåller att en del av CCK om funktionsbegreppet är att känna till funktioners egenskaper, kopplingar mellan funktionsbegreppet och andra matematiska begrepp och tillämpningar av funktioner.

Specialized content knowledge

Kunskapskategorin *specialized content knowledge* (SCK) är matematiska kunskaper och förmågor som är unika för matematikundervisning. Ett exempel på SCK i samband med subtraktion av två flersiffriga heltal med hjälp av en algoritm är förmågan att avgöra orsakerna till elevers felaktiga beräkningar av differensen mellan talen med hjälp av ett matematiskt resonemang. Ett annat exempel är att bedöma om en icke-standardmetod för att beräkna denna differens fungerar i allmänhet (Ball m fl, 2008).

För att kunna undervisa i matematik behöver lärare kunna använda dekomprimerade matematiska kunskaper. Detta för att kunskapen ska vara möjlig att undervisa om direkt till eleverna. Emellertid är målet att elever med flyt ska behärska kunskaper som är komprimerade. Lärare måste ha matematiska kunskaper, som inte är komprimerade, eftersom matematikundervisning kräver att ett visst innehåll synliggörs för eleverna. Att kunna beräkna differensen av två heltal med hjälp av en subtraktionsalgoritm är ett exempel på komprimerad kunskap. Exempelvis innebär CCK att med hjälp av någon algoritm kunna beräkna differensen av två heltal, när beräkningen innebär en tiotalsövergång. SCK innebär då att kunna förklara varför det blir tio ental när man växlar ett tiotal. SCK blir i detta exempel att ha kunskap om begreppet platsvärde i decimalsystemet (Ball m fl, 2008).

Nyikahadzoyi (2015) ger följande exempel på lärares SCK om begreppet funktion: att känna till flera definitioner av begreppet, förmågan att välja olika representationer av en funktion för specifika syften, känna till några nätta exempel på funktioner, känna till funktionsbegreppets betydelse i relation till matematikämnet samt kunna uppfatta en funktion både som en process och som ett objekt.

Knowledge of content and students

Kunskapskategorin *knowledge of content and students* (KCS) kombinerar kunskaper om elever med kunnande om ett visst matematiskt innehåll. Detta innefattar kunskaper om elevers uppfattningar och missuppfattningar av ett visst matematiskt innehåll, exempelvis måste lärare kunna förutsäga om eleverna kommer att tycka att en matematikuppgift är enkel eller svår. Lärare måste också kunna tolka elevers outvecklade matematiska resonemang, vilket kräver ett samspel mellan förståelse för ett matematiskt innehåll och kännedom om elevers matematiska tänkande.

Exempelvis är förmågan att särskilja ett felaktigt svar från ett korrekt svar ett exempel på CCK. Förmågan att avgöra orsakerna till ett räknefel med hjälp av ett matematiskt resonemang är ett exempel på SCK, medan att känna till vanligt förekommande räknefel och att kunna förutsäga vilket av flera tänkbara fel som eleverna troligen kommer att göra är exempel på KCS (Ball m fl, 2008).

Nyikahadzoyi (2015) beskriver kunskapskategorin KCS, både allmänt och specifikt för begreppet funktion. Den innefattar lärares förmåga att: förutse elevers misstag och missuppfattningar, tolka elevers ofullständiga resonemang, förutse vilka uppgifter som de kommer att uppleva som intressanta och utmanande samt att förutse kognitiva hinder för deras lärande. Nyikahadzoyi ger följande exempel på elevers svårigheter med begreppet funktion: Att använda vissa representationer och att översätta mellan olika representationer av en funktion, tolka och manipulera symboler som är relaterade till funktioner samt svårigheter med att se en funktion som ett matematiskt objekt och inte enbart som en process.

Nyikahadzoyi (2015) framhåller att det är troligt att elever kommer att möta kognitiva hinder när de använder vissa representationer av en funktion. Lärare bör känna till de missuppfattningar som är associerade med användningen av vissa representationer av en funktion, exempelvis funktionslådan som kan leda till missuppfattningen att alla funktioner kan uttryckas med en explicit regel. Om funktioner endast identifieras med den algebraiska representationen så kan detta leda till att elever uppfattar funktioner som regler med en viss regelbundenhet, där en förändring i den oberoende variabeln orsakar en förändring i den beroende variabeln. En konsekvens av detta kan bli att vissa elever inte uppfattar konstanta funktioner som varande funktioner, enligt Nyikahadzoyi.

Knowledge of content and teaching

Kunskapskategorin *knowledge of content and teaching* (KCT) kombinerar kunskaper om undervisning med kunnande om matematik. Lärare behöver matematiska kunskaper för att utforma undervisning för ett visst matematiskt stoff, till exempel när de utformar en sekvens av flera lektioner. Lärare utvärderar fördelar och nackdelar med att använda olika representationer för ett matematiskt begrepp i undervisningen. De identifierar vad olika metoder och procedurer kan erbjuda pedagogiskt. Dessa arbetsuppgifter förutsätter ett samspel mellan förståelse för ett visst matematiskt innehåll och kunskaper om pedagogiska frågor som inverkar på elevers lärande (Ball m fl, 2008).

Nyikahadzoyi (2015) ger följande exempel på KCT om funktionsbegreppet: Lärare bör känna till olika sätt att introducera funktionsbegreppet i undervisningen och för- och nackdelar med en viss representation av en funktion. Dessutom bör lärare känna till olika sätt att sekvensera övningsuppgifter och exempel och kunna rangordna dem efter hur lämpliga de är för en viss elevgrupp, menar Nyikahadzoyi.

Lärares kunskap om begreppet variabel

Usiskin (1988) beskriver fyra uppfattningar av algebra och tillhörande användningar av begreppet variabel:

1. Algebra som generaliserad aritmetik; variabler används för att beteckna godtyckliga tal, exempelvis i kommutativa lagen för addition av tal.

2. Problemlösning med hjälp av algebra; en variabel uppfattas som ett obekant tal.
3. Algebra som ett studium av samband mellan storheter; en variabel varierar och står för ett värde i en funktions definitionsmängd eller för ett tal som andra tal beror av. Endast i detta sammanhang används begreppen beroende och oberoende variabel.
4. Algebra som ett studium av strukturer; en variabel är en symbol för ett godtyckligt element i en algebraisk struktur, till exempel en grupp.

Kilhamn (2014) undersöker de frågor som uppkommer i lärares arbete och de krav som ställs på lärare när de undervisar om begreppet variabel i grundskolans årskurs sex. Hennes syfte är att förstå de matematiska frågor och krav på lärare som uppkommer när lärare introducerar begreppet variabel samt att skissera exempel på *specialized content knowledge* för undervisning om begreppet variabel. Observationer och fokusgruppintervjuer användes för att samla in data. Två av de deltagande lärarnas lektioner analyserades, fröken B och fröken C. Fröken B använder det algebraiska uttrycket "$x + 2$" för att representera uttrycket ”ett tal adderat med 2”, som sitt första exempel på begreppet variabel; det är emellertid oklart huruvida x har ett specifikt värde eller om x representerar ett godtyckligt tal. Fröken C väljer att illustrera den varierande aspekten av begreppet variabel genom att använda formler för att beskriva samband mellan sina familjemedlemmars ålder. Fröken C erbjuder därmed en kontext för sina exempel, som synliggör begreppen beroende och oberoende variabel för eleverna.

Kilhamn (2014) formulerar följande slutsatser om vilken kunskap som utgör *specialized content knowledge* för undervisning om begreppet variabel: Lärare behöver särskilja två aspekter av begreppet variabel, dels den varierande aspekten, dels variabel som ett fixt men obekant tal. De behöver välja exempel, med en meningsfull kontext, som belyser båda dessa aspekter av begreppet variabel. De behöver också särskilja mellan å ena sidan en ekvation med en obekant, å andra sidan en formel som beskriver ett samband mellan två eller flera variabler.

Lärares kunskap om begreppet funktion

Hatisaru och Erbas (2015) undersöker om det finns ett samband mellan lärares *mathematical knowledge for teaching* om begreppet funktion och resultatet av deras elevers lärande om detta begrepp med hjälp av data från två lärare och deras elever i årskurs nio i en yrkesskola i Ankara i Turkiet. Forskarna utvecklade en enkät som de använde för att mäta de två lärarnas SCK och KCS om begreppet funktion. Enkäten följdes upp med intervjuer av de två lärarna för att utveckla en mer detaljerad bild av deras SCK och KCS om funktionsbegreppet. Dessutom gav forskarna en liknande enkät till de två lärarnas elever och genomförde klassrumsobservationer. Hatisaru och Erbas (2015) påvisar ett visst samband mellan de två lärarnas *mathematical knowledge for teaching* och deras elevers lärande. Detta samband var emellertid inte tydligt.

Individers svårigheter med begreppet funktion

I avsnittet redovisas några empiriska studier som indikerar att studenter och elever har svårigheter med begreppet funktion.

Konstanta funktioner

Flera empiriska studier visar att studenter och elever uppvisar svårigheter med att acceptera konstanta funktioner; de kan till exempel uttrycka att det måste finnas minst ett x i den algebraiska representationen av en funktion (Barnes, 1988; Tall och Bakar, 1992; Vinner och Dreyfus, 1989; Viirman, Attorps och Tossavainen, 2010; Borke, 2014; Hatisaru och Erbas, 2015).

Barnes (1988), som refereras i Tall (1992), frågade elever i årskurs 11 och studenter på universitet om ekvationen $y = 4$ representerar y som en funktion av x. En majoritet av respondenterna i Barnes studie svarade nej, med motiveringen att y inte beror av x. När universitetsstudenterna tillfrågades om en horisontell linje i ett koordinatsystem representerar y som en funktion av x svarade *alla* studenterna att den gör det. Några studenter ville då gå tillbaka till frågan om ekvationen $y = 4$, för att ändra sitt nekande svar.

Tall och Bakar (1992) undersöker universitetsstudenters uppfattningar av begreppet funktion i en kvantitativ enkätstudie. De frågade ungefär hundra universitetsstudenter om en horisontell linje i ett koordinatsystem representerar y som en funktion av x. Nästan hälften av studenterna svarade att den horisontella linjen inte representerar y som en funktion av x, med motiveringen att värdet för y inte beror av x. Ungefär 70 % av studenterna i Tall och Bakars studie svarade att ekvationen $y = 4$ inte representerar en funktion.

Vinner och Dreyfus (1989) undersöker israeliska collegestudenters begreppsbilder av begreppet funktion i en kvantitativ enkätstudie. Forskarna samlade in empiri med hjälp av en enkät, som dels består av uppgifter om att identifiera funktioner bland tre givna kurvor, dels uppgifter där respondenterna ska konstruera en funktion som uppfyller ett visst angivet villkor. Enkäten avslutas med frågan: ”Vad är en funktion enligt din uppfattning?”

Ungefär hälften av respondenterna i Vinner och Dreyfus (1989) studie svarade jakande på frågan om det finns en funktion där alla funktionsvärden är lika. Ungefär hälften av dem som svarade jakande, motiverar sitt svar med ett exempel på en konstant funktion. Några respondenter, som svarade ja på frågan, anger ekvationer som, rent visuellt, innehåller variabeln x: $y = {}^{x}/_{x}$ respektive $y = x^0$. Vinner och Dreyfus framhåller att de uttrycker en operationell uppfattning av begreppet funktion, i Sfards (1991) mening, eftersom man måste utföra en operation med x.

Jag erhöll ett liknande resultat som Barnes (1988) och Vinner och Dreyfus (1989) i min magisterstudie; ungefär hälften av gymnasieeleverna i min studie ansåg att ekvationen $y = 4$ inte representerar en funktion. Eleverna motiverade sitt ställningstagande med att y är oberoende av x eller med att det inte finns någon term som innehåller x i ekvationen. En elev ansåg att ekvationen $y = 4$ inte representerar en funktion, men att den kan skrivas $y = 4x^0$, så att den representerar en funktion (Borke, 2014). Detta är i överensstämmelse med Vinner och Dreyfus (1989) studie.

En av lärarna i Hatisarus och Erbas (2015) studie har en hypotes om att orsaken till att vissa av hennes elever antar att $y = 4$ inte representerar en funktion är att ekvationen inte innehåller något x.

Viirman m fl (2010) undersöker vilken karaktär som högskolestudenters begreppsbilder av funktion har med hjälp av en enkät. Studenterna, som läser till lärare eller till ingenjörer, konfronterades i enkäten med tolv givna algebraiska uttryck och fyra grafer och det efterfrågades vilka av dessa som representerar y som en funktion av x. Enkäten avslutades med att studenterna uppmanades att ange definitionen av begreppet funktion. Ungefär en tredjedel av respondenterna anser att ekvationen $y = 3$ representerar en funktion, medan dubbelt så många anser att $f(x) = 3$ gör det.

Styckvis definierade funktioner och kontinuitet

En styckvis definierad funktion erbjöd svårigheter för respondenterna i Barnes (1988) studie, eftersom det verkade som att den definierade *flera* funktioner (Tall, 1992).

Studenterna i Vinner och Dreyfus (1989) studie uttrycker två aspekter av styckvis definierade funktioner i sina enkätsvar:

- Om grafen gör ett språng så är funktionen diskontinuerlig i en punkt i sin definitionsmängd.
- Om definitionsmängden delas i två delområden så kan olika regler gälla för de olika delområdena. Som en konsekvens av detta kan grafens karaktär förändras i övergången från det ena delområdet till det andra (Vinner och Dreyfus, 1989, s. 361).

Några respondenter använder en aspekt för att förkasta en given relation, medan andra studenter använder samma aspekt för att acceptera en relation som varande en legitim funktion.

Två uppgifter i Vinner och Dreyfus enkät är att identifiera grafen till en styckvis definierad diskontinuerlig funktion respektive grafen till en styckvis definierad kontinuerlig funktion. Några respondenter anser att en funktion måste vara kontinuerlig och några anser att en styckvis definierad kontinuerlig funktion inte kan definieras med två olika uttryck på två olika delområden, utan den måste definieras med en och endast en formel som gäller på hela definitionsmängden (Vinner & Dreyfus, 1989).

Följande uppgift används i flera empiriska studier (exempelvis Vinner och Dreyfus, 1989; Viirman m fl, 2010; Borke, 2014): *Avgör om det är möjligt att konstruera en funktion som uppfyller båda villkoren:*

- *Om x är ett heltal så ska funktionen ha ett värde som inte är ett heltal.*
- *Om x inte är ett heltal så ska funktionen ha ett heltalsvärde.*

Ungefär 10 % av studenterna i Vinner och Dreyfus (1989) studie angav ett exempel på en styckvis definierad funktion som uppfyller båda villkoren i uppgiften. Att en sådan funktion existerar förkastades av ungefär hälften av högskolestudenterna i Viirmans m fl (2010) studie. Deras motivering var att en funktion måste definieras med en och endast en formel som gäller för hela definitionsmängden. Jag använder samma uppgift i min magisterstudie för att undersöka om styckvis definierade funktioner finns i gymnasieelevers begreppsbilder av begreppet funktion. Eleverna försökte förgäves bestämma *en* formel som gäller för alla reella tal (Borke, 2014).

Entydigt bestämt funktionsvärde

Flera respondenter i Barnes (1988) studie svarade jakande på frågan huruvida cirkelns ekvation $x^2 + y^2 = 1$ definierar y som en funktion av x, trots att en sådan ”funktion” inte uppfyller villkoret om ett entydigt funktionsvärde (Tall, 1992). Andra empiriska studier har kommit fram till liknande resultat (exempelvis Borke, 2014; Tall och Bakar, 1992; Viirman m fl, 2010). Ungefär två tredjedelar av studenterna i Tall och Bakars (1992) studie uppvisar missuppfattningen att en cirkel, som är inritad i ett koordinatsystem, representerar en funktion. Tall och Bakar menar att orsaken till deras felaktiga svar är att studenterna är bekanta med cirkeln och att denna bekantskap frammanar funktionsbegreppet. En lika stor andel av studenterna i Viirmans m fl (2010) studie samt en majoritet av eleverna i Borkes (2014) studie anser att cirkelns ekvation representerar en funktion. Vinner och Dreyfus (1989) använder en fråga med en kurva som gör en loop i stället för en cirkel för att undersöka om studenterna använder villkoret att en funktion måste ha ett entydigt funktionsvärde. Ungefär två tredjedelar av studenterna i studien besvarade frågan korrekt och formulerade en korrekt motivering. Jag använder en S-formad kurva i min magisterstudie med samma syfte; ungefär hälften av gymnasieeleverna uppvisade missuppfattningen att den S-formade kurvan representerar en funktion (Borke, 2014).

Linjära funktioner

Schwarz och Hershkowitz (1999) förklarar de processer som styr elevers lärande om begrepp. När elever försöker förstå ett begrepp finns några specifika exempel som är mer centrala än andra. Elever använder dessa specifika exempel, som kallas prototypexempel, för att bedöma om andra exempel kan anses falla under det aktuella begreppet. Schwarz och Hershkowitz framhåller att elever använder linjära funktioner och andragradsfunktioner som prototypexempel genom att frågan om en viss relation definierar en funktion avgörs med hjälp av en jämförelse med dessa prototypexempel i stället för att eleverna konsulterar begreppets definition.

