# Rapport R25:1991

# Geoteknik och statistik

## Partialkoefficienter

Per-Evert Bengtsson
Bo Berggren
Lars Ohlsson
Håkan Stille



Byggforskningsrådet

R25:1991

# GEOTEKNIK OCH STATISTIK

Partialkoefficienter

Per-Evert Bengtsson
Bo Berggren
Lars Ohlsson
Håkan Stille

Denna rapport hänför sig till forskningsanslag 810430-4 från Statens råd för byggnadsforskning till Statens geotekniska institut, Linköping.

REFERAT

Ett av de forskningsprojekt som genomfördes i anslutning till införandet av partialkoefficientmetoden i geotekniken bedrevs gemensamt av Statens geotekniska institut och Institutionen för jord- och bergmekanik, KTH, med medel från BFR. Projektet redovisades i sex delrapporter. Innehållet i dessa delrapporter har ställts samman och delvis reviderats i en slutrapport.

Projektets syfte var att utreda vilka faktorer som främst styr valet av partialkoefficienter, informera om vad partialkoefficientmetoden innebär samt få underlag till utformning av anvisningar för stabilitetsutredningar gällande naturliga slänter.

Projektet har uppehållit sig vid följande avsnitt:
- Beskrivning av säkerhetsbegreppet
- Undersökning av naturliga variationer i jordlagrens egenskaper
- Exempelstudie av riskanalys
- Beskrivning av beslutsteorins användning vid bedömning av släntstabilitet
- Redovisning av praktiska exempel

I slutrapporten sammanfattas de viktigaste principerna som ligger till grund för partialkoefficientmetoden och dess praktiska tillämpning inom geotekniken. Speciellt anges och föreslås en förenklad metod att beräkna partialkoefficienter.

I rapporten ges följande rekommendationer i anslutning till partialkoefficientmetoden:
- Partialkoefficienter anges för alla ingående, osäkra variabler
- Partialkoefficienter beräknas med empiriskt förfarande, t ex föreslagen metod
- Variansreduktion bör beaktas
- Kontroll ska krävas för grova fel



R25:1991

ISBN 91-540-5326-9
Statens råd för byggnadsforskning, Stockholm

**gotab** 93529, Stockholm 1991

INNEHÅLL

FÖRORD

BETECKNINGAR

1. ALLMÄNT
1.1 Projektet
1.2 Totalsäkerhetsfaktorns begränsningar
1.3 Partialkoefficient
1.4 Skillnader mellan olika "konstruktionsmaterial"
1.5 Ett viktigt påpekande

2. STATISTISKA METODER
2.1 Inledning
2.2 Statistiska parametrar
2.3 Bayes-statistik

3. RISKBASERAD DIMENSIONERING
3.1 Inledning
3.2 Beräkningsmetoder - tre nivåer
3.21 Nivå III, beräkning av formell brottrisk
3.22 Nivå II, β-metoden
3.23 Nivå I, Partialkoefficientmetoden
3.3 Andra statistiska metoder
3.31 Inledning
3.32 Sökteori
3.33 Beslutsteori

4. GEOLOGISKA MODELLER
4.1 Inledning
4.2 Geologisk sortering
4.3 Egenskapsbestämning
4.31 Trend
4.32 Variation
4.33 Variansreduktion
4.34 Korrelation
4.4 Undersökningsstrategi
4.41 Varför undersöka
4.42 Beslutsteori
4.43 Bestämning av strategi
4.44 Sökning efter lokala anomalier
4.45 Bestämning av ett skikts egenskaper
4.46 Klassning av jord

5. PARTIALKOEFFICIENTMETODEN I PRAKTISK TILLÄMPNING
5.1 Det geotekniska problemet
5.11 Inledning
5.12 Partialkoefficientmetodens tillämpning inom geotekniken
5.2 Partialkoefficientmetoden
5.21 Allmänt
5.22 Teoretiskt samband med β-metoden
5.3 Stokastisk jordmodell
5.31 Inledning
5.32 Begrepp
5.33 Experimentell bestämning av korrelation
5.34 Variansreduktion
5.35 Förslag till statistiskt baserad förenklad praktisk jordmodell
5.36 Praktisk tillämpning av föreslagen jordmodell
5.4 Beräkning av partialkoefficienter
5.41 Inledande exempel
5.5 Sammanfattning
5.51 Bestämning av partialkoefficienter
5.52 Statistisk jordmodell och variansreduktion
5.6 Rekommendationer

REFERENSER

BILAGA I
BILAGA II

# FÖRORD

Under tiden 1983-1988 bedrevs i samarbete mellan Institutionen för Jord- och bergmekanik, KTH, och Statens geotekniska institut ett BFR-finansierat forskningsprojekt benämnt "Partialkoefficienter i geotekniken". Projektet redovisades i sex delrapporter med rubriken "Geoteknik & Statistik". Föreliggande rapport är en sammanläggning av dessa sex delrapporter. En viss redigering har gjorts.

Det är vår förhoppning att rapporten ska komma till användning för att öka förståelse och användning av statistiskt baserade dimensioneringsmetoder för grundkonstruktioner. Speciellt vill vi framhålla den i kapitel 5.4 framställda enkla metoden att beräkna partialkoefficienter.

Linköping och Stockholm i april 1990

Per-Evert Bengtsson　　　　Lars Ohlsson

Bo Berggren　　　　Håkan Stille

BETECKNINGAR

| | |
|---|---|
| $X, Y, \ldots$ | stokastisk variabel |
| $x, y, \ldots$ | observerat värde, specificerat värde |
| $Z$ | standardiserad normalfördelad variabel |
| $z$ | observerat el specificerat värde av d:o |
| $F(x), G(x), \ldots$ | fördelningsfunktion |
| $f(x), g(x), \ldots$ | täthetsfunktion, (sannolikhetstäthetsfunktion för kontinuerlig stokastisk variabel) |
| $N$ | storlek av population eller parti |
| $n$ | storlek av ett prov |
| $E(X), m_X, \mu_X$ | väntevärde av den stokastiska variabeln X |
| $\sigma^2$ | varians för en stokastisk variabel |
| $s^2$ | varians i ett prov |
| $\sigma$ | standardavvikelse för en stokastisk variabel |
| $s$ | standardavvikelse i ett prov |
| $V(X)$ | variationskoefficient för X |
| $COV(X,Y)\ \sigma_{X,Y}$ | kovarians mellan X och Y |
| $\varrho_{X,Y}$ | korrelationskoefficient för stokastiska variabler |
| $r$ | korrelationskoefficient för prov |
| $p^0$ | à priori sannolikhet |
| $p''$ | à posteriori sannolikhet |
| $L$ | likelihood |
| $\tilde{f}''(x)$ | bayesians posteriorfördelning |
| $\theta$ | sammanfattande beteckning för statiska parametrar |
| $\theta^*, \hat{\theta}$ | estimator av parametern |

# 1. ALLMÄNT

## 1.1 Projektet

Partialkoefficientmetoden infördes i geotekniken i Sverige genom Boverkets Nybyggnadsregler 1989, (BFS 1988:18). Ett av de forskningsprojekt som genomfördes i anslutning till införandet av partialkoefficientmetoden i geotekniken bedrevs gemensamt av Statens geotekniska institut, SGI, och institutionen för Jord- och bergmekanik, KTH, med medel från BFR. Resultatet av undersökningarna i projektet redovisades i sammanlagt sex delrapporter.

Innehållet i delrapporterna har ställts samman och delvis reviderats i föreliggande rapport.

I projektet "Partialkoefficienter i geotekniken" har följande personer arbetat:

Per Evert Bengtsson, SGI
Bo Berggren, SGI/SwedGeo
Lars Olsson, KTH/Tyréns
Håkan Stille, KTH, Skanska

Projektets syfte var att

1. utreda vilka faktorer som främst styr valet av partialkoefficienter, speciellt inom området släntstabilitet

2. informera om vad partialkoefficientmetoden innebär

3. få underlag till utformningen av anvisningar för stabilitetsutredningar gällande naturliga slänter.

Projektet drevs gemensamt av SGI och JoB. Projektets olika delar var

- Beskrivning av dagens säkerhetsbegrepp mot redovisning av för- och nackdelar.

- Undersökning av de naturliga variationerna i jordlagren, t ex variationen av lerans skjuvhållfasthet inom olika orter och djupzoner.

- Exempelstudie av riskanalys med diskussioner av säkerhetsindex och partialkoefficienter.

- Beskrivning av beslutsteorins användning med optimering av insatser vid bedömning av en lerslänts stabilitet.

- Redovisning av några praktiska exempel från vanliga geotekniska ämnesområden för att värdera påverkan av olika faktorer

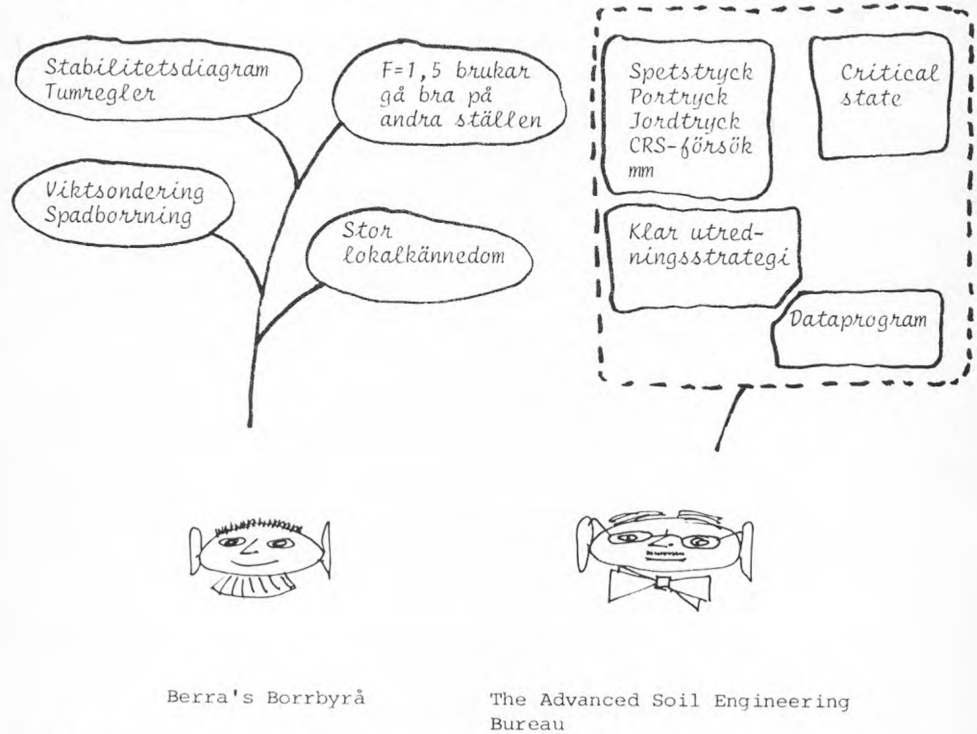



FIG 1.1 Det är inte självklart att det alltid är lätt att veta vem som har rätt (mest rätt). Stor lokalkännedom betyder mycket, men en allsidig analys av en geokonstruktion ger värdefull information.

## 1.2 Totalsäkerhetsfaktorns begränsningar

I geotekniska beräkningar används säkerhetsfaktorn (totalsäkerhetsfaktorn), vilken uttrycker den marginal av kraft eller arbete som erfordras för att nå ett beräknat brottvärde. Bättre vore att säkerhetsfaktorn uttryckte risken att nå det beräknade brottvärdet, gärna i förhållande till andra risker i samhället, eftersom vissa av dessa risker förefaller bättre förstådda.

Säkerhetsfaktorn utgör ofta det centrala beslutsunderlaget exempelvis när det gäller stabilitetsfrågor i naturliga lerslänter, men säkerhetsfaktorn beskriver inte på ett tillfredsställande sätt geoteknikerns syn på problemen. Geoteknikern kan inte enbart med säkerhetsfaktorn beskriva för andra hur han ser på ett problem. Mycket av den information han förvärvar i ett aktuellt projekt kombinerat med den kunskap och erfarenhet han besitter kommer inte till uttryck.

Normalt analyseras risktagande inte tillräckligt utförligt och är svårt att värdera med enbart en säkerhetsfaktor som grund. En ekonomisk analys kan därigenom få felaktigt resultat och ett beslut kan få ödesdigra konsekvenser.

Säkerhetsfaktorns begränsning framgår också av följande exempel (se FIG 1.2).

> En tung maskin är grundlagd med platta på sand. Jordens bärförmåga är beräknad till Qc. Genom angränsande schaktningsarbeten sjunker bärförmågan så att säkerhetsfaktorn går mot 1. I värsta fall kan maskinfundamentet kraftigt rubbas ur sitt läge.
>
> En likadan maskin är grundlagd på spetsbärande pålar i sand. Den totala bärförmågan är Qc. Maskinen byggs på så att belastningen blir Qc. Vad händer? Maskinfundamentet sjunker i storleksordningen 10 mm, vilket har ingen eller ringa betydelse.
>
> I de båda fallen har överskridandet av brottvärde olika konsekvens (teknisk och ekonomisk).

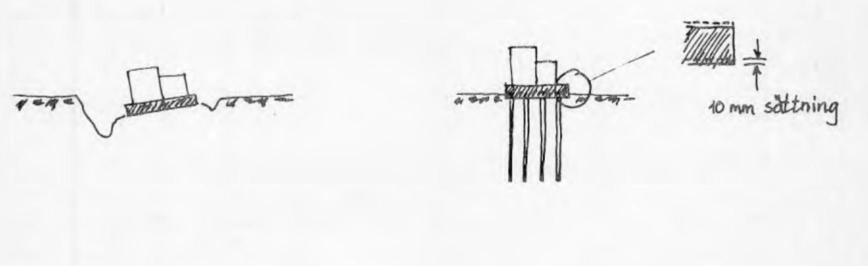



FIG 1.2 Konsekvensen av bärighetsbrott är olika vid olika grundläggningsmetoder.

## 1.3 Partialkoefficentmetoden i normen

Partialkoefficientmetoden har införts i geotekniken i Nybyggnadsregler 1989.

Bl a på grund av bristerna med totalsäkerhetsfaktorn infördes partialkoefficientmetoden redan tidigare bl a i AK 79/81 (allmänna regler för bärande konstruktioner) i Sverige och i grundläggningsnormerna i Danmark och Norge. I den danska grundläggningsnormen ges partialkoefficienter tabellvis för påverkande laster, jordens hållfasthetsparametrar samt på beräknad bärförmåga. Men utöver vissa minimikrav ges ingen vikt vid kvalitet och omfattning av bestämningen av t ex hållfasthetsparametrarna. Naturligtvis kan det vara så att geoteknikerns kunskaper är så gedigna att alla inverkande faktorer beaktas och självklart kan en beräkning baserad på ett fåtal undersökningsdata ge en grundkonstruktion som har tillräckligt stor marginal till brott. Men en mer omfattande och kvalificerad undersökning kan ur samhällelig synpunkt ge en mer ekonomisk lösning. Ett normsystem bör därför vara uppbyggt på ett sådant sätt att olika faktorer beaktas, såsom kvalitet och omfattning av geoteknisk undersökning, kvalitet av dimensionerings- eller analysmetod, kvalitet av arbetsutförande, konsekvens av varierande egenskaper hos jorden samt konsekvens av brott eller oväntat stora deformationer eller ett s k grovt fel begånget under något moment av projekterings- eller byggprocessen.

