Räkna med bråk i skolan

En litteraturstudie om elevers inlärning av bråkräkning i skolan

Namn: Pontus Andersson &
Simon Ingvarsson
Program: Ämneslärarprogrammet

Abstract

Master thesis:	15 hp
Course:	LGMA1G
Grade:	Elementary
Semester:	HT16
Supervisor:	Johan Wästlund
Examiner:	Laura Fainsilber
Code:	HT16-3001-006-LGMA1G

Keywords: fraction calculations, mathematics, mathematic didactics, fractions misconceptions, rational numbers and literature study.

Summary
Fractions and fraction calculation, is something that students seem to have problems with, even though it is a subject that is following them from the early ages of preschool, all the way up to the upper secondary school, which is something that both PISA and TIMSS studies can agree on. This literature study has its focus in the mathematics of upper secondary school, where problems and misconceptions regarding fractions become apparent, compared with the elementary school. The Swedish curriculum LGY11 does not even mention the word fraction once, even though it is a huge part of the mathematics of the upper secondary school. Almost all series of literature have chapters specifically involving fractions, even though it is not required form the curriculum. Studies made by didactics have proven that calculation with fractions is much more complicated than it seems at first glance and that it requires a solid foundation of mathematical understanding, which is something that not all students or teachers possess. Our conclusion, is that the problems regarding fraction calculation, has its roots during the elementary school, where the foundation of mathematical understanding is created. We highlight some of the aspects regarding the understanding of the mathematics of fractions, and compare them with teaching materials of the upper secondary school.

Acknowledgments
We would like to start off with thanking Johan Wästlund for being our supervisor and for his great ideas throughout the work phase. We would also like to thank Thomas Lingefjärd for his teachings of Geogebra, since we had great use of it during the creation of demonstration images. Laura Fainsilber will also receive our thanks for all the advice regarding possible literature during the creation of this thesis. We would also like to thank Johanna Pejlare for taking her time to read through the didactic aspects of this thesis. A big thanks goes to Kurt and Helena Andersson for reading our paper and helping us with grammar, it is greatly appreciated. At last we want to thank all the participants for taking part of our interview.

Innehållsförteckning

Figurförteckning

1 Bakgrund

Svenska elever - allt sämre på matematik och *Svensk skola i kris* är två återkommande rubriker i svensk media. Det som skiljer dem åt är innehållet där klagomål framförs på det svenska skolväsendet. Vi kan tydligt se från OECD:s PISA undersökningar (Organisation for Economic Co-operation Development, Programme for International Student Assessment) mellan åren 2003 och 2012 att Sverige har gått från ca 507 poäng till 477 poäng, vilket är det största raset i rankinglistan av de deltagande länderna under en så kort period. Enligt OECD (2015) kan det bero på att disciplinen i svenska skolan drastiskt har försämrats, vilket kan vara en av många faktorer som ligger till grund för detta. Våra egna erfarenheter är eniga med PISAs undersökningar och har förstärkt vårt intryck av svenska elevers svårigheter för division, framförallt division av bråk.

Utöver disciplinrelaterade problem, vad kan ligga till grund för de svenska elevernas låga prestation av bråkberäkningar? Detta förbryllar oss och eftersom det är av stort intresse att ha en bra fundamental förståelse av division och bråktalens innebörd, har vi bestämt oss för att undersöka ämnet lite djupare, i redan utförda studier. Vi har även som ambition att belysa för kommande lärare vilka problem som kan ha en anknytning till ämnet, så att läsaren på egen hand skulle kunna ta nytta av och dra egna slutsatser av denna litteraturstudie. Madeleine Löwing (2008), filosofie doktor i matematikämnets didaktik vid Göteborgs Universitet, skriver att en elev som inte kan utföra bråktalsoperationer kommer att få problem i många av gymnasieskolans alla program, något som många lärare säkert kan hålla med om.

1.1 Syfte och Frågeställningar

Syftet med detta examensarbete är att undersöka bråkuppfattningen och relaterade delar inom matematiken hos elever i gymnasieskolan, varpå följande frågeställningar kommer besvaras

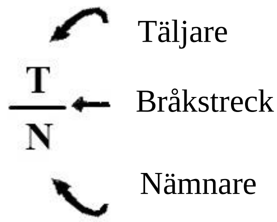
- Vad är bråktal?
- Vilka svårigheter finns det för bråkräkning?
- Varför är det bra att kunna bråkräkning?
- Hur behandlas bråkräkning i det svenska gymnasiets litteratur?

1.2 Metod

Detta är en litteraturstudie av olika slags läromedel och forskningsstudier på området runt bråk. Läromedlen som vi analyserat är olika populära serier av matematikböcker som gymnasiet använder. Läromedlen lånades från Chalmers Matematiska Bibliotek, där även några didaktiska och historiska studier hittades bland litteraturen. Ett antal olika sökmotorer har använts, såsom Göteborgs Universitetsbibliotek under dess databaser Matheducation och den mer omfattande Education Research Complete. Chalmers Bibliotek har använts tillsammans med NCM och Scopus. Google Scholar har använts. De sökord som använts är: Bråk, bråkräkning, rationella tal, fraction, fraction calculation, rational numbers, fraction misconceptions, fraction difficulties och ämnesplan för matematik. Laura Fainsilber har bidragit förslag på litteratur och tidskrifter. Gamla examensarbeten runt samma område har också varit till viss hjälp vid sökning av referenser. Vi har även utfört intervjuer med tre lärare och sex elever. Inför intervjuerna förbereddes ett antal frågor (se bilaga) runt bråkens betydelse för respondenten samt hur dem behandlar bråktalsräkning. Röstinspelning gjordes under intervjuerna.

2 Vad är ett bråk?

Bråktal ses ofta som division av två heltal, vilken i sig inte är helt fel, men kan vara opraktiskt i många situationer. Bråken är ett av många sätt att uttrycka *rationella tal* varav decimaltal, procent, proportion, förhållande och skala är andra vanliga sätt att uttrycka dem på. Själva bråktalet är strukturerat av en *täljare*, ett *bråkstreck* och en *nämnare*. Täljaren står överst, nämnaren längst ner och bråkstrecket delar de båda talen, som figur 1 illustrerar.



Figur 1: Bråktalets komponenter

Många ser bråktal som ett problem som skall beräknas, istället för en representation av olika decimaltal eller tal på tallinjen. Om både täljaren och nämnaren kan skrivas som heltal, kallas bråket för ett *rationellt tal*. Mängden av alla rationella tal förkortas $\mathbb{Q}$ efter engelskans *quotient*. I allmänhet, används nästan enbart rationella tal när bråktalsräkningar berörs i gymnasie- och högstadiematematiken. Vanligtvis hanterar kurslitteratur för gymnasieelever (de vanligaste serierna av 1a, 1b, 1c) mest *äkta bråk*, bråk i *blandad form*, *stambråk* och *kedjebråk*, vilka oftast dessa på *enklaste form*. Här följer några korta beskrivningar av de vanligaste formerna av bråk ur ett läromedelsperspektiv:

- *Äkta bråk*: Är ett rationellt tal vars nämnare är **större** än bråktalets täljare. Detta innebär att ett äkta bråk alltid är < 1. Till exempel är $\frac{11}{17}$ och $\frac{1}{13}$ äkta bråk.

- *Blandad form*: När täljaren är större än nämnaren, kan denna delas upp i heltal och resten skrivs som ett äkta bråk. Ett exempel på detta är: $\frac{14}{3}$ som kan skrivas på blandad form som $\frac{14}{3} = \frac{3}{3} + \frac{3}{3} + \frac{3}{3} + \frac{3}{3} + \frac{2}{3} = 4\frac{2}{3}$

- *Stambråk*: Dessa bråk har alltid värdet 1 i täljaren. $\frac{1}{3}, \frac{1}{17}$ och $\frac{1}{124}$ är några exempel på stambråk.

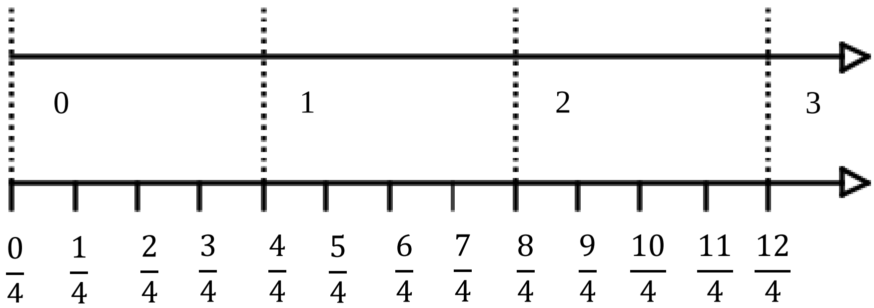
- *Kedjebråk*: Alla bråken i ett kedjebråk skrivs som stambråk i blandad form. Kedjebråk förekommer relativt sällan i undervisningsmaterial jämfört med de andra bråktyperna. Exempel på detta är: $\frac{8}{9} = \frac{1}{1+\frac{1}{8}}$.

- *Enklaste form*: När bråket är förkortat så långt det går. Detta är uppfyllt då täljaren och nämnaren inte har några gemensamma primtalsfaktorer. Till exempel kan talet $\frac{588}{980}$ skrivas som $\frac{2\cdot2\cdot3\cdot7\cdot7}{2\cdot2\cdot5\cdot7\cdot7}$ och förkortning av gemensamma faktorer ger $\frac{3}{5}$. Alltså är $\frac{3}{5}$ den enklaste formen av $\frac{588}{980}$.

En mer informell definition av rationella tal (som naturligtvis är bråktal) kan skrivas så här:

$$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, \mathrm{q} \neq 0\}.$$

Även bråktalen kan ses som egna tal som kan placeras på en tallinje, som vi kan gradera till en bestämd nämnare, se figur 2.



Figur 2: Tallinje graderad med heltal och fjärdedelar

Med hjälp av illustrationen ovan, kan nu tydligt iakttas att fyra fjärdedelar är lika mycket som en hel, men hur kan det komma sig? Två tal är lika om de har samma position på tallinjen, det vill säga $\frac{4}{4} = 1, \frac{8}{4} = 2$ och $\frac{12}{4} = 3$. Med samma resonemang kan vi dela in tallinjen i olika delar, exempelvis sjundedelar, elftedelar och så vidare. Exempelvis kan då bråket $\frac{3}{4}$ ses som en andel av en helhet, men även som ett självständigt tal. Helheten kan vara vad som helst som kan delas upp i fyra lika delar. Detta innebär då att vi kan tolka allt som finns runt oss som en andel av något.

2.1 Varför skall vi kunna bråkräkning?

Under de senaste åren har bråkens plats i samhället successivt avtagit och ersatts av decimaltalen, en stor anledning till detta är införandet av SI-enheter för de olika storheterna och den alltmer omfattande användningen av digitala hjälpmedlen. Trots detta får vi inte tro att vi kan sluta undervisa om bråkräkning. Bråk har fortfarande en stor roll inom andra delar av matematiken så som procent, sannolikhet, algebra och en hel del andra områden. Att eleverna ska kunna förlänga, förkorta, multiplicera och dividera bråk är en nödvändighet på många av de gymnasieprogrammen vi har i Sverige. Även om man inte tänker på det så använder man bråk i vardagen. När man väl använder bråk är det som namn på en storhet. Exempel på detta är ”Du spelar en halvton för högt” eller ”Hon kommer om en kvart”. I många fall kan det vara nog med att förstå innebörden av meningen, exempelvis: ”lektionen varade i tre kvart”. Vi kan tolka detta som att bråktalen kan visa sig i många olika skepnader, det vill säga att ett bråk kan tolkas på väldigt många olika sätt. Här kommer några exempel: ett tal, en andel, skala och en proportion (Skolverket 2016).

2.2 Räknelagar

De vanligaste lagarna inom aritmetiken, det vill säga den associativa-, distributiva- och kommutativa lagen gäller även för bråktalen. Nedan redogörs för dessa lagar, tillsammans med några exempel. Notera att lagarna är modifierade för att passa in med bråktalen.

2.2.1 Kommutativa lagen

Ordningen saknar betydelse för multiplikation och addition av bråktal. Division och subtraktion är exkluderat även för bråk. Sambanden $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}$ gäller för multiplikation och $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$ för addition. Vid multiplikation, multipliceras täljare och nämnare var för sig, det vill säga

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

Till exempel: $\frac{2}{3} \cdot \frac{7}{6} = \frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 6} = \frac{14}{18} = \frac{7}{9}$.

Addition kräver att nämnarna har samma värde för att täljarna skall kunna adderas. Detta görs genom förlängning av det ena bråket (eventuellt båda bråken om de har olika primtalsfaktorer i nämnaren) med det andra bråkets nämnare, det vill säga

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{c \cdot b}{d \cdot b} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d}.$$

Exempel: $\frac{2}{3} + \frac{7}{6} = \frac{2 \cdot 6}{3 \cdot 6} + \frac{7 \cdot 3}{6 \cdot 3} = \frac{12}{18} + \frac{21}{18} = \frac{12 + 21}{18} = \frac{33}{18} = \frac{11}{6}$.

2.2.2 Associativa lagen

Den associativa lagen är även känd som den förenande lagen och gäller för multiplikation och addition men icke för subtraktion och division, vilket är likt den kommutativa lagen. Lagen säger att parentesers placering i ett uttryck inte har någon betydelse om uttrycket innehåller bara additioner eller bara multiplikationer, det vill säga:

$$(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c \text{ och } (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c.$$

Exempelvis är: $\left(\frac{2}{5} + \frac{12}{5}\right) + 4 = \frac{2}{5} + \left(\frac{12}{5} + 4\right) = 6\,\frac{4}{5}$.

2.2.3 Distributiva lagen

Operatorn för multiplikation är distributiv med avseende på operatorn för addition om det för alla $k, \frac{a}{b}, \frac{c}{d}$, där $b, d \neq 0$, gäller

$$k \cdot \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) = k \cdot \frac{a}{b} + k \cdot \frac{c}{d} = \frac{ka}{b} + \frac{kc}{d} = \frac{d \cdot ka}{d \cdot b} + \frac{b \cdot kc}{b \cdot d} = \frac{dka + bkc}{bd}.$$

Exempel: $5 \cdot \left(\frac{2}{3} + \frac{7}{6}\right) = 5 \cdot \frac{2}{3} + 5 \cdot \frac{7}{6} = \frac{10}{3} + \frac{35}{6} = \frac{2 \cdot 10}{2 \cdot 3} + \frac{35}{6} = \frac{20}{6} + \frac{35}{6} = \frac{55}{6}$.

Samma som för kommutativa och associativa lagen, exkluderar vi även här division och subtraktion.

2.3 Räkna med bråk

Här kommer vi diskutera om hur man går tillväga när bråkberäkning skall genomföras i de olika räknesätten samt hur man kan jämföra bråks storlek för att avgöra vilket av bråken som har störst värde. Räknesätten kompletteras även med något konkret exempel.

2.3.1 Det rationella talet

Innan vi går vidare och beskriver bråken med dess räknelagar och räkneprocedurer, definierar vi här för de rationella talet och konstruerar detta. Här förutsätter vi att de kommutativa, associativa och distributiva lagarna gäller. Vi kommer här konstruera de rationella talen och de olika räknesätten: addition, multiplikation, division, olikheter samt räknelagarna för de sistnämnda.

Låt $\mathbb{Q}$ vara mängden av alla par av positiva heltal. Så att ett element i $\mathbb{Q}$ är ett objekt av formen $(a, b): a, b \in \mathbb{N}$. För att ge det en association byter vi ut kommatecknet mot ett kolon och skriver då istället $(a: b)$, dock får inte detta tolkas som någon form av division eftersom vi har ännu inte definierat division. Detta är snarare bara ett sätt att skriva ett ordnat par. Nedan definierar vi relationen ~ på $\mathbb{Q}$:

Definition 1: $(a_1: a_2) \sim (b_1: b_2)\ omm\ a_1 b_2 = a_2 b_1$.
Sats 1: *Relationen* ~ är en ekvivalensrelation.
Bevis av sats 1: Vi måste visa att ~ är reflexiv, symmetrisk och transitiv.

Då gäller att $a_1 a_2 = a_2 a_1$, vilket betyder att $(a_1: a_2) \sim (a_1: a_2)$, så den är reflexiv.

Vidare gäller även $(a_1: a_2) \sim (b_1: b_2)$, så är $a_1 b_2 = a_2 b_1$, Det leder oss till att $b_1 a_2 = b_2 a_1$ och $(b_1: b_2) \sim (a_1: a_2)$, vilket bevisar att den är symmetrisk.

Slutligen anta att $(a_1: a_2) \sim (b_1: b_2)$ och $(b_1: b_2) \sim (c_1: c_2)$. Det ger oss följande: $a_1 b_2 = a_2 b_1$ och $b_1 c_2 = b_2 c_1$. Det medför att $(a_1 b_2)(b_1 c_2) = (a_2 c_1)(b_2 c_1)$, sedan med hjälp av de associativa och kommutativa lagarna för multiplikation av positiva heltal kan vi skriva om som $(a_1 c_2)(b_1 b_2) = (a_2 c_1)(b_1 b_2)$, då kan vi med hjälp av annulleringslagen skriva om det som: $a_1 c_2 = a_2 c_1$, vilket slutligen ger oss att $(a_1: a_2) \sim (c_1: c_2)$. Relationen är även transitiv.

Definition 2: En ekvivalensklass i $\mathbb{Q}$ med avseende på ~ kallas ett positivt rationellt tal (prt). Ett prt betecknar vi med stor bokstav A, B, C och så vidare. Vi måste nu definiera räkneoperationer och ordning för dessa nya tal och bevisa de räknelagar som gäller. För att göra detta kommer vi arbeta med talpar $(a_1: a_2)$ som representerar prt (Vretblad & Ekstig, 2006).