Det finns empiriska studier som antyder att elever använder linjära funktioner som prototypexempel för funktionsbegreppet (Markovits m fl, 1986, 1988; Borke, 2014; Hatisaru och Erbas, 2015). Markovits m fl (1986, 1988) i Tall (1992) använder en uppgift med två givna punkter i ett koordinatsystem och uppmanar respondenterna att rita grafen till en funktion som går genom de två givna punkterna. Dessutom ställer de frågan: *Hur många olika funktionsgrafer kan man rita genom de två givna punkterna?* Flera av Markovits respondenter svarade *en* funktionsgraf*;* de ritade enbart en rät linje genom punkterna. Markovits m fl. har en hypotes om att uppgiften frammanar bilden av en rät linje och att detta kan ha orsakats av geometriundervisningen i skolan och den tid som läggs på att studera linjära funktioner i skolan (Tall, 1992). Jag använde samma uppgift, med två givna punkter i ett koordinatsystem i min magisterstudie och ställde samma fråga. Några gymnasieelever ritade enbart en rät linje genom de två givna punkterna. För dessa elever frammanades bilden av en rät linje när de såg två punkter i ett koordinatsystem (Borke, 2014). Hatisaru och Erbas (2015) använder också samma uppgift när de frågar turkiska yrkeselever i årskurs 9 om hur många olika funktionsgrafer man kan rita genom de två givna punkterna. En majoritet av eleverna svarade att man kan rita flera linjära grafer genom punkterna.

Respondenters definitioner av begreppet funktion

Collegestudenterna i Vinner och Dreyfus (1989) kvantitativa studie besvarade en enkät som handlar om att identifiera och konstruera funktioner. Den sista frågan i enkäten lyder: *Vad är en funktion, enligt din uppfattning?* Baserat på respondenternas svar på den sista frågan identifierar Vinner och Dreyfus följande sex kategorier av studenters definitioner av begreppet funktion:

A. En funktion är en relation mellan två mängder som till varje element i den första mängden ordnar precis ett element i den andra mängden (*Dirichlet-Bourbakis definition).*
B. En funktion är en beroenderelation mellan två variabler; en variabel beror av en annan variabel.
C. En funktion är en regel. Med regel menas i detta sammanhang någon form av regelbundenhet.
D. En funktion är en operation eller en transformation av variabler.
E. En funktion är en formel, ett algebraiskt uttryck eller en ekvation.
F. En funktion identifieras med den grafiska eller symboliska representationen (Vinner & Dreyfus, 1989, s. 359-360).

Högskolestudenterna i Viirmans m fl. (2010) studie besvarade en enkät som handlar om att identifiera funktioner bland några givna algebraiska uttryck och grafer. Studenterna ombads att avgöra vilka av dessa uttryck och grafer som representerar funktioner. De ombads slutligen att ange sina definitioner av begreppet funktion i enkäten. Baserat på den sista uppgiften identifierade Viirman m fl. (2010) följande kategorisering av studenternas definitioner av begreppet funktion:

1. En funktion är en beroenderelation mellan två mängder som till varje element i den första mängden ordnar precis ett element i den andra mängden.
2. En funktion är en ”maskin” eller en eller flera operationer, som transformerar variabler till nya variabler.
3. En funktion är en regel, en formel eller ett algebraiskt uttryck.
4. En funktion identifieras med en av sina representationer, exempelvis en graf.
5. Ett meningslöst svar (Viirman m fl, 2010, s. 10-12).

Viirman m fl (2010) uttrycker att deras kategorisering till viss del är inspirerad av den kategorisering som görs i Vinner och Dreyfus (1989) studie. Jag ser en stor överenstämmelse mellan deras kategorisering och den som görs i Vinner och Dreyfus studie. Viirman m fl har sammanfört Vinner och Dreyfus kategorier A och B till sin kategori 1, kategorierna C och E till kategori 3, kategori D motsvarar kategori 2; emellertid använder studenterna i Vinner och Dreyfus studie inte ”maskin” som definition av en funktion, medan studenterna i Viirmans m fl studie gör det. Vinner och Dreyfus kategori F motsvarar kategori 4.

Viirman m fl (2010) menar att studenterna i deras första kategori uttrycker en strukturell uppfattning av funktionsbegreppet, medan studenterna i kategorierna 2 och 3 uttrycker en operationell uppfattning i Sfards (1991) mening. Kategorierna 4 och 5 uttrycker inte en matematisk definition av funktionsbegreppet. Tre studenters definitioner klassificerades i den första kategorin, medan 19 definitioner klassificerades i någon av kategorierna 2 eller 3. Tolv studenter angav inte någon användbar definition av begreppet funktion.

Viirman m fl (2010) framhåller att de tre första kategorierna följer funktionsbegreppets historiska utveckling: Bernoullis och Eulers tidiga definitioner passar i kategori 3, medan Eulers senare definition, från år 1755, passar i kategori 2. Bourbakis definition passar i kategori 1. Dirichlets definition borde placeras i kategori 3, men den kan även associeras med kategori 1, på grund av villkoret ”som till varje element i den första mängden ordnar precis ett element i den andra mängden” enligt Viirman m fl (2010). Bråting och Pejlare (2015) menar att det är problematiskt att jämföra nutida studenters förståelse för funktionsbegreppet med Eulers definitioner, eftersom studenternas definitioner baseras på ett modernt begreppsligt ramverk, som skiljer sig från det begreppsliga ramverk som Euler hade tillgång till under 1700 – talet.

Jag kom fram till följande kategorier av gymnasieelevers definitioner av begreppet funktion i min magisterstudie: En funktion är ett samband mellan två variabler, en funktion uttrycker ett beroende, en funktion är en regel samt en funktion är en graf (Borke, 2014). Mina kategorier är inspirerade av den kategorisering som görs i Vinner och Dreyfus (1989) studie; samtliga mina kategorier återfinns bland de kategorier som identifierades både i Vinner och Dreyfus (1989) och Viirmans m fl (2010) studier.

Metod

Jag har besvarat forskningsfrågorna med hjälp av två delstudier, som benämns delstudie A respektive B. Jag genomförde två enkätstudier med hjälp av lärarstudenter; båda delstudierna följdes sedan upp med enskilda intervjuer med några lärarstudenter. Detta kapitel innehåller en beskrivning av hur jag utformade mina instrument för datainsamlingen samt hur datainsamlingen genomfördes. Dessutom beskrivs de studentgrupper som deltog i studierna. Kapitlet avslutas med några forskningsetiska reflektioner.

Instrument

Enkät och uppföljande intervjuer användes för att samla in data i båda delstudierna. Jag använde halvstrukturerad intervju som varken är ett öppet vardagligt samtal eller ett slutet frågeformulär (Kvale, 2009) och utarbetade en intervjuguide som förberedelse för att genomföra mina intervjuer. Alla intervjuer spelades in med hjälp av en digital ljudbandspelare och transkriberades. Kvale (2009) påpekar att en transkribering av en intervju är en översättning från ett muntligt till ett skriftligt språk; ordagranna transkriberingar av intervjuer kan skapa artificiella konstruktioner som inte passar den skrivna textens formella stil. Därför har jag på några ställen gett texten en mer grammatiskt korrekt skriftlig form, till exempel genom att böja ett verb korrekt.

Delstudie A

Jag konstruerade en enkät som handlar om att, ur ett lärarperspektiv, bemöta några fiktiva gymnasieelevers påståenden om begreppet funktion i samband med undervisning i gymnasiekursen Matematik 3c. När jag konstruerade enkäten inspirerades jag av de enkätstudier som rapporteras i Tall och Bakar (1992), Viirman m fl (2010) samt Vinner och Dreyfus (1989). Jag har använt två av Tall och Bakars enkätuppgifter med en konstant funktion respektive cirkelns ekvation i min enkät, och dessutom en variant av Vinner och Dreyfus enkätuppgift med en styckvis definierad diskontinuerlig funktion. Dessa enkätuppgifter används också av Viirman m fl. Dessutom inspirerades jag av resultaten från min magisteruppsats, som handlar om gymnasieelevers begreppsbilder av begreppet funktion (Borke, 2014).

Pilotstudie 1

Jag genomförde en pilotstudie med en preliminär version av enkäten med fyra lärarstudenter som läser fjärde terminen på det långa ämneslärarprogrammet. Detta följdes upp med en intervju med en av studenterna. Grundat på utfallet av enkäten så tog jag bort en av uppgifterna i den, eftersom jag bedömde att den inte gav någon information om studenternas uppfattningar av begreppen funktion eller variabel.

Delstudie B

Jag konstruerade en enkät med öppna frågor som utformades med den huvudsakliga avsikten att undersöka lärarstudenters *knowledge of content and students* om begreppen funktion och variabel. När jag konstruerade enkäten använde jag mina erfarenheter av elevers svårigheter med funktionsbegreppet. Erfarenheter som jag har förvärvat dels under min tid som gymnasielärare i matematik, dels när jag skrev en magisteruppsats som handlar om gymnasieelevers svårigheter med funktionsbegreppet (Borke, 2014). När jag konstruerade enkäten blev jag inspirerad av de studier som beskrivs i Tall och Bakar (1992), Viirman m fl (2010) och Vinner och Dreyfus (1989), speciellt de enkätuppgifter som handlar om konstanta funktioner, cirkelns ekvation och styckvis definierade funktioner. Dessutom blev jag inspirerad av två av Hatisarus och Erbas (2015) enkätuppgifter; en uppgift med ett pildiagram respektive en uppgift med två givna punkter i ett koordinatsystem, där uppgiften var att rita grafen till en funktion som går genom punkterna samt att ange hur många olika funktionsgrafer som kan ritas genom punkterna. Den sistnämnda uppgiften används också av Markovits m fl (1986, 1988).

Pilotstudie 2

En pilotstudie genomfördes med en preliminär version av enkäten med hjälp av två yrkesverksamma matematiklärare och en lärarstudent som läser till lärare i matematik på det långa ämneslärarprogrammet. Min analys av respondenternas enkätsvar ledde dels till en revidering av uppgift 3 i enkäten, dels till att tydligare grafer och diagram användes i enkäten.

Datainsamling

Jag genomförde den första delstudien med hjälp av tre olika grupper av lärarstudenter; en grupp som läste den korta ämneslärarutbildning som kallas Brobyggaren samt två studentgrupper från det långa ämneslärarprogrammet, dels en grupp som läste den andra terminen, dels en grupp som studerade på den sista terminen av sin utbildning. Jag genomförde den andra delstudien endast med hjälp av studenter på Brobyggaren.

Brobyggaren

En kort ämneslärarutbildning är en utbildning för de studenter som har ämnesbehörighet i ett eller flera skolämnen och vill bli behöriga ämneslärare. Den innehåller utbildningsvetenskaplig kärna och verksamhetsförlagd utbildning och omfattar totalt 90 hp. Det finns två korta ämneslärarutbildningar vid Göteborgs universitet med inriktning mot grundskolans årskurs 7–9 eller gymnasieskolan i matematik, teknik eller naturvetenskapliga ämnen, dels ordinarie kompletterande pedagogisk utbildning (ordinarie KPU), dels kompletterande pedagogisk utbildning, alternativ studiegång (Brobyggaren). Den ordinarie kompletterande utbildningen (ordinarie KPU) till ämneslärare är en kort ämneslärarutbildning för studenter med avklarade ämnesstudier, vilket innebär, till inriktningen årskurs 7–9, 90 hp i ett ämne och 45 hp i ett eventuellt andra ämne. Till inriktningen gymnasieskolan krävs 120 hp. Utbildningen ges i normalfart och pågår under tre terminer.

Brobyggaren är en särskild ämneslärarutbildning för de studenter som uppfyller kraven för en kandidatexamen eller motsvarande i biologi, fysik, kemi, matematik eller teknik och vill utbilda sig till ämneslärare i matematik, teknik eller naturvetenskapliga ämnen. Brobyggaren har tillkommit genom ett samarbete mellan naturvetenskaplig fakultet och utbildningsvetenskaplig fakultet vid Göteborgs universitet och Göteborgs stad. Brobyggaren är ett treårigt pilotprojekt; i skrivande stund är det inte klart om den ska permanentas. Brobyggaren ges i högre studietakt än normalt under ett kalenderår som är indelat i tre terminer; en vårtermin, en sommartermin och en hösttermin.

Grossman, Hammerness och McDonald (2009), vid Stanford University, argumenterar för att lärarutbildningen ska frångå den traditionella idén att separera de universitets- respektive verksamhetsförlagda delarna av lärarutbildningen och att lärarutbildningen i högre grad ska utgå från problem som uppstår i skolverksamheten. Lärarutbildningen vid Stanford University (STEP) och lärarutbildningen vid Oslo universitet (PUPIL) är förebilder för Brobyggaren framhåller Annette Mitiche, Jörgen Dimenäs och Tommy Gustafson i projektledningen för Brobyggaren (personlig kommunikation, 2015-11-28). Därför är de högskoleförlagda och verksamhetsförlagda delarna av utbildningen i Brobyggaren sammanflätade. Lärarstudenterna på Brobyggaren kallas brobyggare i föreliggande uppsats.

Studenter på det långa ämneslärarprogrammet

En lång ämneslärarutbildning innefattar ämnesstudier i ett eller två ämnen, utbildningsvetenskaplig kärna och verksamhetsförlagd utbildning. Två olika grupper av lärarstudenter, som läser på det långa ämneslärarprogrammet, besvarade enkäten i min första delstudie. Den första gruppen studenter, som läste andra terminen på det långa ämneslärarprogrammet, läste en kurs som var uppdelad i två delkurser; envariabelanalys, 7,5 hp och matematikdidaktik, 7,5 hp. Jag genomförde min enkätundersökning på delkursen envariabelanalys. Delkursen examinerades med en skriftlig tentamen samt tre laborationer med datorprogrammet geogebra. Uppgifterna i den första datorlaborationen handlade om att undersöka grafer till trigonometriska funktioner samt exponentialfunktioner med hjälp av geogebra. Begreppen funktion, gränsvärde och kontinuitet behandlades på föreläsningarna innan studenterna besvarade min enkät. Föreläsaren använde Persson och Böiers (2010) lärobok *Analys i en variabel* som kursbok. Jag undervisade inte på någon av delkurserna. Den andra gruppen studenter läste sista terminen på det långa ämneslärarprogrammet. Jag hade inte mött någon av dessa studenter tidigare i deras utbildning.

Genomförande av delstudie A

Enkäten delades ut till tretton brobyggare, som har matematik som undervisningsämne, efter kursintroduktionen till den första delkursen *Didaktik och språkutvecklande arbetssätt, 7,5 högskolepoäng* på Brobyggaren. Åtta brobyggare besvarade enkäten. De fick följande pseudonymer: Bo, Dan, Eric, Fredrik, John, Patrick, Sven och Tom. Dessa åtta brobyggare har matematik som undervisningsämne, vilket innebär att de har minst 45 hp i matematik. Alla är män och de har en gedigen akademisk utbildning och yrkeserfarenhet med sig till lärarutbildningen. Jag genomförde enskilda intervjuer två veckor efter kursintroduktionen med fem av brobyggarna som hade besvarat enkäten: Dan, John, Patrick, Sven och Tom. Dessa fem brobyggare gjorde sin praktik inom de verksamhetsförlagda delarna av utbildningen på högstadieskolor i Göteborg. De anmälde sig frivilligt för en intervju via en "doodle" som jag hade skapat på internet. Vardera intervjun pågick i cirka en timme.

Jag delade även ut enkäten till drygt tjugo lärarstudenter, som läser den andra terminen på det långa ämneslärarprogrammet, efter en räkneövning på delkursen envariabelanalys. Tio studenter besvarade enkäten; sju av dem angav en förklaring av begreppet funktion i enkäten. Jag delade dessutom ut enkäten till sex lärarstudenter, som läser den sista terminen på det långa ämneslärarprogrammet, i samband med kursintroduktionen till en av kurserna på programmet. Fem av kursens sex studenter besvarade enkäten. Jag analyserade endast dessa studenters svar på den sista uppgiften i enkäten, som besvarades av sammanlagt tolv lärarstudenter från det långa ämneslärarprogrammet. Den uppgiften lyder: *Förklara för dina fiktiva gymnasieelever vad en variabel respektive en funktion är.*

Genomförande av delstudie B

Enkäten delades ut efter ett seminarium i matematikdidaktik[4] i kursen *Matematikens och naturvetenskapens didaktik och specialpedagogik för ämneslärare, 10,5 högskolepoäng*. Tio brobyggare, som har matematik som undervisningsämne, besvarade enkäten: Bo, Dan, Eric, Fredrik, John, Patrick, Rickard, Sven, Tom och Viktor. Två nya respondenter tillkom i min andra delstudie: Rickard och Viktor. De övriga åtta besvarade enkäten även i den första delstudien. Alla utom Rickard och Eric besvarade samtliga uppgifter i enkäten. Rickard besvarade endast de sex första uppgifterna i enkäten och passade på de två sista. Eric besvarade alla uppgifterna utom uppgift 7.