Normsystemet får dock inte göras alltför komplicerat och svårtillgängligt. Partialkoefficentmetoden erbjuder möjligheter att välja olika nivåer av styrning av geotekniska utredningar. I ett partialkoefficientsystem måste ges möjlighet åt utredaren att välja en i systemet definierad utredningskvalitet med hänsyn till omständigheterna. Exempelvis är det ju självklart, men inte alltid praktiserat, att man bör ställa olika krav på en geoteknisk undersökning för en mindre byggnad och på en undersökning för en monumentalbyggnad i sluttande lerterräng.

## 1.4 Skillnader mellan olika "konstruktionsmaterial"

Det finns tydliga skillnader mellan de olika konstruktionsmaterialen stål, betong och jord. Stålmaterialet tillverkas under strängt kontrollerade förhållanden, hållfasthetsprovning är lätt att utföra och stålprover är lätta att ta. Stålets deformationsegenskaper är väl kända och enkla att förstå. Dimensioneringsreglerna är därför lätta att specificera. Betongtillverkningen sker under något mindre kontrollerade och påverkbara förhållanden. Bl a påverkar väderleken på gjutplatsen betongens hållfasthetsegenskaper. Betongprover är i vissa fall något svårare att ta än stålprover och betongens deformationsegenskaper är mer komplicerade. Dimensioneringsreglerna blir därför svårare att specificera.

Jordlagren har "tillverkats" under betydligt mer svåröverskådliga former än både stål och betong. Jordens deformationsegenskaper är svåra att utreda och förstå och prover är svåra att ta.

Om man studerar de olika materialens typiska hållfasthetsparametrar finner man att en viss stålsort kanske har en medeldraghållfasthet (sträckgräns) av 300 MPa med en variationskoefficient* av 0,01. Antalet provningar är mycket stort. Betong har en normal kubhållfasthet av 25 MPa och en variationskoefficient av ungefär 0,05. Antalet prover är stort. I lös lera är ofta den uppmätta skjuvhållfastheten 20-50 kPa med en variationskoefficient av 0,1-0,3. Antalet prover är inte stort. Den säkerhetsfaktor som brukar användas vid byggande med de olika materialet är av storleken 1,5-3.

En kollaps av ett element i en stålkonstruktion kan betyda mer för konstruktionens säkerhet än en "kollaps" i ett element i en jordvolym. Jämför exempelvis en alltför stor spänningskoncentration i en knutpunkt i ett stålfackverk med fenomenet "piping" vid schaktning för en grundplatta. Stålkonstruktionen kanske kollapsar medan grundplattan endast får en mycket obetydlig extra sättning. Å andra sidan kan piping inträffa i en jorddamm. Konsekvensen av detta har i historien givit stora katastrofer, t ex vid Teton-dammen i USA.

* Variationskoefficient $= \dfrac{\text{standardavvikelse}}{\text{medelvärde}}$

## 1.5 Ett viktigt påpekande

När man diskuterar användning av statistik inom geotekniken dyker det ibland upp en missuppfattning: "Statistiken ska lösa de geotekniska problemen".

Men statistiska metoder är inget trollspö, som skingrar allt dunkel.

Vad man kan göra är bara att kvantifiera alla osäkerheter, beskriva och diskutera dem och få hjälp vid beslutsfattande. Den geotekniska delen (och de geotekniska misstagen) får man stå för själv. Statistiska metoder är ett utmärkt hjälpmedel för geotekniker, inte en ersättare för dem.

Gemene man har ofta betraktat statistik med skepsis och måhända rätt så. Statistik har missbrukats, ibland med avsikt.

Det finns dock goda skäl att införa statistiska metoder inom geotekniken. Geoteknisk statistik kan vara så mycket mer än antal pålmetrar!

Det främsta skälet ligger i den geotekniska "vetenskapen" själv. Vi vet ju att den ofta är oprecis, till stor del baserad på empiri och till omfattningen bristfälliga dataunderlag (dvs endast ett fåtal prover). De uttalanden man kan göra är osäkra och förenade med risker, något som återspeglar sig i det normala geoutlåtandets försiktiga formuleringar.

Situationen skulle förbättras, om man på ett bra sätt kunde beskriva hur osäker informationen är, hur stor risken är. Detta skulle vara till stor hjälp för beslutsfattare vid val mellan olika alternativ och när det gäller att bedöma om ytterligare geoteknik behövs i projektet. Man får ju då en möjlighet att väga kostnaden och risken. Man kan även använda en största tillåten risk som säkerhetskriterium i en byggnorm, vilket är möjligt enligt Nybyggnadsreglerna.

# 2. STATISTISKA METODER

## 2.1 Inledning

Filosofin bakom användandet av statistiska metoder i geotekniken är att beskriva vår kunskap i sannolikhetstermer och utnyttja sannolikhetsläran för den matematiska behandlingen. Att se sannolikheten som ett mått på kunskap eller på tilltro till något strider mot den definition de flesta av oss lärt.

Dessa sannolikheter kallas subjektiva och skiljer sig från de klassiska i sin definition och i vissa grundläggande synsätt. Den matematiska behandlingen är dock i stort densamma eftersom de härletts från vissa axiom om sannolikheten. Axiomen uppfylls av bägge typerna av sannolikheter. Det bör betonas, att subjektiva sannolikheter inte är något nytt, diskussionen om vilken sannolikhetsuppfattning som är den "rätta" har pågått i mer än tvåhundra år!

För tillämpningen inom geotekniken känns den subjektiva sannolikhetstolkningen riktig. Man har ofta en erfarenhetsbas att bygga på.

## 2.1 Statistiska parametrar

Grundläggande inom den subjektiva sannolikhetsläran är att man kan översätta erfarenheten till en sannolikhet genom en valsituation där ens uppfattning vägs mot kända sannolikheter. När man uttryckt sin erfarenhet (och givetvis även ev provdata) i sannolikhetstermer kan man förenkla beskrivningen till några få mått, de statistiska parametrarna.

Man kan fullständigt redovisa sannolikheten genom en fördelningsfunktion, se Figur 2.1.

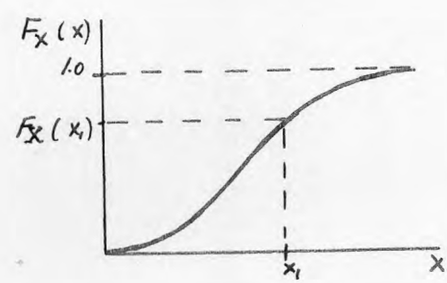



FIG 2.1 Fördelningsfunktion.

I fördelningsfunktionen anger $F(x_1)$ sannolikheten att variabeln X ska anta ett värde som är mindre än eller lika med $x_1$.

Ett alternativ är att använda en <u>sannolikhetstäthetsfunktion</u>, se Figur 2.2. Täthetsfunktionen är första-derivaten av fördelningsfunktionen. Därför anger $f_X(x_1)$ sannolikhetstätheten för $X = x_1$, inte sannolikheten att variabeln X ska anta värdet $x_1$.

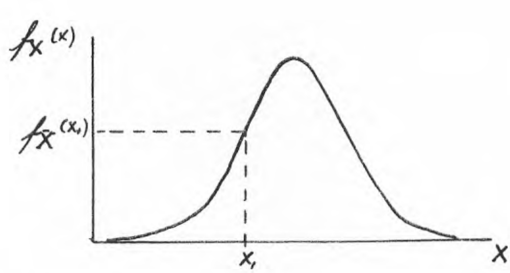



FIG 2.2 Täthetsfunktion.

När man vill beskriva en täthetsfördelning (och därmed också motsvarande fördelningsfunktion) kan man göra det genom att ange vissa karakteristiska mått. De två viktigaste beskriver kurvans läge på x-axeln och hur utspridd den är.

För att beskriva läget anger man oftast <u>medelvärdet</u> $\mu_X$, som kan ses som funktionens tyngdpunkt, se Figur 2.3.

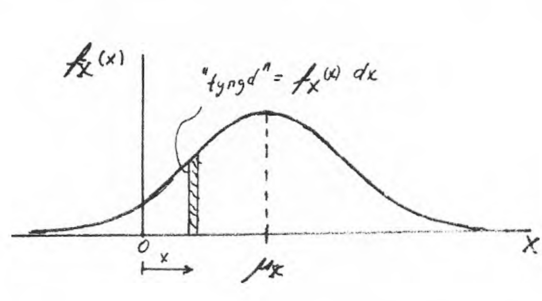



FIG 2.3 Medelvärdet.

Som spridningsmått anger man varians**en**. Den anger det viktade medelvärdet av kvadraten på avvikelsen från medelvärdet. En "flack"! täthetsfunktion betyder stor varians, dvs stor osäkerhet och vice versa, se Figur 2,4. Variansen tecknas

$$\sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_X)^2 \; f_X(x)dx$$

där $(x-\mu_X)$ = avvikelsen
$f_X(x)dx$ = viktfaktor

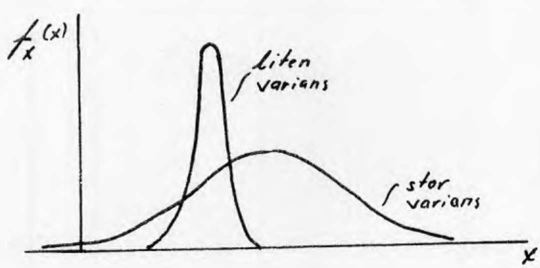



Fig 2.4 Varians.

Ett annat spridningesmått är standardavvikelsen $\sigma_X$ som är variansens positiva kvadratrot. Fördelen med $\sigma_X$ är att den har samma dimension, t ex kPa, som variabeln själv.

Ett mycket användbart spridningsmått är variationskoefficienten $V(x) = \sigma_X/\mu_X$. Variationskoefficienten ger snabbare en uppfattning om spridningen än vad standardavvikelsen gör, se Figur 2.5.

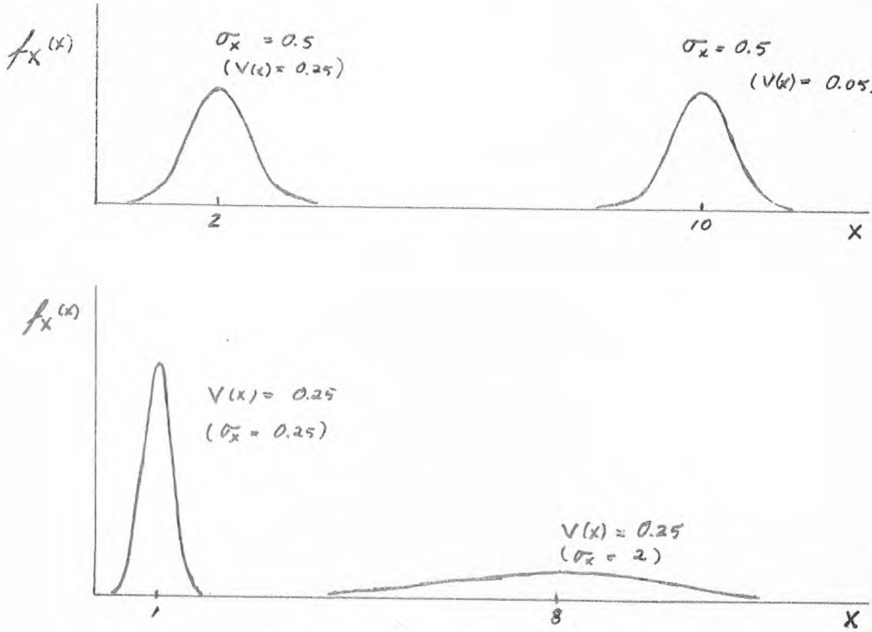



FIG 2.5 Variationskoefficient och standardavvikelse.

Medelvärdet motsvarar funktionens tungdpunkt. På samma sätt motsvarar variansen tröghetsmomentet runt tyngdpunkten.

Man brukar därför kalla dessa storheter för första respektive andra (central)-momentet.

Ofta känner man bara dessa två moment och inte funktionen i dess helhet. Man kan ändock göra vissa uttalanden om sannolikheten att variabeln ska anta ett visst värde:

Om man kan anta att fördelningen är något så när lik normalfördelningen har sannolikheterna de värden som visas i figur 2.6 för att variabeln ska anta ett värde i ett visst intervall.

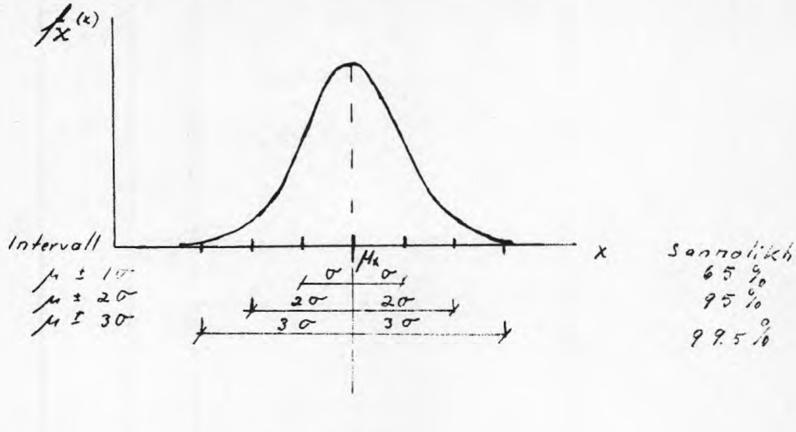



FIG 2.6 Sannolikhetsintervall.

Det behövs naturligtvis en enhetlighet i beteckningarna man använder. Ett förslag finns i det följande kapitlet. Ibland kolliderar (t ex $\sigma$, $\varrho$) de geotekniska och de statistiska beteckningarna, men oftast framgår det av texten i övrigt vad som avses.

## 2.3 Bayesstatistik

Vid besstämning av de geotekniska parametrarna har man normalt både någon förhandskunskap (erfarenhet) och några provresultat.

Den subjektiva sannolikhetsuppfattningen gör att man kan uttrycka förhandskunskapen och provresultaten i statistiska termer.

För att kunna tillgodogöra oss bägge dessa informationskällor behövs en metod att väga samman dem så att resultatet uttrycks i sannolikhetstermer. En sådan metod finns i bayesstatistiken, som fått sitt namn efter Thomas Bayes, en engelsk 1700-talspräst. Principen framgår av Figur 2.7.

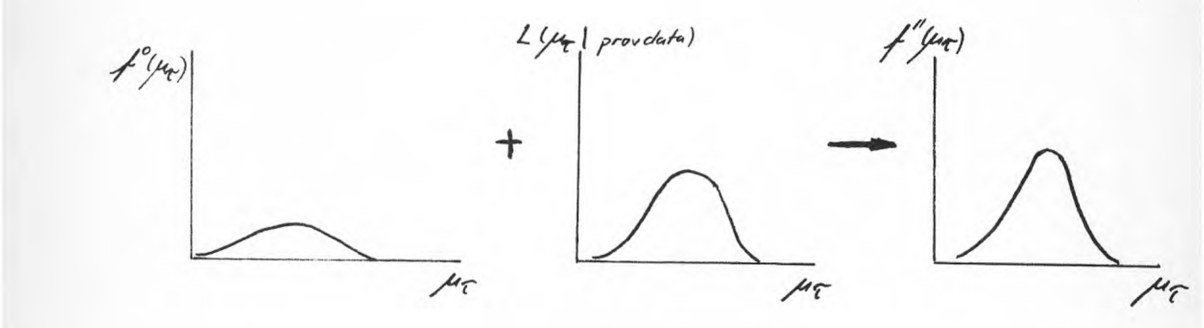



FIG 2.7 Användning av Bayes' teorem vid uppdatering.