2.3.2 Addition och subtraktion med samma nämnare

När man räknar addition och subtraktion med bråk finns det två fall, de med samma nämnare och de med olika. Addition av bråk med olika nämnare kräver ytterligare en operation som vi först måste definiera, nämligen multiplikation av bråk. Addition och subtraktion av bråk fortsätter därför i avsnitt 2.3.4.1. Här konstruerar vi addition av bråktal:

Definition 3: Operationen $\oplus$ på $\mathbb{Q}$ definieras på följande sätt:

$$(a_1 : a_2) \oplus (b_1 : b_2) = (a_1 b_2 + a_2 b_1 \, : \, a_2 b_2).$$

Sats 2:

$$\text{Om } (a_1 : a_2) \sim (b_1 : b_2) \; och \; (d_1 : d_2) \sim (e_1 : e_2), \text{ så är}$$
$$(a_1 : a_2) \oplus (d_1 : d_2) \sim (b_1 : b_2) \oplus (e_1 : e_2).$$

Detta betyder att om *termerna* i en *summa* byts ut mot andra ekvivalenta talpar, så blir den nya *summan* ekvivalent med den gamla.

Bevis av sats 2:

$$(a_1 : a_2) \oplus (d_1 : d_2) = (a_1 d_2 + a_2 d_1 \, : \, a_2 d_2),$$
$$(b_1 : b_2) \oplus (e_1 : e_2) = (b_1 e_2 + b_2 e_1 \, : \, b_2 e_2),$$

Vi behöver nu visa att högerleden är ekvivalenta. Men

$$\begin{aligned}
&(a_1 d_2 + a_2 d_1)(b_2 e_2) = \\
&= (a_1 d_2)(b_2 e_2) + (a_2 d_1)(b_2 e_2) = (a_1 b_2)(d_2 e_2) + (a_2 b_2)(d_1 e_2) \\
&= (a_2 b_1)(d_2 e_2) + (a_2 b_2)(d_2 e_1) = (b_1 e_2)(a_2 d_2) + (b_2 e_1)(a_2 d_2) \\
&= (b_1 d_2 + b_2 e_1)(a_2 d_2).
\end{aligned}$$

Vilket konkluderar vårt bevis. Då kan vi definiera summan av två prt.

Definition 4: Om A och B är prt, så är $A + B$ den ekvivalensklass (prt) som innehåller $(a_1 : a_2) \oplus (b_1 : b_2)$, där $(a_1 : a_2) \in A \; och \; (b_1 : b_2) \in B$. Till detta hör även räknelagarna distributiva-, kommutativa- och associativa lagen. Vi har valt att bevisa den kommutativa- och den associativa lagen, den distributiva lagen (**A1**) har vi valt att inte bevisa i denna uppsats.

A1. $(A + B) + C = A + (B + C)$ (Distributiva lagen).
A2. $A + B = B + A$ (Kommutativa lagen).
A3. $A + C = B + C \Rightarrow A = B$ (Annulleringslagen).

Bevis av **A2**: Anta att $(a_1 \colon a_2) \in A\ och\ (b_1 \colon b_2) \in B$.

$$(a_1 \colon a_2) \oplus (b_1 \colon b_2) = (a_1 b_2 + a_2 b_1 \ \colon\ a_2 b_2),$$
$$(b_1 \colon b_2) \oplus (a_1 \colon a_2) = (b_1 a_2 + b_2 a_1 \ \colon\ b_2 a_2),$$

Vi kan då se att ovanstående rader är ekvivalenta vilket då ger oss att $A + B = B + A$.

Bevis av **A3**: Låt $(a_1 \colon a_2) \in A,\ (b_1 \colon b_2) \in B\ och\ (c_1 \colon c_2) \in C$. Då har vi följande

$$(a_1 \colon a_2) \oplus (c_1 \colon c_2) \sim (b_1 \colon b_2) \oplus (c_1 \colon c_2),$$

Vilket enligt definitionen av $\oplus$ ger oss att

$$(a_1 c_2 + a_2 c_1 \ \colon\ a_2 c_2) \sim (b_1 c_2 + b_2 c_1 \ \colon\ b_2 c_2),$$

Definitionen av ~ ger os då att det även är samma sak som.

$$(a_1 c_2 + a_2 c_1)(b_2 c_2) = (b_1 c_2 + b_2 c_1)(a_2 c_2),$$

Men det är även samma sak som att $(a_1 b_2 c_2 + a_2 b_2 c_1) c_2 = (a_2 b_1 c_2 + a_2 b_2 c_1) c_2$. Räkneoperationerna för positiva heltal ger oss då att

$$a_1 b_2 c_2 + a_2 b_2 c_1 = a_2 b_1 c_2 + a_2 b_2 c_1,$$

Annulleringslagen för positiva heltal ger gör att vi kan skriva om det till

$$a_1 b_2 c_2 = a_2 b_1 c_2 \Leftrightarrow (a_1 b_2) c_2 = (a_2 b_1) c_2,$$

Om vi applicerar annulleringslagen igen får vi

$$a_1 b_2 = a_2 b_1,$$

Vilket betyder att $(a_1 \colon a_2) \sim (b_1 \colon b_2)$ eller att $A = B$, vilket skulle bevisas (Vretblad & Ekstig, 2006).

Samma procedur kan göras för att visa subtraktion, men vi begränsar oss till att enbart visa addition. Mer informellt, kan vi generellt visa i fallen då bråken har samma nämnare, kan följande regel användas:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c} \text{ och } \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}, \text{ där } a, b \text{ och } c \in \mathbb{Z}, c \neq 0$$

För att konkretisera ytterligare, visar Håkan Sollervall (2015), universitetslektor och verksam som lärare i matematik och matematik-didaktik vid Linnéuniversitetet, ett numeriskt exempel: $\frac{3}{7} + \frac{2}{7} = \frac{3+2}{7} = \frac{5}{7}$. Regeln gäller för alla positiva heltal a, b och c. Att addera eller subtrahera två bråk med samma nämnare är inte svårare än att addera eller subtrahera två vanliga heltal, när man väl förstått hur principen för bråkaddition fungerar. Denna regel fungerar oavsett antalet bråk som ska adderas eller subtraheras då samma princip kan följas.

2.3.3 Multiplikation av bråk

På samma sätt som vi tidigare införde addition kan man definiera multiplikation för att ge stadiga belägg för våra resonemang och generella räkneregler. Nedan kommer en preliminär *produkt* av talpar:

Definition 5: Operationen $\odot$ på $\mathbb{Q}$ definieras på följande sätt:

$$(a_1 : a_2) \odot (b_1 : b_2) = (a_1 : b_1 \ : \ a_2 : b_2).$$

Sats 3:

$$\text{Om } (a_1 : a_2) \sim (b_1 : b_2) \; och \; (d_1 : d_2) \sim (e_1 : e_2), \text{ så är}$$
$$(a_1 : a_2) \odot (d_1 : d_2) \sim (b_1 : b_2) \odot (e_1 : e_2).$$

Definition 6: Om A och B är prt, så är $A \cdot B$ den ekvivalensklass (prt) som innehåller $(a_1 : a_2) \odot (b_1 : b_2)$, där $(a_1 : a_2) \in A \; och \; (b_1 : b_2) \in B$. Räknereglerna följer nedan

M1. $(AB)C = A(BC)$ (Associativa lagen)
M2. AB= BA (Kommutativa lagen)
M3. $AC = BC \Rightarrow A = B$ (Annulleringslagen)
D. $A(B + C) = AB + AC$ (Distributiva lagen)

Bevis av **M3**: Om A, B och C är positiva rationella tal (prt), så är $AC = BC \Rightarrow A = B$. Låt då $(a_1 : a_2) \in A, (b_1 : b_2) \in B \; och \; (c_1 : c_2) \in C.$ Då är AC den ekvivalensklass som innehåller $(a_1 : a_2) \odot (c_1 : c_2)$ och BC den ekvivalensklass som innehåller $(b_1 : b_2) \odot (c_1 : c_2)$. Denna förutsättning innebär att

$$(a_1 : a_2) \odot (c_1 : c_2) = (a_1 c_1 : a_2 c_2),$$
$$(b_1 : b_2) \odot (c_1 : c_2) = (b_1 c_1 : b_2 c_2),$$

vilket enligt definitionen av $\odot$ är ekvivalent med att

$$(a_1 c_1 : a_2 c_2) \sim (b_1 c_1 : b_2 c_2).$$

Enligt definitionen av $\sim$ är detta ekvivalent med

$$(a_1 c_1)(b_2 c_2) = (a_2 c_2)(b_1 c_1).$$

Enligt den kommutativa lagen kan detta skrivas om till

$$(a_1 b_2)(c_1 c_2) = (a_2 b_1)(c_2 c_1),$$

genom annulleringslagen för positiva heltal ges att

$$a_1 b_2 = a_2 b_1.$$

Enligt definition 1 är det ekvivalent med

$$(a_1 : a_2) \sim (b_1 : b_2),$$

vilket innebär att $A = B$, vilket skulle visas (Vretblad & Ekstig, 2006).

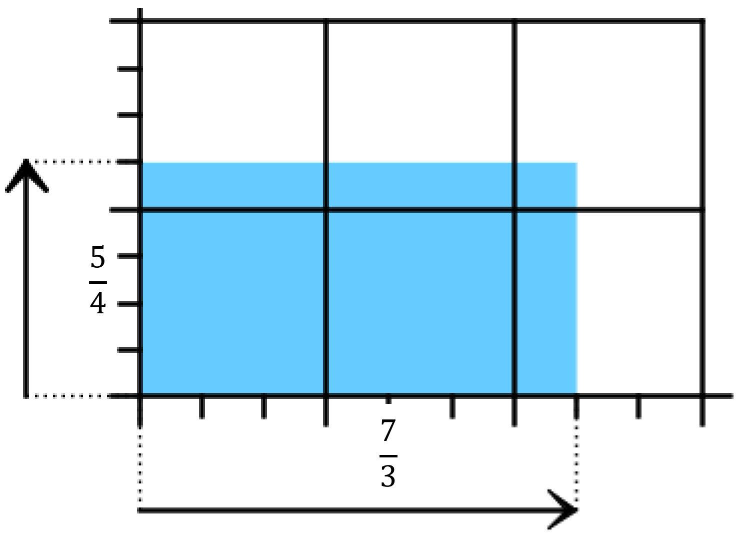
Sollervall (2015) inleder avsnittet med att ge några tolkningar kring multiplikation med heltal för att senare dra paralleller till multiplikation med bråk. Han förklarade multiplikationen $5 \cdot 7kg = 35kg$. Vi kan se detta som fem stycken sjukilos säckar $(7 + 7 + 7 + 7 + 7 = 35)$. Samma princip kan vi använda även när ena faktorn i multiplikationen är ett bråk, exempelvis:

$$5 \cdot \frac{7}{3} = \frac{7}{3} + \frac{7}{3} + \frac{7}{3} + \frac{7}{3} + \frac{7}{3} = \frac{7+7+7+7+7}{3} = \frac{35}{3}.$$

Om vi ska tolka det i ord skulle vi beskriva det som fem gånger sju tredjedelar är lika med trettiofem tredjedelar. Alltså om vi multiplicerar ett heltal med ett rationellt tal så multipliceras heltalet med de rationella talens täljare. Det leder oss till följande regel:

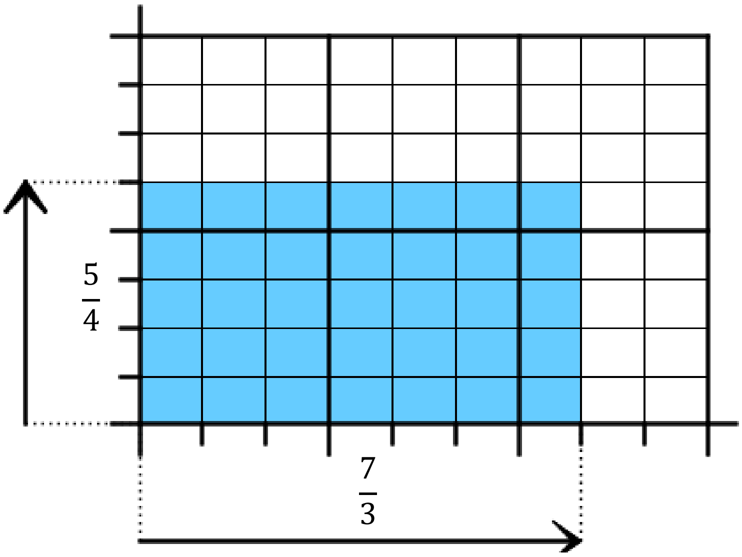
$$a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c}, a, b \text{ och } c \in \mathbb{Z}, c \neq 0.$$

Vad händer om även första faktorn är ett bråk? Förklaringen av upprepad addition fungerar tyvärr inte lika bra när vår första faktor inte längre är ett heltal. Då får vi använda en annan förklaringsmodell. Vi kan då använda oss av ”chokladkakemodellen”. Den går ut på att vi delar in chokladkakans sidor i den enhet som bråken vi vill multiplicera har. Exempelvis om vi ska multiplicera $\frac{5}{4} \cdot \frac{7}{3}$, kan det vara avgörande när chokladkakans rutor är en längdenhet. Detta kan tydligt ses i figur 3 och figur 4 vad Sollervall (2015) menar med detta.



Figur 3: Multiplikation av bråktal illustration 1

Det kan vara svårt att urskönja hur stor del av chokladkakan som verkligen är ifylld, när varje sida är längdenheter (le). För att veta exakt hur stor del som egentligen är ifylld så behöver vi dela in varje långsida på chokladkakan i tredjedelar och kortsidan i fjärdedelar. Då kommer vi få oss en mycket tydligare illustration för vad $\frac{5}{4} \cdot \frac{7}{3}$ egentligen är. Vilket kan illustreras enligt figuren nedan.



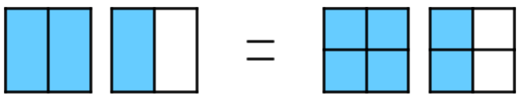
Figur 4: Multiplikation av bråktal illustration 2

Vi kan nu tydligare se fördelarna med att dela in sidorna i mindre delar. Notera att varje ruta nu har delats in i tolv lika stora delar. Vi kan nu se att det område som vi i figur 3 inte var helt säkra på hur stort det var, blir nu tydligare att det täcker in trettiofem delar och varje ruta var delad i tolv lika stora delar, vilket leder oss till svaret $\frac{35}{12}$. Med detta exempel bakom oss kan vi formulera en generell regel för hur två bråktal multipliceras med varandra:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}, \text{ där } a, b, c \,\&\, d \in \mathbb{Z}, \text{b \& d} \neq 0.$$

2.3.4 Förlänga och förkorta

Bråktalens storlek kan ibland vara svårt att avgöra, samt att vissa bråktal behöver ha gemensam nämnare när exempelvis subtraktion och addition av bråk skall göras. Då kan förlängning eller förkortning vara till hjälp.



Figur 5: Geometrisk representation av bråk efter förlängning

Vi kan nu tydligt i figuren ovan se att både den till vänster och höger har samma andel färgade rutor. För att exemplifiera detta med bråktal skulle det kunna se ut såhär: $\frac{3}{2} = \frac{6}{4} = \frac{12}{8} = \frac{24}{16}$ och så vidare. Varför kan vi multiplicera ett rationellt tals nämnare och täljare med samma tal utan att påverka värdet? Sollervalls framställning är att om vi multiplicerar nämnaren med fem så får vi en fem gånger mindre enhet, eftersom att enheten är fem gånger mindre kommer vi att behöva fem gånger fler delar, för att få samma tal. Detta innebär att oavsett vilket tal vi förlänger med, förändras inte talets värde. Sollervall (2015, s. 54) använder figur 6 för att illustrera några exempel av förkortning och förlängning:

Förlänga	Förkorta
$\frac{3}{2} = \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 5} = \frac{15}{10}$	$\frac{15}{10} = \frac{15/5}{10/5} = \frac{3}{2}$
$\frac{3}{2} = \frac{3 \cdot 4}{2 \cdot 4} = \frac{12}{8}$	$\frac{12}{8} = \frac{12/4}{8/4} = \frac{3}{2}$
$\frac{4}{7} = \frac{4 \cdot 5}{7 \cdot 5} = \frac{20}{35}$	$\frac{20}{35} = \frac{20/5}{35/5} = \frac{4}{7}$

Figur 6: Förlänga och Förkorta

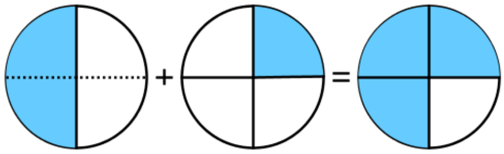
Vi kan nu se i tabellen se att det inte är någon skillnad på de rationella talen $\frac{3}{2}$ och $\frac{15}{10}$.

2.3.4.1 Addition och subtraktion med olika nämnare

Enligt Sollervall (2015) kan en addition av två bråk med olika nämnare liknas med en enhetsomvandling, det exemplifieras med: $3m + 7dm = 30dm + 7dm = 37dm$ och $3m + 7dm = 3m + 0{,}7m = 3{,}7m$. Det hade ju naturligtvis inte gått att addera trean och sjuan utan att ta hänsyn till enheterna meter och decimeter. Det leder oss till en grundregel vilken lyder:

> *"Storheter måste ha samma enhet innan deras mätetal kan adderas" (Sollervall 2015, s.59)*

Denna grundregel gäller även när vi nu ska addera två bråktal. Det innebär att bråkens enheter måste vara samma, det vill säga att bråkens nämnare måste vara samma, innan bråkens täljare (mätetal) kan adderas. Efter den inledande jämförelsen så påbörjas själva förklaringen av addition och subtraktion med olika nämnare med ett exempel som illustreras med bilder och med siffror. Exempel: Hur mycket är en halv plus en fjärdedel? Vi börjar med att illustrera exemplet i figur 7. De streckade linjerna i första figuren antyder att vi kan tolka en halv som två fjärdedelar.