Jag genomförde enskilda intervjuer ungefär sju veckor efter seminariet med fyra brobyggare som hade besvarat enkäten: Dan, John, Patrick och Sven. De anmälde sig frivilligt för en intervju via en "doodle" som jag hade skapat för detta ändamål. Vardera intervjun pågick i cirka en timme.

Etik

Ett forskningsprojekt ska prövas mot etikprövningslagen om det innebär behandling av känsliga personuppgifter, enligt personuppgiftslagen, till exempel uppgifter om ras, politiska åsikter, religiös tro, eller domar i brottsmål

[4] Seminariets titel var "Vad kan svenska elever om matematik?"

(Vetenskapsrådet, 2011). Min forskning, som handlar om lärarstudenters matematiska kunskaper, behövde därmed inte prövas enligt etikprövningslagen eftersom jag inte behandlar några känsliga personuppgifter. Jag har gett informanterna som läser på Brobyggaren pseudonymer, vilket ger ett visst skydd mot att enskilda studenter identifieras av utomstående. Varje informant som läser på det långa programmet benämns *Student på långa programmet*. Jag kan emellertid inte slutgiltigt avgöra vem som är behörig att ta del av empirin, eftersom den inte är min privata egendom, utan ägs av Göteborgs universitet (Vetenskapsrådet, 2011).

Resultat delstudie A: Lärarstudenternas begreppsbilder

Forskningsfrågan om vilka begreppsbilder lärarstudenter visar om begreppen funktion och variabel besvaras genom hela resultatbeskrivningen i detta kapitel, som är indelat i följande avsnitt: I det första avsnittet presenteras resultatet av min analys av lärarstudenternas svar på den sista uppgiften i enkäten[5] där de uppmanades att *förklara vad en variabel respektive en funktion är*. Därefter presenteras resultatet av en fortsatt analys av brobyggarnas enkäter och intervjuer om begreppen variabel respektive funktion.

Lärarstudenternas förklaringar av begreppet funktion

I detta avsnitt presenteras resultatet av min analys av lärarstudenternas svar på den sista uppgiften i enkäten. Resultatet baseras på tjugo besvarade enkäter. De tjugo lärarstudenterna (tolv som läser på det långa ämneslärarprogrammet och åtta brobyggare) har besvarat samma enkät, där de först fick bemöta fyra fiktiva elevers påståenden om några funktioner och sedan besvara den sista uppgiften som lyder: *Förklara för dina fiktiva gymnasieelever vad en variabel respektive en funktion är*.

Baserat på min analys av de tjugo lärarstudenternas svar på den sista uppgiften i enkäten har jag kategoriserat studenternas förklaringar av begreppet funktion. Kategorierna har vuxit fram ur data under ett analysarbete som pågick under en lång tidsperiod. När jag konstruerade kategorierna läste jag igenom alla informanternas förklaringar, grupperade dem på olika sätt och gav grupperna unika beskrivningar. Denna analysprocess upprepades flera gånger och gav upphov till olika kategoriseringar; tillslut kom jag fram till nedanstående kategorisering, som jag anser vara den mest beskrivande. Kategorierna presenteras i följande ordning: De fyra första kategorierna (*Uttryck, Beroende av en variabel, Regel och Relation*) följer funktionsbegreppets historiska utveckling;

[5] Se Bilaga 1 Enkät delstudie A

sedan följer en kategori som benämns *Metaforen maskin*. Slutligen följer en kategori som benämns *Samband mellan variabler*. Kategorierna åtföljs av några exempel på de förklaringar som studenterna angav i enkäten.

Uttryck

En student, från det långa ämneslärarprogrammet, förklarar begreppet funktion som ett *uttryck* där man, efter eventuella beräkningar, får fram ett element y:

> En funktion är ett uttryck som använder ett element x från en mängd A så att man, efter eventuella beräkningar, får fram ett element y från en mängd B. Det är inte tillåtet att ha flera element y till ett och samma element x. *Student på långa programmet*

Studentens förklaring liknar Eulers tidiga definition av funktion, från år 1748, som ett *analytiskt uttryck*. Emellertid använde Euler inte mängder i sin definition och inte heller kravet på att y ska vara entydigt bestämt. Studentens förklaring kan sägas uttrycka en operationell uppfattning av begreppet funktion, i Sfards (1991) mening.

Beroende av en variabel

Sju studenter beskriver en funktion som ett beroende av en eller flera variabler:

> Om man vill studera hur något beror på olika saker, t ex hur ett materials ledningsförmåga beror på temperatur och resistivitet. Ledningsförmågan L är det funktionsvärde som beror på variablerna temperatur, T, och resistivitet, ρ. Matematiskt kan man skriva det som $L = f(T, \rho)$. Fredrik

> En funktion är en variabel som beror på en annan variabel. En variabel är ett tal som kan variera. *Student på långa programmet*

Studenternas förklaringar liknar Eulers senare definition av begreppet funktion från år 1755, som lyder: *Om x betecknar en variabel storhet så kommer alla storheter som på något sätt beror av x eller bestäms av den att kallas för funktioner av den.*

Två av dessa studenter uppvisar missuppfattningen att cirkelns ekvation representerar en funktion, i samband med den andra uppgiften i enkäten, som är att bemöta Bertils påstående: ”$x^2 + y^2 = 9$ är en funktion eftersom y beror av x.” Ett problem med att förklara en funktion som ett beroende mellan variabler är att entydighet inte innefattas.

Regel

Fem studenter anger en förklaring av begreppet funktion som liknar Dirichlets definition, från år 1837, som en *regel enligt vilken ett unikt värde för y bestäms:*

> En funktion är en regel som för varje tal i definitionsmängden genererar ett nytt tal, dock kan mot varje tal i definitionsmängden endast svara ett enda tal. Eric

> Låt A och B vara mängder. En funktion från A till B är en regel som till varje element i A ordnar ett element i B. A är definitionsmängd och B mål-mängd. Dan

> y är en funktion av x om det för varje x i definitionsmängden finns ett y. Bo

Man kan göra tolkningen att Erics förklaring uttrycker en operationell uppfattning av begreppet funktion, i Sfards (1991) mening, på grund av användningen av verbet ”genererar”, som kan associeras med en process. Dans förklaring kan också tolkas operationellt eftersom verbet ”ordnar” kan uppfattas som en process, som emellertid inte ska förväxlas med resultatet av denna process, ett ordnat par, som kan uppfattas som ett objekt. Bos förklaring kan kan sägas uttrycka en strukturell uppfattning av begreppet funktion på grund av användningen av verbet ”finns” i betydelsen det existerar. Det är emellertid inte tydligt om Dan och Bo menar att y måste vara entydigt bestämd.

Relation

En student, från det långa ämneslärarprogrammet, anger en förklaring av begreppet funktion som liknar Bourbakis definition från år 1939:

> En funktion är en relation mellan två mängder så att för varje element x finns ett element y som är x:s korrespondent. *Student på långa programmet*

Denna förklaring kan sägas uttrycka en strukturell uppfattning av begreppet funktion på grund av användningen av substantivet ”relation” och verbet ”finns”. Det är emellertid oklart om studenten menar att elementet y måste vara entydigt bestämt.

Metaforen maskin

Fem studenter använder begreppet ”maskin” som metafor för begreppet funktion:

> Vi stoppar in ett x i maskinen och ut ur den kommer ett y. Dan

Dessa metaforer kan tolkas som en förklaring av funktionsbegreppet som är riktad till elever; en tolkning som får stöd av följande citat från Bo:

> Man kan se en funktion som en maskin som tar ett x och ger ett y. Bo

Samband mellan variabler

Tre studenter förklarar begreppet funktion som ett samband mellan variabler:

> En funktion är ett samband mellan två variabler. En variabel är en symbol som representerar ett godtyckligt tal. *Student på långa programmet*

Deras förklaringar brister i precision, exempelvis anger de inte någon riktning för sambandet.

Aspekter av begreppet variabel

I detta avsnitt presenteras resultatet av en fortsatt analys av brobyggarnas enkäter och transkriptioner av intervjuer med brobyggarna om begreppet variabel, i form av olika delar av deras begreppsbilder. Resultatet baseras på åtta enkäter[6] samt intervjuer med följande fem brobyggare: Dan, John, Patrick, Sven och Tom. Intervjuerna tog sin utgångspunkt i den enkät som de besvarade innan jag intervjuade dem. Det var ett visst bortfall i den uppgift i enkäten där brobyggarna ombads att förklara begreppet variabel; fem brobyggare gav en förklaring till begreppet variabel i enkäten: Bo, Dan, Eric, John och Sven.

Den varierande aspekten

Fyra brobyggare, Dan, Eric, John och Sven, framhåller den varierande aspekten av begreppet variabel i sina enkätsvar; begreppet förklaras som en storhet som kan variera:

> En variabel är en storhet som kan variera. Till exempel är temperatur en variabel. En variabel kan anta olika värden. Dan

[6] Se Bilaga 1 Enkät delstudie A

Dan, John, Patrick, Sven och Tom beaktar den varierande aspekten av begreppet variabel när de under intervjuerna föreslår att x i ekvationen $x + 3 = 5$ inte ska benämnas variabel eftersom x inte kan variera.

Trots att Dan har skrivit i enkäten att *en variabels värde kan fixeras genom att värdet bestäms av en ekvation*, så framhåller han under intervjun att det är problematiskt att kalla x i ekvationen $x + 3 = 5$ för variabel eftersom ekvationen bestämmer x entydigt:

> Mikael: Är x en variabel i ekvationen $x + 3 = 5$?
>
> Dan: x har ett fixt värde som ges av ekvationen som fixerar värdet hos x, men det beror på hur man ser det och hur man definierar variabel.
>
> Mikael: Hur definierar du variabel?
>
> Dan: En storhet som kan anta olika värden. I det här fallet så är det problematiskt att kalla x variabel. Den är fix, 2.

Både i enkäten och under intervjun förklarar John begreppet variabel som *något som kan anta olika värden*. Han uttrycker viss osäkerhet huruvida x i ekvationen $x + 3 = 5$ är en variabel, eftersom det bara finns en lösning till ekvationen:

> Mikael: Finns det några variabler i ekvationen $x + 3 = 5$?
>
> John: Jag är osäker, i så fall har den värdemängden $x = 2$, x är variabel med värdemängden 2, men det låter inte så värst variabelt. Den är inte en variabel för den kan inte variera och den kan lösas ut entydigt.

Patrick menar att funktioner, men inte ekvationer, har variabler. Ekvationen $x + 3 = 5$ saknar variabler eftersom den har en entydig lösning:

> Mikael: Finns det några variabler i $x + 3 = 5$?
>
> Patrick: Nej, ty det är en ekvation och inte en funktion. Man söker bara talet som uppfyller ekvationen, som är av grad ett. Den kan bara ha en rot.

I enkäten skriver Sven att en variabel kan förklaras som *en behållare som kan innehålla vilket tal som helst*. Han vill inte kalla x i ekvationen $x + 3 = 5$ för variabel eftersom lösningen till ekvationen inte kan variera; den är en bestämd konstant:

> Mikael: Hur många variabler finns det i ekvationen $x + 3 = 5$?

Sven: Inga. Här står det $x = 2$, x är en bestämd konstant.

Oberoende och beroende variabel

Bo, Eric, John, Patrick, Sven och Tom tolkar ordet ”variabel” som oberoende variabel; till exempel förklarar Eric begreppet variabel på följande sätt i enkäten:

> En variabel x i en funktion $f(x)$ är en parameter som kan anta vilka värden som helst i funktionens definitionsmängd. Eric

Eric associerar begreppet variabel till en funktions definitionsmängd; han tolkar ordet ”variabel” som *oberoende* variabel. Patrick gör samma tolkning när han associerar ordet ”variabel” till en funktions definitionsmängd. Patrick anser att $y = x + 3$ endast har en variabel, nämligen x; y kan inte vara en variabel eftersom y betecknar funktionen:

> Mikael: Vad är en variabel?
>
> Patrick: Den finns i definitionsmängden till en funktion.
>
> Mikael: Finns det några variabler i $y = x + 3$?
>
> Patrick: Ja x. y beror av x och är inte en variabel, y är funktionen.

Även John tolkar ordet ”variabel” som *oberoende* variabel när han under intervjun säger att om x är variabeln så är y funktionen, y kan då inte samtidigt vara en variabel, men om y är variabeln och x betecknar funktionen, då kan x inte samtidigt vara en variabel.

> Mikael: Hur många variabler finns det i $y = x + 3$?
>
> John: En variabel och en funktion. Om x är variabel så är y funktionen eller tvärtom om man löser ut x och får $x = y - 3$. Då är y variabel och x funktionen.

Av de fem intervjuade brobyggarna är det endast Dan som visar begreppsparet beroende och oberoende variabel i sin begreppsbild av begreppet funktion:

> Mikael: Vad är skillnaden mellan en ekvation och en funktion?
>
> Dan: En funktion måste ha en beroende variabel och en oberoende variabel och för ett visst värde på den oberoende variabeln så får det bara finnas ett värde på den beroende variabeln.

Aspekter av begreppet funktion

I detta avsnitt presenteras resultatet av min analys av brobyggarnas enkäter och transkriptioner av intervjuer om begreppet funktion. Resultatet baseras på åtta besvarade enkäter samt intervjuer med följande fem brobyggare: Dan, John, Patrick, Sven och Tom. Några av uppgifterna i enkäten[7], där brobyggarna skulle bemöta några fiktiva elevers påståenden om funktioner, presenteras i inledningen till respektive avsnitt nedan.

Konstanta funktioner

Första uppgiften i enkäten är att bemöta Annas påstående: ”$y = 4$ är inte en funktion eftersom y inte beror av x.” Dan menar att man kan betrakta ekvationen $y = 4$ på två olika sätt: Det ena sättet är som en konstant funktion. Det andra sättet är att betrakta y som ett obekant tal som har blivit bestämt till värdet fyra:

> Mikael: Kan y i $y = 4$ variera?
>
> Dan: Nej.
>
> Mikael: Då är y ingen variabel?
>
> Dan: y är en variabel som har antagit värdet 4. Det beror på om man tänker på det som en funktion eller som en obekant som man har fixerat värdet på. Så det är två olika tänk: ett funktionstänk där det finns ett beroende av en oberoende variabel, eller ett variabeltänk där man fixerar värdet på en obekant.

För John frammanar ekvationen $y = 4$ i första skedet bara en öppen utsaga. När jag sedan frågar honom om den har en graf så konstaterar han att den representerar en funktion:

> Mikael: Är $y = 4$ en funktion?
>
> John: Nej. Det är en konstant som har ett värde och inte en funktion. Eller en variabel som har ett värde.
>
> Mikael: Har $y = 4$ en graf?
>
> John: Ja, i ett koordinatsystem. [John ritar en korrekt graf i ett koordinatsystem.] Eftersom jag kan rita upp den så är det en funktion.

[7] Se bilaga 1 delstudie A

Patrick visar en viss osäkerhet huruvida funktionen $y = 4$ har en definitionsmängd; först säger han att den inte har det och sedan gör han tolkningen att den består av de reella talen. Det är emellertid möjligt att tolka nedanstående dialog som att Patrick visar begreppet definitionsmängd i sin begreppsbild av begreppet funktion:

> Mikael: Kan man prata om en definitionsmängd för $y = 4$?
>
> Patrick: Nej, det kan man egentligen inte.
>
> Mikael: Har en funktion en definitionsmängd?
>
> Patrick: Ja.
>
> Mikael: Så $y = 4$ är inte en funktion?
>
> Patrick: Man kan se den som att den har hela reella axeln som definitionsmängd, fast den beror inte av variabeln. Om det är en funktion? Då utgår man från mängdlära: man brukar tala om en definitionsmängd som avbildas på en värdemängd.

Patrick bekräftar att en konstant funktion kan ha en definitionsmängd, när han växlar från den algebraiska representationen till den grafiska, genom att rita grafen till den konstanta funktionen i ett koordinatsystem. Patrick väljer att återigen bestämma definitionsmängden till mängden av de reella talen:

> Patrick: När man tittar på den så här och givet att man har en x-axel så är det ju hela R [mängden av de reella talen] som är definitionsmängd. När man ser grafen så känns det naturligt.

I enkäten menade Sven att $y = 4$ kan uttrycka en funktion. Under intervjun upprepar han, dock med en viss osäkerhet, att $y = 4$ kan representera en funktion som är definierad på mängden av de reella talen. Han motiverar detta genom att växla till den grafiska representationen:

> Mikael: Finns det någon definitionsmängd?
>
> Sven: Ja, i alla exempel som jag kommer ihåg så har man ett koordinatsystem där man ritar linjen $y = 4$.
>
> Mikael: Är $y = 4$ en funktion?
>
> Sven: Du ställer fler frågor nu så jag är osäker på det.