Som framgår av figur 2.7 använder man Bayes' teorem på statistiska parametrar, t ex skjuvhållfasthetens medelvärde $\mu_\tau$, och inte variabeln (i exemplet: skjuvhållfastheten $\tau$) själv.

Bayes' teorem lyder

$$f''(\Theta|z) = k\, f^{o}(\Theta)\, P(z|\Theta) \qquad (2.1)$$

$$1/k = \int f^{o}(\Theta)\, P(z|\Theta)\, d\Theta \qquad (2.2)$$

där $\Theta$ betecknas en statistisk parameter (se 2.2 ovan) och där

$f^{o}(\Theta)$ = täthetsfördelningen för $\Theta$ <u>före</u> man fått ett provresultat, à priori-fördelningen

$f''(\Theta)$ = täthetsfördelningen för $\Theta$ <u>efter</u> det man fått provresultatet z, posterior-fördelningen

$P(z|\Theta)$= sannolikheten att få provresultatet z, givet att parametern antar värdet $\Theta$

Denna sannolikhet, $P(z|\Theta)$, är en funktion av parametern $\Theta$ och kallas ofta likelihood $L(\Theta)$. Bayes' teorem kan alltså skrivas i förkortad form

$$f''(\Theta) = k \cdot f^{o}(\Theta)\ L(\Theta) \qquad (2.3)$$

Bayes' teorem kan alltså användas för att väga samman, uppdatera, en à-priori-sannolikhet med ett provresultat på ett korrekt sätt.

Om man accepterar att man kan beskriva sin erfarenhet om t ex jordens skjuvhållfasthet inom ett visst område i sannolikhetstermer så kan man korrekt väga ihop erfarenhet med provdata. Men man måste observera, att ett användande av bayesstatistik också kräver att man anger en à priori-fördelning, även om man har mycket liten förhandskunskap. Man tvingas då använda en svag à priori-fördelning, se Figur 2.8.

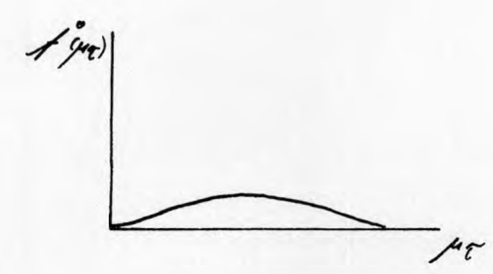



FIG 2.8 En svag à priori-fördelning.

Ibland kan man använda rektangelfördelningen, se Figur 2.9, vilken motsvarar utsagan "Jag är helt säker på att medelvärdet μ ligger mellan 0 och 50 kPa men alla värden däremellan är lika troliga.

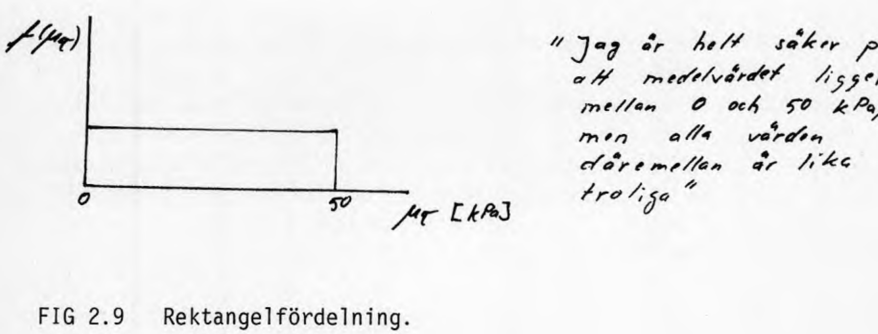



FIG 2.9 Rektangelfördelning.

Man måste dock ha klart för sig, att bayesstatistik inte kan skapa information ur intet, samt att det gäller att få rätt balans, se Figur 2.10.

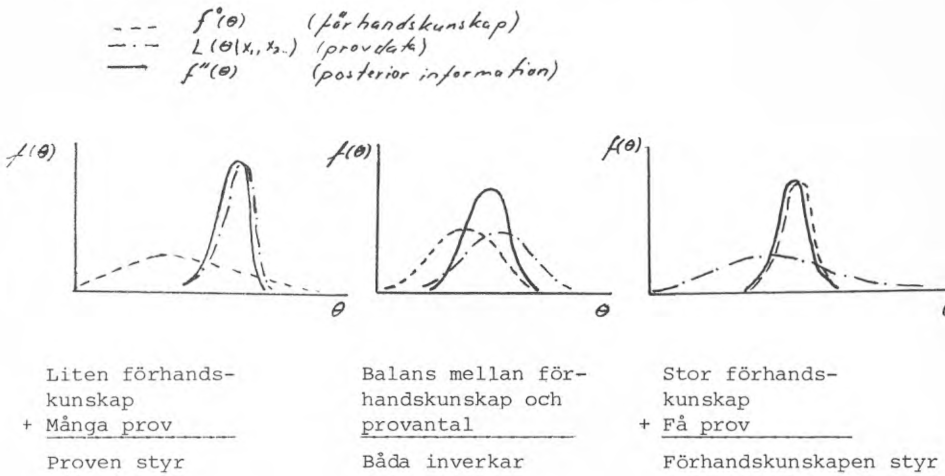



FIG 2.10 Olika styrka hos förhandskunskap och provtantal.

När man använder bayesstatistik kan man således utnyttja förhandskunskap, vilket man inte kan göra i klassisk statistik.

Detta gör, att man med bayesstatistik får en bättre uppskattning med färre prov; förhandskunskapen "ökar antalet prov".

När man i klassisk statistik anger t ex ett medelvärde, talar man ofta om ett "konfidensintervall" för det angiva värdet. Detta är ett sätt att ange hur "säkert" det angivna värdet är, och beror bl a av provantalet. Det är ett svårt begrepp och användningen leder lätt till problem.

Inom bayesstatistiken finns det något som kallas "bayesiansk fördelning". Den är en sorts "viktad" fördelning där man viktat alla de fördelningar som uppstår när man ändrar de statistiska parametrarna.

Om standardavvikelsen i en normalfördelning antas känd, men inte medelvärdet finns det ett oändligt antal möjliga kurvor (som har olika lägen). Man ger varje kurva en vikt, som svarar mot sannolikheten att just den kurvan är den rätta. (Dvs att det motsvarande medelvärdet är det rätta: $f_{\Theta}(\Theta)\,d\Theta$. Sedan "väger man samman" kurvorna och får den bayesianska fördelningen, se Figur 2.11.

$$\tilde{f}_X(x) = \int f_X(x|\Theta)\, f_{\Theta}(\Theta)\, d\Theta \qquad (2.4)$$

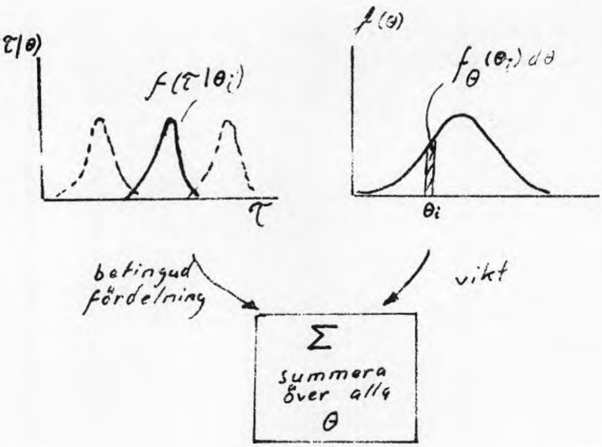



FIG 2.11. Den bayesianska fördelningen av $\tau$.

Fördelen med att använda den bayesianska fördelningen är att den innehåller den s k statistiska osäkerheten, den osäkerhet som härrör från att man bara har ett fåtal prov. Att denna osäkerhet bakats in är orsaken till att kurvan är flackare än ursprungskurvorna.

En ökad information används till att uppdatera $f(\Theta)$ till $f''(\Theta)$ och ger på så sätt en snävare fördelning $\tilde{f}(\Theta)$.

Ofta är man, som visas i nästa kapitel om riskbaserad dimensionering, intresserad av fördelningens medelvärde och varians. Dessa "bayesianska" moment definieras som vanligt:

$$\tilde{\mu}_X = \int x \, \tilde{f}_X(x) \, dx \qquad (2.5)$$

$$\tilde{\sigma}_X^2 = \int_X (x-\tilde{\mu}_X)^2 \, \tilde{f}_X(x) \, dx \qquad (2.6)$$

De bayesianska momenten inkluderar givetvis också den statistiska osäkerheten.

I kapitel 4 redogörs för hur man tar fram ingångsdata för riskbaserad dimensionering. Där visas bl a hur man tar hänsyn till jordens fysikaliska brottegenskaper och till dess rymdvariation när man bestämmer dessa ingångsdata, som är statistiska moment.

Bayesiansk statistik ger alltså möjlighet både att inkludera förhandskunskap (erfarenhet) och att hantera fåtalsprovning på ett rationellt sätt. Dessa två problem var de största hindren för tillämpning av statistiska metoder.

# 3. RISKBASERAD DIMENSIONERING

## 3.1 Inledning

Som nämnts tidigare kan man använda ett riskmått som säkerhetskriterium vid dimensionering. Härvid dimensionerar man så, att den beräkningsmässiga risken är mindre än den tillåtna.

I Nybyggnadsregler har man brottsannolikheten som grundläggande kriterium.

Införandet av en riskbaserad norm innebär förmodligen ingen större förändring av byggnaders dimensioner etc. Eftersom det finns många osäkerheter att ta hänsyn till tvingas man att kalibrera den nya metoden mot befintliga, erkänt korrekta.

Psykologiskt-filosofiskt innebär den nya principen väsentliga förändringar.

Åtminstone för lekmannen har det varit lätt att sätta likhetstecknen mellan "tillräcklig säkerhetsfaktor" och "brott kan omöjligen inträffa". Så är givetvis inte fallet! Vi lever redan idag med likhet mellan "säker" och "viss risk för brott"! Skillnaden med en riskbaserad design är helt enkelt dels att man öppet talar om risken, dels att man kan eller försöker kvantifiera risken.

Innebörden av en angiven brottsannolikhet t ex $10^{-5}$ är inte heller klar. Betyder det att i medeltal var hundratusende konstruktion går till brott, eller vad?

När det gäller sådana tolkningar är det viktigt att komma ihåg, att den beräknade brottrisken är ett teoretiskt värde (en formell risk). Riskvärdet är betingat av en mängd faktorer, inte minst av beräkningsmetoden. Det är därför svårt att ge den en frekventistisk innebörd. Man ska i stället se den som ett beslutskriterium: "Om den enligt godtagna principer framräknade brottrisken är mindre än den krävda kan konstruktionen accepteras, dvs anses vara säker." Detta synsätt påminner om säkerhetsfaktorn, men brottrisken är ett så mycket mer nyanserat och effektivt kriterium.

En invändning mot riskbaserade metoder som hörs då och då är följande: Om en konstruktion kollapsat så kan konstruktören ursäkta sig med att vad som hänt har statistiska orsaker: Om man accepterar en viss risk, måste ju något gå sönder då och då!

En sådan invändning kan man bortse från. Med de mycket små tillåtna brottrisker som är aktuella ($10^{-6}$-$10^{-4}$) är det ytterligt osannolikt att ett brott skulle ha "statistiska skäl". Man kan därför utgå från att någon begått ett fel om konstruktionen kollapsar.

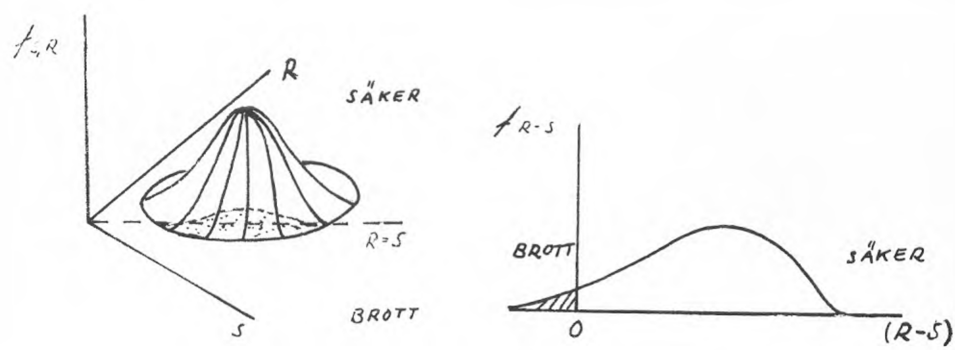
## 3.2 Beräkningsmetoder - tre nivåer

Även om man som grundläggande säkerhetsprincip arbetar med en formell brottrisk, behöver man för praktiskt bruk förenklade metoder, där man inför ett ställföreträdande riskmått. Man brukar tala om tre nivåer.

### 3.21 Nivå III Beräkning av formell brottrisk

Detta är den grundläggande metoden, där man för en konstruktion gör en kontroll av brottrisken.

Man skriver upp brottvillkoret antingen på formen R ≥ S eller R-S ≥ 0 och beräknar sedan brottrisken, se Figur 3.1. R står för motstånd och S för last.




Brottrisk = volymen under kurvan utanför säkra området

Brottrisk = area under kurvan utanför säkra området

FIG 3.1 Brottrisk enligt nivå III.

Man bör observera, att denna metod endast i ytterligt sällsynta fall kommer att användas.

- Man kan bara kontrollera, ej dimensionera
- Beräkningarna är mycket svåra
- Man måste känna alla variablers statistiska fördelningar

### 3.22 Nivå II β-metoden

När man sökte efter en eklare metod hade man bl a som önskemål att man endast skulle behöva känna till medelvärde och varians för de ingående variablerna (andra momentets metoder). Med denna förenkling kan man inte beräkna brottrisken. Man införde då ett ställföreträdande riskmått β, säkerhetsindex, se t ex Thoft-Christensen & Baker (1982). Acceptanskriteriet blir $\beta \geq \beta_{\text{föreskrivet}}$.

Den definition av β man nu använder, enligt Hasofer Lind (1974), är enkel och intuitivt tilltalande:

Först skriver man brottvillkoret på formen $g(x_1, x_2 \ldots . x_n) \geq 0$ där $g(\cdot)>0$ är det säkra området.

Sedan normaliserar man alla variabler så att de får medelvärdet = 0 och standardavvikelsen = 1 och tecknar brottgränsen $g(\cdot) = 0$ i detta koordinatsystem.

Säkerhetsindex β motsvarar det kortaste avståndet från brottgränsen till origo i detta koordinatsystem. (Origo är medelvärdet för variablerna.)

För det enkla fallet med bara två variabler kan man åskådliggöra definitionen genom figur 3.2 som visar täthetsfunktionen uppifrån. I figuren är $z_1$ och $z_2$ de normaliserade variablerna där exempelvis

$$Z_1 = \frac{X_1 - \mu_{X_1}}{\sigma_{X_1}}$$

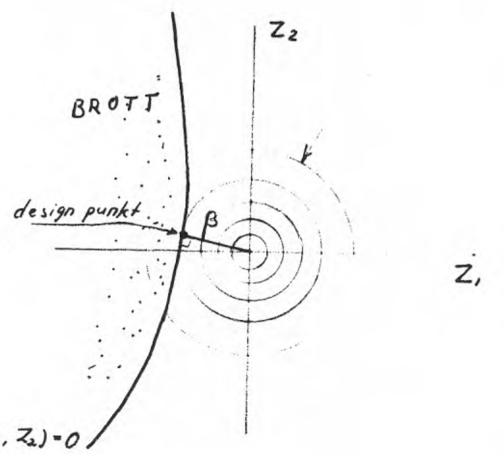



FIG 3.2 Definition av riskmåttet β (Nivå II).