Figur 7: Bråkberäkning med cirkelsektioner

Vi kan även illustrera detta mer matematiskt med hjälp av siffor, det resulterar i följande: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 2} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1+2}{4} = \frac{3}{4}$. Vi ser här att när vi byter enhet från halva till fjärdedelar så måste vi även ta dubbelt så många delar. Sollervall (2015) följer upp ytterligare ett flertal exempel. Två av dem lyder: Vad är tre halva plus fem fjärdedelar, samt hur mycket är sju fjärdedelar plus fem halva?

2.3.5 Minsta Gemensamma Nämnare (MGN)

Detta kan vi få användning av senare i mer avancerad matematik som till exempel i lösning av diofantiska ekvationer. När vi skall bestämma den minsta gemensamma nämnare, beskriver Sollervall (2015) följande procedur; börjar vi med att bestämma en gemensam *enhet* för femtondelar och tolftedelar. Först skrivs multiplar av de båda enheterna ner på varsin rad. Sedan väljs det minsta gemensamma talet i båda listorna.

15: $15{,}30{,}45{,}\mathbf{60}{,}75$ ...
12: $12{,}24{,}36{,}48{,}\mathbf{60}$ ...

Talet 60 är det minsta gemensamma talet för båda listorna, vilket då är den minsta gemensamma nämnaren. Det brukar skrivas som $MGN = 60$, eller mer utförligt $MGN(15{,}12) = 60$. Vilket utläses som, minsta gemensamma nämnare för 15 och 12 är 60. Vi har då kommit fram till att vi kan skriva talet 60 på två olika sätt: $4 \cdot 15$ och $5 \cdot 12$. Om vi då använder exemplet som vi avslutade avsnittet 2.2.3 med skulle vi då kunna skriva det som: $\frac{37}{15} = \frac{37 \cdot 4}{15 \cdot 4} = \frac{148}{60}$ och $\frac{29}{12} = \frac{29 \cdot 5}{12 \cdot 5} = \frac{145}{60}$, när vi nu har förlängt båda bråktalen till samma nämnare kan vi jämföra dem. Och vi ser följande: $\frac{148}{60} > \frac{145}{60}$ $så\ är\ även$ $\frac{37}{15} > \frac{29}{12}$.

Den minsta gemensamma nämnaren kan även bestämmas på ett alternativt sätt genom att vi delar upp talen 12 och 15 i primtalsfaktorer. I samma exempel som ovan skulle vi kunna skriva $15 = 3 \cdot 5$ och $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$. När vi nu ska bestämma vår MGN vill vi välja så få av dessa primtalsfaktorer som möjligt, men ändå att vi fortfarande kan skapa talen tolv och femton med de primtalsfaktorerna vi har. Exempelvis för tolv och femton skulle det då se ut på följande vis: MGN $= 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 60$. Detta kan även utnyttjas när vi ska förlänga ett bråktal, eftersom $12 = 3 \cdot 2 \cdot 2$ kan vi se att det saknar primtalsfaktorn 5 och därmed ska vi förlänga 12 med 5 för att få 60. Samma princip gäller även om vi arbetar med fler än två bråktal. Sollervall (2015) avslutar med två exempel varav ett av dem lyder enligt följande: beräkna MGN(15,12,18). Det gäller att ”tänka snålt” och inte ta med mer faktorer än nödvändigt. MGN$(3 \cdot 5, 2 \cdot 2 \cdot 3, 2 \cdot 3 \cdot 3)$ kan då skrivas som $3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 180$, vi kan med hjälp av dessa primtal skapa $12, 15$ och 18.

2.3.6 Division av bråk

Vi kommer i detta avsnitt definiera division av bråk och därmed visa att räknereglerna för bråkdivision gäller.

Sats 5: Låt $A\ och\ B$ vara två godtyckliga prt. Då finns precis ett prt C sådant att $BC = A$.

Bevis av sats 5: Att C måste vara entydigt, om det existerar, vilket följer av räkneregel **M3**. Låt $(a_1 : a_2) \in A\ och\ (b_1 : b_2) \in B$. Sätt $c_1 = a_1 b_2\ och\ c_2 = a_2 b_1$, då blir

$$(b_1 : b_2) \odot (c_1 : c_2) = (b_1 c_1 : b_2 c_2) = (a_1 b_1 b_2 : a_2 b_1 b_2) \sim (a_1 : a_2),$$

Om vi nu översätter detta till ekvivalensklasser, och då får vi $(c_1 : c_2) \in C$, följer att $BC = A$. Så division av prt är möjlig. Vi kallar C i satsen för *kvoten* mellan $A\ och\ B$ och skriver då $C = \frac{A}{B} = A/B$ (Vretblad & Ekstig, 2006).

Division är inversen till multiplikation och med hjälp av den beskrivningen och den kommutativa lagen kan bråkdivision beskrivas som följande samband:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}.$$

Detta kan visas genom tillämpning av divisionsdefinitionen, det vill säga multiplikation av nämnarens invers. Eftersom $\frac{d}{c}$ är inversen till $\frac{c}{d}$ vill vi nu multiplicera med denna och använda de ovannämnda räknelagarna:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}}{\frac{c}{d} \cdot \frac{d}{c}} = \frac{\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}}{\frac{d}{d} \cdot \frac{c}{c}} = \frac{\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}}{1} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$

Det finns ett flertal olika metoder där denna typ av division kan utföras, där vissa metoder passar bättre än andra beroende på vilken sort av uttryck problemlösaren står inför. Förutom den generella definitionen ovan kan samma uttryck beräknas genom konvertering till decimaltal, användning av den distributiva lagen eller till och med i vissa fall exkludering av multiplikation. Studien som den kinesiska matematikforskaren Ma Liping (2010) genomförde visade att olika lärare föredrar olika metoder och därmed är inte deras metoder helt eniga. Olika lärare fick i uppgift att resonera kring och lösa en bråkdivision av typen $a\frac{b}{c}/\frac{d}{e}$. De hon undersökte svarade på ett flertal olika sätt.

2.3.6.1 Omvandling till decimaltal

Då alla tal på tallinjen som har samma position är lika med varandra, kan alla bråktal teoretiskt skrivas som decimaltal (decimaltal med oändliga decimalutvecklingar är problematiska att skriva exakt på decimalform). Bråktalen skrivs om helt enkelt genom att beräkna kvoten av täljaren och nämnaren. Exempelvis är bråktalet $\frac{5}{10} = 0{,}5$. Ett problem med detta, är att endast de bråktal som efter förenkling enbart har en kombination av primtalen två och fem i nämnaren, har en ändlig decimalutveckling. Exempelvis har talet $\frac{13}{8} = 1{,}625$ en ändlig decimalutveckling, medan $\frac{13}{9} = 1{,}\overline{4}$ har en oändlig utveckling (strecket ovanför decimalerna avser decimaltalets period). Till exempel är $1{,}\overline{4} = 1{,}44444 \ldots$ och $0{,}\overline{09} = 0{,}09090909 \ldots$). Med andra ord har majoriteten av bråktalen en oändlig decimalutveckling och är därmed opraktiskt att applicera i beräkningar då avrundningar måste göras.

2.3.6.2 Omvandling från decimaltal

Ibland kan det vara av intresse att omvandla ett decimaltal till ett bråktal. Detta går att göra förutsatt att decimaltalet inte är ett *irrationellt tal*, det vill säga att talet *inte* kan skrivas på formen $\frac{a}{b}$. Om detta nu uppfylls, kan vi använda följade metod:

Exempelvis $0{,}09090909 \ldots$
Sätt $x = 0{,}09090909 \ldots$
då är $1000x = 90{,}9090909 \ldots$
$1000x - x = 999x$ är då lika med
$90{,}90909090 \ldots - 0{,}09090909 \ldots = 90$
alltså är $999x = 90$
det vill säga $x = \frac{90}{999} = \frac{10}{111}$.

2.3.6.3 Distributiva lagen

Den distributiva lagen gäller inte för division, men ett bråktal kan delas upp i en summa varpå den distributiva lagen kan användas på dess komponenter.

$$a\frac{b}{c}/\frac{d}{e} = \left(a + \frac{b}{c}\right)/\frac{d}{e}\,,$$

$$= \left(a + \frac{b}{c}\right)\cdot\frac{e}{d}\,,$$

$$= \left(a\cdot\frac{e}{d}\right) + \left(\frac{b}{c}\cdot\frac{e}{d}\right),$$

$$= \frac{a\cdot e}{d} + \frac{b\cdot e}{c\cdot d}.$$

Exempel: $\frac{2\frac{7}{9}}{\frac{1}{2}} = \left(2 + \frac{7}{9}\right)/\frac{1}{2},$

$$= \left(2 + \frac{7}{9}\right)\cdot\frac{2}{1},$$

$$= \left(2\cdot\frac{2}{1}\right) + \left(\frac{7}{9}\cdot\frac{2}{1}\right),$$

$$= \frac{2\cdot 2}{1} + \frac{7\cdot 2}{9\cdot 1},$$

$$= 4\frac{14}{9},$$

$$= 5\frac{5}{9}.$$

2.3.6.4 Division utan multiplikation

Istället för att direkt tillämpa definitionen av division, ignoreras multiplikation av inversen och divisionerna görs ledvis horisontellt det vill säga samma procedur som görs med multiplikation:

$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} = \frac{a\cdot c}{b\cdot d}$ jämfört med $\frac{a}{b}/\frac{c}{d} = \frac{a/c}{b/d}.$

I exemplet som Liping använder skall bråket $\left(1\frac{3}{4}/\frac{1}{2}\right)$ beräknas. Då blir denna beräkning:

$$1\frac{3}{4}/\frac{1}{2} = \frac{7}{4}/\frac{1}{2}\,,$$

$$= \frac{7/1}{4/2}\,,$$

$$= \frac{7}{2}\,,$$

$$= 3\frac{1}{2}\,.$$

Men även här finns det svagheter, även om själva proceduren är enkel. Problemet uppstår när $\frac{a}{c}$ inte resulterar i heltal utan blir oreducerbara bråk. Exempelvis om $\frac{1}{2}$ hade ersatts med $\frac{1}{3}$ hade denna procedur genererat ett svårtolkat bråk:

$$1\frac{3}{4}/\frac{1}{3} = \frac{7}{4}/\frac{1}{3},$$

$$= \frac{7/1}{4/3},$$

$$= \frac{7}{4/3},$$

$$= 5\,\frac{1/3}{4/3}.$$

Liping (2010) menar att detta problem är förväntat, då division är en mer komplicerad operation än multiplikation.

2.3.7 Jämförelse av bråk.

Vår sista konstruktion görs för att definiera ordningsrelationerna $<, > \; och =$ för prt.

Definition 7:

$$(a_1\!: a_2) \prec (b_1\!: b_2) \; omm \; a_1 b_2 < a_2 b_1,$$
$$(a_1\!: a_2) \succ (b_1\!: b_2) \; omm \; a_1 b_2 > a_2 b_1,$$

Då gäller för ett godtyckligt par av talpar precis en av relationerna $(a_1\!: a_2) \prec (b_1\!: b_2)$, $(a_1\!: a_2) = (b_1\!: b_2)$ och $(a_1\!: a_2) \succ (b_1\!: b_2)$. Det ger oss sats 4:

Sats 4: Om $(a_1\!: a_2) \sim (b_1\!: b_2) \; och \; (d_1\!: d_2) \sim (e_1\!: e_2)$ samt $(a_1\!: a_2) \prec (d_1\!: d_2)$, så gäller $(b_1\!: b_2) \prec (e_1\!: e_2)$. Denna sats medför att vi nu kan definiera ordningsrelationen för ekvivalensklasserna.

Definition 8: Relationen $<$ på mängden av prt definieras genom att $A < B \; omm \; (a_1\!: a_2) \prec (b_1\!: b_2), d\ddot{a}r \; (a_1\!: a_2) \in A \; och \; (b_1\!: b_2) \in B$. Följande ordningslagar kan sedan bevisas.

O1. För två prt $A \; och \; B$ gäller precis ett av fallen $A < B, A = B \; och \; A > B$.
O2. $A < B \wedge B < C \Rightarrow A < C$.
O3. $A < B \Rightarrow A + C < B + C$.
O4. $A < B \Rightarrow AC < BC$.

Subtraktion kan definieras mellan vissa prt. Om $A > B$ så finns precis ett prt C sådant att $B + C = A$, vid omskrivning får vi då att $C = A - B$. Så det finns högst ett sådant C följer av räkneregel **A3**, om $B + C_1 = B + C_2$, då måste $C_1 = C_2$. För att bevisa detta så konstruerar vi en representant för det. Låt $(a_1{:}\, a_2) \in A\ och\ (b_1{:}\, b_2) \in B$. Eftersom att $A > B$, så är $(a_1{:}\, a_2) \succ (b_1{:}\, b_2)$, det vill säga $a_1 b_2 > a_2 b_1$. Denna olikhet gör nu att det existerar ett positivt heltal z så att $a_1 b_2 = a_2 b_1 + z$. Detta kan vi bevisa enligt följande:

$$
\begin{aligned}
&(b_1{:}\, b_2) \odot (z{:}\, a_2 b_2) = (b_1 a_2 b_2 + \mathrm{z} b_2{:}\, a_2 b_2 b_2) \\
&= \big((b_1 a_2 + z) b_2{:}\, (a_2 b_2) b_2\big) \sim (b_1 a_2 + z{:}\, a_2 b_2) \\
&= (a_1 b_2{:}\, a_2 b_2) \sim (a_1{:}\, a_2).
\end{aligned}
$$

Låt då C vara ekvivalensklassen som innehåller $(\mathrm{z}{:}\, a_2 b_2)$, så denna kedja av likheter och ekvivalenser att $A + B = C$ (Vretblad & Ekstig, 2006).

När vi ska jämföra bråk är förlängning ett bra hjälpmedel. Om vi vill bestämma vilket tal av $\frac{7}{3}$ och $\frac{27}{12}$ som är störst behöver vi göra så att båda talen har samma *enhet* (nämnare). I detta fall räcker det att förlänga $\frac{7}{3}$ med fyra, då blir båda nämnarna tolv och då ser bråket ut såhär: $\frac{7}{3} = \frac{7 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{28}{12}$. När bråken har samma nämnare kan vi se att:

$$\frac{28}{12} > \frac{27}{12}\ \text{så är även}\ \frac{7}{3} > \frac{27}{12}.$$

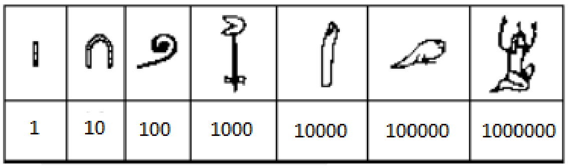
I detta fall så behövde vi bara förlänga det ena talet för att få samma nämnare. Det blir lite klurigare om vi har talen $\frac{37}{15}$ och $\frac{29}{12}$ istället, då vi vill bestämma minsta gemensamma nämnare.

2.4 Bråkets historia

Bråkets ursprung är oklart och har under årtusenden används och utvecklats inom olika civilisationer till det som används idag. En skillnad från idag, är att många av historiens matematiker uttryckt bråktal som summor av hela tal och stambråk. De tidigaste som noterats använda uttryck för bråk är de forna egyptierna, där många exempel på divisioner är beskrivna i Rhindpapyren (Thompson, 1991). Thompson talar om andra kända matematiker, som Heron, känd som Heron of Alexandria (10-70) och Leonardo Bonacci, även känd som Fibonacci eller Leonardo från Pisa (1170-1250) har uttryckt olika matematiska resonemang att beskriva bråktal som. Dessa metoder är inte identiska, men de vilar på samma matematiska princip.

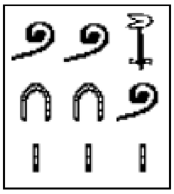
2.4.1 Egyptisk division

Det (moderna) talsystemet som används idag, påminner om de forna Egypternas talsystem. De hade hieroglyfer (se figur 8) som representerade 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000 och 1000000, som då kombinerades ihop för att forma de tal som önskades.



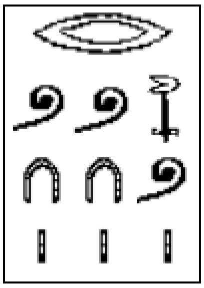
Figur 8: Numerisk Egyptiska hieroglyfer

Exempelvis kombineras talet 1323 ihop med hieroglyferna



Figur 9: Talet 1323 med Egyptiska hieroglyfer

Innehåller ett tal hieroglyfen  innebär att talet är ett stambråk. Talet $\frac{1}{1323}$ skrivs då



Figur 10: Stambråket 1/1323 med Egyptiska hieroglyfer

Den tidiga Rhindpapyren (cirka 1600 år före vår tideräkning) tillsammans med Moskvapapyren (cirka 1850 år före vår tideräkning) har gett oss olika räkneexempel på uråldrig egyptisk division och utgör majoriteten av det vi känner till idag om den forna matematiken för Egyptisk division (Thompson, 1991). Det är oklart exakt vad denna division användes till, men en god gissning är resursfördelning. Rhindpapyren visar exempel på hur brödlimpor kan fördelas jämnt genom delning. Majoriteten av Rhindpapyren involverar operationer av bråk (O'Connor och Robertson, 2000). Den princip som karaktäriserar denna division, beskriver division additivt, det vill säga bråket (divisionen) kan beskrivas som en summa av andra bråk och heltal. De tal som beskrivs i summan, fastställs genom multiplikation. Precis som i den moderna matematikens definition för division, skall produkten av nämnaren och kvoten resultera i täljarens värde. Med andra ord $\frac{t}{n} = k$ vilket medför att $t = k \cdot n$. Naturligtvis kommer inte alltid (det tal som kvoten multipliceras med) nämnaren vara ett heltal. Egypterna löste detta genom att successivt dubblera nämnaren, tills en faktor erhålls vars produkt med täljaren nästan överskrider täljarens värde. Tabellen på nästa sida förtydligar hur divisionen $\frac{19}{8}$ görs. Enligt tidigare påstående kan 8 bara multipliceras med 2 utan att överskrida täljarens värde 19 ($1 \cdot 8 = 8 < 19 \; och \; 2 \cdot 8 = 16 < 19 \; men \; 4 \cdot 8 = 32 > 19$). Varje multiplikation som utförs skrivs upp i en tabell med två kolumner (se nästa sida). Efteråt halveras nämnaren successivt. Denna process representeras med ett streck ovanför divisorn. $\overline{2}$ betyder $\frac{1}{2}$ alltså att nämnaren divideras med 2. Ena faktorn (där en andra är nämnaren) ställs upp i en av två kolumner, där vänsterledet är faktorerna och högerledet är produkten av faktorerna (där nämnaren är en av dem). Produkterna i HL adderas ihop i en kombination så att summan är ekvivalent med täljaren. För att få summan 19, kan HL bara kombineras på ett vis, nämligen $16 + 2 + 1 = 19$. De rader i VL som korresponderar med de tal som adderades i HL, summeras nu ihop och vi får $2 + \overline{4} + \overline{8} = 2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ som nu är en summa av stambråk. Exemplet nedan från kommer från Rhindpapyren (leden är här omkastade eftersom vi läser från vänster till höger).