Mikael: Om vi går tillbaka till funktionsmaskinen, som du har ritat i enkäten, med ett x som input. Var finns motsvarigheten till detta x i vårt exempel $y = 4$?

Sven: Ja, det är x-axeln i koordinatsystemet. y har ett värde och värdemängden är 4. Vi kan ange vilket x som helst. Definitionsmängden är alla reella tal.

Styckvis definierade funktioner och kontinuitet

Tredje uppgiften i enkäten är att bemöta Cillas påstående: ”$y = \begin{cases} x, & om\ x \leq 0 \\ x+3, & om\ x > 0 \end{cases}$ är inte en kontinuerlig funktion eftersom grafen inte är sammanhängande.” Fjärde uppgiften i enkäten är att bemöta Davids påstående: ” $y = \frac{1}{x}$ är inte en kontinuerlig funktion eftersom grafen inte är sammanhängande.”

I samband med den fjärde uppgiften om Davids påstående erinrar sig Dan Persson och Böiers (2010) definition av begreppet kontinuitet så här: ”För en godtycklig punkt i funktionens definitionsmängd ska gränsvärdet vara lika med funktionsvärdet i den punkten.” Dan har emellertid inte tillgång till läroboken under intervjun, hans definition avviker något från Persson och Böiers definition; läroboksförfattarna förutsätter att gränsvärdet är lika med funktionsvärdet i den aktuella punkten a, om a tillhör definitionsmängden och om gränsvärdet $\lim_{x \to a} f(x)$ existerar.

Mikael: Är Davids funktion $y = \frac{1}{x}$ kontinuerlig?

Dan: Ja, enligt Persson och Böiers definition så är den det.

Mikael: Hur lyder den definitionen?

Dan: Det ska gälla att för alla punkter i definitionsmängden så ska gränsvärdet i en godtycklig punkt vara lika med funktionsvärdet i den punkten. Detta ska gälla för alla punkter i definitionsmängden och eftersom 0 inte är med i definitionsmängden så ”räddas” funktionen av det. Så funktionen är kontinuerlig, eftersom 0 inte är med i definitionsmängden.

Under intervjun besvarar Dan några frågor om funktionen[8] $S(x) = \frac{x}{|x|}$. Dan uppfattar denna styckvis definierade funktion som ett matematiskt objekt, i Sfards (1991) betydelse, som har egenskapen att vara kontinuerlig. Han

[8] Funktionen S kallas signumfunktionen, men jag benämner den aldrig så under intervjuerna.

uppfattar dessutom grafen till funktionen S som ett objekt som har egenskapen att vara osammanhängande:

> Mikael: Givet $S(x) = \frac{x}{|x|}$ Hur ser grafen ut? Vad är definitionsmängden? Är grafen sammanhängande? Är S kontinuerlig?
>
> Dan: [Dan ritar en korrekt graf.]. Nu ska vi se, nollan är inte med i definitionsmängden, så den är kontinuerlig för att den inte är definierad i 0. Grafen är inte sammanhängande.

Dan betonar att grafen till en kontinuerlig funktion kan vara osammanhängande om funktionen gör ett språng i en punkt som inte tillhör definitionsmängden; detta gäller exempelvis för signumfunktionen, om den är definierad för alla reella tal som inte är lika med noll.

Patrick visar en välutvecklad bild av begreppet kontinuitet, när han förklarar att funktionen $y = \frac{1}{x}$ kan vara kontinuerlig trots att den har en osammanhängande graf:

> Mikael: Funktionen $y = \frac{1}{x}$ är alltså kontinuerlig på sin definitionsmängd, men trots det är grafen osammanhängande? Hur går det ihop?
>
> Patrick: Den här funktionen är inte kontinuerlig över hela axeln, men den är kontinuerlig på två öppna intervall, som inte omfattar hela axeln.

Patrick visar en välutvecklad bild av begreppet kontinuerlig utvidgning i sin begreppsbild av begreppet funktion, när han på ett korrekt sätt besvarar två av tre frågor som handlar om kontinuerlig utvidgning av tre givna funktioner:

> Mikael: Går det att utvidga funktionen $g(x) = \frac{x}{x}$ så att den blir kontinuerlig för alla reella tal?
>
> Patrick: Den är 1 överallt utom i nollan. Den är svår att definiera i nollan; för 0 är den inte definierad. Den här funktionen kan man lätt utvidga till 0 genom att sätta den till 1, till skillnad från den förra funktionen.[$y = \frac{1}{x}$]
>
> Mikael: Går det att utvidga funktionen $S(x) = \frac{x}{|x|}$ så att den blir kontinuerlig för alla reella tal?
>
> Patrick: Om $x > 0$ så är funktionen 1. Om $x < 0$ så är funktionen -1. Funktionen är inte definierad för 0 för då blir det $\frac{0}{0}$. Det går inte att utvidga den till en kontinuerlig funktion. Det blir svårt.

> Mikael: Går det att utvidga funktionen $R(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ så att den blir kontinuerlig för alla reella tal?
>
> Patrick: Nämnaren är 0 då $x = 2$. Om x närmar sig 2 så närmar det sig $\frac{0}{0}$, vilket är otrevligt. Det vill jag inte säga något om. [Patrick definierar $R(2) = 0$, vilket inte ger en kontinuerlig funktion.]

John visar en potentiell konfliktfaktor i sin begreppsbild av begreppet funktion när han först säger att funktionen $y = \frac{1}{x}$ är kontinuerlig och senare säger att den inte är kontinuerlig. Dessutom påstår han att grafen till funktionen $y = \frac{1}{x^2}$ är sammanhängande, vilket han sedan använder som argument för att den är kontinuerlig:

> Mikael: Är $y = \frac{1}{x}$ en funktion?
>
> John: Ja, men funktionen har inget definierat värde för $x = 0$. Trots att den hoppar från minus oändligheten till plus oändligheten är den kontinuerlig ändå.
>
> Mikael: Är uttrycket $y = \frac{1}{x^2}$ definierat för $x = 0$?
>
> John: Ja, då blir det oändligheten.
>
> Mikael: Är $y = \frac{1}{x^2}$ kontinuerlig?
>
> John: Ja, den är kontinuerlig för grafen går ihop i nollan.
>
> Mikael: Är $y = \frac{1}{x}$ kontinuerlig?
>
> John: Nej den är inte kontinuerlig, för den kommer från olika håll, minus oändligheten och plus oändligheten.

Svens definition av att en funktion är kontinuerlig i en punkt är att den ska ha ett gränsvärde i den punkten. Cillas styckvis definierade funktion är därmed inte kontinuerlig, menar Sven.

> Mikael: I vilka punkter är Cillas funktion inte kontinuerlig?
>
> Sven: $x = 0$. Den ska ha ett entydigt gränsvärde i de punkterna [där den är kontinuerlig].
>
> Mikael: Om vi tittar på Cillas förslag [att den inte är en kontinuerlig funktion eftersom grafen inte är sammanhängande.]

Sven: Ja, den är inte sammanhängande.

Mikael: Är det ett argument för att den inte är en kontinuerlig funktion?

Sven: Ja. Funktionsvärdet får inte samma gränsvärde om x närmar sig noll från den positiva respektive den negativa sidan. Då är gränsvärdet inte entydigt för funktionsvärdet.

Tom visar en potentiell konfliktfaktor i sin begreppsbild, när han anger en och samma definition för begreppen funktion respektive kontinuerlig funktion. Hans definition av begreppet funktion, som också gäller för begreppet kontinuerlig funktion, är att det för varje x ska finnas ett specifikt värde för y:

Mikael: Vad är en funktion?

Tom: Jag har en högst personlig definition av en kontinuerlig funktion: För varje x så har y ett specifikt värde.

Mikael: Så att kontinuerlig funktion betyder att för varje x så har y ett specifikt värde?

Tom: Ja, så menar jag att det är.

Begreppen funktion och kontinuerlig funktion flyter ihop i Toms resonemang. En konsekvens av att Tom inte skiljer på begreppen funktion och kontinuerlig funktion blir att han anser att Cillas funktion är kontinuerlig eftersom den uppfyller hans personliga definition av begreppet kontinuerlig funktion:

Mikael: Är Cillas uttryck en funktion?

Tom: Ja, enligt min definition så har den för varje x ett specifikt värde. Jag tycker att den är kontinuerlig.

Entydigt bestämt funktionsvärde

Den andra uppgiften i enkäten är att bemöta Bertils påstående: ”$x^2 + y^2 = 9$ är en funktion eftersom y beror av x.” Dan anser att det är skillnad mellan en ekvation och en funktion; vissa ekvationer kan uppfattas som funktioner, till exempel $y = x + 3$, men det finns ekvationer, exempelvis $x^2 + y^2 = 9$, som inte definierar en funktion, utan att man först inför begränsningar på variablerna:

Mikael: Är det någon skillnad mellan en ekvation och en funktion?

Dan: Ja, det illustrerar Bertils problem med cirkelns ekvation. [$x^2 + y^2 = 9$] Men i fallet med en förstagradsekvation [$y = x + 3$] så blir det ingen skillnad mellan en ekvation och en funktion om den innehåller det som behövs för en ekvation.

John uppvisar en potentiell konfliktfaktor i sin begreppsbild av begreppet funktion i nedanstående citat. Han upptäcker den själv och korrigerar sin personliga definition av begreppet funktion från ”något som har ett värde som beror av en annan variabel” till ”något som har ett entydigt värde som beror av en annan variabel.”

Mikael: Finns det någon definition av begreppet funktion?

John: Ja, något som har ett värde som beror av en annan variabel.

Mikael: Är Bertils ekvation $x^2 + y^2 = 9$ en funktion?

John: Ja. Eftersom man kan lösa ut y så blir det en funktion: $y = \pm\sqrt{9 - x^2}$

Mikael: Kan du rita grafen?

John: Ja, det kan jag, fast i och med att det är plus/minus så är jag inte säker på att det är en funktion, man får två y-värden för varje x. Du får två bilder som speglas i x-axeln. Då får jag inget entydigt värde. Då är det nog inte en funktion.

Mikael: Detta stämmer inte med den definition av funktion som du angav tidigare ”något som har ett värde som beror av en annan variabel”.

John: Något som har ett *entydigt* värde som beror av en annan variabel. Nej det är inte en funktion, för den är inte entydig.

Sven betonar kravet på entydigt funktionsvärde, dels när han förklarar begreppet funktion med metaforen ”funktionsmaskin”, dels när han definierar begreppet och kompletterar sin definition med villkoret *för ett x ska y vara entydigt bestämt.*

Mikael: Vad är en funktion?

Sven: Att vi ska få ut ett entydigt resultat ur funktionsmaskinen.

Mikael: Kan du ge en mer formell definition av funktion än en funktionsmaskin?

Sven: Entydigheten är viktig. Det är en kombination av de ingående variablerna x och y. Vad är det man vill utesluta?

Mikael: I enkäten har du uteslutit Bertils ekvation $x^2 + y^2 = 9$.

Sven: Om vi tittar på ett värde på x så kan vi inte bestämma värdet på y entydigt. I det här fallet kan vi endast göra det i änden av definitionsmängden. Det är en kombination av två variabler så att för ett x ska y vara entydigt bestämt.

Resultat delstudie B: Brobyggarnas kunskaper

Tio brobyggare som har matematik som undervisningsämne besvarade enkäten[9] i delstudie B. I kapitlet redovisas de resonemang som brobyggarna föreslår att eleverna i enkäten kan ha fört i respektive uppgift. Detta görs uppgift för uppgift. Efter varje uppgift har jag angivit de förslag till elevresonemang som brobyggarna anger. De olika förslagen var inte givna i enkäten, utan har vuxit fram ur data när enkäterna analyserades. Talet inom parentes anger antalet brobyggare som har angett det aktuella alternativet. Därefter redovisas resultatet av en fördjupad analys av fyra brobyggares SCK och KCS om begreppen variabel och funktion. Det baseras på enskilda intervjuer med Dan, John, Patrick och Sven.

Uppgift 1 Konstanta funktioner

> På en fråga från läraren, huruvida $y = 4$ är en funktion, svarar Ahmad nej.
> Hur kan Ahmad ha resonerat? Ge gärna flera tänkbara förklaringar!

Bland brobyggarnas svar på uppgiften fanns följande förslag på hur Ahmad kan ha resonerat:

A. Det saknas en oberoende variabel. (8)
Han anser att det inte är en funktion eftersom det saknas en oberoende variabel. Sven

B. y är ett fixt tal som är bestämt till värdet 4. (5)
y är alltid 4 d.v.s. ett tal och ingen funktion av till exempel x. Bo

Nästan alla respondenter föreslår att Ahmad saknar en oberoende variabel i ekvationen $y = 4$. (De anger svarsalternativ A.) Jag vill framhålla att i denna uppgift har Ahmads lärare bara angivit en ekvation utan att ange en definitionsmängd. I det här fallet finns ingen oberoende variabel i ekvationen som indikerar att det finns en definitionsmängd, därför blir det svårt att uppfatta den som en funktion. Utan att en definitionsmängd är angiven kan ekvationen

[9] Se Bilaga 2 Enkät delstudie B

uppfattas som en öppen utsaga; hälften av brobyggarna föreslår att Ahmad kan ha uppfattat $y = 4$ som en ekvation i betydelsen en öppen utsaga och att y betecknar ett tal som är bestämt till värdet 4. (De anger svarsalternativ B.)

Uppgift 2 Styckvis definierade funktioner och kontinuitet

> På en fråga från läraren, huruvida $y = \begin{cases} x - 3, om\ x \leq 0 \\ x + 3, om\ x > 0 \end{cases}$ är en funktion, svarar Benjamin nej. Hur kan Benjamin ha resonerat?

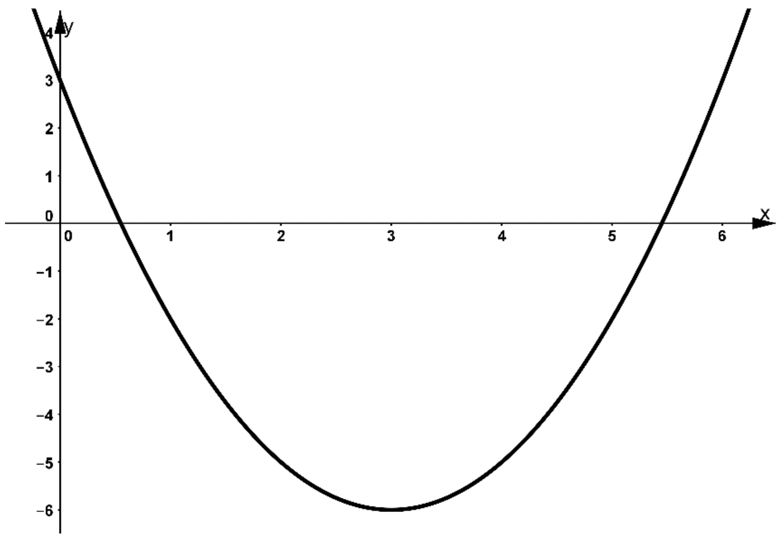
Bland brobyggarnas svar på uppgiften fanns följande förslag på hur Benjamin kan ha resonerat:

A. Benjamin känner inte igen denna representation. (4)
   Benjamin tycker kanske att det känns "obehagligt" med en stegfunktion, att den inte ser ut som en funktion brukar. Eric
B. En funktion måste vara kontinuerlig; den här är inte kontinuerlig.(8)
   Benjamin skiljer inte på funktion och kontinuerlig funktion. Sven
   Det blir ett hack i kurvan. Tom

Ungefär hälften av respondenterna föreslår att Benjamin kan ha svårigheter med att tolka den algebraiska representationen av denna styckvis definierade funktion. (De anger svarsalternativ A.) Den andra hälften av respondenterna tar för givet att Benjamin kan tolka den algebraiska representationen. (De anger svarsalternativ B.) Tom tar dessutom för givet att Benjamin kan översätta den algebraiska representationen av denna styckvis definierade funktion till en graf.

Uppgift 3 Begreppet nollställe

Cindy ska på lärarens uppmaning ange antalet nollställen till funktionen nedan. Cindy svarar att det finns ett nollställe, nämligen 3. Hur kan Cindy ha resonerat?