Eftersom brottrisken är volymen under den del av kurvan som finns utanför brottgränsen inser man att ju större β är, desto mindre än brottrisken.

Om alla ingående variabler uppfyller villkoren att dels vara oberoende, dels vara normalfördelade samt om brottgränsen är linjär finns det t o m ett direkt samband:

$$p_f = \Phi(-\beta) \tag{3.1}$$

Detta förhållande kan utnyttjas när man vill ange vilket β-värde som krävs för olika säkerhetsklasser i en riskbaserad norm. I Tabell 3.1 visas värden i Nybyggnadsregler.

TABELL 3.1 Säkerhetsklasser i Nybyggnadsregler

| Säkerhetsklass | 1<br>Mindre allvarlig | 2<br>Allvarlig | 3<br>Mycket allvarlig |
|---|---|---|---|
| Risk för allvarliga personskador | Obetydlig | Någon | Betydlig |
| Brottsannolikhet $p_f$ | $10^{-4}$ | $10^{-5}$ | $10^{-6}$ |
| Säkerhetsindex $\beta$ | 3,7 | 4,3 | 4,8 |

Eftersom detta samband mellan $\beta$ och brottrisken är viktigt, om olika konstruktioner ska kunna jämföras, har det utvecklats metoder där man kan omvandla beroende eller icke normalfördelade variabler till oberoende, normalfördelade. Man har därmed fått en metod, som visserliga kräver mer information än bara de två första momenten, men som närmar sig nivå III-metoden i kvalitet. $\beta$-metoden har dessutom den fördelen att den kan användas för dimensionering och inte bara för säkerhetskontroll.

Själva beräkningen av $\beta$ måste i de flesta fall göras iterativt. I praktiken behövs därför dator för beräkningen.

## 3.23 Nivå I, Partialkoefficientmetoden

Även om statistiska metoder har många fördelar vill man ibland ha en enklare metod för dimensioenring, en metod där man arbetar med deterministiska värden. Man vill samtidigt så långt som möjligt bibehålla säkerhetsfilosofin. Det innebär att man med den förenklade metoden ska få konstruktioner med ett säkerhetsindex minst lika med det föreskrivna.

Detta är möjligt, om man väljer (deterministiska) värden på de ingående variablerna så, att man hamnar i den s k designpunkten (se figur 3.2). Då får man en konstruktion som har säkerhetsindex $\beta$.

Om man alltså har beräknat fram koordinaterna $z_1*$, $z_2*$ .... $z_n*$ för designpunkten kan man räkna fram motsvarande koordinater i det ursprungliga systemet:

$$x_1* = \sigma_{x1}* z_1* + \mu_{x1} \quad \text{osv} \tag{3.2}$$

Men $z_i*$ är en funktion av $\beta$. Följande gäller:

$$z_i^* = \beta\alpha_i \tag{3.3}$$

där $\alpha_i$ är cosinus för riktningen till designpunkten.

Faktorn $\alpha_i$ kallas också sensitivitetsfaktor och är en funktion av brottgränsuttrycket $g(x_1, x_2...)$. Den är negativ för motståndsvariabler och positiv för lastvariabler.

Man får alltså

$$x_1* = \mu_{xi} \; \beta \; \alpha_i \; \sigma_{xi} \tag{3.4}$$

I partialkoefficientmetoden har man infört "karakteristiska värden $x_k$" och "partialkofficienter $\gamma$". I princip gäller

$$x_i^* = \frac{x_k}{\gamma} \qquad \text{motståndsvariabler} \tag{3.5}$$

$$x_i^* = x_k\gamma \qquad \text{lastvariabler} \tag{3.6}$$

Det måste observeras, att karakteristiska värden och partialkoefficienter är sammanhängande och att valet av partialkoefficienter blir beroende av valet av karakteristiskt värde. Det karakteristiska värdet kan vara t ex meelvärdet eller något annat värde, t ex 5%-fraktilen. Detaljer kring partialkoefficientmetoden och dess uppbyggnad beskrivs i kapitel 5.

Vid användningen av partialkoefficientmetoden ska följande säkerhetskrav gälla om konstruktionen är säker

$$g(x_1*, x_2* ....x_n*) \geq 0 \tag{3.7}$$

där man satt in värdena $x_1^*$, $x_2^*$ ....$x_n^*$, dvs $\frac{x_k}{\gamma}$ respektive $\gamma x_k$ i det ursprungliga brottgränsuttrycket $g(x_1, x_2 .... x_n)$.

För att få fram en praktisk partialkoefficientmetod måste förenklingar göras. I ovanstående "exakta" uttryck för partialkoefficienterna måste man känna $\alpha_i$. Dessa sensitivitetsfaktorer är beroende av uttrycket för brottgränsen och man skulle alltså tvingas att först beräka designpunkten med β-metoden för att kunna beräkna samma konstruktion med partialkoefficientmetoden.

Förenklingarna av partialkoefficientmetoden måste göras på säkra sidan. Man kommer alltså att med partialkoefficientmetoden få överstarka konstruktioner, se Figur 3.3.

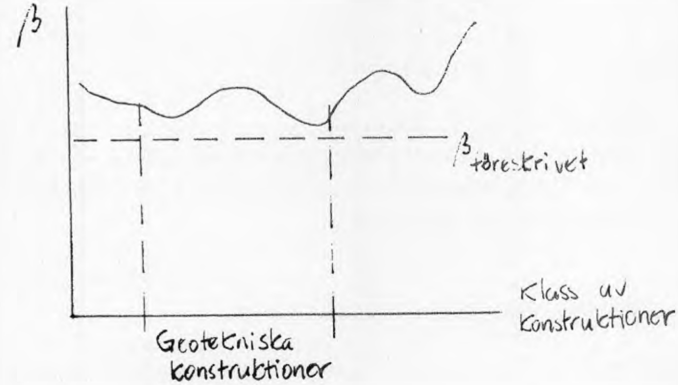



FIG 3.3 Verkligt β hos konstruktioner dimensionerade med förenklad partialkoefficientmetod.

Visserligen kan man optimera partialkoefficienterna för snäva klasser av konstruktioner, men man kan anta, att partialkoefficientmetodens användning i stort kommer att vara begränsad till enkla konstruktioner. Större, mer kostnadskrävande projekt kommer att dimensioneras med β-metoden.

## 3.3 Andra statistiska metoder

### 3.31 Inledning

Riskbaserad dimensionering är det område där geoteknikern oftast kommer att komma i kontakt med statistiska metoder. Men när man väl anammat filosofin kan man utnyttja den till mycket annat. Några exempel är

- sökteori
- beslutsteori
- fåtalsprovning av konstruktioner

### 3.32 Sökteori

Ofta har det väl hänt att man sonderat inom ett område och haft något enstaka "stenskrap". Sedan ska det schaktas och jorden visar sig vara blockig med extrakostnader och ev tvist som följd.

Tillämpning av sökteori skulle kunna ha givit ett annat resultat t ex "Sannolikheten är 75% att jorden är blockig".

Sökteori handlar om val av lämpligaste undersökningsinsats för att finna ett föremål och tolkning av sökresultat. Sökteorin utvecklades primärt för militära ändamål (ubåtsjakt) men har även använts inom bl a geoområdet (oljeprospektering).

### 3.33 Beslutsteori

Ofta måste man fatta beslut när flera av de beslutsgrundande faktorerna är osäkra och det alltså finns viss risk förknippad med beslutet.

Beslutsteori är en möjlighet att ta fram "bästa" beslut enligt på förhand bestämda kriterier på "bäst", vanligtvis minsta kostnad (eller största vinst). Det krävs att man kan ange osäkerheterna i sannolikhetstermer, samt att man kan beskriva de olika alternativen man kan välja mellan. Dessutom måste man kunna beskriva konsekvenserna av olika val, beroende på hur verkligheten visar sig vara. Beslutsteori är ett kraftfullt verktyg, bl a genom att man kan analysera värdet av provtagningar redan innan det gjorts. Ytterligare en fördel med beslutsteori är att den tvingar fram en logisk och väl redovisad lista över tänkbara alternativ, ofta i "träd"-form, se Figur 3.4.

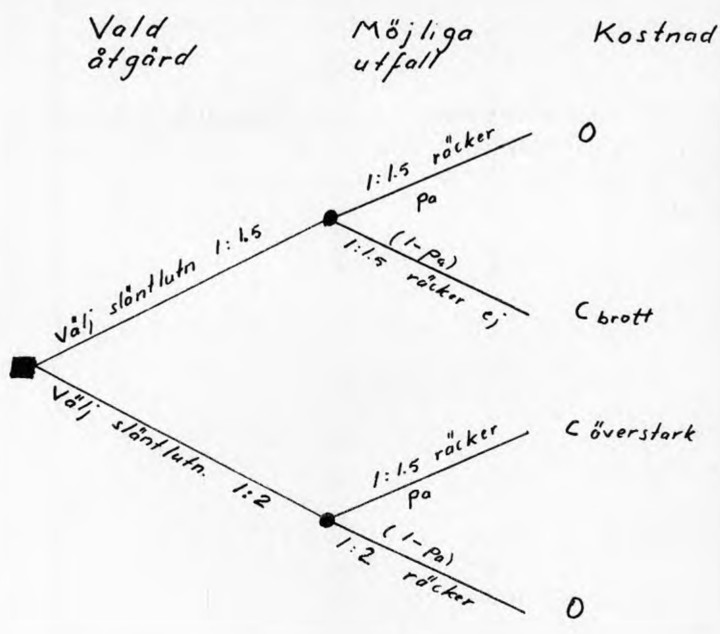



FIG 3.4 Enkelt beslutsträd.

### 3.34 Fåtalsprovning av konstruktioner

Att göra en fullskaleprovning av exempelvis pålar är dyrbart, och man vill naturligtvis få ut så mycket som möjligt av resultatet. Bayesstatistikens principer, med möjlighet att uppdatera förhandskunskap (erfarenhet) med provdata, är givetvis tillämplig även på detta problem. I Figur 3.5 visas hur resultatet av <u>en</u> provebelastad påle kan användas för att modifiera (den konventionella) säkerhetsfaktorn utan att brottrisken ändras. Figurerna visar hur man, tack vare förhandskunskapen att variationen inom byggplatsen är liten, får en relativt stor ändring av säkerhetsfaktorn.

Om vi t ex kräver $\beta = 2{,}5$ kan man ur figuren utläsa:

a) Om man inte har någon provbelastning krävs en säkerhetsfaktor av 3,4

b) Om vi gör en provbelasting och uppmäter en brottlast som är 1,25 gånger den beräknade kan säkerhetsfaktorn minskas till 2,7.

(Om mätt last är avsevärt större än beräknad, tyder detta på osäkerheter i beräkningsmetoden. Då tillåts ingen ytterligare minskning av säkerhetsfaktorn.)

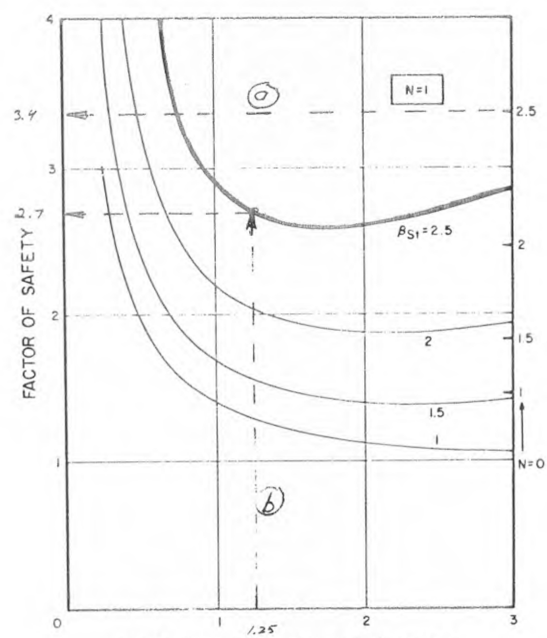



FIG 3.5 Fåtalsprovning av pålar. (Från Baecher & Rackwitz (1982).

Brottrisken är, med subjektiv sannolikhetsuppfattning, en funktion ingående av kunskap och kan därför ändras.

# 4. GEOLOGISKA MODELLER

## 4.1 Inledning

Vid bedömning av risken för brott och säkerheten för ett geoproblem är en av de viktigaste uppgifterna att skaffa information om spridning och variation hos jordegenskaperna.

Viktiga begrepp i samband med detta är trend, variation, rymdberoende och fluktuation. De geotekniska undersökningarna bör utformas så att man får dessa informationer. Hur långt den successivt förtätade geoutredningen ska drivas bestäms av tekniskt-ekonomiska överväganden (beslutsteori).

En beskrivning av en geoteknisk undersökning, sett ur statistisk synpunkt, innebär först en geologisk sortering av de geometriska gränserna hos de olika geologiska formationerna. Därefter sker en analys av trender, variationer, rymdberoende och fluktuationer inom varje geologisk delformation för att uppskatta variationer hos de sökta egenskaperna. Om denna analys inte är tillräckligt noggrann riskerar man att få oacceptabla risknivår för konstruktioner som idag är accepterade som säkra.

## 4.2 Geologisk sortering

En geoteknisk undersökning har syftet att dels ge uppgift om lagerföljder och dels ge uppgift om egenskaper. Genomförandet av geologisk sortering baseras på ingenjörsgeologisk erfarenhet. Det är önskvärt att strategin över hur sorteringen ska utföras är utformad enligt följande.

<u>Steg 1</u> Bedömning av förväntad geologisk formation.

<u>Steg 2</u> Några få sonderingar. Ger information om lagerföljd och grov lagerutbredning.

<u>Steg 3</u> Tätare sondering med lokalisering baserad på information från Steg 1 och Steg 2.

I det första steget görs en allmän geologisk bedömning av vilken typ av formation som kan förväntas. Detta görs genom studium av geologiska kartor, flygfoton och besiktning på platsen. Tidigare erfarenhet från området (arkivborrning) gås också igenom.

Det andra steget ska ge information om jordmaterialets egenskaper samt förväntad spridning hos lagergränserna. Tillsammans med tidigare erfarnehet inom motsvarande geologiska formationer fås underlag till uppläggning av Steg 3.

För bästa användning av statistiska metoder bör en indelning göras av jorden i lager i plan och höjd. En vanlig indelning av en jordprofil är t ex torrskorpa, lera och friktionsjord med en eventuell ytterligare indelning. Ett lerlager kan t ex bestå av två eller flera skikt med olika geologisk bakgrund, t ex glacial och postglacial lera.

Vid bedömning av lagergränsernas lägen finns vanligtvis endast ett antal punktbestämningar som underlag. Med hjälp av statistiska metoder kan troliga lägen hos lagergränserna mellan punkterna bedömas och därefter en bedömning av trolig lagerföljd göras.

En statistisk bestämning av lagergränser med troliga gränser och troligt variationsområde hos gränserna kan ha stor ekonomisk betydelse vid arbeten i lager av helt olika egenskaper (t ex schakt i lera resp berg).

På grund av den naturliga horisontala skiktningen hos jord kan i de flesta fall val av omfattning av sondering delas in i två separata problem. I vertikalled krävs en indelning av skiktgränserna helst med kontinuerlig registrering av jordlagerföljden. I horisontalled kan indelningen av undersökningspunkterna göras glesare än i vertikalled. Hur mycket glesare beror av jordlagrens vertikala utbredning. Ju mäktigare jordlagerskikt desto glesare mellan undersökningspunkterna.