Täljarfraktioner (VL)	Nämnarfraktioner (HL)	Beskrivning
1	8	8 delar av 8 motsvarar en hel, $\frac{8}{8} = 1$
2	16	Bråktalet och delarna dubbleras, tills produkten av multipeln och nämnaren inte överskrider täljaren. Här avstannar dubbleringen och processen med halvering inleds istället.
$\overline{2}$	4	Vi halverar nu istället nämnaren successivt tills vi kommer ner till 1.
$\overline{4}$	2	Proceduren upprepas
$\overline{8}$	1	Slutligen har vi nått 1. Nu adderas de termer i högerledet som resulterar i summan 19, det vill säga täljaren. Varje stambråk får högst användas en gång.

Som tidigare nämnts skrivs till exempel $\frac{1}{2}$ som $\overline{2}$. Summan av multiplarna i vänsterledet (VL) som korresponderar mot talen vi summerade i högerledet (HL) blir tillsammans den sökta kvoten $2 + \overline{4} + \overline{8}$, med andra ord skrivs som $2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$. Denna typ av beräkning går att utföra oavsett vilken heltalsdivision vi ska utföra, men en viss modifiering av processen måste göras vilken vi inte tar upp här.

2.4.2 Sylvesters algoritm för division

Thompson(1991) skriver om James Joseph Sylvesters (1814-1897) algoritm för division bygger också på stambråkssummor. Men dessa härleds genom subtraktion, jämfört med den egyptiska metoden som är multiplikation. Likt den egyptiska bråktalsräkningen, fastställs först heltalet vars produkt med nämnaren inte överskrider täljarens värde (om ett sådant existerar). Resten, har samma nämnare som ursprungsbråket. Detta tal, är summan av ett stambråk och ett annat bråk. Stambråket väljs med nämnaren n så att 1/n inte överskrider restbråket. Subtraktion med det nya talet 1/n producerar en ny rest, som kan beskrivas med ett nytt stambråk adderat med en rest. Denna procedur upprepas tills resten också blir ett stambråk. För att konkretisera, visas samma exempel som tidigare med bråket 19/8.

Steg 1: Bryt ut heltalen $\frac{19}{8} = \frac{16}{8} + \frac{3}{8} = 2 + \frac{3}{8}$,
Steg 2: $\frac{3}{8} = \frac{1}{n} + rest_1$, där n ska vara så litet som möjligt utan att bli större än $\frac{3}{8}$. Vi ser att $\frac{1}{2} > \frac{3}{8}$ och att $\frac{1}{3} < \frac{3}{8}$, så då är $\frac{1}{3}$ det största stambråket som kan väljas. Då är $\frac{3}{8} = \frac{1}{3} + rest_1$. $Rest_1$ beräknar vi genom subtraktion: $\frac{3}{8} - \frac{1}{3} = rest_1$. $\frac{3}{8} - \frac{1}{3} = \frac{9}{24} - \frac{8}{24} = \frac{1}{24}$. Eftersom $rest_1$ blev ett stambråk, är vi nu klara. Annars upprepas steg 2 tills $rest_i = \frac{1}{n}, där\ i,n > 0, i,n \in \mathbb{N}$
Steg 3: Summerar alla resterna. Vi får då $\frac{19}{9} = 2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{24}$.

Sylvesters algoritm är generellt opraktisk. Om vi skulle skriva om talet $\frac{5}{31}$ med hjälp av denna metod, blir det: $\frac{5}{31} = \frac{1}{7} + \frac{1}{55} + \frac{1}{3979} + \frac{1}{237404683} + \frac{1}{1127619917796295}$.

3 Skolverkets styrdokument och bråk

Bråktalen följer eleven ända från årkurs 1-3, till den gymnasiala skolan. Till en början förväntas en årskurs 1-3 elev att kunna hantera enkla tal i bråkform och dess användning i vardagliga situationer. Indirekt, kommer bråken även in i det centrala innehållet relaterat till proportionella samband, som till exempel hälften.

Som förväntat, ökas komplexiteten från årkurs till årskurs. I årskurs 4-6 skall eleverna kunna relatera bråk- och decimaltalen till vardagliga situationer. De skall dessutom kunna se samband mellan procent och decimal-/bråktal och beräkna dessa, bland annat med hjälp av miniräknare och huvudräkning. Bråktalen uppenbarar sig dessutom i centrala innehållet relaterat till proportionalitet, som även behandlar procent. För att uppnå godkänt resultat enligt kunskapskraven, nämns inte bråktalen explicit. Skolverket (2011) skriver att eleverna förväntas använda i huvudsak fungerande matematiska metoder med viss anpassning i sammanhanget det ställs inför. Här ingår även att eleverna skall kunna lösa rutinuppgifter.

Liknande krav ställs i slutet av årskurs 9. Men naturligtvis krävs mer avancerade metoder och procedurer. I årskurs 9 skall eleverna kunna hantera metoder för beräkningar av bråk- och decimaltal enligt Skolverkets (2011) krav. Så, i stora drag krävs bara procedurer med viss förståelse av anknytningen för att kunna uppnå till godkänt resultat. Både digitala verktyg och huvudräkning skall dessutom användas vid beräkningar vid metoderna. I relation till matematiklitteraturen, är det relativt lite stoff som kräver huvudräkning. I de flesta fall får hjälpmedel som kalkylator användas, vilket det också oftast görs även om det inte behövs. Detta kan vara en av de underliggande faktorerna som påverkat elevers kunskaper om bråktalen och deras räkneoperationer.

I ämnesplanen för gymnasiet inom matematik, är bråken inte omnämnda.

4 Analys av gymnasiala matematikböcker

Här analyserar vi olika matematikböcker av olika serier för gymnasial nivå för kurserna matematik 1a, 1b och 1c. Vi tittar på när bråktalen introduceras i böckerna i förhållande till avsnitten och hur respektive bok introducerar bråk. Likheter och skillnader mellan olika serier och kurser kan då urskiljas relativt tydligt. Avsnitten i denna del är numrerade i ordning om hur den analyserade litteraturen tar upp respektive ämne

4.1 Origo 1b & 1c

Både Origo 1b och 1c analyseras här samtidigt. Båda böckerna är identiska på bråkavsnittet, som är i det andra kapitlet. Innan bråktalen introduceras, behandlar litteraturen tabeller, diagram, talmängder, negativa tal, primtal och delbarhet. Avsnittet inleds med en kort repetition av täljare och nämnare, samt illustrera de med bild, ord och ett numeriskt exempel. Boken är författad av Attila Szabo, Niclas Larson, Gunilla Viklund, Daniel Dufåker och Mikael Marklund, utgiven av förlaget Sanoma Utbildning år 2011.

4.1.1 Förkorta och förlänga bråk och minsta gemensamma nämnare

Detta avsnitt introduceras och behandlas såhär:
½ = 3/6. samt innebörden av att förkorta och förlänga ett bråk på följande vis, som att dividera respektive multiplicera både täljare och nämnare med samma heltal. Att jämföra två bråktal görs genom att först bestämma en gemensam nämnare. En sådan nämnare ges av att förlänga bråken med varandras nämnare.

ex: Vilket av talen $\frac{3}{8}$ och $\frac{5}{12}$ är störst? I boken förklaras det som $\frac{5}{12}$

$$\frac{3}{8} = \frac{3 \cdot 12}{8 \cdot 12} = \frac{36}{96} \; och \; \frac{5}{12} = \frac{5 \cdot 8}{12 \cdot 8} = \frac{40}{96} \; så \; att \; \frac{36}{96} < \frac{40}{96} \; då \; är \; \frac{3}{8} < \frac{5}{12}.$$

Nackdelen med denna metod för att bestämma en gemensam nämnare är att nämnaren kan bli väldigt stor. Då är det bra att använda MGN (minsta gemensamma nämnare) och i fallet med $\frac{3}{8}$ och $\frac{5}{12}$ så är MGN = 24 vilket istället ger oss lösningen:

$$\frac{3}{8} = \frac{3 \cdot 3}{8 \cdot 3} = \frac{9}{24} \; och \; \frac{5}{12} = \frac{5 \cdot 2}{12 \cdot 2} = \frac{10}{24} \; så \; att \; \frac{9}{24} < \frac{10}{24} \; då \; är \; \frac{3}{8} < \frac{5}{12}.$$

Men så är inte alltid fallet. Det beror på antalet gemensamma primtalsfaktorer hos nämnarna. Desto fler gemensamma primtalsfaktorer desto mindre blir vår minsta gemensamma nämnare och tvärt om.

4.1.2 Addition och subtraktion av bråk

Detta avsnitt benämns väldigt kort, med beskrivningen: Om bråken har samma nämnare kan täljarna bara adderas eller subtraheras direkt. Medan om bråken inte har samma nämnare måste bråken först göras om till gemensam nämnare, för att sedan addera eller subtrahera täljarna.

4.1.3 Multiplikation

För att förstå hur man multiplicerar bråk ska vi bestämma $\frac{1}{4}$ av $\frac{4}{5}$ med hjälp av figur 11. Bilden till vänster illustrerar $\frac{4}{5}$ och bilden till höger illustrerar då $\frac{1}{4}$ av dessa.

Figur 11: En fjärdedel av fyra femtedelar

De tar även upp ett alternativt sätt till multiplikation. Det förklaras med att man multiplicerar täljare med täljare och nämnare med nämnare. Tänk även på att förenkla ditt svar om det går. Med samma siffror som ovan skulle det då bli

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{1 \cdot 4}{4 \cdot 5} = \frac{4}{20} = \frac{4/4}{20/4} = \frac{1}{5}.$$

4.1.4 Inverterade tal

Divisionsbegrepp inleds med att förklara ytterligare ett begrepp, nämligen inverterade tal. Det inverterade talet till $\frac{4}{5}$ är $\frac{5}{4}$ och om man multiplicerar talet och det inverterade talet ska produkten av dem alltid bli ett. Mer generellt kan det skrivas på följande vis:

$$\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b} = \frac{ba}{ab} = 1.$$

4.1.5 Division

Att utföra divisionen $\frac{1}{2} / \frac{1}{6}$ är det samma som att bestämma hur många sjättedelar får plats i en halv. En division av bråk kan omvandlas till en multiplikation med hjälp av det inverterade talet. Det man gör är att man multiplicerar täljaren med nämnarens inverterade tal, om vi applicerar detta på $\frac{1}{2} / \frac{1}{6}$ så får vi istället: $\frac{1}{2} \cdot \frac{6}{1}$ vilket då blir $\frac{6}{2} = 3$.

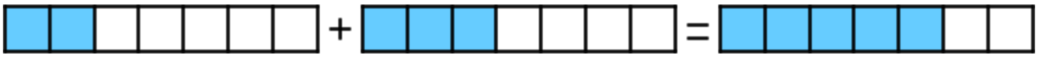
4.2 Exponent 1a

Exponent är en serie som är utgiven av bokförlaget Gleerups, utgiven 2011. Författarna till Exponent är Lars-Göran Johansson och Tommy Olsson. Flera andra lärare och författare har varit delgivna i utvecklingen och revideringen av denna litteratur.

Innan litteraturen börjar behandla bråktalen, repeteras grundskolans matematik i kapitel talens uppbyggnad och negativa tal. Ha i åtanke att även bråktalsräkningarna är repetition av grundskolans matematik. Inledningsvis beskriver författarna relationen mellan decimaltalen och bråktalen, hur de utläses samt deras struktur med täljare, bråkstreck och nämnare. Även en minnesregel för strukturen presenteras; **T**äljare på **T**oppen och **N**ämnare där **N**ere.

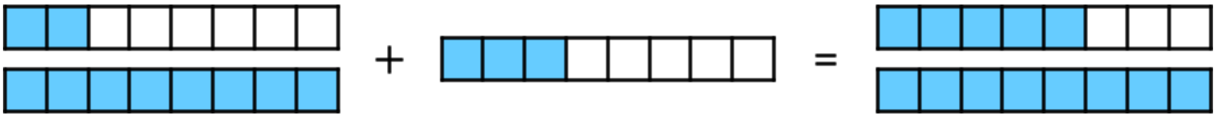
4.2.1 Addition och subtraktion med bråk

Författarna visar ingen formell definition av hur räkneoperationen skall gå till. De inleder med två exempel, där båda exemplen har en geometrisk representation av de bråktalen som skall adderas. De båda talen har samma nämnare. Det andra exemplet visar addition av bråktal i blandad from, men begreppet nämns aldrig i text och saknar även beskrivning. Övningsuppgifternas svårighetsgrad är av samma karaktär, varav några uppgifter har en geometrisk representation. De flesta är numeriskt utformade och ett fåtal är formulerade i text. För att illustrera addition med samma nämnare har vi valt att ta $\frac{2}{7}+\frac{3}{7}=\frac{5}{7}$. Se figur 12.



Figur 12: Addition med gemensam nämnare

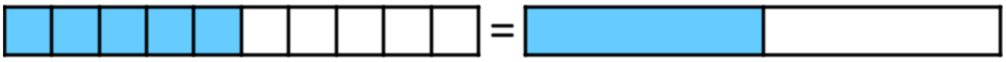
I figur 13 illustreras addition i blandad form



Figur 13: Addition av bråk i blandad form

4.2.2 Förkortning och Förlängning

Som i föregående avsnitt, introducerar författarna även detta om hur olika bråktal skall utläsas samt hur deras värde är relaterat till varandra. De visar att olika bråktal kan ha samma värde och visar en geometrisk representation som i figur 14:



Figur 14: Geometrisk representation av bråkförkortning

Författarna förklarar hur en förkortning går till, då en gemensam faktor redan är känd. Övningsuppgifterna som följer, anger i de flesta fall inte vilken faktor som skall förkortas med. Men faktorerna är alltid en kombination 2, 3 eller 5. Textproblemen i avsnittet är mer utmanande än de övriga uppgifterna. De är avsedda för mer hängivna elever. Förkortning i fler steg, det vill säga att både täljare och nämnare har mer än en gemensam faktor, behandlas kortfattat med ett exempel tillsammans med en förklaring till begreppet.

På samma vis introduceras förlängning av bråk med ett kort exempel tillsammans med en förklaring till proceduren. ”Förlängning innebär att man multiplicerar täljare och nämnare med samma tal” Exponent 1a (2011, s.40). Utformningen av övningsuppgifterna är synkront med förkortningsövningarna. Avsnittet avslutas med en ”Har du förstått”-ruta som hänvisar läsaren att resonera fram lösningar på ett fåtal problem.

4.2.3 Bråkform och blandad form

Detta avsnitt inleds med ett exempel i löpande text. Exempel av ett vanligt bråk visas samt ett bråk som är skrivet på blandad form. Lösningarna till exemplet visar återigen hur proceduren går till; ”tänk såhär” (Matematik Exponent 1a, s.41). Avsnittet behandlar inte bara omvandlingar från vanlig- till blandad form, utan även beräkningar av både subtraktion och addition. Alla bråktalen som innehåller beräkningar har gemensamma nämnare.

4.2.4 Från bråktal till decimaltal

Konvertering från bråktal till decimaltal behandlas kortfattat. Ett exempel visas tillsammans med dess lösning. Om ett bråktal inte kan ses direkt, hänvisas eleverna till att använda en kalkylator. Avsnittet har dessutom några problem i omvänd ordning. Här är ett exempel:

Fyll rutan med ett bråktal så att beräkningen stämmer.

1,23+ 3,13 +☐*=5* (s.43)

4.2.5 Minsta gemensamma nämnare

Minsta gemensamma nämnare är det avsnittet som denna litteratur behandlar mest ingående. Som de tidigare avsnitten inleds även detta med två exempel. Det första presenterar en förlängning av enbart ena bråket, medan det andra exemplet kräver en förlängning av båda bråken. Här visas två olika metoder. Den första visar en tabell där de successivt multiplicerar de båda bråken med heltal, tills de får samma nämnare:

Beräkna $\frac{3}{10}+\frac{1}{8}$

$10 \cdot 1 = 10$	$8 \cdot 1 = 8$
$10 \cdot 2 = 20$	$8 \cdot 2 = 16$
$10 \cdot 3 = 30$	$8 \cdot 3 = 24$
$10 \cdot 4 = \mathbf{40}$	$8 \cdot 4 = 32$
	$8 \cdot 5 = \mathbf{40}$

Figur 15: MGN- progressiv metod, Exponent 1a, s.44

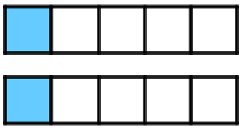
Den andra metoden som presenteras går ut på att primtalsfaktorisera de båda nämnarna och därefter komplettera så att båda nämnarna får samma och lika antal primtal. Detta avsnitt fordrar mer textproblem än tillrättalagda numeriska problem.