Bland brobyggarnas svar på uppgiften fanns följande förslag på hur Cindy kan ha resonerat:

A. Nollställe är funktionsvärdet där x är noll. (3)
Cindy har uppfattat nollställe som den punkt där funktionen skär y-axeln. Eric

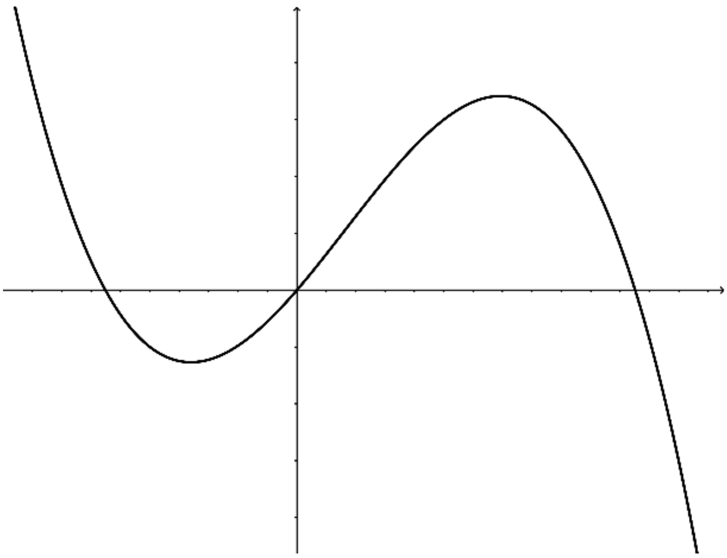
B. Cindy förväxlar funktionens nollställe med derivatans nollställe. (3)
Derivatan är noll för $x = 3.$ *John*

C. Cindy förväxlar funktionens nollställe med kurvans minimipunkt.(4)
Cindy har troligen blandat ihop begreppen nollställe och minimipunkt för en funktion. Patrick.

Några respondenter föreslår att Cindy kan ha förväxlat begreppet nollställe till en funktion med funktionsvärdet där x är noll; Cindy kan ha resonerat att nollställe är en punkt i koordinatsystemet där *någon* variabel är noll. (De anger svarsalternativ A.) Övriga respondenter föreslår att Cindy förväxlar funktionens nollställe med derivatans nollställe (svarsalternativ B) eller med kurvans minimipunkt (svarsalternativ C).

Uppgift 4 Grafisk representation

På en fråga från läraren, huruvida nedanstående graf representerar en funkt-
ion, svarar Daniel ja. Hur kan Daniel ha resonerat?



Bland brobyggarnas svar på uppgiften fanns följande förslag på hur Daniel kan ha resonerat:

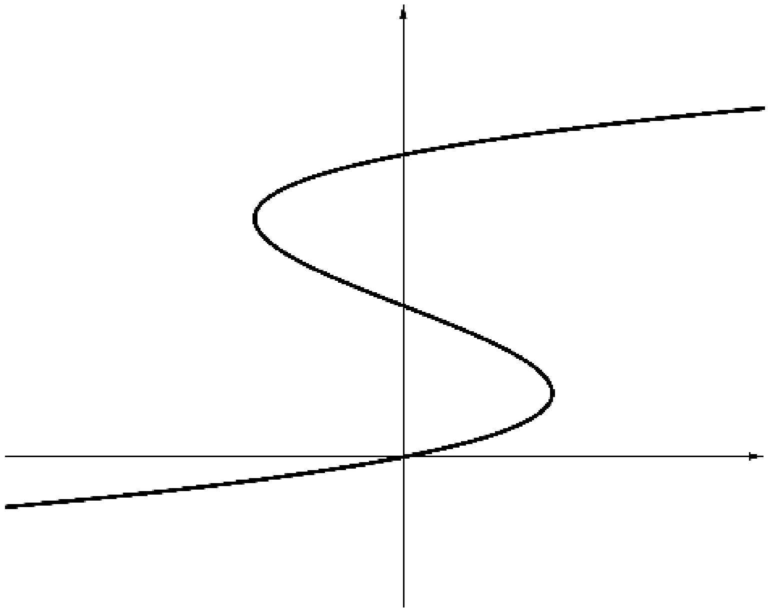
A. Den ser ut som grafen till en funktion (tredjegradsfunktion). (6)
Den liknar grafen till funktioner som man jobbar med, till exempel en tredjegradsekvation. Viktor

B. Daniel använder definitionen av begreppet funktion. (7)
Det finns ett och endast ett funktionsvärde till varje värde på x *i definitionsmängden. Dan*

Drygt hälften av respondenterna föreslår att Daniel tycker att kurvan ser ut som grafen till en typisk funktion, till exempel en tredjegradsfunktion. (De anger svarsalternativ A.) Sju respondenter föreslår att Daniel kan ha resonerat med hjälp av definitionen av begreppet funktion (De anger svarsalternativ B).

Uppgift 5 Entydigt bestämt funktionsvärde

På en fråga från läraren, huruvida nedanstående graf representerar en funktion, svarar Emilia ja. Hur kan Emilia ha resonerat?



Bland brobyggarnas svar på uppgiften fanns följande förslag på hur Emilia kan ha resonerat:

A. Varje kurva är graf till en funktion. (8)
Kurvor beskriver alltid funktioner. Patrick.

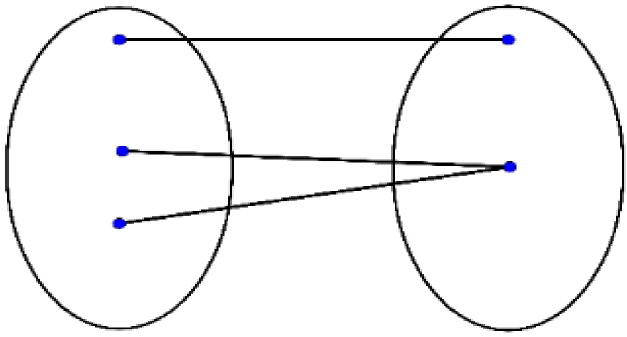
B. x är en funktion av y. (3)
Funktionsvärdet är på det som brukar kallas x-axeln och variabeln på det som brukar kallas y-axeln. John

C. Till ett visst värde på x kan det motsvara flera värden på y. (1)
Förmodligen har hon inte koll på definitionen av funktion och tänker att det är helt ok att det för ett visst x *finns flera* y. *Dan*

Några respondenter föreslår att Emilia resonerar att varje kurva är graf till en funktion. (De anger svarsalternativ A.) Några respondenter föreslår att Emilia resonerar *att* x *är en funktion av* y. Definitionsmängd och målmängd har då bytt roller. (De anger svarsalternativ B.) En respondent föreslår att Emilia antar att det till ett visst värde för x kan motsvara flera värden för y. (Han anger svarsalternativ C.)

Uppgift 6 Pildiagram

På en fråga från läraren, huruvida nedanstående diagram representerar en funktion, svarar Faiza nej. Hur kan hon ha resonerat?



Bland brobyggarnas svar på uppgiften fanns följande förslag på hur Faiza kan ha resonerat:

A. Faiza känner inte igen denna representation. (5)
   Det är en i skolvärlden ovanlig representation av en funktion. Denna visualisering ser elever i gymnasiet sällan. Jag tror inte Faiza begriper den. Den ser inte ut som en graf. Viktor
B. Strecken i diagrammet saknar riktning. (5)
   Hon kan ha läst från höger till vänster och uppfattat att definitionsmängden är till höger, vilket inte behöver vara fel eftersom läraren har varit otydlig. Eric
C. En funktion måste vara injektiv. Diagrammet representerar inte en injektiv funktion. (2)
   Hon tänkte att funktioner måste vara injektiva för att få kallas funktioner. Dan

Alla respondenter föreslår att Faiza kan ha svårigheter med att tolka diagrammet, antingen genom att hon läser det från höger till vänster (det vill säga att hon antar att den högra ovalen är definitionsmängd) eller att hon överhuvudtaget inte känner igen representationen. (De anger svarsalternativ A eller B.) Två respondenter föreslår dessutom att Faiza resonerar att diagrammet inte representerar en injektiv funktion. (De anger svarsalternativ C.)

Uppgift 7 Begreppet variabel

Gustav och Lisa deltar i en lektion om funktioner. Följande dialog utspelas mellan de två eleverna. Hur kan Gustav respektive Lisa ha resonerat?

> Gustav: I formeln $y = x + 3$ finns endast en variabel, nämligen x. y är funktionen.
>
> Lisa: Men är inte y också en variabel?
>
> Gustav: Nej, y är inte en variabel, y är funktionen.
>
> Lisa: Men y varierar ju…

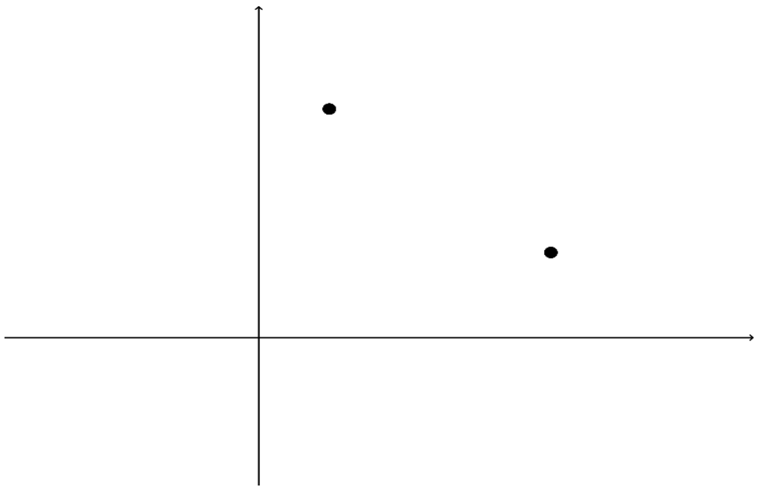
Bland brobyggarnas svar på uppgiften fanns följande förslag på hur eleverna kan ha resonerat:

A. Utdata till en funktion är inte en variabel. (7)
   Gustav anser att eftersom y beror av x så kan y inte fritt anta värden och är därför ingen variabel. Viktor
   Gustav: y är funktionen. Lisa tänker att x är funktionen, y variabeln: $x = y - 3.$ *John*
B. Utdata till en funktion är en variabel. (4)
   Lisa tänker att en variabel är en bokstav som kan anta flera olika numeriska värden. I den meningen är y en variabel. Viktor

Nästan alla respondenterna föreslår att Gustav enbart betraktar den oberoende variabeln som variabel. John föreslår att både Gustav och Lisa enbart betraktar den oberoende variabeln som variabel. (De anger svarsalternativ A.) Några brobyggare föreslår att Lisa anser att både x och y är variabler, eftersom båda varierar. (De anger svarsalternativ B.)

Uppgift 8 Linjära funktioner

Helena är gymnasielärare i matematik. Hon undervisar på gymnasiets kurs Matematik 1c. Under en genomgång om funktioner frågar hon eleverna hur många funktionsgrafer man kan rita genom de två givna punkterna i koordinatsystemet nedan. Vilka möjliga fel kan du tänka dig att eleverna gör? Varför tror du att eleverna gör dessa fel?



Bland brobyggarnas svar på uppgiften fanns följande förslag på vilka fel eleverna kan ha gjort:

A. Eleverna ritar endast en rät linje genom de två givna punkterna. (9)
De ritar bara räta linjer. De ser två punkter och är vana att förbinda dem. John

B. Eleverna ritar dessutom grafen till någon annan elementär funktion än en rät linje. (2)
De säger att det finns två funktioner; linjär och kvadratisk. Eller några till. Dan

C. Eleverna ritar kurvor som inte representerar funktioner. (2)
De ritar en kurva med flera y-värden per x-värde. Fredrik

Nästan alla respondenterna föreslår att eleverna endast kommer att rita en rät linje genom (eller mellan) de två givna punkterna. (De anger svarsalternativ A.) Några respondenter föreslår att eleverna dessutom kommer att rita grafer till andra elementära funktioner, till exempel andragradspolynom eller exponentialfunktioner. (De anger svarsalternativ B.) Några respondenter föreslår att eleverna kommer att rita kurvor som inte representerar funktioner, till exempel en S-formad kurva som liknar kurvan i uppgift 5 i enkäten. (De anger svarsalternativ C.)

En fördjupad analys av fyra brobyggares kunskaper

I detta avsnitt redovisas resultatet av en fördjupad analys av fyra brobyggares SCK och KCS om begreppen funktion och variabel med hjälp av Balls m fl (2008) ramverk *mathematical knowledge for teaching*, som Nyikahadzoyi (2015) har vidareutvecklat för begreppet funktion. Resultatet, som baseras på enskilda intervjuer med Dan, John, Patrick och Sven, presenteras i denna ordning för en student i taget. De har besvarat enkäterna i båda delstudierna och dessutom deltagit i intervjuer i delstudie A.

Dans kunskap om begreppen variabel och funktion

Dan visar KCS om begreppet variabel i samband med uppgift 7 i enkäten, där de två eleverna Gustav och Lisa diskuterar begreppen funktion och variabel utifrån formeln $y = x + 3$, när han framhåller att Gustav och Lisa inte är överens om *definitionen* av begreppet variabel:

> Jag tänker att det är definitionen av begreppet variabel som de inte är överens om; vad en variabel är. Eleverna tänker att matematiska objekt är ömsesidigt uteslutande; y kan inte vara både variabel och funktion samtidigt.

Dan visar SCK om begreppet variabel när han föreslår att lärare kan skilja på två aspekter av begreppet variabel, dels den varierande aspekten, som kommer till uttryck i samband med funktioner, dels variabel i betydelsen ett fixt och obekant tal i samband med ekvationer som har en entydig lösning:

> Man kan skilja på variabel i samband med funktioner och obekant i samband med en förstagradsekvation.

Dan resonerar om möjligheten att använda olika beteckningar för en funktion när vi diskuterar huruvida y i $y = x + 3$ är en variabel eller betecknar en funktion:

> Dan: Det är matematiskt stringent att y i formeln $y = x + 3$ bara betecknar en variabel och inte en funktion.
>
> Mikael: Var är funktionen då?
>
> Dan: Då skulle man skriva $y(x) = x + 3$ i stället för $y = x + 3$; då skulle man göra själva beroendet tydligare. Eller skriva så här $y = f(x) = x + 3$. Då är f funktionens namn. f(x) är funktionsvärdet, som är lika med y. y är då ett funktionsvärde, men inte en funktion. y är då också en variabel.

Nyikahadzoyi (2015) betonar att matematiklärare bör vara medvetna om de kognitiva hinder som elever kan möta när de ska använda en viss representation av en funktion. Dan visar KCS om funktionsbegreppet när han förutsäger att elever kan möta kognitiva hinder, när de ska tolka den algebraiska representationen av den styckvis definierade funktionen i uppgift 2 i enkäten, på grund av att den inbegriper ett val; eleven behöver välja ett av de två villkoren som inleds med ordet ”om”.

En aspekt av lärares KCS, som Ball (2008) lyfter fram, är att ha kunskap om elevers uppfattningar och missuppfattningar av ett visst matematiskt innehåll. Dan visar KCS om funktionsbegreppet när han föreslår att Emilia kan ha resonerat på följande sätt om den S-formade kurvan i uppgift 5 i enkäten:

> Eftersom grafen är sammanhängande så är det en kontinuerlig funktion. Hon kan dessutom ha förväxlat begreppet funktion med kontinuerlig funktion.

Dan föreslår ytterligare ett resonemang som Emilia kan ha fört om den S-formade kurvan:

> Om man vrider ett kvarts varv på pappret så ser det ut som en vanlig tredjegradskurva. Därför är det en funktion.

Det är emellertid oklart om Dan menar att Emilias slutsats är att y är en funktion av x eller tvärtom.

Dan framhåller att Faiza i samband med diagrammet i uppgift 6 i enkäten kan ha förväxlat begreppet funktion med begreppet injektiv funktion:

> Faiza tänkte kanske att ”Det får inte vara två av någonting. Kanske det inte får vara två stycken x. Hon rör ihop funktion med injektiv funktion.”

Dan tillägger att elever kan göra olika tolkningar av diagrammet; de kan läsa diagrammet från höger till vänster och då representerar det inte en funktion:

> En tolkning är att om hon har ett arabiskt ursprung så kanske hon har läst diagrammet från höger till vänster, i så fall är det inte en funktion.

På min fråga om hur många funktionsgrafer som eleverna ritar genom de två givna punkterna i koordinatsystemet i uppgift 8 i enkäten svarar Dan att elevers bilder av begreppet funktion innehåller de funktioner som de har erfarenhet av:

> Två typer av funktioner: linjär och kvadratisk funktion. I stället för att se funktionsbegreppet som något generellt begrepp så tänker eleverna att funktioner är av olika typer av elementära funktioner, till exempel linjära och kvadratiska funktioner. Elevernas bild av funktionsbegreppet består av exempel på de funktioner som de har sett.

Dan beskriver en episod från en lektion, om funktioner i årskurs 9, som han håller som en del av den verksamhetsförlagda utbildningen i Brobyggaren. Dans syfte med lektionen är att undersöka elevernas uppfattningar av begreppet funktion, speciellt om de vet att ett funktionsvärde måste vara entydigt bestämt. Han berättar att de under föregående lektion hade arbetat med linjära funktioner i klassen:

> Vi hade ritat grafer till linjära funktioner tidigare med hjälp av värdetabeller; varje talpar i värdetabellen översattes till en punkt i koordinatsystemet. Först ritade man punkter i koordinatsystemet, sedan drog man en linje mellan punkterna.