Undantag finns naturligtvis, t ex om man vill hitta i utsträckning begränsade strukturer som med hänsyn till det geologiska bildningssättet kan förväntas påträffas i ett jordlager. Vid plattgrundläggning finns t ex intresse av att lokalisera eventuella linser eller strukturer som kan förorsaka skillnader i stödsättningar.

## 4.3 Egenskapsbestämning

Den matematiska beskrivningen av osäkerhetsmomentet vid egenskapsbeskrivning kan indelas i olika analysmoment.

- trend
- variation
- variansreduktion

I geotekniken används ofta indirekta bestämningar dvs uppmätning av en egenskap som sedan genom empiri överförs till den sökta egenskapen. Detta samspel mellan egenskaper kallas

- korrelation

## 4.31 Trend

Efter den geologiska sorteringen vill man för varje jordlager även beskriva hur jordparametrarna varierar. Exempelvis förantas den odränerade skjuvhållfastheten hos en högplastisk normalkonsoliderad lera öka med djupet under markytan.

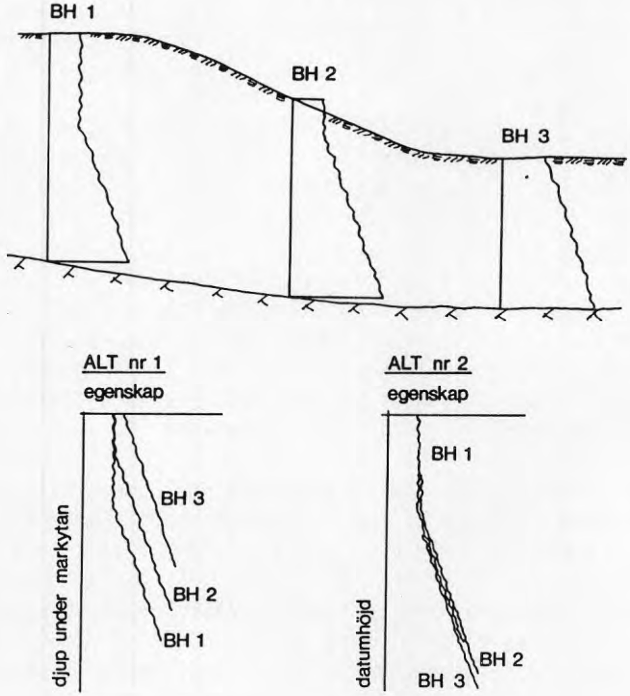



FIG 4.1 Horisontal trend?

Normalt antas en utpräglad trend i vertikal riktning. Men det kan även finnas en trend i horisontalplanet, jordens "bildningsplan" el dyl. Exempelvis kan det i en slänt finnas en horisontal trend om nuvarande markyta utgör referensplan. Om i stället datumhöjd (eller förmodad tidigare markyta) används som referensplan finns ej någon märkbar horisontal trend, jämför Figur 4.1.

**Utsortering av trender är viktigt för att man ska få ett riktigt mått på spridnigen.**

Om i Figur 4,2 hänsyn tas till trenden fås ett visst medelvärde och en viss standardavvikelse. Med hänsyn till trenden fås ett annat medelvärde och en mycket mindre standardavvikelse.

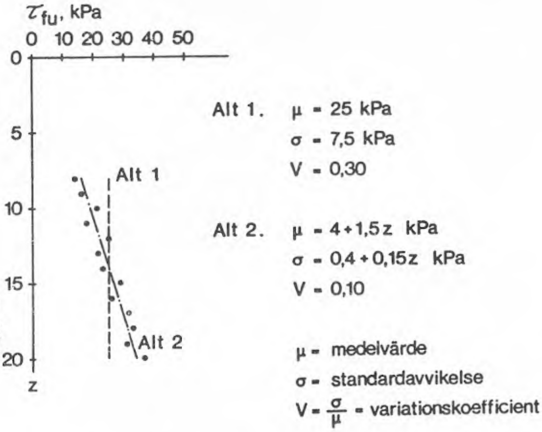



FIG 4.2 Exempel på trend.

Vid analys med statistiska metoder kommer brottrisken för alt 1 att vara mycket större än brottrisken för alt 2. Härvid måste dock observeras att trenden i sig är osäker och att detta osäkerhetsmått ska ingå i beräkningen.

I alt 1 kanske konstruktionen ej kan tillåtas med hänsyn till normerade krav på tillåtna brottrisker medan konstruktionen i alt "kan tilllåtas med god marginal".

För ett rikhaltigt material med försumbar horisontal trend kan den sökta jordparametern bedömas "nivå för nivå". Med nivå menas ett visst djupintervall som är klart begränsat, med de möjligheter till undersökning som finns förslagsvis 0,5 à 1,0 m, se figur 4.3.

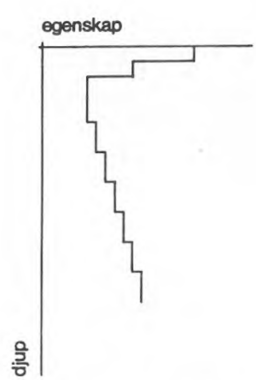
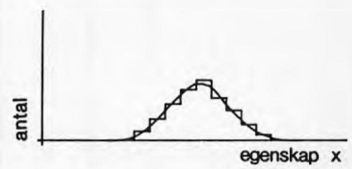



FIG 4.3 Trend enligt "nivå-till-nivå"-metoden.

## 4.32 Variation

Det kännetecknande för en statistisk metod är att variationen och osäkerheten i materialet beskrivs. Då det i geotekniska sammanhang normalt finns ett rymdberoende brukar stokastiska processer användas för att beskriva jordegenskaperna. Teorierna för stokastiska processer har visat sig vara användbara, eftersom matematik och räkneregler finns utvecklade för dessa.

Resultatet från bestämning av en jordparameter kan redovisas i ett histogram. Ett histogram beskrivs med diskreta punkter medan fördelningsfunktionen normalt beskrivs som en kontinuerlig funktion. Fördelningsfunktionens utseende beskrivs med hjälp av de statistiska centralmoementen av olika ordning, se Figur 4.4




$$\mu_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_1)^r \qquad r > 1$$

där $\mu_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

$x_i$ = mätvärde

$n$ = antal prov

$r$ = centralmomentets ordningsnummer

FIG 4.4 Beskrivning av egenskap.

Fördelningsfunktionens medelvärde motsvaras av fördelningens tyndpunkt. Det andra momentet är variansen (kvadraten på standardavvikelsen). De högre momenten kan användas för att beskriva fördelningsfunktionens egenskaper t ex vilken typ av fördelning den motsvarar.

Den uppmätta variationen hos en jordegenskap kan tänkas ha fyra huvudorsaker

1. jordegenskapens naturliga variation
2. mätmetodens spridning
3. fåtalsprovning
4. variation vid utförandet av provning

Det är viktigt att skaffa sig kunskap om en provningsmetods reproducerbarhet samt att veta jords naturliga variationer.

På grund av fåtalsprovningen måste en bedömning göras av hur väl de få proven beskriver jordparametern dvs bedömning av osäkerhet i medelvärde och standardavvikelse.

Vid användning av statistiska metoder inom geotekniken bör fåtalsprovningen kompletteras med tidigare erfarenhet. Hur denna uppdatering kan ske redovisades i kapitel 2.3.

Vid beskrivning av en jordparameter brukar vid förenklad statistisk analys endast medelvärde och standardavvikelse användas.

Vid beskrivningen av variationen hos en jordparameter brukar man oftast redovisa variationskoefficienten som är kvoten av standardavvikelsen och medelvärdet. Variationskoefficienten ger bättre information om jordparameterns variation än enbart standardavvikelsen.

I tabellen nedan redovisas exempel på variationskoefficienter för några vanliga jordparametrar. (Se Lumb,, 1974).

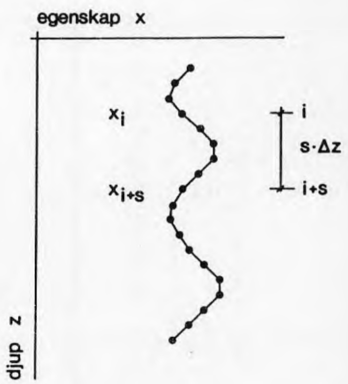
Tabell 4.1. Variationskoefficienter för några jordparamaetrar (Lumb, 1974).

| Egenskap | Variationskoefficient |
|---|---|
| Densitet | 0,05-0,10 |
| Odränerad skjuvhållfasthet | 0,10-0,50 |
| Inre friktionsvinkel | 0,05-0,15 |
| Permeabilitet | 2,00-3,00 |
| Konsolideringskoefficient | 0,25-0,50 |
| Kompressibilitet | 0,25-0,30 |

För att ge stöd för uppdatering med hjälp av tidigare erfarenhet bör lokala erfarenheter ihopsamlas. Detta kommer att vara till ovärderlig hjälp vid framtida användning av statistiska metoder och över huvudtaget vid förståelse av geoproblem.

## 4.33 Variansreduktion

Vid statistisk beskrivning av en jordparameter blir det egenskapen i en punkt (area, volym) som beskrivs. Ofta är det frågan om en sammanvägd egenskap t ex vikten av en lamell eller sammanvägt skjuvmotstånd utefter en glidyta. Detta innebär att den sökta egenskapen är summan av oika delars egenskaper. Summationen av delegenskaper kommer i en större volym (area) att innebära att en del av variationerna kommer att utjämnas så att variationen hos summan är mindre än variationen hos delarna. Ett högt värde hos egenskapen i en punkt inom volymen innebär inte att höga värden föreligger i hela volymen utan troligtvis även låga värden. Därför bör kunskap skaffas om egenskapens punkt-till-punkt-beroende. Genom covariansen fås en uppgift om detta beroende. Covariansen är matematiskt närbesläktad med standardavvikelsen, se Figur 4.5.




$$\mathrm{cov}(s) = \frac{1}{n-s} \sum_{i=1}^{n-s} (x_i - \mu_{x_i})(x_{i+s} - \mu_{x_{i+s}})$$

där $x_i$ = f(z)
$x_{i+s}$ = f(z+s·Δz)
Δz = avstånd mellan mätpunkter (ekvidistans)
n = antal prov
s = heltal
$\mu_{x_i}$ = medelvärdet av egenskapen kring "punkten i"

FIG 4.5 Beskrivning av covariansen.

Genom att utnyttja covariansen eller motsvarande egenskap t ex det s k fluktuationsavståndet kan den egenskap som innebär att variationen minskar (reduceras) då volymen ökar beskrivas. Olsson m fl (1984) redovisar ett sätt att göra denna variansreduktion.

Om den volym (area) man är intresserad av har mindre storlek än som motsvarar fluktuationsavståndet kommer man att få en liten variansreduktion. Om volymen är betydligt större än vad som motsvarar fluktuationsavståndet kommer variansreduktionen att bli betydande.

För att kunna använda statistiska metoder på ett mer realistiskt sätt är det viktigt att ta fram typvärden på fluktuationsavstånd för olika typer av jordar. På grund av det geologiska bildningssättet kan fluktuationsavståndet för en sedimentär jord förväntas vara litet (0,2-2,0 m) i vertikalled och stort (10-100 m) i horisontalled. För en morän kan fluktuationsavstånden förväntas vara små både i vertikal och horisontal riktning. Viktigt är också att vid försök av jämförande karaktär bör proven tas inom ett inbördes avstånd som är mindre än fluktuationsavståndet.

Variansdreduktionen kan beskrivas som

$$\delta_{volym} = \frac{1}{c}\, \sigma_{punkt}$$

där $0,1 < 1/c \leq 1,0$

Användning av variansreduktion kräver speciell utredning. Forskning pågår med syfte att ta fram regler för praktiskt bruk.

## 4.34 Korrelation (se även kap 5.32)

I geotekniska undersökningar mäts ofta en egenskap hos jorden men en annan egenskap är den sökta. Orsaken till detta är att den undersökta egenskapen är lättare att komma åt än den sökta egenskapen.

Med tiden skapas en erfarenhetsbas över hur samspelet (korrelationen) är mellan egenskaperna. Denna korrelation störs av de naturliga variationerna hos de olika egenskaperna, vilket innebär att korrelationen i verkligheten kan vara både bättre och sämre än mätresultaten uppvisar.

Ett exempel på en vanlig geoteknisk korrelation är mellan

- sonderingsmotstånd och hållfasthet och deformationsegenskaper

Korrelationerna innehåller vanligtvis någon form av jordklassificering med en eller flera andra jordegenskaper som ingångsparametrar.

## 4.4 Undersökningsstrategi

Användning av statistiskt baserade metoder för släntberäkningar, speciellt partialkoefficientmetoden, kräver värden på jordparametrarna som är statistiskt definierade. De värden som behövs är dels ett medelvärde för variablen i fråga, dels ett mått som talar om hur stor dess spridning är. I vissa fall kan man tillgodoräkna sig en reduktion av variansen, se kap 4.33, men måste då även skaffa ett mått på hur den geotekniska storheten varierar i rymden. För att optimalt kunna fastställa dessa nödvändiga storheter krävs en strategi för undersökningar i fält.

Statistik löser inga geotekniska problem. Geotekniska förbiseenden kommer att förbli ouppträckta och kan få samma konsekvenser utan statistikens hjälp. Med statistikens hjälp kan man kvantifiera den osäkerhet som ligger i de mätta värdena. Men eftersom statistiken kan kvantifiera osäkerheten kan den också tjäna som bas när man utformar en undersökning som inom givna ramar ger så liten osäkerhet som möjligt.

### 4.41 Varför undersöka?

Hur en undersökning ska läggas upp beror givetvis mest av allt på vad den avser. Det inns ingen universell strategi som kan tillämpas på alla objekt. I mer filosofiska termer kan man ange undersökningens syfte som ettdera eller bägge av:

- Modellbygge
- Modellverifiering

Med modellbygge avses här skapandet av en teoretisk modell av den geotekniska verkligheten, dels en geometrisk modell med de olika lagren och deras utsträckning i rymden, dels kvantifiering av de intressanta geotekniska parametrarna, t ex skjuvhållfastheten. Detta arbete kan endast i mycket speciella fall vara baserat på rena undersökningsresultat. Normalt bygger man upp modellen utgående från geologiskt kunnande och ett fåtal undersökningspunkter eller "arkivborrningar". Det gäller då att skapa en modell som förklarar dessa resultat och som inte strider mot geologisk teori. Hur bra modellen blir, är helt beroende av geoteknikerns erfarenhet och fantasi.

Modellen är inte oberoende av det geotekniska projektets art. Med samma utgångsdata skapar man inte identiska modeller för t ex en pålgrundläggning som för en plattgrundläggning på samma plats, eftersom olika geotekniska förhållanden får olika stor betydelse.

Med modellverifiering avses att bekräfta att den antagna modellen kan vara sann.

Vid modellverifieringen skaffar man ytterligare data för att kontrollera modellens användbarhet för det aktuella arbetet. I denna fas kan statistiska metoder vara användbara dels för att optimera undersökningen, dels för att kvantifiera kvarstående osäkerheter. Verifieringen avser både stratigrafi och kvantifiering av geoparametrar, men man bör observera att den är betingad av syftet med modellen: om man t ex avser göra en plattgrundläggning kommer man inte att ha intresse av att verifiera en djupt liggande bergytas läge.