4.2.6 Multiplikation med bråk

Kapitlet avslutas med multiplikation med bråk. Som i de andra avsnitten, presenterar författarna innebörden och metoden med två exempel. Dessa exempel har geometriska presentationer:

Hur beräknas $2 \cdot \frac{1}{5}$?

Lösning:



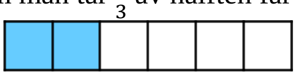
Ta $\frac{1}{5}$ två gånger, vilket blir $\frac{2}{5}$,

Det andra exemplet visar en multiplikation med ett bråk. På ett liknande vis görs den geometriska representationen:

Beräkna $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}$

Lösning:
$\frac{1}{2}$ kan skrivas:

om man tar $\frac{2}{3}$ av hälften får vi



Det vill säga $\frac{1}{3}$

Detta avsnitt har en bredare variation av övningsuppgifter, i jämförelse med de tidigare avsnitten. Multiplikation med bråk avslutas med en ”Har du förstått”-ruta, där de skall motivera sina lösningar och beräkningar till problemen i rutan.

4.3 Exponent 1b

Boken är författad av Susanne Gennow, Ing-Mari Gustafsson och Bo Silborn. I denna presenteras bråktalen som rationella tal och ingår i det kapitel som behandlar grundskolans repetition. Innan presentationen av de rationella talen, går författarna genom de fyra räknesätten och heltal.

4.3.1 Rationella tal

Ett rationellt tal är de tal som kan skrivas som en kvot $\frac{m}{n}$, av två heltal m och n, där n $\neq$ 0. I det rationella talet är nämnaren n ett mått på bråkets storlek och täljaren m anger hur delar det finns. Om $n = \pm 1$ får vi ett heltal, alltså kan alla heltal skrivas som tal i bråkform.

4.3.2 Förlänga och förkorta ett bråk

Bråkets värde förändras inte av att vi multiplicerar eller dividerar täljare och nämnare med samma tal.

4.3.3 Jämföra två bråk

För att jämföra två bråk behöver bråken har samma nämnare. Det kan vi göra genom att förlänga bråken. Om de båda bråken förlängs med de andra bråkens nämnare fås en gemensam nämnare. Vi ska jämföra $\frac{2}{3}$ med $\frac{3}{4}$. Då är en gemensam nämnare $3 \cdot 4 = 12$. Vi får då:

$$\frac{2}{3} = \frac{4 \cdot 2}{4 \cdot 3} = \frac{8}{12} \; och \; \frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 3}{3 \cdot 4} = \frac{9}{12} \; så \; att \; \frac{8}{12} < \frac{9}{12} \; då \; är \; \frac{2}{3} < \frac{3}{4}.$$

4.3.4 Minsta gemensamma nämnare

Minsta gemensamma nämnare (MGN) kan ibland vara mindre än nämnarna av bråket multiplicerat med varandra. Vad är MGN till 12 och 16? $\frac{48}{12} = 4 \; och \; \frac{48}{16} = 3$. Minsta gemensamma nämnare till 12 och 16 är då 48.

4.3.5 Addition och subtraktion

När man adderar eller subtraherar bråk måste de ha samma nämnare eftersom den är ett mått på deras storlek.

Ex: $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} \neq \frac{2}{10}$. Man måste först beräkna samma nämnare genom att förlänga bråken med MGN vilket då blir $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 2}{6 \cdot 2} = \frac{3}{12} + \frac{2}{12} = \frac{5}{12}$. Ett annat exempel boken hade var $3 - \frac{2}{7} = \frac{21}{7} - \frac{2}{7} = \frac{19}{7} = 2\frac{5}{7}$.

4.3.6 Multiplikation

Vid multiplikation av bråk multipliceras täljare med täljare och nämnare med nämnare, förkorta först om det går. Generellt kan en bråkmultiplikation skrivas enligt följande:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

4.3.7 Inverterade tal

Två tal kallas inverterade tal om deras produkt blir 1. Generellt så har vi då:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1,$$

boken ger även ett numeriskt exempel med $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1$

4.3.8 Division

Vid division av bråk multipliceras både täljare och nämnare med nämnarens inverterade tal. Det kan generaliseras med:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}}{\frac{c}{d} \cdot \frac{d}{c}} = \frac{\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}}{1} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$

Boken tar även upp ett numeriskt exempel: $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

4.4 Exponent 1c

Denna matematikbok är av första upplagan och är utgiven av Gleerups 2011. Författarna är Sussane Gennow, Ing-Mari Gustafsson och Bo Silborn. Grafisk revidering, bild och layout är gjorda av Ingrid Westman, Katarina Weström och Christer Langseth.

Boken behandlar bråken under kapitlet rationella tal, som är det tredje kapitlet. Kapitlen som är innan är ”Repetition av Grundläggande Begrepp och Heltal”, där en repetition av grundskolans matematik berörs. Inledningsvis definierar författarna åt läsaren vad rationella tal är, beteckningen $\mathbb{Q}$ och dess mängd.

4.4.1 Stam- och kedjebråk

Detta är en stor del av kapitlet i Exponent 1c. Till en början beskrivs vad stambråk är samt kort om dess historia. Som i de övriga kapitelintroduktionerna i Exponent, inleds även denna del med två exempel. I det första problemet skall ett bråk skrivas som en summa av tre stambråk. I det andra exemplet skall ett bråktal skrivas som en summa av stambråk.

Direkt efteråt presenteras kedjebråk och paralleller mellan de rationella talen och kedjebråken dras. Detta beskrivs i två meningar innan räkneexempel demonstreras. Likt stambråken, skall först några rationella tal skrivas om som kedjebråk, medan i det andra exemplet skall ett kedjebråk skrivas om till ett rationellt tal. Därefter börjar räkneövningarna för stam- och kedjebråk. Alla övningsuppgifterna är tillrättalagda numeriska uppgifter, det vill säga att det inte finns geometriska- eller textbaserade problem.

4.4.2 Bråkform och decimalform

Relationen mellan bråk och decimaltal för de elementära bråktalen presenteras kortfattat innan mer komplicerade utvecklingar tas upp. Beteckningen för oändlig utveckling introduceras, (till exempel $\frac{1}{3} = 0.\overline{3}$). I exempeluppgiften som följer, uppmuntras den som läser att förstå begreppen hos decimalutvecklingarna där bråk skall göras om till decimaltal. I enlighet med tidigare delar av kapitlet, är nästa exempeluppgift inverterat till den tidigare; decimaltal skall omvandlas till bråktal, även dessa är oändligt periodiska. Till skillnad från det tidigare avsnittet, är det inte bara numeriskt formulerade övningsuppgifter. Distributionen mellan de numeriska och textformulerade uppgifterna är lika fördelade.

4.4.3 Problemlösning

Kapitlet avslutas med problemlösning som är baserade på rationella tal. Läsaren hänvisas att göra beräkningarna utan kalkylator, formulera och resonera om sina lösningar med underbyggda resonemang. Till skillnad från de tidigare avsnitten här, förses läsaren inte med några konkreta exempel, utan förväntas omedelbart börja med övningsuppgifterna. Karaktärerna hos uppgifterna är mer utmanande än merparten av uppgifterna i de tidigare avsnitten. Uppgifterna är formulerade i löpande text.

4.4.4 Avslutning

Efter problemlösningsavsnittet, uppmuntras eleven att reflektera och diskutera runt de rationella talen efter ett antal frågor som formuleras i detta avsnitt. Läsaren ställs inför fyra frågeställningar där hen får analysera sina lösningar samt ge en motivering för dem. Till sist, ges en utmaning där eleven skall visa att en metod för hur decimalutveckling fungerar.

4.5 Matematik 5000 1a

Denna serie är utgiven 2011 av bokförlaget Natur & Kultur, författad av Lena Alfredsson, Patrik Erixon och Hans Heikne. Bild- och textredigering, är gjorda av Mats Karlsson och Erica Högsborn. Matematik 5000 1a finns i både gul och röd version, där den gula är mer anpassade för elever på ett tekniskt inriktat yrkesprogram, medan den röda (som innehållsmässigt nästan är identiskt med den gula, varav enbart en av dessa redovisade i denna analys), är för serviceinriktade yrkesprogram.

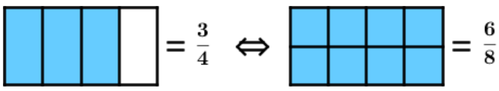
Innan tal i bråkform tas upp i Matematik 5000, behandlar boken positiva- och negativa tal, som är repetition av grundskolans matematik. Bråktalen introduceras genom elementära exempel av andel och hur dessa beräknas.

4.5.1 Andel

Som nämnts ovan, inleds läsaren genom en presentation av ett elementärt exempel för andel, som är formulerat ”Om du delar en pizza i *två* lika stora delar får du två *halvor*” (Matematik 5000 1a gul, s.30), varav en geometrisk representation är visualiserad. Begreppet täljare och nämnare nämns och visar deras position i ett exempel, där det även visas att bråktalen kan skrivas på två olika vis; $\frac{3}{4} = 3/4$. En kort beskrivning av de båda talen ges. Därefter förklaras bråktalens relation till decimaltalen och visar en tabell med de första stambråken där författaren påpekar att läsaren bör känna till stambråken och dess decimaltalsrepresentation. Några exempel följer därefter innan övningsuppgifterna presenteras. Övningsuppgifterna i andelsavsnittet innehåller nästan enbart geometriskt illustrerade problem och textproblem. I denna del finns inga problem som kräver tillämpning av räkneoperationer.

4.5.2 Förlängning och förkortning

Innan detta avsnitt inleds, förbereds läsaren med en aktivitet, där en chokladkaka skall delas upp i olika stora andelar, något som läsaren förväntas kunna då det precis har behandlats. Här presenteras även uppgifter som i viss mån kräver förlängning och förkortning av bråk, men som läsaren undermedvetet kommer att utföra, t.ex. *vad ska stå i rutan?* $\frac{1}{3} = \frac{\square}{24}$. Officiellt, introduceras läsaren till förlängning genom ett geometriskt exempel, där författarna vill förlänga ett bråk med två. Samtidigt visas även förkortning:



Figur 16: Förlängning av bråk

Definitionen för begreppen *enklaste form* och *förhållande* formuleras kortfattat där själva begreppet är skrivet i marginalen och definitionen på samma rad, längre in på sidan. Några exempel och dess lösningar följer därefter varav två exempel kräver omvandling till minsta gemensamma nämnare. Övningsuppgifterna som följer därefter är lika fördelat mellan rena numeriska och textformulerade uppgifter.

4.5.3 Räkna med bråk

I denna del introduceras addition och subtraktion av bråk. Tidigt skriver författarna att; om bråken kan adderas, måste de ha en gemensam nämnare, varpå ett exempel med en chokladkaka presenteras. Begreppet *blandad form* beskrivs, då resultatet i exemplet resulterade i ett bråk som kan skrivas i blandad form. De geometriska bilderna i boken visar detta:

Figur 17: Addition med bråk med täljare större än nämnare

$$\frac{5}{6} \quad + \quad \frac{1}{3} \quad = \quad \frac{5}{6} \quad + \quad \frac{2}{6} \quad = \quad \frac{7}{6}$$

Bråket $\frac{7}{6}$ är större än ett och med detta exempel ovan visas blandad form $1\frac{1}{6}$, varpå multiplikation av heltal och bråk visas i en beräkning. Resultaten uppmuntras att kontrolleras med kalkylator. Flera exempel följer och avslutas med en sammanfattning innan övningsuppgifterna. Uppgifterna är av samma karaktär som de exempel som presenterades innan tillsammans med dess lösning. Även mer utmanande problem finns formulerade i slutet av avsnittet.

Här slutar den officiella hanteringen av bråktal. Men i slutet av boken (s. 318) finns en fördjupning där addition av två bråktal med olika nämnare (där båda nämnarna måste multipliceras med varandra), samt multiplikation av två bråktal, som illustreras geometriskt. Allra sist, visas ett exempel tillsammans med några övningsuppgifter om *dubbelbråk* (division av två bråktal). I exemplet beskrivs kortfattat att talet förlängs med det inverterade talet till bråket i nämnaren.

4.6 Matematik 5000 1b

Denna bok är författad av Lena Alfredsson, Kajsa Bråting, Patrik Erixon och Hans Heikne och är utgiven av bokförlaget Natur och Kultur. Boken börjar, som i de flesta andra böckerna, med en repetition av grundskolans matematik, det vill säga ett kapitel med positiva och negativa tal, där de går genom vilka räkneoperationer det finns och hur de används. Här ingår även behandlingen av delbarhet och primtal. Avsnittet med bråktal inleds med att visa delar av en cirkel (delad i fyra delar) samt förklarar kort vad täljare, nämnare och bråkstreck är. Talet under bråkstrecket är nämnaren och den talar om *vilka* delar vi har och från cirkeln de ritat skulle det i detta fall motsvara fjärdedelar. Medan täljaren talar om *hur många* av dessa delar vi har. De nämner även att omvandling av ett bråk till decimaltal-”enkelt” göras med en miniräknare.

4.6.1 Förlängning och förkortning

Det är viktigt att förstå att flera bråktal kan beskriva samma sak exempelvis: $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9}$ och så vidare. Här har vi bara förlängt täljare och nämnare med 2 respektive 3 från det första bråket. Samma sak gäller även om vi förkortar ett bråk då dividerar vi täljare och nämnare med samma sak. Boken nämner att man bör svara på *enklaste form* när man arbetar med bråk, det innebär att man ska förkorta bråket så långt det går. Bråktal används ofta för att beskriva andelar men även för att beskriva ett förhållande mellan två tal.

4.6.2 Addition och subtraktion

Två bråk med samma nämnare kan adderas direkt: $\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}$. Medan två bråk med olika nämnare först måste skrivas om, förlänga bråken till samma nämnare: $\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{1\cdot 3}{3\cdot 4}+\frac{1\cdot 4}{3\cdot 4}=\frac{3}{12}+\frac{4}{12}=\frac{7}{12}$.

4.6.2.1 Tips

Genom att multiplicera nämnarna med varandra i bråktalen får du alltid en gemensam nämnare

4.6.3 Multiplikation av bråk

Vid multiplikation multipliceras täljarna var för sig och nämnarna var för sig, med formeln

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd} \text{ eller } a\cdot\frac{b}{c}=\frac{ab}{c}.$$

4.6.4 Division av bråk

Delavsnittet inleds med att förklara innebörden av inverterade tal. Man säger att $\frac{a}{b}$ är det inverterade talet till $\frac{b}{a}$ (täljare och nämnare har bytt plats). Att då dividera ett tal med ett bråk är samma sak som att multiplicera med det inverterade talet. Formeln blir då:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}.$$

4.7 Matematik 5000 1c

Denna bok är också författad av Lena Alfredsson, Kajsa Bråting, Patrik Erixon och Hans Heikne. Innan kapitlet med bråktal, redogörs för de hela talen, där primtal, positiva och negativa tal ingår.

4.7.1 Bråkbegreppet

- Bråkform: ”Två tredjedelar” kan i bråkform skrivas $\frac{2}{3}\ eller\ 2/3$.
- Täljare: Talet ovanför bråkstrecket (”antal”).
- Nämnare: Talet under bråkstrecket (”namn/enhet”).
- Rationella tal: Tal i bråkform kallas rationella tal och betecknas med $\mathbb{Q}$
- Förlänga: Täljare och nämnare multipliceras med samma tal
- Förkorta: Täljare och nämnare divideras med samma tal
- Enklaste form: Ett bråk som är förkortat så längt som möjligt
- Förhållande: Bråktal kan användas för att ange ett förhållande, exempelvis i en skolklass är det 30 elever 12 pojkar och 18 flickor förhållandet mellan dem skrivs på enklaste form $\frac{12}{18}=\frac{2}{3}$. Det skrivs ofta 2:3 (det uttalas två till tre) m.a.o. det går två pojkar på tre flickor

4.7.2 Räkna med bråk

Boken behandlar de olika räkneoperationerna för bråken och därför delar vi in, för enkelhetens skull, detta avsitt i undergrupperna Addition och Subtraktion, Blandad form, Multiplikation, Inverterade tal och Division.

4.7.2.1 Addition och subtraktion

Vid addition och subtraktion så förlänger vi bråken så att de får samma nämnare sedan adderar man bråken, exempelvis: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{1\cdot 2}{2\cdot 2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$. Samma princip appliceras på subtraktion.

4.7.2.2 Blandad form

Talet $\frac{13}{12}$ kan även skrivas på blandad form $1\frac{1}{12}$, vi kan skriva om ett bråk på blandad form om täljaren är större än nämnaren.

4.7.2.3 Multiplikation

Vid multiplikation multipliceras täljarna för sig och nämnarna för sig. Ex:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d} \text{ och } a\cdot\frac{b}{c}=\frac{a\cdot b}{c}.$$

4.7.2.4 Inverterat tal

Man säger att $\frac{b}{a}$ är det inverterade talet till $\frac{a}{b}$. Till exempel: $\frac{9}{8}$ är det inverterade talet till $\frac{8}{9}$, observera att $\frac{9}{8}\cdot\frac{8}{9}=1$

4.7.2.5 Division

Att dividera med ett bråk ger samma resultat som att multiplicera med det inverterade talet. Exempelvis: $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{8}{9}}=\frac{\frac{3}{4}\cdot\frac{9}{8}}{\frac{8}{9}\cdot\frac{9}{8}}=\frac{\frac{3}{4}\cdot\frac{9}{8}}{1}=\frac{3}{4}\cdot\frac{9}{8}=\frac{3\cdot 9}{4\cdot 8}=\frac{27}{32}$, så då är $\frac{3}{4}/\frac{8}{9}=\frac{3}{4}\cdot\frac{9}{8}$.

5 Didaktisk forskning

Här reflekterar vi över vår analys av böckerna och sätter dem i konstrast mot varandra. Innehållet i gymnasiets kurslitteratur jämförs mot olika studier och undersökningar gjorda av forskare, som skall belysa olika svårigheter och problem som kan dyka upp när bråkberäkningar utförs.