Han påminner sina elever om att en funktion kan representeras med en formel, en värdetabell eller en graf. Han visar SCK om begreppet funktion när han väljer den grafiska representationen för att illustrera att ett funktionsvärde måste vara entydigt bestämt. Han ritar en cirkel i ett koordinatsystem på tavlan och frågar sina elever: ”Representerar grafen en funktion?” En elev påpekar att det inte kan vara en funktion eftersom det inte finns några punkter på grafen. Dan föreslår att eleven kan ha resonerat så här:

> Eftersom hon inte såg några punkter på cirkeln, som hon kunde dra grafen mellan, så kan det inte vara en funktion. Hon uppfattade grafen enbart som en utfyllnad mellan punkterna. Jag förklarade att du kan tänka dig att grafen består av oändligt många punkter, men eleven uppfattade grafen som en diskret funktion.

Dans slutsats av hela episoden är att man bör sudda ut de markerade punkterna i koordinatsystemet, efter det att man har ritat grafen.

Johns kunskap om begreppen variabel och funktion

John resonerar om begreppet variabel i samband med uppgift 7 i enkäten, där de två fiktiva eleverna Gustav och Lisa diskuterar begreppen funktion och variabel utifrån formeln $y = x + 3$. John menar att Gustav resonerar korrekt när han säger att x är variabeln och y är funktionen. John föreslår att Lisa kan ha löst ut x i ekvationen $y = x + 3$ och erhållit följande ekvivalenta ekvation:

$x = y - 3$; då kan Lisa ha betraktat y som den oberoende variabeln och x som funktionen, menar han:

> Mikael: Har Lisa rätt eller fel?
>
> John: Lisa ser x som funktionen och y som den oberoende variabeln i $x = y - 3$.
>
> Mikael: Vilken är oberoende variabel för Gustav?
>
> John: Enligt Gustav så är det x som är oberoende variabel.
>
> Mikael: Vilken är beroende variabel för Gustav?
>
> John: Skulle vara y i så fall. Då blir beroende variabel samma som funktion, tror jag. Jag vet inte.

John inför begreppet *oberoende* variabel i vårt resonemang om Gustavs och Lisas dialog. Han visar dock en viss osäkerhet om y i formeln $y = x + 3$ kan vara en variabel och samtidigt beteckna en funktion.

En aspekt av lärares KCS om funktionsbegreppet, som Nyikahadzoyi (2015) lyfter fram, är att ha kunskap om elevers svårigheter med att översätta mellan olika representationer av en funktion. John visar KCS om funktionsbegreppet när han berättar att hans elever behövde mycket tid för att öva på hur man översätter mellan den algebraiska representationen av en linjär funktion och den grafiska, i samband med hans undervisning om linjära funktioner i årskurs 9:

> Det tog några veckor för eleverna i årskurs 9 att förstå kopplingen mellan det algebraiska uttrycket $y = kx + m$ och grafen.

I samband med en diskussion om svårigheter med att uppfatta Benjamins styckvis definierade funktion i uppgift 2 i enkäten som en funktion säger John att:

> Om Benjamins bild av funktioner endast består av räta linjens funktion så är detta [Benjamins styckvis definierade funktion] inte en funktion eftersom det är ett hopp i grafen.

Här förutsätter John att Benjamin kan översätta mellan den algebraiska representationen av den styckvis definierade funktionen och den grafiska. Man kan tolka Johns uttalande, om Benjamins bild av funktioner, i termer av Tall och Vinners (1981) ramverk som att han förmodar att det finns elever i årskurs 9 som kan ha begränsade begreppsbilder av begreppet funktion som enbart består av linjära funktioner.

Patricks kunskap om begreppen variabel och funktion

Patrick framhåller att lärare har möjlighet att använda två olika beteckningar för en linjär funktion. Han resonerar om fördelar och nackdelar med att beteckna en linjär funktion med ekvationen $y = kx + m$ i stället för att skriva $f(x) = kx + m$:

> Läraren bör skriva $y = f(x) = x + 3$ där f är en funktion för att tydliggöra för eleverna. Man höjer abstraktionsnivån om man skriver $f(x)$ eftersom elever kan ha svårigheter med parenteser i samband med algebraiska uttryck. Då kan man förenkla beteckningarna genom att skriva funktionen utan parenteser: $y = x + 3$.

Nyikahadzoyi (2015) framhåller att en aspekt av lärares KCS om funktionsbegreppet är att förutse kognitiva hinder som elever kan möta när de ska tolka symboler som är relaterade till funktioner. Patrick visar KCS om funktionsbegreppet när han framhåller att elever kan ha svårigheter med att tolka symbolen $f(x)$.

Patrick visar KCS om funktionsbegreppet när han föreslår två kognitiva hinder som Benjamin kan möta när han försöker tolka den algebraiska representationen av den styckvis definierade funktionen i uppgift 2 i enkäten:

> Det är två algebraiska uttryck för olika delar av definitionsmängden. Benjamin kan tro att det är ett omskrivet linjärt ekvationssystem med två ekvationer och två obekanta.

Patrick visar KCS om funktionsbegreppet när han förutsäger tre kognitiva hinder som Faiza kan möta när hon ska tolka diagrammet i uppgift 6 i enkäten:

> Faiza kanske inte vet att en funktion kan beskrivas på detta sätt eftersom det är en ny representationsform för henne. Det kan också vara så att Faiza inte känner till att en funktion har en definitionsmängd och en värdemängd. Faiza skulle dessutom kunna säga att det inte är en funktion eftersom två olika x ger samma y.

Patrick visar SCK om funktionsbegreppet när han väljer att använda den grafiska representationen för en funktion i samband med att han föreslår en övningsuppgift med syfte att undersöka elevers kunskaper om begreppet funktion. Han argumenterar, med hjälp av Ference Martons (2014) variationsteori[10], för att elever måste få erfara minst en kurva som inte är graf till en funktion för att kunna förstå vad en funktion är:

> Mikael: Hur skulle du undersöka dina elevers förståelse för begreppet funktion?
>
> Patrick: Jag skulle ge dem fem grafer, en rät linje, en horisontell rät linje, en parabel, en styckvis definierad diskontinuerlig funktion samt något som inte är en funktion. Elevernas uppgift är att avgöra vilka grafer som representerar funktioner.
>
> Mikael: Vilka grafer kommer att möta mest svårigheter?
>
> Patrick: Den räta linjen bör inte möta något problem för den är bekant för eleverna. Den horisontella linjen bör vara lätt, men det beror på i vilken ordning jag sätter graferna. Enligt Martons variationsteori måste man se en annan färg än grönt för att förstå vad grönt är; därför måste man se något som inte är en funktion för att förstå vad en funktion är.

Svens kunskap om begreppen variabel och funktion

Sven visar SCK om begreppet funktion, när han framhåller att lärare ofta representerar en linjär funktion med ekvationen $y = kx + m$.

> Mikael: Har Gustav rätt eller fel när han säger att y är funktionen?
>
> Sven: Vi skriver linjära funktioner så här i skolan. Gustav har fel med att y är funktionen. Hela ekvationen måste vara med i funktionen. En funktion är något mer än bara en variabel y.

En aspekt av lärares KCS, som Nyikahadzoyi (2015) lyfter fram, är att förutse kognitiva hinder för elevers lärande. Sven visar KCS om funktionsbegreppet när han framhåller att det är mindre vanligt att elever använder definitionen av begreppet funktion när de ska avgöra om en given kurva representerar en funktion:

> Grafen i uppgift 4 är en sammanhängande kurva. Daniel tycker att den ser ut som en vanlig funktion så han behöver inte fundera på funktionsbegreppet. Daniel kan ha använt definitionen av funktion, men det är mindre vanligt att elever använder definitionen.

[10] Brobyggarna har i lärarutbildningen läst Marton, F. (2014). *Necessary conditions of learning.*

Sven visar SCK om funktionsbegreppet när han föreslår att man kan representera funktioner med ”funktionsmaskiner”, när han föreslår en övning för årskurs 9 där elevernas uppgift är att gissa den ”hemliga” funktionens regel. Han ger några exempel på ”funktionsmaskiner” med polynomuttryck och även en konstant funktionsmaskin, som oavsett vad man ger som indata ger värdet 4 som utdata.

Diskussion och slutsatser

Detta kapitel inleds med en metoddiskussion. Efter detta sammanfattas och diskuteras mina viktigaste resultat. Diskussionen förs i relation till de ramverk som används i studierna. Dessutom sammanfattas de viktigaste slutsatserna. Kapitlet avslutas med en diskussion om konsekvenser för undervisning om funktions- och variabelbegreppen i grund- och gymnasieskola.

Metoddiskussion

Min erfarenhet av enkäten från min första delstudie, där informanternas uppgift var att *bemöta* elevers felaktiga påståenden om begreppen funktion och variabel, är att jag fick svar som huvudsakligen visar informanternas *specialized content knowledge*, men inte deras *knowledge of content and students* om dessa begrepp. Därför diskuterade jag med mina handledare hur vi skulle utforma enkäten för min andra delstudie så att jag även skulle få svar som visar informanternas *knowledge of content and students.* Vi kom fram till att subtila skillnader i formuleringen av enkätfrågorna i min andra delstudie skulle kunna avgöra om jag får svar som visar respondenternas *specialized content knowledge* eller deras *knowledge of content and students*. Därför formulerade jag enkätfrågor som har potential att visa informanternas kunskap om elevers svårigheter med begreppen funktion och variabel, exempelvis genom att fråga om hur en elev kan ha resonerat när hon missuppfattar funktionsbegreppet. Om jag däremot hade uppmanat informanterna att *bemöta* elevers felaktiga påståenden om funktionsbegreppet skulle jag troligen huvudsakligen fått svar som visar deras *specialized content knowledge*.

Jag spelade in alla intervjuer med brobyggarna med en diktafon. Jag tror inte att den hade någon större inverkan på deras resonemang eftersom de verkade vara avspända. Emellertid kan fem informanters begreppsbilder av funktionsbegreppet i den andra delstudien till viss del ha blivit påverkade av mig under intervjuerna i den första delstudien, eftersom jag då intervjuade dem om konstanta och styckvis definierade funktioner. Denna eventuella påverkan, som gäller Dan, John, Patrick, Sven och Tom, är dock begränsad till de två första uppgifterna i enkäten i den andra delstudien, som handlar om elevers svårigheter med konstanta respektive styckvis definierade funktioner.

Resultatdiskussion

I detta avsnitt besvaras och diskuteras forskningsfrågorna om vilka begreppsbilder lärarstudenterna visar om begreppen funktion och variabel respektive vilken SCK och KCS som lärarstudenterna visar om dessa begrepp.

Personliga definitioner av begreppet funktion

En individ utvecklar en personlig definition av ett begrepp som kan skilja sig från den formella definitionen som accepteras av den matematiska gemenskapen (Tall & Vinner, 1981). Jag tolkar den personliga definitionen som att den utgör en del av individens begreppsbild.

Vinner och Dreyfus (1989) och Viirman m fl (2010) uppmanade studenter att ange sina definitioner av begreppet funktion i en enkät. I min första delstudie bad jag istället mina informanter att förklara begreppen funktion och variabel för fiktiva gymnasieelever i en enkät. Min avsikt med detta var att frammana delar av deras begreppsbilder. Även om det i enkäten inte efterfrågades att informanterna skulle ange sina personliga definitioner av begreppen funktion och variabel så tolkar jag deras svar som att de visar delar av sina personliga definitioner av begreppen.

Följande kategorier av lärarstudenternas förklaring av begreppet funktion identifierades i min första delstudie: *Uttryck, Beroende av en variabel, Regel, Relation, Metaforen maskin* och *Samband mellan variabler.* Min kategorisering av informanternas förklaringar av begreppet funktion skall inte uppfattas som en hierarki eftersom en förklaring är mer eller mindre lämplig för olika elever och i olika sammanhang. Man kan fråga sig varför flera brobyggare anger en definition av begreppet funktion, när de ombeds att förklara begreppet för en elev. En anledning kan vara att de har genomgått omfattande ämnesstudier i matematik, men de har inte gått en lärarutbildning; de besvarade enkäten på sin första dag på Brobyggaren.

Det är troligt att några av de informanter som använder metaforen ”maskin” har läst någon av de läroböcker som illustrerar sina framställningar av begreppet funktion med bilder av ”funktionsmaskiner”, till exempel Adams (1995) eller Persson och Böiers (2010). Dessa studenter uttrycker en operationell uppfattning av begreppet funktion, i Sfards (1991) mening, men detta ska inte tolkas som att studenterna endast har en operationell uppfattning av begreppet; de kan dessutom ha en strukturell uppfattning, men väljer att förklara begreppet som en process.

Informanterna i de två kategorierna *Beroende av en variabel* och *Samband mellan variabler* ger förklaringar som brister i precision. Deras förklaringar hjälper troligen inte elever att utveckla sina begreppsbilder av begreppet funktion. Eftersom deras förklaringar inte beaktar villkoret om entydigt funktionsvärde så kan det få konsekvenser för elevernas begreppsbilder av begreppet funktion, som till exempel kan komma att innefatta en cirkel. Tall och Vinner (1981) framhåller att individers personliga definitioner kan komma i konflikt med den formella definitionen av ett begrepp och hindra dem från att utveckla sina begreppsbilder. Det är anmärkningsvärt att fyra av fem studenter, som läser det sista året på det långa ämneslärarprogrammet, ger sådana ofullständiga förklaringar av begreppet funktion.

Nästan alla lärarstudenter i Hanssons (2006) studier uppfattar en funktion som en formel, ett algebraiskt uttryck eller en ekvation, medan ingen respondent i min första delstudie förklarar begreppet funktion som en formel eller en ekvation och endast en respondent använder termen uttryck. Jag noterar att Viirman m fl. (2010) sammanför en regel och en formel i en och samma kategori. Min tolkning av de begreppen är att de innefattar olika klasser av funktioner; begreppet regel, men inte formel, innefattar styckvis definierade funktioner.

En av mina respondenter, som kategoriserats i min kategori *Relation*, anger en förklaring av begreppet funktion som liknar Bourbakis definition från år 1939, men ingen av mina respondenter anger Bourbakis mängdteoretiska definition av begreppet funktion, från år 1954, som en mängd av ordnade par. Vinner och Dreyfus (1989) kallar uttrycket ”en variabel beror av en annan variabel” för en beroenderelation. Det motsvarar min kategori *Beroende av en variabel*, inte min kategori *Relation*. Några studenter i Vinner och Dreyfus (1989) respektive i Viirmans m fl. (2010) studier identifierar begreppet funktion med den grafiska representationen. Man kan notera att ingen av mina respondenter i min första delstudie förklarar begreppet funktion med att det är en graf.

Begreppet variabel

Nästan alla de intervjuade brobyggarna i delstudie A förklarar begreppet variabel som en storhet som kan variera. Några av dem framhåller att x i ekvationen $x + 3 = 5$ inte bör kallas variabel eftersom den inte kan variera; de förordar istället att x bör benämnas obekant. Även Kilhamn (2014) anser att lärare behöver hålla isär den varierande aspekten av begreppet variabel och variabel som ett fixt och obekant tal i en ekvation. Detta är också i linje med Usiskins (1988) beskrivning av olika användningar av begreppet variabel.

Nästan alla de intervjuade brobyggarna i delstudie A tolkar ordet ”variabel” som oberoende variabel i samband med formeln $\mathrm{y} = \mathrm{x} + 3$; de menar att om x är variabeln så betecknar y funktionen, y kan då inte samtidigt vara en variabel. Endast en brobyggare visar begreppsparet beroende och oberoende variabel i sin begreppsbild av begreppet funktion.

Ball (2008) menar att KCS innefattar kunskaper om elevers uppfattningar och missuppfattningar av ett visst matematiskt innehåll. Nästan alla respondenterna i man andra delstudie föreslår att Gustav (i uppgift 7 i enkäten) endast betraktar den *oberoende* variabeln som variabel, medan några respondenter föreslår att Lisa även betraktar den *beroende* variabeln som variabel. Dessa respondenter visar KCS om begreppet variabel eftersom de visar kunskap om elevers uppfattningar om begreppet. En brobyggare visar KCS när han framhåller att Gustav och Lisa inte är överens om *definitionen* av begreppet variabel.

Vissa läroböcker för gymnasieskolan definierar begreppet variabel som en bokstav som kan anta olika värden (Alfredsson m fl, 2011a; Szabo, 2011). Ett möjligt problem med denna definition är att endast lösningar till ekvationer som har två eller flera olika lösningar faller under begreppet variabel.

Potentiella konfliktfaktorer

Flera empiriska studier antyder att vissa studenter inte accepterar konstanta funktioner; studenterna kan uttrycka att det måste finnas minst en oberoende variabel i den algebraiska representationen av en funktion. Dessa studier visar också att vissa studenter inte accepterar styckvis definierade funktioner; dessa studenter kan resonera att en funktion måste definieras med *en* formel som gäller på hela definitionsmängden. Studierna visar dessutom att vissa studenter antar att cirkelns ekvation representerar en funktion, trots att en sådan ”funktion” inte uppfyller villkoret om ett entydigt funktionsvärde (exempelvis Tall och Bakar, 1992; Viirman m fl, 2010; Vinner och Dreyfus, 1989).