Sammanfattningsvis kan alltså sägas att undersökningens inriktning är beroende av den hypotetiska jordmodellen och att det inte finns några regler, statistiska eller andra, som kan leda till en entydig modell. Modellen är dessutom beroende av syftet med undersökningen, dvs objektet. När man väl har modellen kan statistiska metoder vara till hjälp när man verifierar den, dvs belägger stratigrafi och egenskaper.

De statistiska metoder som kan komma till användning spänner över ett brett fält. De viktigaste är:

- Beslutsteori
- Sökteori
- Samplingteori
- Tidsserieanalys
- Diskriminantanalys

För geoteknikern är det mer ändamålsenligt att gruppera metoderna efter deras geotekniska användning. Om vi bortser från beslutsteorin som spänner över hela undersökningsprocessen kan man göra följande indelning:

- Bestämning av stratigrafi
- Sökande efter lokala anomalier i ett skikt
- Besstämning av ett skikts egenskaper
- "Klassning" av en jord

### 4.42 Beslutsteori

Beslutsteorin omnämndes helt kort i kapitel 3.33. Beslutsteori är ett sätt att stringent hantera ingenjörsmässiga frågor av typen "Vad är det bästa vi kan göra med de osäkerheter vi har" Vad kan vi förvänta oss för kostnad? Vad är det värt för oss att minska osäkerheterna?"

En beslutsteoretisk beräkning kräver att man kan ange

- Tänkbara handlingsalternativ

- Konsekvenserna av dessa alternativ vid olika tänkbara verkligheter (som inte är kända när beslutet fattas).

- Sannolikheten för varje sådan verklighet att vara den korrekta.

- En beslutsregel för att avgöra vad som är det bästa beslutet.

Om man kan ange dessa olika ingredienser kan man sedan utan större teoretiska problem genomföra en beslutsteoretisk beräkning. En beskrivning av teorin med ett genomfört exempel från geotekniken finns redovisat av Olsson & Stille (1980) som också behandlar problemet med bedömning av värdet av ytterligare information. Beräkningarna redovisas ofta i ett så kallat beslutsträd, se Figur 4.6.

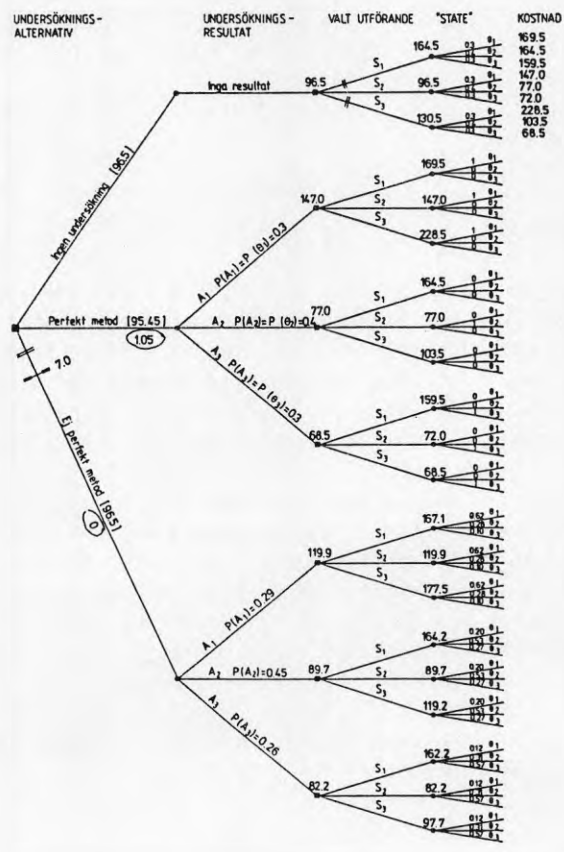



FIG 4.6 Beslutsträd.

Den beslutsteoretiska metodiken kan användas även för annat än planering av geotekniska undersökningar. Den lämpar sig även för analys av åtgärder mot skred, t ex val av övervakningssystem och val av beräkningsmetod när valet står mellan en billigare och en dyr men mer exakt (Maddock och Jordaan, 1982).

Även om teorin för beräkningarna är väl känd används veterligt inte beslutsteori inom svensk geoteknik. Ett program för spontoptimering har dock utvecklats. En övergång till en riskfilosofi inom geotekniken kopplat med en snabb utveckling på smådatorsidan kommer dock troligen att leda till en ökad användning.

## 4.43 Bestämning av stratigrafi

Vid bestämning av stratigrafi från undersökningsdata kan statistiska metoder användas vid lösningen av två olika problem:

a. identifiering av ett givet lager i olika borrhål, konnektering

b. vid bestämning av lagergränsens utseende mellan två borrpunkter, interpolering

### a. Konnektering

Indelningen av jorden i skikt måste göras så att man till respektive skikt hänför jord med likartade geotekniska egenskaper. Vikten av en korrekt konnektering vid framställning av trolig trend har illustrerats i kapitel 4.31. Ofta bör man följa geologiska strata, men det kan vara svårt att identifiera ett lager i olika borrpunkter eftersom det finns en viss variation i sonderingsresultat även i samma jord.

För detta problem som är ännu viktigare inom geologin finns det utvecklad statistisk metodik. Man kan tänka sig två olika angreppssätt. Det ena är att betrakta mätningarna som tidsserier och försöka bestämma skillnaden i vertikalled dem emellan. Det andra är att söka utnyttja så mycket som möjligt av tillgänglig information så att alla uppmätta egenskaper utnyttjas, multivariat-analys, och söka den konnektering som ger minsta totala skillnaden mellan borrhålen.

Datorprogram finns utvecklade för konnekteringsberäkningar. Källkod till ett sådant finns publicerat, se Gordon (1980).

b. Interpolering

Ofta känner man lagergränserna bara i ett mycket litet antal punkter men är intresserad av att känna dem mellan punkterna, t ex för besstämning av pållängder, bergschakt el dyl.

Det vanligaste förfarandet är att man interpolerar rätlinjigt mellan punkterna, något som kan leda till stora avvikelser från verkligheten, se Figur 4.7.

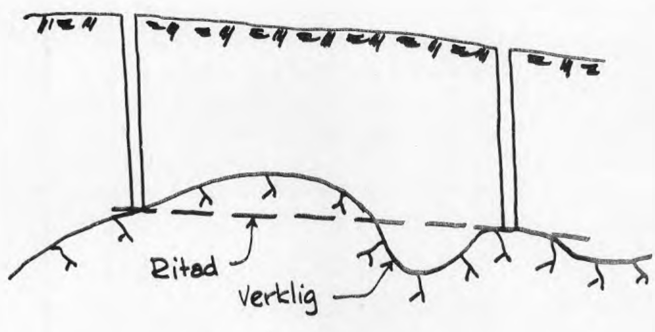



FIG 4.7 Bedömning av stratigrafi.

Om man har en uppfattning om hur t ex bergytan brukar fluktuera i den aktuella regionen kan man utnyttja denna kunskap till att göra en bättre interpolering mellan kända punkter. En effektiv metod att göra detta är så kallad kriging. Vid denna metod beskriver man fluktuationen med ett så kallat semivariogram. Detta är en funktion som beskriver den förväntade skillnaden i egenskapen mellan två punkter som en funktion av avståndet mellan punkterna. Variogrammets utseende speglar hur egenskapen varierar: en jämn tillväxt hos variogrammet tyder på långsamma förändringar i naturen och en tröskel hos variogrammet visar det största avstånd inom vilket ett provresultat har något inflytande, se Figur 4.8.

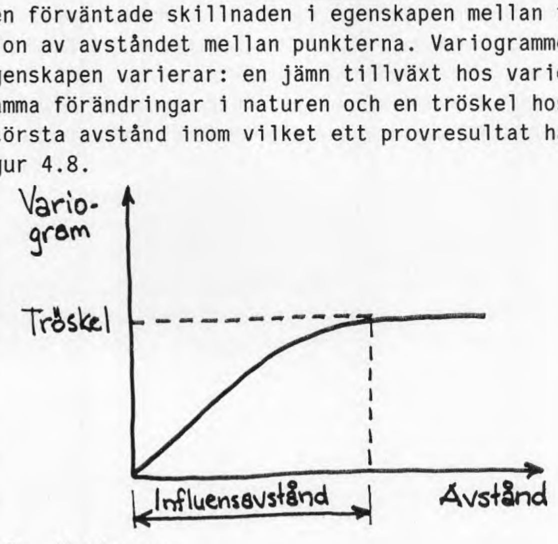



FIG 4.8 Variogram

Variogrammet kan sedan tjäna som en bas vid interpolering mellan mätpunkter. Detta görs så att det skattade värdet Z uttrycks som en viktad summa av de mätta värdena:

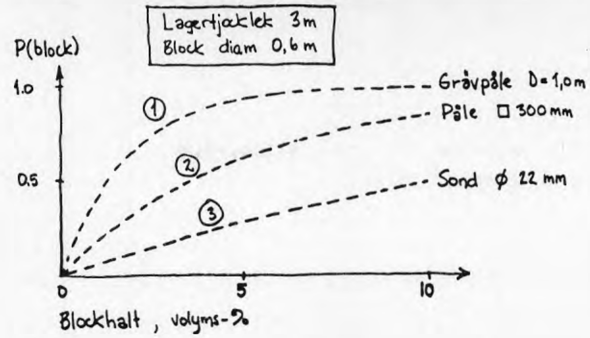
$$Z = \Sigma a_i Z(x_i)$$

I krigingmetodiken gäller att finna bästa uppskattningar på viktkoefficienterna $a_i$ och även en uppskattning av osäkerheten i uppskattningen av Z. Något som gör metoden mycket användbar vid uppläggningen av undersökningsstrategier är att man för att göra uppskattningen av osäkerheten inte behöver provresultaten utan endast undersökningspunkternas lägen. Man kan alltså direkt så hur mycket ett tänkt hål minskar osäkerheten. Man kan även använda metoden för att uppskatta medeldjup längs en linje (spont) eller över en yta (bergschakt). Sådana uppskattningar blir säkrare än en skattning i en punkt, jämför variansreduktion. Ett exempel på användning av kriging för bergdjupsbestämning finns redovisat av Andersson, Olsson & Stille (1984).

## 4.44 Sökning efter lokala anomalier

Ibland är det geotekniska problemet sådant att man vill bestämma risken för att finna lokala anomalier i ett skikt. Det vanligaste exemplet i svenska jordar är blockhinder. Problemet har två aspekter. Dels kan man vilja utforma en undersöking så att man med en viss säkerhet kan uttala sig om risken för blockförekomst, dels kan man i de fall man påträffat ett block i ett enstaka hål vilja säga något om sannolikheten för att vid schakt etc stöta på flera. Sannolikheten för att hitta ett givet mål beror på flera faktorer, målets storlek i förhållande till den sökta ytan, totala antalet borrningar och deras placering inbördes. Bacher (1978) har gjort en genomgång av olika metoder. Några generella slutsatser är svåra att dra, men det står ganska klart att det krävs en stor undersökningsinsats för att hitta ett hinder som är litet i förhållande till den undersökta volymen. Detta illustreras i Figur 4.9, som visar sannolikheten att påträffa block vid dels en sondering, dels slagning av en påle, dels schaktning för en grävpåle. Figuren bygger på en enkel jordmodell med alla block lika stora och fördelade i jorden enligt en s k Poissonfördelning.

Det är också påtagligt att om man inte funnit något block vid en undersökning så ger detta resultat liten information såvida den använda metoden inte har en stor träffsäkerhet, se Figur 4.10.



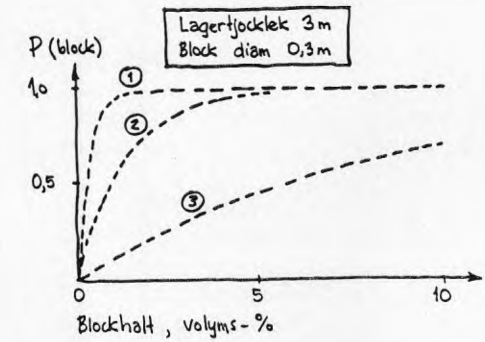




FIG 4.9 Sannolikhet att påträffa block.

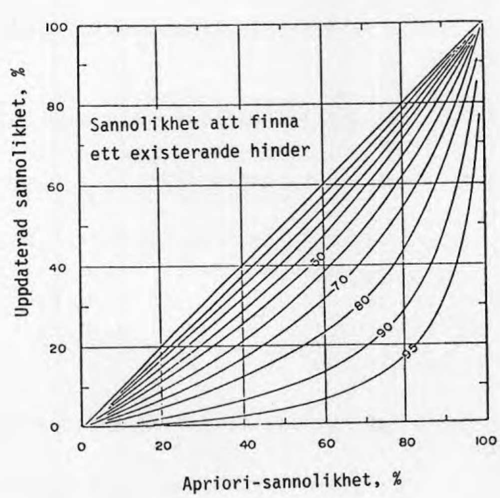



FIG 4.10 Sannolikheten för att hinder finns även om det ej påträffats vid sondering.

Om det kan finnas fler än ett hinder, har Baecher (1978) härlett följande uttryck, där han antagit att man inte har någon à priori-uppfattning om antalet hinder:

$$E(N) = m/L_f \qquad (4.1)$$
$$V(N) = m(1-L_f)/L^2_f \qquad (4.2)$$

där m är antalet påträffade hinder och $L_f$ sannolikheten att hitta ett hinder, dvs metodens effektivitet.

Hindren har antagits vara Poissonfördelade i rymden.

Det förväntade antalet befintliga hinder ökar alltså med antalet påträffade och minskar med ökad effektivitet hos undersökningsmetoden.

### 4.45 Bestämning av ett skikts egenskaper

När jorden indelats i skikt som kan anses geotekniskt homogena behöver man ofta bestämma någon eller några geotekniska egenskaper hos skiktet. I det följande kommer egenskapen att exemplifieras med skjuvhållfastheten.

Vid val av strategi för att bestämma skjuvhållfastheten bör man beakta att strategin blir beroende av den fysikalisk-matematiska modell man använder för att beskriva jordens skjuvhållfasthet. På modellen bör följande krav ställas:

- Den ska ta hänsyn till skjuvhållfasthetens rymdberoende.
- Den ska enkelt kunna "ta in" erfarenhetsdata.
- Det ska gå att uppdatera den varefter man får in mer data.
- Den bör inte medföra alltför stora ändringar i dagens undersökningsstrategi, eftersom resultaten ska kunna användas i deterministisk eller statistisk beräkning.
- Den bör leda till (relativt) enkel statistisk behandling av stabilitetsberäkningarna.

En syntes av kraven ovan blir:

Jorden betraktas som idealt plastisk så att man i brott kan anse att alla element samverkar. Man får därmed en enkel beräkning av det parallellsystem som glidytan utgör och kan även tillgodogöra sig variansreduktionseffekten.

Skjuvhållfastheten beskrivs som en stokastisk process med autokorrelationsegenskaper, se kapitel 2.2, som beskrivs med en lämplig funktion.

Man väljer att använda sådana statistiska funktioner som går lätt att uppdatera med Bayes' teorem. Eftersom uppdateringen är beroende även av likelihood-funktionen, se kapitel 2.3, och denna i sin tur är beroende av bl a provpunkternas placering bör även detta beaktas. Man accepterar subjektiva sannolikheter.

För att göra allt detta möjligt måste man införa begränsningar, se Floss (1983):

- Jorden delas in i klasser

- Skiktindelningen görs så att varje skikt kan anses tillhöra en enda klass.

- För varje klass anses korrelationsavstånd och varians kända medan medelvärdet kan variera.