5.1 Vad är bråk och vilka svårigheter finns det?

Innebörden av begreppet bråk och dess användningsområde varierar från person till person. Men något som de flesta är eniga om, är att det involverar två tal som på något vis representerar en relation. Vad nu relationen representerar, varierar också från person till person. Men en matematiker ser bråket som ett specifikt tal på tallinjen, som är ett alternativt och ofta ett exakt sätt att skriva ett tal på. Svårigheterna med att förstå dessa och inte minst räkna med dem kan vara många. Oftast verkar det bero på brister av olika slag, till exempel kognitiva brister eller avsaknad av matematisk kunskap.

5.1.1 Bråk i klassrummet

Nu när vi vet hur gymnasieelevernas litteratur ser ut samt hur diverse kurser presenterar och hanterar bråkräkning, kan vi dra slutsatser om hur bråken kan presenteras i klassrummet. Det är uppenbart att olika kursböcker behandlar samma ämne på olika vis. Men vilka kognitiva krav ställs eleverna inför? Det är inte självklart att lärarna själva har en fundamental förståelse av bråktalen och dess natur. De kan därmed själva stå inför problem att motivera de valda algoritmerna och bråkberäkning i allmänhet (Liping, 2010).

5.1.1.1 Lärarna och bråktal

Om en fundamental förståelse för räkneoperationerna saknas, är det kanske inte så konstigt att missförstånd uppkommer. I en studie av Liping (2010), bad hon lärare från två olika nationer (Kina och USA) att först beräkna bråktalsdivisionen $\left(1\frac{3}{4}/\frac{1}{2}\right)$, formulera sin procedur och sedan konstruera ett scenario som beskriver divisionen. Procedurerna bygger i sig på matematiska lagar, men bråkräkningen kan ha olika angreppsvinklar där de olika lagarna tillämpas. Nedan beskrivs två exempel.

5.1.1.2 Distributivt tillvägagångsätt

En del av lärarna som Liping intervjuade, baserade sina tankegångar runt den distributiva lagen och definitionen av division. Lärare som tillämpade denna, separerade heltalet från det blandade bråket, det vill säga konverterade $\left(1\frac{3}{4}/\frac{1}{2}\right)$ till $\left(1+\frac{3}{4}\right)/\frac{1}{2}$, innan $\frac{1}{2}$ inverterades och multiplicerades in i parentesen till $(1 \cdot 2) + \left(\frac{3}{4} \cdot 2\right) = 2 + \frac{6}{4} = 2 + 1\frac{1}{2} = 3\frac{1}{2}$. Denna metod verkade krånglig vid första anblick, men när räkneoperationerna utförs är den relativt enkel och logisk. Liping (2010) menar att applicering av den distributiva lagen tillsammans med bråk i blandad form, visar en god kunskap och förståelse för lagen och bråktalens natur. Här gör användningen av den distributiva lagen själva räkneoperationen enklare än den kommutativa lagen. Liping menar om problemlösaren saknar den fundamentala förståelsen kommer troligtvis denna procedur snarare vara ett hinder än till hjälp.

5.1.1.3 Konvertering till decimaltal

Alternativa metoder till traditionell invertering och multiplikation av nämnaren finns, varav konvertering till decimaltal är en av dem. Populariteten av denna metod är ganska stor hos både elever och lärare enligt Liping (2010). Konvertering är en förmåga som de flesta elever redan approprierat. Det är något som de flesta elever ser som en naturlig metod. Bråktal ses ofta som ett problem där en division skall utföras och inte som en representation av ett tal på tallinjen. Många av lärarna i studien Liping gjorde, valde att reducera bråktalen till decimaltal. I exemplet som hon angav $\left(1\frac{3}{4}/\frac{1}{2}\right)$ var det faktiskt lättare att lösa det genom denna metod, då $1\frac{3}{4}/\frac{1}{2} = 1{,}75/0{,}5$ med relativ enkelhet kan beräknas till 3,5.

Även den mesta kurslitteraturen behandlar bråk-till-decimaltal (se avsnitt 4), vilket i sin tur kan leda till att motivera tillämpningen av metoden. Problemet med den är att det inte alltid är lättare att omvandla bråktalen till decimaltal. På samma vis, är det ibland (om inte ofta) lättare att omvandla ett decimaltal till bråktal och utföra beräkningarna med dessa. Dock krävs en bedömning när vilken konvertering är mest passande. Men detta kan vara problematiskt. Liping (2010) menar att det ställs större kognitiva krav på elever och lärare om denna metod skall appliceras, i jämförelse med enbart tillämpning av metoden där divisionens definition användes tillsammans med den kommutativa lagen. Dessutom kan lösningarna ha oändligt periodiska decimaltal är därmed omöjligt att ange exakt i decimalform. Till exempel går värdet $\frac{1}{3}$ att ange exakt med bråktal medan det är omöjligt att ange exakt med decimaltal, då talet är oändligt periodiskt: $0{,}3333333$ ...

Löwing (2008), talar för att många lärare även ser enkelheten i denna metod och förespråkar den, utan att reflektera över möjliga konsekvenser. Konvertering och sedan beräkning på miniräknare med närmevärde har i tidiga årskurser (7-9) inte några större konsekvenser. Men missförstånd och misstolkningar uppenbarar sig tydligare i senare skeden då miniräknarens bekvämlighet inte är tillräcklig. Skulle uttrycket $\left(1\frac{3}{4}/\frac{1}{2}\right)$ ändras till $\left(1\frac{3}{4}/\frac{3}{7}\right)$ är det helt plötsligt mycket svårare att utföra divisionen utan kalkylator. En fördel som uppkommer med konvertering från bråk- till decimalform är att eleverna kan fördjupa sin förståelse för representation av tal och få en mer fundamental uppfattning om dem, säger Liping (2010).

5.1.2 Kognitiva krav

Planering för undervisning och själva undervisningen bygger på elevernas förmåga att tillägna sig kunskap. Planeringen måste alltså bygga på olika kognitiva krav som eleverna förväntas engagera sig i. Jeppe Skott (professor i matematikdidaktik vid Växjö universitet), (2010) et al talar om två nivåer som en planering kan tänkas vara strukturerad efter; en låg- respektive hög kognitiv nivå. Dessa två nivåer är i sin tur underkategoriserade. Den låga nivån behandlar enkla aspekter som memorering och genomföring av grundläggande procedurer utan att känna till dess ursprung. Den höga kognitiva nivån involverar också procedurer, men förespråkar dess mening och relation till matematiska begrepp och lagar. Den andra underkategorin av de höga kognitiva kraven är faktiskt matematiskt tänkande. Det är viktigt att ha i åtanke när man bedömer en uppgifts kognitiva svårighet, att det som för en elev kan anses vara kognitivt lätt (exempelvis att kunna multiplikationstabellen), kan för en annan elev vara kognitivt svårt.

5.1.2.1 Låga kognitiva krav

Med avseende på Skotts modell för kognitiva krav, innehåller all gymnasial kurslitteratur inom matematik stoff som kräver låga kognitiva krav. Modellen är schablonmässigt framställd. Det finns naturligtvis uppgifter som Skott anser vara lågt kognitivt krävande, men som snarare är högt kognitivt krävande för vissa elever. För övningsuppgifterna, tenderar de att uppbenbara sig tidigt i avsnitten, medan exempeluppgifterna brukar tillhöra kategorin för de högre kognitiva kraven. En typisk uppgift för memoreringskategorin, är omskrivning från enkla bråk till decimalform. Med enkel, menas att nämnarna innehåller enbart faktorerna 2 och 5 (till exempel $\frac{1}{2}$ och $\frac{1}{5}$), eftersom de då inte har oändliga decimalutvecklingar.

Matematik 5000 1a presenterar en typisk lista av bråktal som bör memoreras. Ett liknande problem, som inte är lätt att memorera, utan snarare kräver en anknytningslös procedur, är omskrivning av lite svårare bråktal utan räknare (till exempel $\frac{5}{8}$). I dessa båda exempel, handlar det mer om att reproducera tidigare inlärd fakta och minnas procedurer och resultat, snarare än att förstå matematiken bakom den. En typisk aspekt hos uppgifter som har låga kognitiva krav, är att de är entydiga, det vill säga att det är tydligt vilken procedur eller algoritm som skall tillämpas. Fokusen ligger på att få ut ett korrekt svar, i motsats till fokus på att utveckla den matematiska förståelsen som ligger till grund för problemet.

Exempel på uppgifter med låga kognitiva krav Matematik 5000 1a och Exponent 1a:

- 1303 (ur Matematik 5000 1a gul, s. 31)
  Skriv talen i bråkform
  a) *En åttondel*
  b) *Sju åttondelar*
  c) *Tre femtedelar*
  d) *En tiondel*

  Eleverna behöver här känna till bråkets struktur och hur dessa utläses matematiskt. Det kräver memorering och begreppskunskap och är därmed en uppgift med låga kognitiva krav.

- 1071 (ur matematik Exponent 1a, s. 40)
  a) *Förläng* $\frac{1}{5}$ *med 3*

  b) *Förläng* $\frac{3}{5}$ *med 2*

  c) *Förläng* $\frac{1}{20}$ *med 5*

  d) *Förläng* $\frac{9}{12}$ *med 4*

  Här används en inlärd procedur som tidigare visats i avsnittet och kräver algoritmiskt tänkande.

5.1.2.2 Höga kognitiva krav

Precis som för låga kognitiva krav, innehåller all gymnasial kurslitteratur även stoff med höga kognitiva krav, men inte i samma omfattning. Skillnaderna mellan böckerna är stor från förlag till förlag. Till exempel betonar författarna till Exponent, aspekterna runt djupare matematisk förståelse, medan Matematik 5000 tenderar att framföra tillrättalagt stoff. Som förväntat, vill författarna som skapat uppgifterna att eleverna skall utveckla sin matematiska förståelse och se samband mellan underliggande begrepp och procedurer. Variation av samma karaktär av uppgift ställer också höga kognitiva krav hos eleven (till exempel variera i presentationen på olika vis, som i diagram, symboler eller problemsituationer). I allmänhet är uppgifterna, som förespråkar höga kognitiva krav, komplicerade och kräver icke-algoritmiskt tänkande. Med detta menar Skott et al. (2010) att de mest använda procedurerna inte går att tillämpa. Eleverna själva måste använda sina kunskaper för att kunna applicera relevanta erfarenheter som kan vara till hjälp att lösa problemet.

Exempel på uppgifter med höga kognitiva krav ur Matematik 5000 1a och Exponent 1a:

- 1337 (ur Matematik 5000 1a gul, s. 36)
  Bråket $\frac{\square}{36}$ har ett värde som ligger mellan $\frac{1}{3}$ och $\frac{1}{2}$. Vilka tal kan stå i rutan?

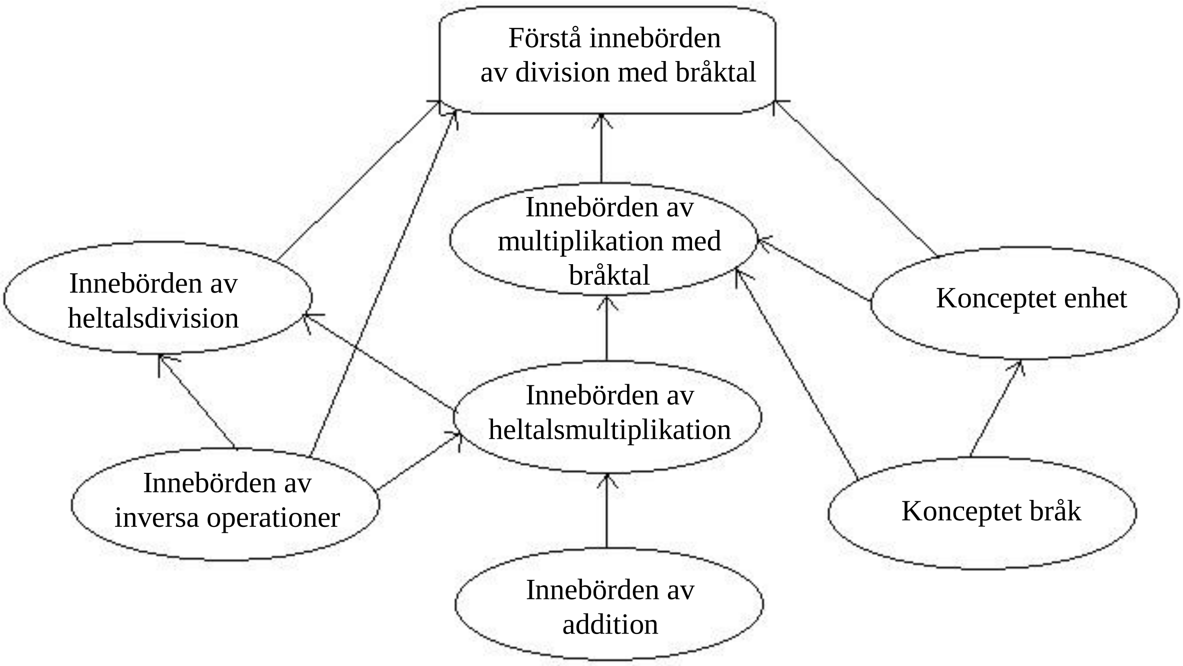
  Avsnittet behandlar förlängning av bråk. I denna uppgift kan ingen procedur direkt tillämpas och eleverna måste ha ett icke algoritmiskt tänkande. Dessutom måste de ha en god taluppfattning och hur dessa är placerade på tallinjen.

- 1063 (ur Matematik Exponent 1a, s38)
  Ersätt bokstäverna *a, b* och *c* med siffrorna 1, 2 och 10 så att olikheten stämmer.
  $\frac{15}{a} < \frac{b}{0{,}5} < \frac{6}{c}$

  Denna uppgift kan anta karaktär som kräver antingen höga eller låga kognitiva krav. Den låga kognitiva varianten är lösning genom successiv insättning av värdena tills de antar korrekt olikhet. Uppgiften kräver höga kognitiva krav om eleven istället försöker lösa uppgiften genom matematiskt tänkande. Eleven behöver god taluppfattning och känna väl till hur täljaren och nämnaren beror av varandra.

5.1.2.3 Att förstå bråktalsdivision

Division av bråk kräver relativt höga kognitiva krav. I Lipings studie kunde hon, tillsammans med många av de lärare hon intervjuade, konstatera olika kunskapsfraktioner som är nödvändiga för att kunna förstå bråk och dess innebörd. Som nämnt tidigare är det tydligt att förståelse av begreppet division som inversmultiplikation en viktig del av denna kunskap. Andra viktiga fraktioner är enhetskonceptet, förståelse av heltalsdivision och innebörden av multiplikation av bråktal. I flödesschemat i figur 18, har Liping illustrerat kunskapskedjan som troligtvis är nödvändigt för att kunna förstå bråktalsdivision.



Figur 18: Lipings kunskapspaket för bråktalsdivision

5.1.3 Olika bråktalsrepresentationer

Vissa begrepp inom bråkräkningen kan verka konfunderande, eftersom olika delar av bråket har många synonymer, där $kvot = \frac{täljare}{nämnare}$ är bland de vanligaste. Om vi nu tittar på själva strukturen av bråket, presenterade de olika läroböckerna i litteraturstudien detta på olika vis. I Matematik 5000 1a, presenterade författarna bråken som andel, något som kanske är mer vanligt att se i årskurs 9 snarare än i gymnasiet medan andra läroböcker har en annan formell definition av bråktalen. I Matematik 5000 illustreras andelarna som delade cirkelskivor, med representationen $andel = \frac{del}{helhet}$ och sedan $decimaltal = \frac{täljare}{nämnare}$. I aritmetik för lärare (Sollervall, 2015) omnämns även bråket som $\frac{täljare}{enhet}$ vid hantering av stambråk, där nämnarna har olika ”enheter” (exempelvis $\frac{1}{4}$ och $\frac{1}{3}$ har olika enheter). De olika representationerna är ekvivalenta med varandra, men används i olika situationer och scenarion. Bråk kan då vara lite förvirrande, när en definition har förankrats i grundskolan (till exempel $andel = \frac{del}{helheten}$) och senare i den gymnasiala nivån, får de en annan definition.

5.1.3.1 *Alternativa sätt att se på bråk*

Kilborn (1990) skriver i sin bok att bråket har många olika ”ansikten”, vilket som kanske har uppenbarat sig relativt tydligt i det som lästs hittills. Begrepp som skala, förhållande och proportion är inte främmande i den gymnasiala litteraturen. Bråket är centralt i dem, men det gestaltar sig lite olika. I till exempel skala på en karta kan bråket uppenbara sig som 1:5 000. Det betyder att en del på kartan motsvarar 5000 sådana delar i verkligheten. Förhållande kan vara lite klurigt, då misstag är lätt att göra. Till exempel om en mängd skall delas upp i förhållande 3 till 4, så skall det inte delas upp enligt följande: $\frac{3}{4}$ i ena delen och $\frac{1}{4}$ i den andra, utan skall delas upp $\frac{3}{7}$ i ena delen och $\frac{4}{7}$ i den andra.

5.1.4 Division missuppfattningar

En annan svårighet, som definitivt har uppenbarat sig under våra VFU-perioder (verksamhetsförlagd utbildning) är att division av bråk är något som många kämpar med. Som nämnt tidigare, krävs det vissa fundamentala matematiska kunskaper för att en sådan division skall kunna utföras. Kanske är en sådan brist en anledning till att vissa förväxlingar görs. Liping (2010) noterade en vanlig förväxling, under hennes studie, där lärarna som skulle utföra divisionen $\left(1\frac{3}{4}/\frac{1}{2}\right)$ förväxlade några av dem division med 2 istället för $\frac{1}{2}$. Speciellt uppenbarades detta när lärarna skulle skapa ett scenario med den angivna bråkdivisionen och kom upp med en utsaga vars representation innebar division med två istället för en halv.