I kontrast till ovan nämnda empiriska studier uppvisar alla intervjuade brobyggare i min första delstudie konstanta funktioner och styckvis definierade funktioner, såväl kontinuerliga som diskontinuerliga, i sina begreppsbilder av begreppet funktion; speciellt innefattas definitionsmängd och målmängd för en funktion. Deras begreppsbilder förefaller, med två undantag, innehålla få potentiella konfliktfaktorer. Två av de intervjuade brobyggarna uppvisar emellertid potentiella konfliktfaktorer om begreppet kontinuitet i sina begreppsbilder av begreppet funktion. Tall och Vinner (1981) framhåller att sådana konfliktfaktorer kan komma i motsättning med den formella definitionen av begreppet och hindra lärandet av den matematiska teorin.

Representationer

Det framkommer två olika förslag på hur Ahmad (i uppgift 1 i enkäten i min andra delstudie) kan ha resonerat om ekvationen $y = 4$. Nästan alla respondenterna föreslår att Ahmad saknar en oberoende variabel i ekvationen och därför drar han slutsatsen att det inte är en funktion. Några av dessa respondenter föreslår dessutom att Ahmad tolkar ekvationen som en öppen utsaga. Dessa respondenter visar KCS om begreppet funktion, eftersom de visar kunskap om elevers svårigheter med att tolka ekvationen $y = 4$ som en konstant funktion. Eftersom definitionsmängden inte är preciserad i den första uppgiften i enkäten så är det underförstått att den är största möjliga delmängd av de reella talen, där ekvationen $y = 4$ kan definiera en funktion, nämligen de reella talen.

Nyikahadzoyi (2015) framhåller att matematiklärare bör ha kunskap om de svårigheter som elever kan möta när de använder olika representationer av en funktion. Några respondenter föreslår att Benjamin (i uppgift 2 i enkäten i min andra delstudie) kan ha svårigheter med att tolka den algebraiska representationen av den styckvis definierade funktionen i uppgift 2. Ungefär hälften av respondenterna antar att Benjamins begreppsbild av begreppet funktion enbart består av kontinuerliga funktioner, men de tar för givet att han kan tolka den algebraiska representationen. Det senare är emellertid ett orimligt antagande ty om Benjamin kan tolka den algebraiska representationen så har han troligen studerat styckvis definierade funktioner tidigare; då bör han också ha diskontinuerliga funktioner i sin begreppsbild. Det är anmärkningsvärt att bara fyra respondenter resonerar om att elever kan ha svårigheter med att tolka den algebraiska representationen av den styckvis definierade funktionen i enkäten.

Mitt syfte med uppgift 6 i enkäten i min andra delstudie är att undersöka om respondenterna känner till elevers svårigheter i samband med att pildiagram används för att representera funktioner. Jag har ritat diagrammet utan pilar, eftersom jag vill öppna för möjligheten att läsa det från höger till vänster, vilket också några respondenter föreslår att elever kan göra. En aspekt av KCS om funktionsbegreppet, som Nyikahadzoyi (2015) betonar, är kunskap om de svårigheter som elever kan möta när de använder vissa representationer av en funktion. Alla mina respondenter föreslår att Faiza kan ha svårigheter med att tolka diagrammet i uppgift 6 i enkäten; de anger några svårigheter, till exempel hur punkterna, ovalerna och strecken ska tolkas.

Några respondenter framhåller att elever kan föreslå att diagrammet i uppgift 6 i enkäten inte representerar en funktion eftersom den inte är injektiv. Respondenterna associerar troligen pildiagram med förklaringar av begreppet injektivitet; algebraiska representationer av funktioner frammanar troligen inte begreppet injektivitet på samma sätt som pildiagram gör. Frågan är om någon lärarstudent skulle föreslå att en elev skulle föra motsvarande resonemang om funktionen $f(x) = x^2, x \in R.$ Därför är det troligen representationen i sig som är svårigheten med ett pildiagram, snarare än att funktionen inte är injektiv.

Entydighet

Alla de intervjuade brobyggarna i min första delstudie beaktar att ett funktionsvärde ska vara entydigt bestämt när de bemöter Bertils påstående om cirkelns ekvation: ”$x^2 + y^2 = 9$ *är en funktion eftersom* y *beror av* x.” (uppgift 2 i enkäten). De svarar att Bertil har fel eftersom ekvationen har två olika lösningar för vissa värden på x.

Nästan alla respondenter föreslår att Emilia i uppgift 5 i enkäten i min andra delstudie antar att varje kurva är graf till en funktion; därför är den S-formade kurvan det också. En respondent föreslår att Emilia kan ha missuppfattat definitionen av begreppet funktion genom att hon antar att det till ett visst värde för den oberoende variabeln kan motsvara flera värden för den beroende variabeln. I båda dessa fall är Emilia troligen inte bekant med vertikallinje-testet, det vill säga att man ritar en vertikal linje i koordinatsystemet och undersöker om den skär grafen i en och endast en punkt. Några respondenter föreslår att Emilia kan ha uppfattat kurvan som att x är en funktion av y, vilket skulle innebära att hon har besvarat uppgiften korrekt.

Jag använder en liknande S-formad kurva i min magisterstudie, där jag undersöker gymnasieelevers begreppsbilder av funktionsbegreppet; ungefär hälften av informanterna uppvisade missuppfattningen att den S-formade kurvan representerar en funktion (Borke, 2014). Ungefär två tredjedelar av studenterna i Tall och Bakars (1992) studie uppvisar missuppfattningen att en cirkel representerar en funktion. De respondenter som föreslår att Emilia antar att varje kurva är graf till en funktion ger förslag som är i linje med Borkes (2014) respektive Tall och Bakars (1992) resultat.

Prototypexempel

Drygt hälften av respondenterna föreslår att Daniel i uppgift 4 i enkäten i min andra delstudie resonerar att kurvan representerar en funktion eftersom den ser ut som grafen till en typisk funktion. Nästan alla respondenter föreslår att eleverna i uppgift 8 i enkäten endast kommer att rita en rät linje genom (eller mellan) de två givna punkterna i koordinatsystemet. Att linjen dras genom de två punkterna kan uppfattas som att den är obegränsad åt båda hållen, medan att linjen dras mellan de två punkterna kan uppfattas som att den är begränsad åt båda hållen (det vill säga en sträcka). Respondenternas förslag innebär att när elever ser två punkter i ett koordinatsystem så frammanas bilden av en rät linje för dessa elever.

Respondenternas förslag om hur Daniel respektive eleverna i uppgift 8 kan resonera överensstämmer med Schwarz och Hershkowitz (1999) tes om att elever använder vissa funktioner som prototypexempel för att avgöra om en given kurva är graf till en funktion, istället för att konsultera definitionen av begreppet funktion.

Slutsatser delstudie A

I detta avsnitt sammanfattas den första delstudiens viktigaste slutsatser om respondenternas begreppsbilder av begreppen funktion och variabel. Följande kategorier av lärarstudenters förklaringar av begreppet funktion identifierades: *Uttryck, Beroende av en variabel, Regel, Relation, Metaforen maskin* och *Samband mellan variabler.*

Nästan alla de intervjuade brobyggarna förklarar begreppet variabel med att det är en storhet som kan variera, eller något likvärdigt. Några av dem förordar att lärare bör kalla det eftersökta talet i en förstagradsekvation för ”obekant” i stället för att använda ordet ”variabel”. Nästan alla de intervjuade brobyggarna tolkar ordet ”variabel” som oberoende variabel.

De intervjuade brobyggarna visar begreppsbilder av begreppet funktion, som innefattar konstanta funktioner, styckvis definierade funktioner samt att ett funktionsvärde ska vara entydigt bestämt. Emellertid uppvisar två av dem potentiella konfliktfaktorer i sina begreppsbilder.

Slutsatser delstudie B

I detta avsnitt sammanfattas den andra delstudiens viktigaste slutsatser om respondenternas *knowledge of content and students* om begreppen funktion och variabel samt deras *specialized content knowledge* om dessa begrepp.

Knowledge of content and students

En brobyggare visar *knowledge of content and students* om begreppet variabel när han resonerar om att två elever inte är överens om definitionen av begreppet variabel. Några brobyggare visar *knowledge of content and students* om begreppet variabel när de framhåller att vissa elever inte accepterar den beroende variabeln i samband med funktioner som varande en variabel.

Brobyggarna visar *knowledge of content and students* om funktionsbegreppet när de resonerar om att elever

- kan ha svårigheter med att tolka ekvationen $y = 4$ som den algebraiska representationen av en konstant funktion, eftersom den saknar en oberoende variabel. Nästan alla respondenter resonerar så;
- kan tolka ekvationen $y = 4$ som en öppen utsaga. Hälften av respondenterna resonerar så;
- kan ha svårigheter med att tolka den algebraiska representationen av en styckvis definierad funktion, eller att de överhuvudtaget inte känner igen den. Hälften av respondenterna resonerar så;
- troligen använder sina begreppsbilder av begreppet funktion i stället för definitionen av begreppet för att avgöra om en given kurva representerar en funktion. Nästan alla respondenter resonerar så;

- kan ha svårigheter med pildiagram, med respektive utan pilar, antingen genom att de gör en felaktig tolkning av diagrammet eller att de överhuvudtaget inte kan tolka det. Nästan alla respondenter resonerar så;
- kan missuppfatta funktionsbegreppet genom att anta att en funktion måste vara kontinuerlig eller injektiv. Några respondenter resonerar om sådana missuppfattningar;
- har begreppsbilder av begreppet funktion som kan vara påverkade av den tid som läggs på att studera linjära funktioner i skolan. Nästan alla respondenter resonerar så.

Enskilda brobyggare visar *knowledge of content and students* om funktionsbegreppet, till exempel när de resonerar om att elever

- behöver mycket tid för att öva på att översätta mellan den algebraiska representationen av en linjär funktion och den grafiska;
- kan möta svårigheter när de ska tolka symbolen $f(x)$.

Specialized content knowledge

Några brobyggare visar *specialized content knowledge* om funktionsbegreppet när de väljer lämpliga representationer för funktioner för specifika syften.

En brobyggare visar *specialized content knowledge* om begreppet variabel när han föreslår att lärare bör hålla isär två aspekter av begreppet, å ena sidan den varierande aspekten i samband med funktioner och å andra sidan variabel i betydelsen ett konstant och obekant tal i samband med ekvationer, som har en entydig lösning.

Konsekvenser för undervisning om funktions- och variabelbegreppen

Jag vill framhålla att matematiklärare i sin undervisning om funktioner i grundskolan inte uteslutande bör ge linjära funktioner som exempel på funktioner; de bör också ge exempel på icke-linjära funktioner. Detta för att undvika att elevernas begreppsbilder av begreppet funktion kommer att domineras av linjära funktioner, vilket Schwarz och Hershkowitz (1999) beskriver som att elever använder linjära funktioner som prototypexempel. Dessutom anser jag att lärare även bör ge minst ett exempel på en relation som inte är en funktion, till exempel en cirkel, och därmed synliggöra kravet på entydigt funktionsvärde i definitionen av begreppet funktion.

Karlsson och Kilborn (2014, s. 70) definierar, i en lärobok om matematikdidaktik för lärare, en funktion som en mängd av ordnade par där det inte finns två olika par med samma förstakomponent. De skriver om begreppet variabel att:

> Man kallar elementen i D_f, alltså x-värdena, för oberoende variabler och elementen i V_f, alltså y-värdena för beroende variabler (Karlsson och Kilborn, 2014, s. 70).

I en figur (figur 4.1.1, s. 69) representeras en funktion, där definitionsmängden innehåller fem element och värdemängden fyra element, med ett pildiagram. Min tolkning av dessa definitioner blir att denna funktion har fem oberoende variabler och fyra beroende variabler, vilket troligen inte är vad författarna menade när de formulerade definitionerna. Jag vill framhålla att det är viktigt att läroboksförfattare formulerar korrekta definitioner av begreppen. Matematiklärare i grundskolan kan använda exempel som synliggör både den beroende och den oberoende variabeln, exempelvis så som en av lärarna i Kilhamns (2014) studie gör när hon använder formler för att uttrycka samband mellan två personers ålder.

Jag menar att matematiklärare i gymnasieskolan bör betona att definitions- och målmängd är delar av en funktion, till exempel så som en av mina informanter gör när han förklarar begreppet funktion som ”en regel som till varje element i A ordnar ett element i B. A är definitionsmängd och B målmängd.” Att läraren i sin undervisning talar om ”ett element i funktionens definitionsmängd”, hellre än att ”stoppa in ett tal i stället för x” i en formel, skulle kunna skapa förutsättningar för elever att utveckla en strukturell uppfattning av begreppet funktion. Ett problem med detta är att begreppet element inte finns med i ämnesplanen för gymnasiets obligatoriska matematikkurser.[11] Man bör använda matematisk formalism med viss försiktighet i skolans matematikundervisning. I samband med den ”nya matematiken” användes Bourbakis mängdteoretiska definition av begreppet funktion, från år 1954, som en mängd av ordnade par. Det finns belägg för att denna statiska definition inte stöder elevers förståelse av funktionsbegreppet (Hansson, 2006; Tall, 1992). Enligt Sfard (1991) kan elever troligen inte utveckla en strukturell uppfattning av begreppet funktion innan de har nått en operationell uppfattning, därför bör undervisningen utgå från en mer operationell definition än Bourbakis definition, som en mängd av ordnade par.

[11] Begreppet element ingår dock i kursen matematik 5 som är valbar på Naturvetenskapsprogrammet.

Jag vill framhålla att matematiklärare bör kunna växla mellan en operationell och strukturell uppfattning av ett begrepp. De behöver denna förmåga för att kunna anpassa sin undervisning till olika elevgrupper och för att utmana elever att utveckla en strukturell uppfattning av begreppet. Två av mina respondenter visar att de kan växla mellan en operationell och strukturell uppfattning av funktionsbegreppet genom att i enkäten i delstudie A ange en operationell metafor (”maskin”) och en strukturell definition (”regel”).

Nyikahadzoyi (2015) anger några exempel på lärares SCK om begreppet funktion, till exempel förmåga att kunna välja olika *representationer* av en funktion för specifika syften. Jag saknar dock, bland Nyikahadzoyis exempel, att en lärare visar SCK när hon väljer lämpliga *beteckningar* för en funktion, exempelvis $f(x) = C,\ x \in R$ istället för $y = C,$ för att representera en konstant funktion. Några empiriska studier visar att elever (och studenter) uppvisar svårigheter med att acceptera den algebraiska representationen av en konstant funktion som varande en funktion; de kan sakna en oberoende variabel i formeln. Jag vill framhålla att en lärarens val av representation för den konstanta funktionen kan vara avgörande för att läraren ska kunna upptäcka elevernas missuppfattning. Anta att läraren skulle ha representerat den konstanta funktionen med en graf i stället för med en ekvation. Då skulle elevernas missuppfattning troligen inte upptäckts eftersom de då kunde ha använt vertikallinjetestet och dragit en vertikal linje i koordinatsystemet och konstaterat att den skär grafen i precis en punkt och därmed dra slutsatsen att det är en funktion. Om elevernas lärare hade använt både den algebraiska och grafiska representationen av den konstanta funktionen så skulle missuppfattningen troligen inte uppstått.

En av lärarna i Hatisarus och Erbas (2015) studie framhåller att ett pildiagram är en användbar representation för att visa elever att en given relation är en funktion. Jag vill framhålla att ett pildiagram (med pilar) är en användbar representation dels för att förklara entydighetskravet i definitionen av begreppet funktion, dels för att visualisera de egenskaper som vissa funktioner har, till exempel injektivitet. Dock måste lärare ha kunskap om att elever kan ha svårigheter med att tolka pildiagram.

Nyikahadzoyi (2015) menar att lärare visar en aspekt av SCK om funktionsbegreppet om de har förmågan att välja lämplig representation för en funktion för ett specifikt syfte. Jag håller med om att denna förmåga är viktig; om jag skulle förklara begreppet kontinuitet med hjälp av två styckvis definierade funktioner, en som är kontinuerlig och en som är diskontinuerlig, så skulle jag föredra den grafiska representationen framför den algebraiska. Dock måste lärare vara medvetna om att förklaringar av begreppet kontinuitet med hjälp av den grafiska representationen kan leda fel, vilket är fallet med Szabo m fl (2012). Läroboksförfattarnas definition av att en funktion är kontinuerlig är att

> man kan rita hela funktionens graf utan att lyfta pennan (Szabo m fl, 2012, s. 33).

Författarna drar den generella slutsatsen att i regel är rationella funktioner diskontinuerliga för något x, vilket är en felaktig slutsats i relation till gängse definition av begreppet. Hur ska en lärare, som använder denna lärobok, förklara begreppet för sina elever? Ska hon säga att den definition som formuleras i läroboken är ofullständig? Är hon ens medveten om att definitionen är ofullständig?