Skjuvhållfastheten för en jord i klass k i en punkt är sammansatt av två delar, en rymdoberoende del $X_{1k}$ och en rymdoberoende $X_{2k}(z)$ så att följande gäller:

$$X_k(z) = X_{1k} + X_{2k}(z) \tag{4.3}$$

Den rymdberoende delen har medelvärdet 0 så att medelvärdet för $X_k(z)$ är lika med medelvärdet av $X_{1k}$.

Man kan tolka $X_1$ som storskaligt geologiskt varierande med $X_2$ är den småskaliga platsvariationen.

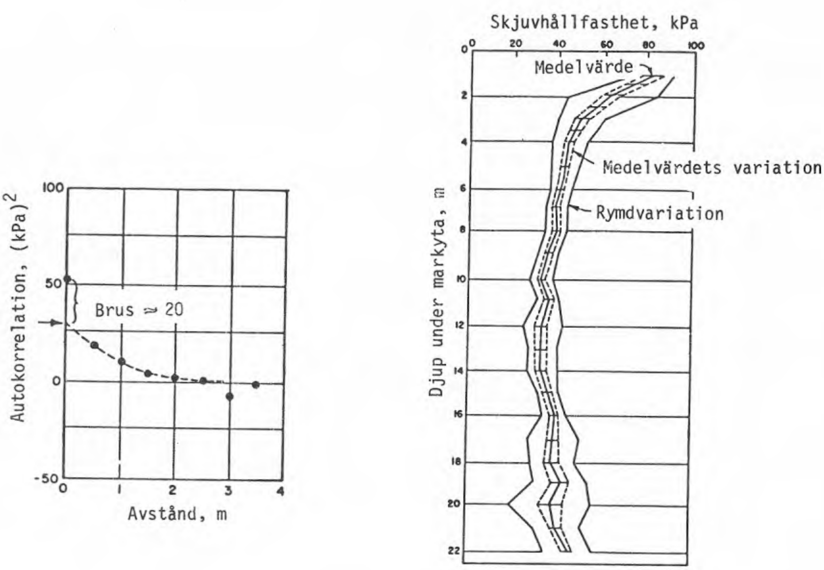
Eftersom man från början inte kan vara helt säker på vilken klass jorden tillhör får man ansätta några möjliga klasser och samtidigt ansätta sannolikheten för att jorden tillhör just den klassen.

Beräkningsvärdet blir det viktade medelvärdet av de olika klassernas skjuvhållfastheter.

När man sedan får ytterligare data används dessa till att dels uppdatera klassvärdena, dels att uppdatera de olika sannolikheterna för klasstillhörigheterna. Man får sedan ett nytt viktat värde att använda i beräkningen. Eftersom detta skattats ur ett litet antal prov måste hänsyn tas till den statistiska osäkerheten. Detta kan göras genom att man använder sig av den s k prediktionsfördelningen, där denna osäkerhet "bakats in" så att man fått en flackare fördelning.

När det gäller provtagningen finns det ett dilemma. För att få en enkel statistisk behandling och för att få ut maximal information bör proven vara så långt ifrån varandra att de är statistiskt oberoende, dvs de bör ligga på minst fluktuationsavståndet från varandra, se Vanmarcke (1977). Samtidigt vill man i många fall, t ex vid grundläggningar placera dem inom det aktuella objektets gränser. Detta val måste göras utifrån erfarenhetsmässiga principer, eftersom två olika syften samtidigt ska uppnås, modellverifiering och egenskapsbestämning.

Forskning har visat, att man med den varians hos de geotekniska parametrarna som kan bestämmas ur en rimligt omfattande provtagning får orimligt höga värden på brottsannolikheten om man jämför med verkligt utfall. Detta kan tolkas så att erfarenhetsvärdena spelar en stor roll vid tillämpningen av Bayes' teorem och att de bör tillmätas större tyngd än vad som vanligen görs. En annan förklaring är att de geotekniska mätningarna ofta är behäftade med mätfel och att man bör ta bort detta "brus" innan man bestämmer variansen. Ett exempel på hur detta kan göras lämnas av Baecher (1983), se Figur 4.11.




a. Reducering av varians (reduktionen i exemplet är 40%)

b. Bedömd jordprofil

FIG 4.11 Borttagning av brus från mätresultat. (Baecher, 1983).

Ett annat problem gäller bestämningen av korrelationsavstånd, se Vanmarcke (1977). Troligen är det viktigare att få fram en bra metod för bestämning av det vertikala korrelationsavståndet än det horisontala, eftersom detta bör vara lättare att uppskatta subjektivt. Trycksondering verkar vara den mest lämpade metoden, men i lösa leror krävs en utrustning med bättre upplösning än dagens standard.

## 4.46 Klassning av jord

Att rätt klassa en jord har stor betydelse i den föreslagna modellen. Helst bör man kunna utnyttja all tillgänglig information, inte bara skjuvhållfasthet utan även vattenkvoter etc.

Det finns sätt att med statistisk teknik göra detta. Detta görs genom att man etablerar en funktion av de mätta egenskaperna som är sådan att den på bästa sätt särskiljer två klasser. När funktionen är känd beräknar man dess värde för det aktuella provet, och detta värde avgör sedan till vilken klass prover ska föras.

En möjlig teknik är diskriminantanalys, men det finns även metoder som är baserade på beslutsteori.

En intressant tillämpning är att klassa ett område som skredfarligt eller ej med dessa metoder. Härvid kan man samla in ett antal faktorer som möjligen kan vara indikatorer på skredfarlighet och ta fram en skredriskfunktion som sedan kan användas för klassning av en slänt.

# 5. PARTIALKOEFFICIENTMETODEN I PRAKTISK TILLÄMPNING

## 5.1 Det geotekniska problemet

### 5.11 Inledning

En byggnadskonstruktion ska dimensioneras så att

- en tillfredsställande säkerhet finns mot brott (brottgränstillstånd)
- den fungerar tillfredsställande vid normal användning (bruksgränstillstånd).

Dessutom ska konstruktionen vara beständig eller skyddas och underhållas vid förväntad miljöpåverkan.

Följande definitioner av gränstillstånden kan göras:

a) Brottgränstillstånd: en konstruktion eller en konstruktionsdel är på gränsen till brott av något slag.

b) Bruksgränstillstånd: en konstruktion eller konstruktionsdel är på gränsen att inte uppfylla något eller några av de krav som ställs med hänsyn till konstruktionens funktion under normala förhållanden.

Dimensionering av en konstruktion innebär att man vanligtvis genom beräkningar visar att effekten av stabiliserande faktorer, R, är större än den samlade lasteffekten S, dvs att

$$R > S \tag{5.1}$$

Den s k brottekvationen har utseendet

$$g = R - S = 0 \tag{5.2}$$

Byggnormen specificerar hur mycket större motståndet, R, minst måste vara än lasteffekten, S, i olika säkerhetsklasser genom angivna värden på säkerhetsindex $\beta$ för att uppfylla samhällets krav på betryggande stabilitet, stadga och beständighet.

Faktorerna R och S är i princip stokastiska variabler. De kan beskrivs med statistiska parametrar, t ex medelvärde och varians, dvs värden som beskriver tyngdpunkten hos (sannolikhets)täthetsfunktionen och spridningen runt denna. Ju större osäkerhet en variabel har, desto större varians, spridningsmått har den.

Vid en stokastisk dimensionering är dimensioneringskravet att sannolikheten att lasteffekten ska överstiga motståndet är mindre än en tillåten sannolikhet $p_{till}$:

$$p(R<S) \leq p_{till}$$

Partialkoefficientmetoden innebär att de stokastiska variablerna R och S ersätts av dimensionerande värde på bärförmågan och lasteffekten, $R_d$ och $S_d$, så att dimensioneringskravet blir

$$R_d \geq S_d \tag{5.3}$$

De dimensionerande värdena beräknas med hjälp av en partialkoefficient, $\gamma$, och ett karakteristiskt värde, $f_k$ resp $F_k$, på den stokastiska variabeln R resp S, dvs

$$R_d = \frac{f_k}{\gamma_m} \tag{5.4}$$

$$S_d = \gamma_f F_k \tag{5.5}$$

Partialkoefficienten $\gamma$ blir därvid beroende på osäkerheten i variabeln, dvs dess varians samt kravet på säkerhet.

Kraven i brottgränstillståndet innebär att brottsannolikheten för en konstruktion ska vara mindre än ett givet acceptabelt värde för en formell sannolikhet. I Nybyggnadsregler (NR) används säkerhetsindex $\beta$ som ett ställföreträdande mått på den formella sannolikheten.

Samhällets krav på betryggande stabilitet, stadga och beständighet är knutet till risken för personskador som kan väntas uppkomma vid brott i en byggnadsdel. Följande är angivet i NR.

| Säkerhetsklass | Konsekvens av brott<br>Risk för: | Säkerhetsindex |
|---|---|---|
| 1. (Låg) | Ringa personskada | 3,71 |
| 2. (Normal) | Någon personskada | 4,26 |
| 3. (Hög) | Stor personskada | 4,75 |

I vissa fall ska indelningen av konstruktioner i säkerhetsklasser även ske utifrån förväntade samhällsmässiga förluster.

Samhällets krav på bruksgränstillståndet är mindre tydligt beskrivet i NR, dels vad gäller själva kraven, dels vad gäller den acceptabla nivån för överskridande. Enligt AK 79/81 kan $\beta$-värden på 1 à 2 anses rimligt om ett överskridande endast medför måttlig olägenhet. Om en konstruktion blir helt oanvändbar vid ett överskridande eller konsekvens i övrigt blir omfattande, bör värdet på $\beta$ ökas.

Även om en norm ställer vissa baskrav vid dimensionering i bruksgränstillståndet så rekommenderas att användandet av ett högre $\beta$-värde utreds av den ansvarige konstruktören för att eventuellt minska behovet av framtida justeringar och underhåll.

## 5.12 Partialkoefficentmetodens tillämpning inom geotekniken

Geotekniken ställer speciella krav på utformningen av en sannolikhetsbaserad dimensioneringsmetod.

- Till skillnad från övrig konstruktionsverksamhet är byggmaterialet, dvs jorden och berget, givet och kan i allmänhet ej enkelt ändras, förbättras eller bytas ut.
- Bestämning av jords och bergs egenskaper sker genom fåtalsprovning.
- Utvärdering av egenskaperna sker ofta med stöd av tidigare erfarenhet.

Införandet av partialkoefficentmetoden ställer å sin sida krav på geotekniken.

- Jordens egenskaper måste beskrivas med statistiska termer.
- Beräkningsmetodernas osäkerhet måste kvantifieras.
- Dagens empiriska beräkningsmetoder, som i vissa fall är baserade på bruksgränsobservationer men används för brottsgränsdimensionering, måste omformas och uppdelas på de olika gränstillstånden.

Storleken av partialkoefficienten $\gamma_m$ i ekvation (4) beror på graden av säkerhet i uppskattningen av jordens egenskaper, dvs lägre partialkoefficient vid säkrare uppskattning.

Detta innebär att en undersöknings kvalitet och omfattning samt graden av erfarenhet ska återspeglas i partialkoefficientens storlek.

Grova fel och sådana fel som ej förutses vid dimensionering är en mycket betydande grupp bland orsaker till oönskat beteende hos konstruktioner. Följande grova fel kan förekomma:

- o De verkliga geotekniska förhållandena avviker på ett markant sätt från vad som antogs vid dimensioneringen.
- o Dimensioneringen har ej beaktat alla möjliga brottmekanismer.
- o Arbetsutförandet följer ej de uppgjorda arbetshandlingarna eller det blir brister i arbetsutförandet som beror på okunskap om konstruktioners verkningssätt.
- o Nyttjande och underhåll av konstruktionen följer ej uppgjorda handlingsplaner.

Åtgärder mot grova fel är främst kontroll. Man kan även överväga att minska tillåten brottsannolikhet, men det är inte möjligt att (besluts)-teoretiskt motivera detta när det gäller enstaka stora fel.

Det är ändock författarnas åsikt, att man bör höja den generella saäkerheten i de fall man har en begränsad kontroll, så att man låter partialkoefficienternas storlek bli beroende av kontrollens omfattning och inriktning. Motivet för detta är att man genom en ökad kontroll kan undvika en allmänt nedsättande effekt av flera smärre, oförutsedda fel, som man annars får söka gardera sig mot med en allmän höjning av konstruktionens bärförmåga.

Geoteknikens speciella förutsättningar ställer även krav på kontrollens utformning.

För stål- och betongkonstruktioner gäller i princip att en byggplatskontroll ska verifiera att avsett material och kvalitet levereras och används på avsett sätt. För geotekniken innebär i stället en byggplatskontroll att riktigheten i de gjorda antagandena kontrolleras samt att de faktorer som ej kunde undersökas i förundersökningen studeras. Givetvis innebär den geotekniska byggplatskontrollen att resultatet av gjorda observationer återspeglas i konstruktionen så att den revideras m h t den ökade kunskapen.

I NR finns angivet de förhållanden som är gynnsamma respektive ogynnsamma vid val av partialkoefficient $\gamma_m$. Ogynnsamma förhållanden kräver givetvis en högre partialkoefficient. Tabellen redovisas nedan:

TABELL 5.1. Förhållanden som ska beaktas vid val av $\gamma_m$ (BFS 1988:18, 6:3544).

| Gynnsamma förhållanden | Ogynnsamma förhållanden |
|---|---|
| Materialegenskapen har erfarenhetsmässigt liten spridning. | Materialegenskaper har erfarenhetsmässigt stor spridning. |
| Provningsresultaten från geoteknisk undersökning visar normal spridning. | Provningsresultaten från geoteknisk undersökning visar större spridning än normalt. |
| Undersökningarnas omfattning är stor och medger en god bestämning av materialegenskapen. | Undersökningarnas omfattning är liten. |
| Undersökningarna är utförda med väldokumenterade metoder som ger reproducerbara resultat. | Undersökningarna är utförda med metoder som visar dålig reproducerbarhet eller metoder med begränsat erfarenhetsunderlag. |
| Kontrollplanen föreskriver tillläggskontroll av materialegenskapen. | Ingen tilläggskontroll av materialegenskapen. |
| Liten osäkerhet vid översättningen från provningsresultat till sökt egenskap hos materialet. | Stor osäkerhet vid översättningen från provningsresultat till sökt egenskap hos materialet. |
| Brottet är segt. | Brottet är sprött. |

Ett ytterligare exempel på ogynnsamma förhållanden, som ej nämns i tabellen ovan, är om brottgränsuttrycket innehåller fler motståndsvariabler som inte med säkerhet kan antas vara okorrelerade. Ett sådant fall kan vara när tunghet och hållfasthet är korrelerade och båda är mothållande. Ett annat är när jorden består av flera lager med korrelerade egenskaper.

En väsentlig faktor är förhållandet mellan belastningsytans storlek och en karakteristisk längd på den naturliga variationen av jordens egenskap. En stor yta har en tendens att jämna ut variationer och är mindre känslig för ett lokalt område med skilda egenskaper än vad en liten yta är. Den faktor som beaktar detta kallas **variansreduktionsfaktorn 1/c**. En annan viktig faktor är om undersökningen är gjord inom den aktuella belastningsytan eller om den ligger så långt ifrån att man kan anta att det finns avvikelser i jordens medelhållfasthet.

## 5.2 Partialkoefficientmetoden

### 5.21 Allmänt

Partialkoefficientmetoden innebär att dimensionerande värden på bärförmågan och lasteffekten beräknas, dvs $R_d$ och $S_d$. I det enklaste fallet ingår en stabiliserande faktor och en last. Den dimensionerande bärförmågan $R_d$ och lasteffekten $S_d$ kan då direkt beräknas enligt följande.