> *You could be using a pie, a whole pie, one, and then you have three fourths of another pie and you have two people, who will make sure that this gets divided evenly, so that each person gets an equal share.* (s.65)

Ett korrekt scenario kan formuleras så här istället: Vi har ett och tre fjärdedelars kilo salt. Hur många halvkilossäckar med salt kan vi fylla? Liping hävdar; anledningen att lärarna gjorde en felaktig konstruktion av ett textproblem, var att de saknade en fullständig förståelse för division. Det vill säga att division innebär multiplikation av nämnarens invers. Något som kan hjälpa till att komma till rätta med ett sådant problem är att ställa frågan till eleverna; om de vet vad definitionen av division är. En klarläggning av det, borde ha en positiv effekt på elevernas förståelse överlag när det rör sig som tal i bråkform. Ett exempel från vår VFU, är uppgiften 3319 ur Matematik 5000 2c (se uppgift och fullständig lösning i bilaga), där eleven bör förenkla några ekvationer som har formen $\frac{a}{2}/\frac{b}{2} = k$ för att kunna visa att två linjer är parallella. De flesta av våra elever utförde aldrig denna division, även då de med enkelhet borde inse att nämnarna tar ut varandra. Hade de kunnat räknereglerna för division av bråk, hade de kunna skriva om uttrycket och förmodligen med enkelhet kunna göra förenklingen:

$$\frac{a}{2}/\frac{b}{2} = k,$$

$$\frac{a}{2} \cdot \frac{2}{b} = k,$$

$$\frac{a \cdot 2}{b \cdot 2} = k,$$

$$\frac{a}{b} = k.$$

Förmodligen, hade eleverna insett förenklingen tydligare om de gjort en sådan uppställning. Kanske hade en sådan studie varit intressant att utföra i lite större kvantiteter och mellan olika program och skolor. Vi förstod inte varför alla hade problem med att göra bråkdivisionen och ångrar nu att frågan inte togs upp.

5.1.5 Procedurförväxling

En förväxling som kan ske är en procedurförväxling mellan addition och multiplikation (även vi som skriver detta har gjort misstaget). Som nämnt i avsnitt 2.2.2 skall en förlängning av bråken göras så att de får en gemensam nämnare. En förväxling som man kan göra, är att göra samma sak för multiplikation. Löwing (2008) skriver om en intervju med en elev som gjorde denna förväxling:

Intervjuaren:	*Kan du räkna ut hur mycket* $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5}$ *är?*
Elev 2:	*Ja, det blir 20 då, för det är det jag måste ha. (20 är den gemensamma nämnaren.) Då skriver jag om det såhär:* $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{4}$ *och det blir* $\frac{15}{20} \cdot \frac{8}{20} = \frac{120}{20}$. *(s.248).*

En annan aspekt som Löwing noterade, var att elevens taluppfattning inte är helt godtagbar. Produkten av två tal < 1, kan nämligen inte vara större än 1. Studien som Löwing presenterade, visar att det var ca 43% av eleverna i årskurs 9 som klarade av multiplikationen ovan och ännu färre lyckades att utföra division av ett bråk (ca 23%), vilket kanske är väntat då division anses vara mer utmanade.

6 Intervju

I denna del kommer vi belysa lärares och elevers egna tankar om bråk. Hur lärare uppfattar, undervisar om bråk, vilka metoder de känner till för att förklara samt hur de själva beräknar bråk. Men även vilken mening eleverna ser i att lära sig bråk, vilken användning de har för det i sitt framtida yrkes- och privatliv, vad de tycker var enklast respektive svårast samt hur de skulle lösa en uppgift med bråk.

6.1 Lärarperspektiv

De intervjuade lärarna är relativt eniga med varandra om vad bråkräkning är, nämligen räkneoperationer som involverar bråktal, vilket anses vara en formell beskrivning av bråkräkning. Användningsområdet för bråk är ganska spritt, men alla lärarna håller med om att det är användbart inom mer avancerad matematik för gymnasiet, såsom algebra och derivata.

Samtliga lärare ansåg att många av deras elever har problem med bråkräkning, speciellt när det gäller räkneoperationen division. Lärarna antydde att eleverna ofta saknade taluppfattningen för bråk och har svårigheter för att sätta ett värde på dem, vilket blir uppenbart för dem då bråken kombineras med annan matematik, som till exempel potensräkning.

Överlag används litteraturen i matematikböckerna när bråkräkningen presenteras, men kompletteras med eget material då böckerna inte tar upp de svårigheter och missförstånd som kan uppstå när beräkningar genomförs. När bråkräkning senare dyker upp i mer avancerad matematik, jämförs dessa med enklare bråk på samma form så att en uppfattning kan fås om korrekt räknemetod används. Till exempel om bråket $\frac{5}{\frac{3(x+2)}{2}}$ skall förenklas, kan det jämföras med bråket $\frac{5}{\frac{3}{2}}$ som är lättare att kontrollera om rätt räknemetod har använts.

Vid lösning av uppgiften $\left(1\frac{3}{4}/\frac{1}{2}\right)$ omvandlade alla lärarna den blandade formen till normal bråkfrom och beräknade sedan talet med hjälp av inversoperationen. Dock förenklade inte alla lärarna talet efteråt, utan svarade med bråket $\frac{14}{4}$. När lärarna fick tänka efter om det fanns fler metoder som de kände till för beräkning av ett sådant tal, visade de att decimalkonvertering och innehållsdivision är två alternativa metoder.

6.2 Elevperspektiv

Eleverna var eniga om att det i verklighetsbaserade händelser kunde man använda bråk för att dela upp saker, exempelvis pizza, pengar eller tårtor. Det kan även vara ett alternativ till decimaltal. Eleverna tyckte att det är lätt att blanda ihop vilka moment som behöver göras för en specifik räkneoperation. De flesta eleverna tyckte att division är den svåraste operationen och addition är den enklaste. Många elever brukade inte läsa genom böckerna så noga utan mest gå på vad läraren sade.

När det till sist kom till att beräkna uppgiften $\left(1\frac{3}{4}/\frac{1}{2}\right)$ gjorde lika delar av eleverna om det till decimaltal och inverterade nämnaren för att sedan beräkna talet. Det var två av eleverna som lyckades komma fram till rätt svar. De flesta hade problem med att omvandla den blandade formen och de missförstod även vad delat på en halv betyder, det tolkades som delat på två. En annan intressant notis är att alla elever använde olika metoder för att lösa uppgiften.

7 Diskussion

Vi delar här med oss av våra egna tankar runt den litteratur som har analyserats och ställer dem i kontrast till våra egna erfarenheter och förväntningar.

7.1 Olika litteraturserier

Här tittar vi övergripligt på gymnasielitteraturen, jämför de olika serierna med varandra och delar med oss av våra egna tankar och åsikter runt dem. Som förväntat, är inte all matematiklitteratur perfekt (vilket är praktiskt taget omöjligt att göra), då det inte går att tillgodose alla elevers behov med avseende på deras förutsättningar. Men vissa förutsättningar måste naturligtvis existera för att eleverna skall kunna förstå den matematiska innebörden av bråk och bråkräkning.

7.1.1 Matematik 1a

För matematik 1a, är likheterna ganska stora innehållsmässigt emellan, men de presenteras på olika vis. Några serier visar minnesregler, medan andra drar paralleller. I Exponent redovisar författarna en minnesregel för täljaren och nämnarens position i bråket: ”Täljaren på Toppen” och ”Nämnaren där Nere” (se avsnitt 3.2), medan i Matematik 5000 (gul) visar de bara ett exempel på ett bråk och illustrerar pilar som pekar på täljaren och nämnarens position. Uppgifterna i Exponent är till utformningen betydligt mer procedurell jämfört med matematik 5000 där författarna försöker varva proceduruppgifter med textproblem.

Vi tror att eleverna får större möjligheter att applicera sin kunskap på ett problem formulerat i text och blir därmed mer förtrogna med att omformulera dessa till räkneproblem. Båda böckerna har mycket bilder för att illustrera delar, i olika storlekar och former. Vilket är bra för elevernas förståelse för exempelvis en sjättedel inte alltid har en viss storlek utan det beror på vad det är en sjättedel av. Båda böckerna har en liknande förklaring av hur förlängning och förkortning av ett bråk går till. Men när det kommer till uppgifterna som då ska vara till för eleverna att kunna träna sig på hur man utför denna operation, inleds det med att förkorta med eller förlänga. Detta tror vi hämmar elevernas utveckling. Om det istället står: Förkorta bråket så långt det går och förläng bråket så att nämnaren eller täljaren blir ett visst tal, skulle det möjliggöra att eleven tränar fler förmågor än bara procedurförmågan. Exponent avslutar sitt avsnitt med en “Har du förstått” ruta som ger eleverna möjlighet att själva reflektera om de har förstått innehållet i avsnittet, samt att de även visar vilka av läroplanens sju förmågor Skolverket (2011) som kan visas i denna övning. Detta anser vi är bra eftersom eleverna då kan göra en adekvat självbedömning.

7.1.2 Matematik 1b

För Matematik 1b så benämns bråk lite olika, i Matematik 5000 och Origo så har man valt att kalla avsnittet för bråk medan i Exponent så har man valt att titulera det till rationella tal. Alla böckerna inleder med en figur, cirklar eller trianglar varpå frågor ställs med karaktären hur stor andel är färgad eller hur man delar in sin pizza i delar och sedan äter ett visst antal delar hur stor del av pizzan åt hen? Innan uppgifterna börjar så fortsätter Origo med att även kort förklara begreppen: förlänga, förkorta, minsta gemensamma nämnare samt enklaste form. vilket vi tycker är bra för eleverna att ha repeterat innan de ska börja räkna, vilket gör att boken kan ha en större variation på sina uppgifter än Exponent och Matematik 5000.

Vi anser att med stor variation, tränas elevernas förmågor samt att de får en bredare syn på bråkens tillämpning i olika sammanhang. Alla böckerna har ungefär hälften rena proceduruppgifter och hälften textbaserade problem. Författarna för de olika böckerna har valt att göra sina avsnitt om bråk olika långa. Exponent har det kortaste avsnittet men det kan bero på att avsnittet om rationella tal är klassat som repetition till skillnad från de andra böckerna. Eftersom Origo gick igenom de olika begreppen redan i början har de kunnat inleda med att direkt gå igenom de olika räkneoperationerna, som de går igenom på cirka en sida samt ha en sida med exempel. Till sist har vi då Matematik 5000 som har ett mer traditionellt upplägg med att dela in alla olika begrepp i delar och sedan ge exempeluppgifter på varje del vilket leder till att den kan få in mer uppgifter på varje begrepp men tyvärr så är inte alltid mängdträning bästa sättet att lära sig matematiken på. Sammanfattningsvis så har nog Matematik 1b böckerna en stor variation på hur de har valt att ta upp just bråkräkningen.

7.1.3 Matematik 1c

I litteraturen för 1c så har Origo valt att kalla sitt avsnitt bråk medan matematik 5000 och Exponent titulerar det rationella tal. Exponentboken inleder sitt avsnitt med att förklara hur man räknade bråk vid uppkomsten nämligen genom stambråk, men även lite om kedjebråk. så istället för att göra beräkningar som vanligtvis är två bråktal multiplicerat med varandra så tar Exponent det ett steg längre och gör multiplikation och division av kedjebråk. Medan Origo och Matematik 5000 mer kör den traditionella räkningen med ett bråk multiplicerat eller dividerat med ett annat, men de har heller ingen historisk återblick om vart bråk kom ifrån. Även så förklarar Origo och Matematik 5000 mer algoritmerna bakom hur vi gör beräkningar med bråk till skillnad mot Exponent som snarare ger ett exempel på varje typ av uppgift, där de inte förklarar vad dem gör i varje steg, exempelvis när de ska göra en gemensam nämnare så skriver de bara ut vilken det är och visar inte vad de förlänger de olika bråken med. Vilket vi kan tycka är bra för de elever som söker en utmaning och själva vill sitta och komma på lösningarna. Resterande del av Origo varvar de med en sida förklaring och en sida uppgifter på de olika räkneoperationerna för bråk.

Medan Matematik 5000 följer seriens vanliga mönster, det vill säga använder en detaljerad genomgång följd av uppgifter. Exponent avslutar avsnittet om bråk med att förklara hur bråk omvandlas till decimaltal och vice versa. De andra böckerna nämner bara vilka bråk som är vanliga och bra att kunna, nämligen $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ och $\frac{1}{5}$. Medan Exponent verkligen förklarar hur omvandlingen sker, det tolkar vi som en mer korrekt strategi. Meningen med läraryrket är att vi ska lära eleverna att förstå matematiken inte bara kunna räkna den som robotar. En tänkande och reflekterande individ får oftast djupare förståelse än en som bara utför en procedur som hen lärt sig utan att veta varför. Efter erfarenheter från vår VFU så har vi kunnat se tydliga exempel på detta. Sammanfattningsvis så är det en ganska stor spridning på svårighetsgraden i de olika böckerna. Den som vi anser vara svårast är Exponent, vilken nog är mest lämpad för elever med höga ambitioner att lära sig och förstå mycket matematik. Svårighetsgraden på Origo och Matematik 5000 är snarlik, med några få skillnader. Matematik 5000 har valt att ha en djupare förklaring av de olika delarna medan Origo har en inledande generell förklaring av de olika begrepp som används vid bråktalsräkning. Därmed behövs inte en lika detaljerad genomgång av de olika räkneoperationerna.

7.2 Didaktiska konsekvenser

Det finns naturligtvis många olika sätt för läraren att inkludera bråkräkning i klassrummet, även om ämnena inte specifikt betonar det. Eftersom bråken är applicerbara i väldigt många olika scenarion, kan vi aktivt inkludera bråken. Naturligtvis skall vi inte alltid använda enbart bråk, utan göra det strategiskt.

7.2.1 Styrdokument

I kapitel tre gick vi igenom vad ämnes- och kursplanerna säger om bråk rörande rutinuppgifter. Spontant tänker vi som blivande matematiklärare, att rutinuppgifter är bra när det gäller att träna procedurer. Det vill säga aktiviteter med låga kognitiva krav, bör fastna i minnet. Men, enbart en procedur, hjälper sällan om man ställs inför ett scenario där informationen måste omformas till ett problem som kan lösas med procedurer. Då krävs en mer fundamental förståelse för matematiken och därmed ställs högre kognitiva krav, vilket i sin tur *inte* är ett krav för godkänt resultat.

7.2.2 Svar som fodrar bråk

Som nämnts ett flertal gånger tidigare, tenderar elever att konvertera bråktal till decimaltal, även om dessa har oändliga utvecklingar genom att helt enkelt avrunda till ett antal värdesiffror. Ett sätt är ju att explicit kräva *exakta* svar och godtagbar metodik i elevers lösningar. Sådana svar kan inte vara avrundade decimaltal, oavsett hur många värdesiffror de än väljer. En sådan betoning, som *exakt*, kommer med hög sannolikhet att påverka eleverna och förhoppningsvis motivera användandet av bråktal. Även om eleverna är skolade i att använda miniräknare, kommer ju även dessa att ge felaktiga resultat om miniräknaren inte presenterar bråktal. Men troligtvis kommer en elev som är väl förankrad i decimaltalsprincipen, att försöka göra om bråktalen till decimaltal via vanlig division.

7.2.3 Ämnen utanför matematiklektionen

De flesta lärare undervisar i mer än ett ämne utöver matematik och bråkräkning kan i vissa fall inkluderas i dessa ämnen. Mest tacksam är förmodligen fysiken, där bråkräkning dyker upp kontinuerligt vid beräkning av formler och liknande via algebran, vi då kan med stor säkerhet anta att behovet av kunskaper inom bråkräkning är påtagliga. Restaurangelever kan tänkas ha god användning av bråkberäkningar när antal portioner skall beräknas, eller receptmodifiering.
Exempelvis kan man ställa frågorna; ”hur många deciliter mjöl behöver jag om jag skall göra elva satser av en kaka som behöver $\frac{3}{4}$ deciliter per sats? Räcker bunken till där allt skall blandas i?” Kanske kan sådana frågor väcka intresse för matematiken hos berörda elever. Detta behöver naturligtvis inte bara ske på gymnasial nivå, utan det kan även exempelvis tillämpas i hemkunskapen, slöjd, musik och kemi.

7.2.4 Elev- och lärarperspektiven

Under intervjun kunde vi se att lärarnas och elevernas åsikter om bråkets betydelse, i skolan och vardagslivet, varierar. Man kan se bråktalen som en illustration av exempelvis andelar eller uppdelning av saker. Vi tror att denna tendens beror på att eleverna inte ser användningen av bråk utanför skolans värld då de har en dålig uppfattning vad ett bråk egentligen är. Så, brister i taluppfattningen behöver kompletteras så att eleverna kan få en god grund som de kan stå på.

Som blivande lärare har vi en stor utmaning framför oss. Hur ska vi lyckas att få våra elever att inse varför vi har användning av bråk? Vi bör göra det genom att använda oss av autentiska upplevelser. Om vi kan knyta bråkräkningen till något av det vi använder oss av i vardagen så kanske bråkräkningen inte blir så främmande och därmed mer användbar.

7.3 Egna tankar

Varför är det så stor skillnad mellan litteraturen för gymnasieleverna? Det bidrar till stora kunskapsklyftor inom ämnet. Vi kan tydligt se mycket stora skillnader på de elever som läser Ma 1a inom de olika böckerna. Men det kan även vara kolossala skillnader inom samma serie om vi ser på Ma1a och Ma1c (Exponent). Bör vi inte kunna förutsätta att de elever som uppnått godkänt resultat i matematik i grundskolan har adekvat kunskap rörande bråktalsräkning? Om så är fallet, behöver vi verkligen ha så stora skillnader mellan kurserna? Svaren kanske ligger i elevers kognitiva kapacitet. Om eleven ska söka vidare till högre studier så värderas Ma1a betyget likvärdigt med Ma1c vilket skapar stora klyftor även vid högre studier.