Även Persson och Böiers (2010, s. 149) formulerar en ofullständig definition av begreppet kontinuitet; de beaktar inte fallet med en funktion, vars graf har ett hål i en punkt a som tillhör definitionsmängden, och där $f(a)$ inte är lika med gränsvärdet då x går mot a.

Karlsson och Kilborn (2014) skriver om begreppet kontinuitet att

> funktioner kan vara diskontinuerliga, där det till exempel saknas ett y-värde för ett visst x-värde. Sådana punkter beskrivs med en ring i grafen (Karlsson och Kilborn, 2014, s. 71).

Detta fall illustreras i en figur (figur 4.1.2, s. 71) med en rät linje med en ofylld ring inritad i ett koordinatsystem. Hur ska läsaren tolka detta? Om x tillhör den linjära funktionens definitionsmängd så är det överhuvudtaget inte en funktion. Om x inte tillhör definitionsmängden så är funktionen kontinuerlig, eftersom den är kontinuerlig i varje punkt i sin definitionsmängd.

Jag bekymrar mig för vilka konsekvenser dessa ofullständiga definitioner av begreppet kontinuitet kan få för lärares undervisning och elevers lärande. Man kan fråga sig om det finns ett samband mellan hur begreppet kontinuitet framställs i dessa läroböcker och att några av mina informanter visar potentiella konfliktfaktorer om begreppet kontinuitet i sina begreppsbilder av begreppet funktion.

Referenslista

Adams, R. (1995). *Calculus: a complete course*. Toronto: Addison Wesley.

Alfredsson, L., Bråting, K., Erixon, P., & Heikne, H. (2011a). *Matematik 5000*. Kurs 1c blå, Lärobok. (1. uppl.). Stockholm: Natur och Kultur.

Alfredsson, L., Bråting, K., Erixon, P., & Heikne, H. (2011b). *Matematik 5000. Kurs 3c blå, Lärobok. (1. uppl.)*. Stockholm: Natur och Kultur.

Ball, D., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of teacher education, 59*(5), 389-407. doi: 10.1177/0022487108324554

Baumert, J., Kunter, M., Blum, W., Brunner, M., Voss, T., Jordan, A., . . . Tsai, Y.-M. (2010). Teachers' Mathematical Knowledge, Cognitive Activation in the Classroom, and Student Progress. *American Educational Research Journal, 47*(1), 133-180. doi: 10.3102/0002831209345157

Borke, M. (2014). *y måste bero av x – gymnasieelevers förståelse för det matematiska begreppet funktion.* (Magisteruppsats), Göteborgs universitet, Göteborg.

Bourbaki, N. (2004). *Theory of Sets*: Springer.

Bråting, K., & Pejlare, J. (2015). On the relations between historical epistemology and students' conceptual developments in mathematics. J. Educ Stud Math 89: 251. doi:10.1007/s10649-015-9600-8

Carlsson, S., Hake, K. & Öberg, B. (2011). *Matte direkt. 9. (2. uppl.)* Stockholm: Sanoma utbildning.

Domingues, J. C. (2004). Variables, limits, and infinitesimals in Portugal in the late 18th century. Historia Mathematica, 31(1), 15-33. doi: http://dx.doi.org/10.1016/S0315-0860(03)00004-1

Grossman, Hammerness, & McDonald. (2009). Redefining teaching, Re-imagining teacher education. *Teachers and Teaching: Theory and practice, 15*(2), 273-290

Hansson, Ö. (2006). *Studying the views of preservice teachers on the concept of function.* (Phd-thesis), Luleå university, Luleå.

Hatisaru, V., & Erbas, A. K. (2015). Mathematical Knowledge for Teaching the Function Concept and Student Learning Outcomes. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 1-20. doi: 10.1007/s10763-015-9707-5

Hill, H. C., Blunk, M. L., Charalambous, C. Y., Lewis, J. M., Phelps, G. C., Sleep, L., & Ball, D. L. (*2008*). Mathematical Knowledge for Teaching and the Mathematical Quality of Instruction: An Exploratory Study. *Cognition and Instruction, 26*(4), 430-511. doi: 10.1080/07370000802177235

Hill, H. C., Rowan, B., & Ball, D. L. (2005). Effects of Teachers' Mathematical Knowledge for Teaching on Student Achievement. *American Educational Research Journal, 42*(2), 371-406. doi: 10.3102/00028312042002371

Hill, Heather C., Schilling, Stephen G., & Ball, Deborah L. (2004). Developing Measures of Teachers' Mathematics Knowledge for Teaching. *The Elementary School Journal, 105*(1), 11-30. doi:10.1086/428763

Karlsson, N., & Kilborn, W. (2014). *Grundläggande algebra, funktioner, sannolikhetslära och statistik: matematikdidaktik för lärare. (1. uppl.)*. Lund: Studentlitteratur.

Kilhamn, C. (2014). When does a variable vary? Identifying mathematical content knowledge for teaching variables. *Nordic studies in Mathematics education, 19*(3-4), 83-100.

Kleiner, I. (1989). Evolution of the Function Concept: A Brief Survey. *The College Mathematics Journal, 20*(4), 282-300. doi: 10.2307/2686848

Kvale, S., & Brinkmann, S. (2009). *Den kvalitativa forskningsintervjun. (2. uppl.)*. Lund: Studentlitteratur.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Marton, F. (2014). *Necessary conditions of learning*. New York: Routledge.

Nyikahadzoyi, M. R. (2015). Teachers' knowledge of the concept of a function: a theoretical framework. *International Journal of Science and Mathematics Education, 13*(2), 261-283. doi: 10.1007/s10763-013-9486-9

O'Connor, & Robertson. (2016). MacTutor History of Mathematics archive. http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/index.html. Hämtad 2017-02-06.

Persson, & Böiers. (2010). *Analys i en variabel. (3:5. uppl.)*. Lund: Studentlitteratur.

Rodhe, S., & Sigstam, I. (2002). *Naturlig matematik. (4. uppl.)*. Skebobruk: Kub.

Schwarz, B., & Hershkowitz, R. (1999). Prototypes: Brakes or Levers in Learning the Function Concept? The Role of Computer Tools. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(4), 362-389. doi: 10.2307/749706

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*(1), 1-36. doi: 10.1007/bf00302715

Sfard, A. (1995). The development of algebra: Confronting historical and psychological perspectives. *The Journal of Mathematical Behavior, 14*(1), 15-39. doi: 10.1016/0732-3123(95)90022-5

Shulman, L. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14. doi: 10.2307/1175860

Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard educational review, 57*(1), 1-23.

Skolverket. (2017a). http://www.skolverket.se/laroplaner-amnen-och-kurser/grundskoleutbildning/grundskola/matematik#anchor3. Hämtad 2017-01-18.

Skolverket. (2017b). http://www.skolverket.se/laroplaner-amnen-och-kurser/gymnasieutbildning/gymnasieskola/mat?tos=gy&subjectCode=MAT&lang=sv. Hämtad 2017-01-18.

Szabo, Larson, Viklund, Dufåker, & Marklund. (2011). *Origo: matematik. 1c. (2. uppl.)*. Stockholm: Sanoma Utbildning AB.

Szabo, Larson, Viklund, Dufåker, & Marklund. (2012). Origo: matematik. 3c. (2. uppl.). Stockholm: Sanoma Utbildning AB.

Tall, D. (1992). The Transition to Advanced Mathematical Thinking: Functions, Limits, Infinity, and Proof. In Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 495– 511). New York: Macmillan.

Tall, D., & Bakar, M. (1992). Students' mental prototypes for functions and graphs. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 23*(1), 39-50. doi: 10.1080/0020739920230105

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*(2), 151-169.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. In A. F. Coxford (Ed), *The ideas of algebra, K–12* (s. 8–19). Reston: NCTM

Vetenskapsrådet. (2011). God Forskningssed. VR-rapport nr 1/2011.

Viirman, O., Attorps, I., & Tossavainen, T. (2010). Different views - some Swedish mathematics students' concept images of the function concept. *Nordic studies in Mathematics education, 15*(4), 5-24.

Vinner, S., & Dreyfus, T. (1989). Images and Definitions for the Concept of Function. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(4), 356-366. doi: 10.2307/7494

Bilaga 1 Enkät delstudie A

Matematikenkät

Hej! Jag heter Mikael Borke och är doktorand i matematik med inriktning mot utbildningsvetenskap. Jag arbetar på Institutionen för Matematiska vetenskaper vid Göteborgs universitet. Jag arbetar med ett forskningsprojekt som är kopplat till Brobyggaren, som handlar om begreppsbildning inom matematik. Jag hoppas att du vill medverka i min forskningsstudie genom att besvara frågorna i denna enkät. Du kan nå mig på följande e-postadress mborke@chalmers.se

Hur många högskolepoäng (hp) i matematik har du?

Vilken är din högsta högskoleexamen?

Har du undervisat i matematik? Om ja, på vilken nivå och hur många terminer?

Blir du behörig i matematik? Om ja, blir du behörig för grundskola eller gymnasieskola?

Får jag kontakta dig för en uppföljande intervju? Svar: Ja!   Nej!

Ditt namn: ……………………Din e-post: ………………………………

Antag att du arbetar som lärare och undervisar i matematik på gymnasiets Naturvetenskapsprogram. Klassen har tidigare arbetat med funktioner i kursen Matematik 1C. Nu undervisar du på kursen Matematik 3C där man bland annat studerar begreppet kontinuerlig funktion. Hur skulle du som lärare bemöta dina fiktiva elevers påståenden nedan? Beskriv så tydligt du kan. Använd inga hjälpmedel!

Anna: ”$y = 4$ är inte en funktion eftersom y inte beror av x.”

Bertil: ”$x^2 + y^2 = 9$ är en funktion eftersom y beror av x.”

Cilla: ”$y = \begin{cases} x, & om\ x \leq 0 \\ x + 3, & om\ x > 0 \end{cases}$ är inte en kontinuerlig funktion eftersom grafen inte är sammanhängande.”

David: ” $y = \frac{1}{x}$ är inte en kontinuerlig funktion eftersom grafen inte är sammanhängande.”

Förklara för dina fiktiva gymnasieelever vad en variabel respektive en funktion är.

Bilaga 2 Enkät delstudie B

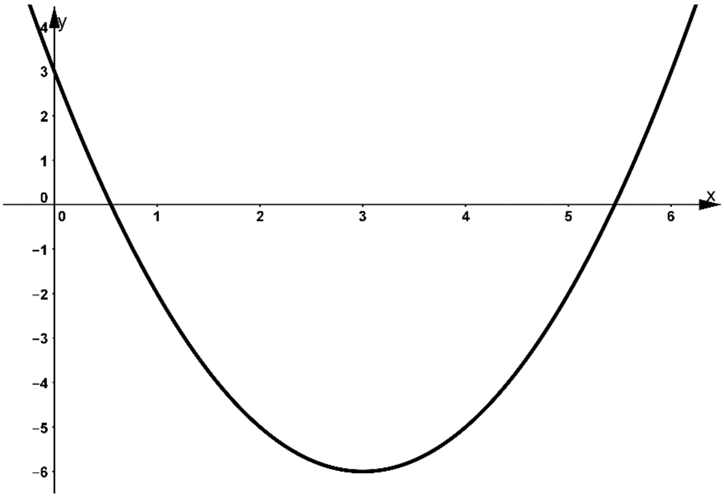
Hej!
Jag heter Mikael Borke och är doktorand i matematik med inriktning mot utbildningsvetenskap och arbetar med ett forskningsprojekt som handlar om undervisning och lärande i matematik. Jag hoppas att du vill medverka i min forskningsstudie genom att besvara den här enkäten och delta i en uppföljande intervju. Jag är intresserad av hur du tror att elever kan ha resonerat för att komma fram till ett visst svar. Ge gärna flera tänkbara förklaringar till varför eleverna resonerar som de gör. Om inte något annat anges i uppgifterna nedan så kan du anta att personerna är gymnasieelever. Använd cirka 30 minuter för att besvara enkäten. Använd inga hjälpmedel!
Du kan nå mig på följande e-postadress: mborke@chalmers.se

Namn:______________________ E-post:_______________________

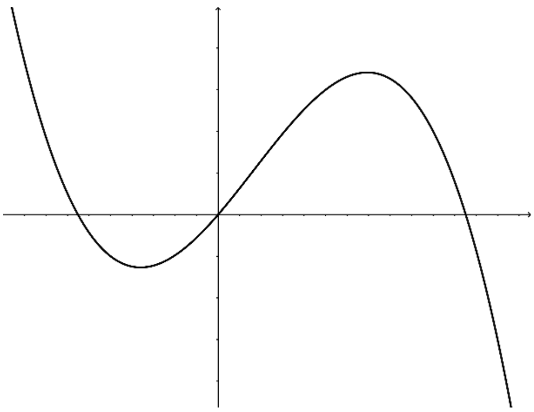
1. På en fråga från läraren, huruvida $y = 4$ är en funktion, svarar Ahmad nej. Hur kan Ahmad ha resonerat? Ge gärna flera tänkbara förklaringar!

2. På en fråga från läraren, huruvida $y = \begin{cases} x - 3, om\ x \leq 0 \\ x + 3, om\ x > 0 \end{cases}$ är en funktion, svarar Benjamin nej. Hur kan Benjamin ha resonerat?

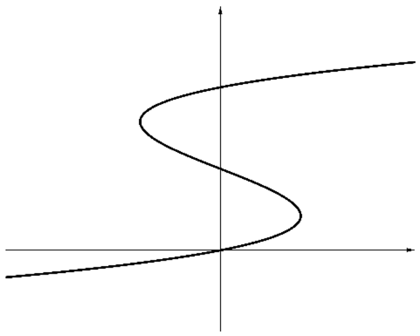
3. Cindy ska på lärarens uppmaning ange antalet nollställen till funktionen nedan. Cindy svarar att det finns ett nollställe, nämligen 3. Hur kan Cindy ha resonerat?



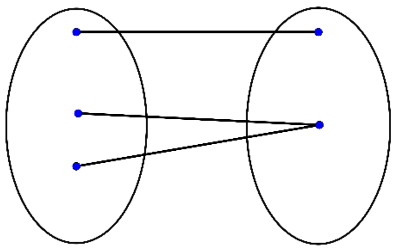
4. På en fråga från läraren, huruvida nedanstående graf representerar en funktion, svarar Daniel ja. Hur kan Daniel ha resonerat?



5. På en fråga från läraren, huruvida nedanstående graf representerar en funktion, svarar Emilia ja. Hur kan Emilia ha resonerat?



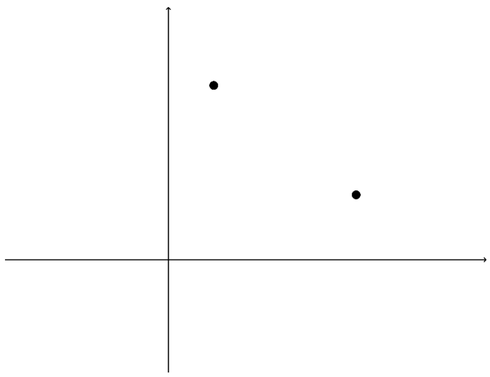
6. På en fråga från läraren, huruvida nedanstående diagram representerar en funkt-ion, svarar Faiza nej. Hur kan hon ha resonerat?



7. Gustav och Lisa deltar i en lektion om funktioner. Följande dialog utspelas mellan de två eleverna. Hur kan Gustav respektive Lisa ha resonerat?

> Gustav: I formeln $y = x + 3$ finns endast en variabel, nämligen. y är funktionen.
>
> Lisa: Men är inte y också en variabel?
>
> Gustav: Nej, y är inte en variabel, y är funktionen.
>
> Lisa: Men y varierar ju…

8. Helena är gymnasielärare i matematik. Hon undervisar på gymnasiets kurs Matematik1c. Under en genomgång om funktioner frågar hon eleverna hur många funktionsgrafer man kan rita genom de två givna punkterna i koordinatsystemet nedan. Vilka möjliga fel kan du tänka dig att eleverna gör? Varför tror du att eleverna gör dessa fel?



Förberedelse inför den uppföljande intervjun

Inför den uppföljande intervjun vill jag att du funderar över följande uppgift: Anta att du vill undersöka dina elevers förståelse av begreppet funktion. Hur skulle du göra det? Beskriv någon typ av fråga som du tycker är användbar för detta ändamål.

Bilaga 3 Brobyggarnas enkätsvar

Tabell 1: Brobyggarnas svar på enkätfrågorna i delstudie B

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
Bo	B	B	B	B	A	A	A	A
Dan	AB	B	B	B	BC	BC	AB	AB
Eric	AB	A	A	B	A	B	-	AC
Fredrik	B	B	C	A	A	B	A	AC
John	A	B	B	AB	B	B	A	A
Patrick	A	A	C	AB	A	A	B	A
Rickard	A	B	A	A	AB	A	-	-
Sven	AB	AB	A	AB	A	BC	A	A
Tom	A	B	C	B	A	A	AB	A
Viktor	A	AB	C	A	A	A	AB	AB