När vi går igenom bråk, gör vi det på ett sådant sätt så att eleverna verkligen kan appropriera den nya kunskapen? I tidig ålder har kanske vissa elever inte tillräcklig kognitiv kapacitet för att ta till sig kunskap och koncept när det kommer till vissa delar inom matematiken. I senare ålder, då eleverna är kognitivt kapabla att göra kunskapen till sin egen, kanske de istället saknar den fundamentala matematiska basen för att kunna ta till sig nytt stoff. Som lärare bör vi inte bara göra den traditionella bråkräkningen på tavlan och visa formler utan även använda flera former av visualiseringsmedium, då alla elever lär sig olika. Elever lär sig genom visualisering, beräkningar, men även av att få det förklarat. Men den traditionella matematikundervisningen är fylld av att läraren visar på tavlan och sedan får eleverna räkna. Då riskerar vi som lärare att missa en del av klassen som då inte förstår. Vi har många elever och då kan det vara lätt att man missar någon av dem och det kan resultera i att de sedan får F i betyg på provet. En lösning till detta skulle kunna vara att man använder sig av fler metoder för undervisning än den traditionella katederundervisningen som till exempel flipped classroom.

Elever hänvisas till att använda en kalkylator om de inte direkt kan se vad ett bråktal är i decimalform. Detta tror vi kan vara en stor anledning till att elever saknar vissa elementära kunskaper så som kort division. Eleverna bör inte använda genvägar för att komma fram till svaren på uppgifter om de inte helt har förstått den bakomliggande matematiken. Det kan ses som en fördel där och då eftersom de blir klara med uppgifterna, men egentligen så gör vi dem en björntjänst.

7.4 Förslag på fortsatt forskning

Elever har mycket svårt för bråkräkningen i skolan. Litteraturen behandlar bråkräkningen på många olika sätt beroende på vilken matematikbok skolan använder. Hur kan lärarna utifrån det material skolan har motivera eleverna till att vilja lära sig räkna med bråk? Hur kan göra bråk mer levande, så att eleverna ser meningen med att lära sig räkna med bråk? Utför en kvantitativ studie för att belysa inom vilka specifika områden, i deras matematiska förståelse för bråktalsräkning, det kan finnas brister i.

8 Referenslista

Alfredsson, L., Erixon, P., & Heikne, H. (2011). *Matematik 5000: Kurs 1a gul, lärobok*. Stockholm: Natur & kultur.

Alfredsson, L., Erixon, P., & Heikne, H. (2011). *Matematik 5000: Kurs 1a röd, lärobok*. Stockholm: Natur & kultur.

Alfredsson, L., Bråting, K., Erixon, P., & Heikne, H. (2011). *Matematik 5000: Kurs 1b grön, lärobok*. Stockholm: Natur & kultur.

Alfredsson, L., Bråting, K., Erixon, P., & Heikne, H. (2011). *Matematik 5000: Kurs 1c blå, lärobok*. Stockholm: Natur & kultur.

Alfredsson, L., Bråting, K., Erixon, P., & Heikne, H. (2011). *Matematik 5000: Kurs 2c blå, lärobok*. Stockholm: Natur & kultur.

Gennow, S., Gustafsson, I., & Silborn, B. (2011). *Exponent - matematik för gymnasiet. 1a*. Malmö: Gleerups.

Gennow, S., Gustafsson, I., & Silborn, B. (2011). *Exponent - matematik för gymnasiet. 1b*. Malmö: Gleerups.

Gennow, S., Gustafsson, I., & Silborn, B. (2011). *Exponent - matematik för gymnasiet. 1c*. Malmö: Gleerups.

Johansson, L., & Olsson, T. (2011). *Exponent: [matematik för gymnasiet]. 1a* (1. uppl. ed.). Malmö: Gleerups.

Kilborn, W. (1990). *Didaktisk ämnesteori i matematik. Del 2. Rationella tal och irrationella ta*l. Malmö: Liber Hermods.

Liping, M. (2010). *Knowing and teaching elementary mathematics* New York: Routlege.

Löwing, M. (2008). *Grundläggande aritmetik: Matematikdidaktik för lärare* (1. uppl. ed.). Lund: Studentlitteratur.

O'Connor, J. J., Robertson, E. F. (2000). Ancient Egyptian Mathematics. *MacTutor History of Mathematics archive.* Tillgänglig: http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/HistTopics/Egyptian_mathematics.html

OECD. (2015). *Sweden should urgently reform its school system to improve quality and equity*. Hämtad 2016-08-25 från http://www.oecd.org/sweden/sweden-should-urgently-reform-its-school-system-to-improve-quality-and-equity.htm

Skolverket (2011) *Ämne - Matematik*. Hämtad 2016-10-21, från: http://www.skolverket.se/laroplaner-amnen-och-kurser/gymnasieutbildning/gymnasieskola/mat?tos=gy&subjectCode=mat&lang=sv

Skolverket. (2016). *Diamant – Ett diagnosmaterial i matematik.* Stockholm: Skolverket

Skott, J., Jess, K., Hansen, H. C., Lundin, S., & Retzlaff, J. (2010). *Matematik för lärare: Delta, didaktik*. Malmö: Gleerups Utbildning.

Szabo, A., Larson, N., Viklund, G., Dufåker, D., & Marklund, M. (2011). *Origo - Matematik. 1b*. Stockholm: Sanoma utbildning.

Szabo, A., Larson, N., Viklund, G., Dufåker, D., & Marklund, M. (2011). *Origo - Matematik. 1c*. Stockholm: Sanoma utbildning.

Sollervall, H. (2015). *Aritmetik – för lärare* Lund: Studentlitteratur.

Thompson, J. (1991). *Historiens matematik.* Lund: Studentlitteratur

Vretblad, A., & Ekstig, K. (2006). *Algebra och Geometri.* Malmö: Gleerups Utbildning AB.

9 Bilagor

Första bilagan innehåller uppgifter tagna från matematikböcker som riktar sig till elever i årskurs 9 samt de som läser matematik 1 och matematik 2 på gymnasiet. De kan ses som bra träning av bråkbegreppet. Andra bilagan kommer innehålla lösningar på vissa uppgifter som vi valt att exkludera i texten.

9.1 Uppgifter

Nedan kommer vi lista uppgifter av blandad matematisk och kognitiv svårighetsgrad.

9.1.1 Matematik årskurs 9

Uppgifterna nedan är tagna från Prio och vektor, en matematikbok som används i de svenska grundskolorna.

Uppgift 1

Beräkna: $\frac{1\frac{1}{2}+2\frac{1}{4}}{\frac{13}{4}+\frac{5}{6}}$.

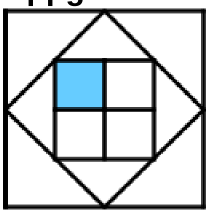
Uppgift 2

Ett rum som ska målas är $5\frac{3}{4}$ m långt, $3\frac{1}{2}$ m brett och $2\frac{1}{4}$ m högt. En liter färg räcker till $0{,}75m^2$. Hur många liter färg behövs för att måla taket och väggarna?

Uppgift 3

Beräkna $\frac{-3}{8}/\frac{-4}{3}$

Uppgift 4



Figuren består av kvadrater. Hur stor andel är markerad?

Uppgift 5

Saga hade en chokladask. Hon åt upp $\frac{1}{3}$ av chokladbitarna. Sedan bjöd hon på $\frac{3}{5}$ av de chokladbitarna som var kvar. De sista 12 bitarna var det ingen som ville äta upp. Hur många chokladbitar åt Saga?

Uppgift 6

Beräkna medelvärdet av bråken $\frac{1}{4}, \frac{3}{8}$ och $\frac{11}{16}$. Svara i bråkform.

Uppgift 7
Talet A är ett bråk. Du får veta att: $A/\frac{1}{5} = \frac{8}{21}$

a) Hur mycket är i sådana fall $A/\frac{2}{5}$

b) Förklara med ord hur du kan veta vad $A/\frac{2}{5}$ är.

c) Vilket tal ska A divideras med för att få svaret $\frac{16}{21}$?

9.1.2 Matematik 1a

Uppgifterna nedan är tagna från Matematik 5000 och Exponent som används i de svenska gymnasieskolorna.

Uppgift 1
Bråket $\frac{\square}{36}$ har ett värde som ligger mellan $\frac{1}{3}$ och $\frac{1}{2}$. Vilka tal *kan* stå i rutan?

Uppgift 2
Bara $\frac{1}{5}$ av de anställda på ett företag tar bilen till jobbet. Av dem som inte kör bil, cyklar eller går hälften. Resten åker med kollektivtrafiken. Petra påstår att det är dubbelt så många som åker kollektivt jämfört med de som åker bil. Är det sant? Motivera ditt svar.

Uppgift 3
Ersätt bokstäverna a, b och c med siffrorna $1, 2$ och 10 så att olikheten stämmer. $\frac{15}{a} < \frac{b}{6} < \frac{6}{c}$.

Uppgift 4

	$\frac{1}{4}$	
	$\frac{3}{4}$	
	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{8}$

Fyll i den magiska kvadraten med bråktal så att summan av varje vågrät, lodrät och diagonal rad blir densamma.

9.1.3 Matematik 1b

Uppgifterna nedan är tagna från Matematik 5000, Origo och Exponent som används i de svenska gymnasieskolorna.

Uppgift 1
Vilket tal ska $\frac{2}{3}$ multipliceras med för att ge talet $\frac{3}{2}$?

Uppgift 2
En flaska innehåller $\frac{2}{3}$ liter koncentrerad saft. När den blandas ut ska man ta 1 del saft och 4 delar vatten. Hur mycket färdig blandad saft ger saftflaskan?

Uppgift 3
Emelies månadspeng var $1260\ kr$. Av detta spenderade hon en tredjedel på kläder. Av det som återstår sparade hon tre sjundedelar till en semesterresa. Hur mycket sparade hon till resan under år

Uppgift 4
Hefi målar en vägg på 4 timmar. För Sixten tar det 6 timmar att måla samma vägg. Hur många timmar tar det dem att måla väggen om de målar samtidigt?

Uppgift 5
I en klass fick en tredjedel av eleverna chansen att delta i ett tv-program. Eleverna ville i demokratisk ordning välja ut en tredjedel av pojkarna och en tredjedel av flickorna till programmet. Det lyckades inte, så till slut lottade man ut deltagarna till programmet.

a) Varför kunde de inte välja ut en tredjedel av flickorna och pojkarna?

b) Skulle en annan klass kunnat lösa uppgiften? Motivera ditt svar.

9.1.4 Matematik 1c

Uppgifterna nedan är tagna från Matematik 5000, Origo och Exponent som används i de svenska gymnasieskolorna.

Uppgift 1

a) Beräkna: $\frac{7}{10}/\frac{5}{12}$.

b) Beräkna: $\frac{15}{13}/12$.

Uppgift 2
Beräkna: $\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{99}\right)$.

Uppgift 3
Beräkna: $3+\frac{1}{2+\frac{1}{9}}+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{6}}}$.

Uppgift 4
Skriv $\frac{357}{147}$ som ett kedjebråk.

Uppgift 5
Beräkna och svara i enklaste form:

a) $\frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4}$.

b) $\frac{12}{5} / \frac{10}{3}$.

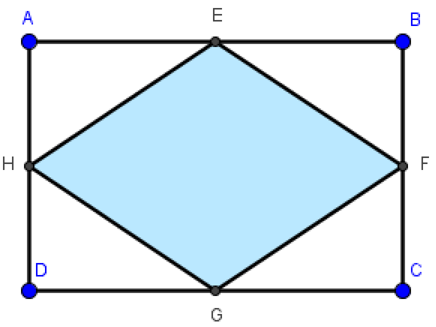
Uppgift 6
Beräkna summan $a + b + c$, svara på enklaste form om, $a = \frac{2}{5}, a \cdot b = \frac{2}{15}$ och $a \cdot b \cdot c = \frac{1}{10}$.

9.1.5 Matematik 2c

Uppgifterna nedan är tagna från Matematik 5000, Origo och Exponent som används i de svenska gymnasieskolorna.

Uppgift 1
ABCD är en fyrhörning. E, F, G och H är mittpunkter på fyrhörningens sidor. Bevisa att fyrhörningen EFGH alltid är en parallellogram.

9.2 Lösningar



Figur 19: Illustration av uppgiften

Lösning av uppgift 7.1.5.1: Vi börjar med att rita upp den informationen vi fått. Vi Ritar en godtycklig fyrhörning ABCD, vi ritar sedan in punkterna E, F, G och H. För att bevisa att fyrhörningen EFGH alltid är en parallellogram behöver vi visa att EF är parallell med GH och att EH är parallell med FG. Eftersom att alla punkterna E, F, G och H är mittpunkter så kan vi använda oss utav mittpunktsformeln. Den säger att koordinaterna (x_m, y_m) kan beräknas enligt följande: $x_m = \frac{x_a+x_b}{2}$ och $y_m = \frac{y_a+y_b}{2}$. Formeln kan naturligtvis användas på F, G och H också för att beräkna deras koordinater. För att sedan avgöra om två linjer är parallella så kan vi jämföra linjernas lutning, vid samma lutning så är linjerna parallella. Så om vi börjar med att beräkna lutningen på linjen EF, för detta utnyttjar vi mittpunktsformeln och får du att:

$$K_{EF} = \frac{y_e - y_f}{(x_e - y_f)} = \frac{\frac{(y_a+y_b)}{2} - \frac{(y_b+y_c)}{2}}{\frac{(x_a+x_b)}{2} - \frac{(x_b+x_c)}{2}} = \frac{\frac{(y_a-y_c)}{2}}{\frac{(x_a-x_c)}{2}} = \frac{\frac{(y_a-y_c)}{2} \cdot \frac{2}{(x_a-x_c)}}{\frac{(x_a-x_c)}{2} \cdot \frac{2}{(x_a-x_c)}} = \frac{\frac{2}{2} \cdot \frac{(y_a-y_c)}{(x_a-x_c)}}{1} = \frac{y_a-y_c}{x_a-x_c},$$

$$K_{HG} = \frac{(y_h - y_g)}{(x_h - y_g)} = \frac{\frac{(y_a+y_d)}{2} - \frac{(y_d+y_c)}{2}}{\frac{(x_a+x_d)}{2} - \frac{(x_d+x_c)}{2}} = \frac{\frac{(y_a-y_c)}{2}}{\frac{(x_a-x_c)}{2}} = \frac{\frac{(y_a-y_c)}{2} \cdot \frac{2}{(x_a-x_c)}}{\frac{(x_a-x_c)}{2} \cdot \frac{2}{(x_a-x_c)}} = \frac{\frac{2}{2} \cdot \frac{(y_a-y_c)}{(x_a-x_c)}}{1} = \frac{y_a-y_c}{x_a-x_c},$$

vi kan nu se att $K_{EF} = K_{HG}$ vilket innebär att linjerna EF och HG är parallella. Kvar har vi nu att bevisa att EH är parallell med FG. Till detta använder vi samma metod, vi får då följande uppställning:

$$K_{EH} = \frac{y_e - y_h}{(x_e - y_h)} = \frac{\frac{(y_a+y_b)}{2} - \frac{(y_a+y_d)}{2}}{\frac{(x_a+x_b)}{2} - \frac{(x_a+x_d)}{2}} = \frac{\frac{(y_b-y_d)}{2}}{\frac{(x_b-x_d)}{2}} = \frac{\frac{(y_b-y_d)}{2} \cdot \frac{2}{(x_b-x_d)}}{\frac{(x_b-x_d)}{2} \cdot \frac{2}{(x_b-x_d)}} = \frac{\frac{2}{2} \cdot \frac{(y_b-y_d)}{(x_b-x_d)}}{1} = \frac{y_b-y_d}{x_b-x_d},$$

$$K_{FG} = \frac{(y_h - y_g)}{(x_h - y_g)} = \frac{\frac{(y_a+y_d)}{2} - \frac{(y_a+y_d)}{2}}{\frac{(x_a+x_d)}{2} - \frac{(x_a+x_d)}{2}} = \frac{\frac{(y_b-y_d)}{2}}{\frac{(x_b-x_d)}{2}} = \frac{\frac{(y_b-y_d)}{2} \cdot \frac{2}{(x_b-x_d)}}{\frac{(x_b-x_d)}{2} \cdot \frac{2}{(x_b-x_d)}} = \frac{\frac{2}{2} \cdot \frac{(y_b-y_d)}{(x_b-x_d)}}{1} = \frac{y_b-y_d}{x_b-x_d},$$

vilket ger oss att även EH och FG är parallella och då är beviset klart. Svaret på uppgiften blir alltså att ja EFGH är alltid en parallellogram.

9.3 Intervjuenkät.

Nedan listar vi de frågor vi ställde till lärare och elever.

9.3.1 Lärarenkät

- Vad är bråkräkning för dig?
- Varför är det bra att kunna bråk?
- Vilka svårigheter stöter elever på vid bråkräkning?
- Vilken räkneoperation med bråk har elever svårast med?
- Vilka olika metoder för att undervisa om bråk använder du?
- Hur skulle du lösa uppgiften $\left(1\frac{3}{4}/\frac{1}{2}\right)$? Förklara dina steg.
- Känner du till någon annan metod för att lösa problemet?
- På vilket sätt tar de upp bråk i er valda matematikbok?
- Föredrar du bokens eller något annat sätt att förklara bråkoperationerna?

9.3.2 Elevenkät

- Varför tror du att elever ska kunna räkna med bråk?
- När har du användning av att räkna med bråk?
- Vilka svårigheter har du haft vid bråkräkning?
- Vilket räknesätt med bråk tycker du är enklast/svårast?
- Tycker du er bok var bra på att förklara bråk?
- Till sist hur skulle du lösa $\left(1\frac{3}{4}/\frac{1}{2}\right)$? Förklara dina steg.