Den dimensionerande bärförmågan, $R_d$, beräknas genom att ett karakteristiskt värde på bärförmågan, $f_k$, divideras med en given partialkoefficient, $\gamma_m$. Den dimensionerande lasteffekten $S_d$ beräknas genom att ett karakteristiskt värde på lasten, $F_k$, multipliceras med en given partialkoefficient $\gamma_f$.

Dimensioneringsvillkoret blir då

$$R_d \geq S_d \qquad \text{jfr ekv} \quad (5.3)$$

eller

$$\frac{f_k}{\gamma_m} \geq \gamma_f F_k \qquad (5.6)$$

Enligt NR ska säkerhetsklassen beaktas genom att en extra partialkoefficient, $_n$, införs vid beräkning av den dimensionerande bärförmågan.

$$R_d = \frac{f_k}{\gamma_m \gamma_n} \qquad (5.7)$$

Partialkoefficienten $\gamma_n$ är enligt NR för de olika säkerhetsklasserna följande:

| Säkerhetsklass | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $\gamma_n$ | 1,0 | 1,1 | 1,2 |

### 5.22 Teoretiskt samband med β-metoden

Normalt ingår flera stabiliserande faktorer och flera laster vid beräkning av motstånd och lasteffekt. Fördelen med partialkoefficientmetoden är att osäkerheter kan och kan beaktas där de hör hemma. I partialkoefficientmetoden kan i princip varje ingående faktor vara försedd med en egen partialkoefficient som beskriver risken för att det verkliga karakteristiska värdet avviker ogynnsamt från det antagna värdet. Det karakteristiska värdet är inte karakteristiskt i någon fysikalisk synpunkt. Det är definierat i statistiska termer, t ex som 5-percentilen.

Med hjälp av matematisk statistik kan samband erhållas mellan partialkoefficientens storlek och risken för oönskat uppträdande. Exempelvis anger Thoft-Christensen & Baker (1982) följande för motstånd:

$$\gamma_{m,i} = \frac{X_{k,i}}{\mu_i + \alpha_i \beta \sigma_i} \tag{5.8a}$$

Motsvarande för last blir

$$\gamma_{f,j} = \frac{\mu_j + \alpha_j \beta \sigma_j}{X_{k,j}} \tag{5.8b}$$

där g = R-S och $X_i$ för i = 1 till i är stabiliserande faktorer samt $X_j$ för j = j till n är pådrivande samt där $\mu_i$ och $\sigma_i$ är medelvärdet resp standardavvikelsen för parametern $X_i$. Faktorn $\alpha_i$ beror på brottekvationens utseende (motståndsvariabler ger negativa $\alpha$-värden). Säkerhetsindex $\beta$ är knutet till säkerhetsklassen, eftersom $\beta$ är ett mått på brottrisken.

Ekv 5.8a och 5.8b förutsätter att varje osäker faktor ges en partialkoefficient.

Modellosäkerheten kan beaktas med en egen stokastisk variabel och på så sätt få en egen partialkoefficient.

Om man fastställer fixa partialkoefficienter för en konstruktionsklass förenklas dimensioneringen på bekostnad av en överstark konstruktion i förhållande till en konstruktion beräknad med den optimala $\beta$-metoden.

Om man driver förenklingen så långt som möjligt behöver man endast beräkna variablernas medelvärde (förutsatt att man inte vill tillgodoräkna sig variansreduktionen!). En så långt driven förenkling sker dock till priset av mycket konservativa konstruktioner.

Den unika relationen enligt ekvation (5.8a och b) mellan partialkoefficient och karakteristiskt värde innebär att dessa är kopplade till varandra, dvs olika definitioner på karakteristiskt värde ger olika värden på partialkoefficienten.

Om det karakteristiska värdet väljs som medelvärdet erhålls efter förenkling

$$\gamma_{m,i} = \frac{1}{1+\alpha_i \ \beta \ V_i} \tag{5.9a}$$

$$\gamma_{f,j} = 1 + \alpha_j \ \beta \ V_j \tag{5.9b}$$

där $V_i$, $V_j$ = variationskoefficienten för resp motstånds- och lastfaktor.

Exempel på hur β-beräkning görs och hur man kan beräkna partialkoefficienter finns i BILAGA 2.

I NR beaktas såväl modellosäkerheten som materialosäkerheten i en gemensam partialkoefficient $\gamma_{m,norm}$. Vidare behandlas kravet på ökad säkerhet i de olika säkerhetsklasserna med en speciell partialkoefficient.

Omfattningen och utformningen av kontrollåtgärderna bör beaktas vid valet av partialkoefficient för att man (enligt författarnas uppfattning) ska erhålla en sund dimensionering och utförande.

När det gäller jordegenskaperna är det även möjligt att ta fram teoretiskt baserade riktlinjer för hur mycket kontrollen ska påverka partialkoefficienterna.

## 5.3 Stokastisk jordmodell

### 5.31 Inledning

Syftet med modelleringen av jorden är att jordparametrarna ska ingå i en beslutsprocess, där man beslutar om dimensionering av en geokonstruktion. Att vi modellerar jorden med en stokastisk modell beror inte på att jorden i sig har stokastiska egenskaper utan på att vi inte kan bestämma dess (deterministiska) egenskaper med en sådan noggrannhet att vi kan ange jordegenskaperna i detalj.

En stokastisk jordmodell måste uppfylla och beakta följande villkor:

- o provningens omfattning och kvalitet
- o värdet av lokal erfarenhet

- o möjlighet till medelvärdesbildande process
- o undersökningspunkternas läge i förhållande till aktuell belastningsyta.

De stokastiska modellerna kan vara **med** eller **utan** rymdberoende. Modeller utan rymdberoende beskriver jorden som en samling oberoende små element, "enhetselement", som vart och ett beskrivs av en stokastisk variabel.

Den jordvolym som ingår i en beräkning av exempelvis en släntstabilitet betraktas som en summa av sådana element. Men en modell som beskriver jorden som bestående av ett antal oberoende element är ej särskilt verklighetstrogen. Vi förväntar oss att jordegenskaperna ska variera gradvis från punkt till punkt och inte att de kastar från höga till låga värden något som den oberoende modellen tillåter.

Modeller med rymdberoende har fördelen att osäkerheten i vår kunskap om jordens egenskaper minskar ju större jordvolym vi betraktar (variansreduktion). Det krävs dock viss kunskap om bakomliggande idéer och förståelse av begrepp som korrelation m m.

## 5.32 Begrepp

**Stokastisk process**

Ett statistiskt fenomen som varierar i tiden eller i rummet enligt sannolikhetsteoretiska lagar kallas en stokastisk process.

Den verkliga naturen är deterministisk men vi beskriver jorden med en stokastisk modell (stokastisk process). Ett av de möjliga utfallen av den stokastiska processen representerar verkligheten. För att vi ska kunna använda modellen praktiskt behöver vi kunna bestämma medelvärdet och hur dess korrelationsstruktur ser ut dvs enligt vilka lagar rymdvariationen sker.

**Korrelation** (se även kap 4.34)

Två stokastiska variabler kan ha ett inbördes samband som är av stokastisk natur. Exempelvis kan ökad densitet i en sand innebära en ökad friktionsvinkel. Hur starkt detta samband mellan variablerna är kan uttryckas med korrelationskoefficienten.

$$\rho = \frac{E\,[(X-\mu x)\;(Y-\mu y)]}{\sigma_x\;\sigma_y} \tag{5.10}$$

där $\sigma_x, \sigma_y$ = standardavvikelse
E ( ) = förväntat värde
$\mu_x, \mu_y$ = medelvärde av variabeln X resp Y.

**Korrelationsfunktion, variogram, fluktuationsavstånd**

Det finns tre olika sätt att beskriva korrelationsstrukturen hos jord, nämligen genom

- o Korrelationsfunktionen
- o Variogram
- o Fluktuationsavstånd

1) Korrelationsfunktionen

Korrelationen mellan två näraliggande värden beskrivs som en funktion av avståndet mellan punkterna.

Korrelationsfunktionen är symmetrisk kring axeln t=0 (normalt ritas endast ena halvan). För värdet t=0 har korrelationsfunktionen värdet 1.

Korrelationsfunktionen kan karakteriseras genom det s k korrelationsavståndet vilket är avståndet från t=0 till det värde på t där korrelationsfunktionen antar värdet 1/e, där e = basen för den naturliga logaritmen. Ju mindre korrelationsavståndet är, desto snabbare varierar storheten i rymden.

2) Variogram

Variogrammet kommer ursprungligen från geostatistiken, som utvecklats för gruvändamål, främst för att bedöma tillgänglig mineralkvantitet. Variogrammet betraktar skillnaden i värde hos två punkter och beskriver skillnadens korrelation.

3) Fluktuationsavstånd

Fluktuationsavståndet har införts av Vanmarcke (1977). Fluktuationsavståndet är det avstånd inom vilket man kan förvänta sig en relativt stor korrelation mellan egenskapen i punkterna.

5.33 Experimentell bestämning av korrelation

När det gäller experimentell bestämning av jords korrelationsstruktur ur provdata gäller:

1. Det krävs ett mycket stort antal prov för att bestämma korrelationen, särskilt om man vill bestämma typen av korrelationsfunktion eller om man vill bestämma en tredimensionell korrelation med olika korrelationsavstånd längs de olika axlarna.

2. Man kan inte beräkna korrelationen för avstånd som är mindre än det minsta provavståndet. En alltför gles provtagning gör att man helt kan missa en småskalig variation.

I praktiken är beräkningarna av korrelationsfunktionen svåra att utföra. Två villkor måste nämligen vara uppfyllda: medelvärdet ska vara konstant och variansen ska vara konstant. För att få ett konstant medelvärde kan man behöva dra bort en deterministisk trend från basdata och sedan beräkna korrelationsfunktionen för de återstående värdena. Om variansen inte är konstant kan man behöva göra en transformation av data, t ex genom logaritmering. Ytterligare och i geotekniken vanliga komplikationer kan vara att man inte har konstant avstånd mellan provpunkterna.

Vid bestämning av fluktuationsavstånd har Vanmarcke (1983) angett två metoder som är användbara i praktiskt geotekniskt bruk.

Metod a

I den första metoden har man provdata dels från punkter långt isär, dels från tättliggande punkter inom ett eller flera områden. Man beräknar en global varians (baserat på de glesa datapunkterna) och variansen för avvikelserna från det lokala medelvärdet inom delområdena. Kvoten mellan den senare variansen och den globala variansen är teoretiskt lika med $1-\gamma(T)$, där $T$ är delområdenas längd. Härigenom är variansfunktionen $\gamma(T)$ känd för avståndet $T$. Om man sedan antar någon viss analytisk modell för variansfunktionen kan fluktuationsavståndet beräknas.

Metod b

Om man har en kontinuerlig registrering av den lokala medelvärdesprocessen kan man bestämma fluktuationsavståndet ur medelavståndet mellan uppåtgående medelvärdeskorsningarna ("mean zero-upcrossings").

För geotekniskt bruk synes metod a vara mest lämplig för bestämning av horisontalt fluktuationsavstånd och metod b för bestämning av vertikalt fluktuationsavstånd med t ex hjälp av trycksond med automatisk dataregistering.

En intressant fråga beträffande metod b är huruvida man kan använda ett (automatiskt beräknat) korrelationsavstånd för att identifiera jordarten.

Uppgifterna i litteraturen över korrelationsmått är få och osäkra. Tills vidare rekommenderas att man för praktiska tillämpningar väljer mått på säkra sidan, dvs väljer stora fluktuationsavstånd som ger liten variansreduktion. Följande fluktuationsavstånd föreslås:

| | |
|---|---|
| Sand vertikalt: | 0,1-0,5 m (beroende på sedimentationsmiljö) |
| Sand horisontalt: | 1-10 m (beroende på sedimentationsmiljö) |
| Lera vertikalt: | 0,1-2 m |
| Lera horisontal: | 5-50 m |

## 5.34 Variansreduktion

En stokastisk jordmodell som ska användas vid enkla beräkningar med partialkoefficientmetoden måste uppfylla vissa krav:

- Den måste vara enkel
- Den måste ansluta till dagens praxis för provtagning
- Den får inte kräva komplicerade statistiska beräkningar
- Förhandskunskap ska kunna utnyttjas
- Variansreduktion ska tillgodogöras.

Principen för variansreduktion har tidigare beskrivits, se t ex Olsson, Bengtsson, Berggren & Stille (1984) och omnämnts i kap 4.33 ovan. Variansreduktion innebär att osäkerheten i elementens medelvärde blir mindre än osäkerheten hos de enskilda elementen, eftersom extremt stora och extremt små enskilda värden kommer att "ta ut" varandra. Denna utjämning blir större ju fler element som ingår i medelvärdet. Exempel på sådana fysikaliska processer är t ex skjuvhållfastheten hos en glidyta om man antar att brottmekanismen är plastisk. Ett annat exempel är tyngden hos en stor jordvolym, som kommer att ha en mindre variationskoefficient än tyngden hos små volymer (t ex prov på vilka densiteten baserats).

Väsentligt är att de fysikaliska processerna måste vara av medelvärdesbildande typ. De får inte bero av något extremvärde, t ex lägsta värdet på skjuvhållfastheten vid sprött brott. Korrelationen får betydelse när det gäller att bestämma variansreduktionens storlek. Om korrelationsavståndet är stort jämfört med den sträcka över vilken medelvärdesbildningen sker, är det sannolikt att alla ingående delelement avviker från medelvärdet på samma sätt, dvs de kommer inte att "ta ut" varandra. Motsatsen gäller om sträckan är stor i förhållande till korrelationsavståndet. Då kommer vi att hinna få ett stort antal svängningar kring medelvärdet och följaktligen en stor reduktion av variansen.

Variansreduktionen är beroende dels av geometrin hos den yta eller volym, för vilken den ska beräknas, dels av den antagna korrelationsstrukturen hos jorden. Med korrelationsstruktur avses här såväl korrelationsfunktionens typ och parametrar som eventuell anisotropi. Den får alltså i princip beräknas för varje enskilt fall. I praktiken kommer tre metoder att vara tillämpbara vid variansreduktion:

Variansfunktion enligt Vanmarcke
Numerisk integration
Färdiga nomogram.

Manuella beräkningar är svåra och tidskrävande. Sannolikt kommer färdiga datorprogram och nomogram att användas i praktiskt bruk. Exempel på arbetsgång vid numerisk beräkning av variansreduktion ges i BILAGA 1.

### 5.35 Förslag till statistiskt baserad förenklad jordmodell

En förenklad jordmodell har föreslagits av Olsson (1986). I den föreslagna modellen betraktas jorden som en stokastisk process. För att möjliggöra ett praktiskt beräkningsförfarande görs följande förenklande antaganden:

Medelvärdet är konstant men inte känt
Variansen kring medelvärdet är känd
Fluktuationsavståndet är känt

Med dessa antaganden läggs all osäkerhet som skall bestämmas ur provtagningen på medelvärdet. Detta ger en enkel beräkningsmetod för uppdatering när man får tillgång till provdata. Förutsättningen för uppdateringen är dock att man tar proven så långt isär att de kan betraktas som stokastiskt oberoende.

### 5.351 Tillämpning av föreslagen jordmodell

#### a. Enkla fallet

I det enklaste fallet arbetar man i en sådan skala att man kan anse att medelvärdet är konstant. Tillämpningen av modellen har beskrivits tidigare och sker enligt vad som visas på Figur 5.1.

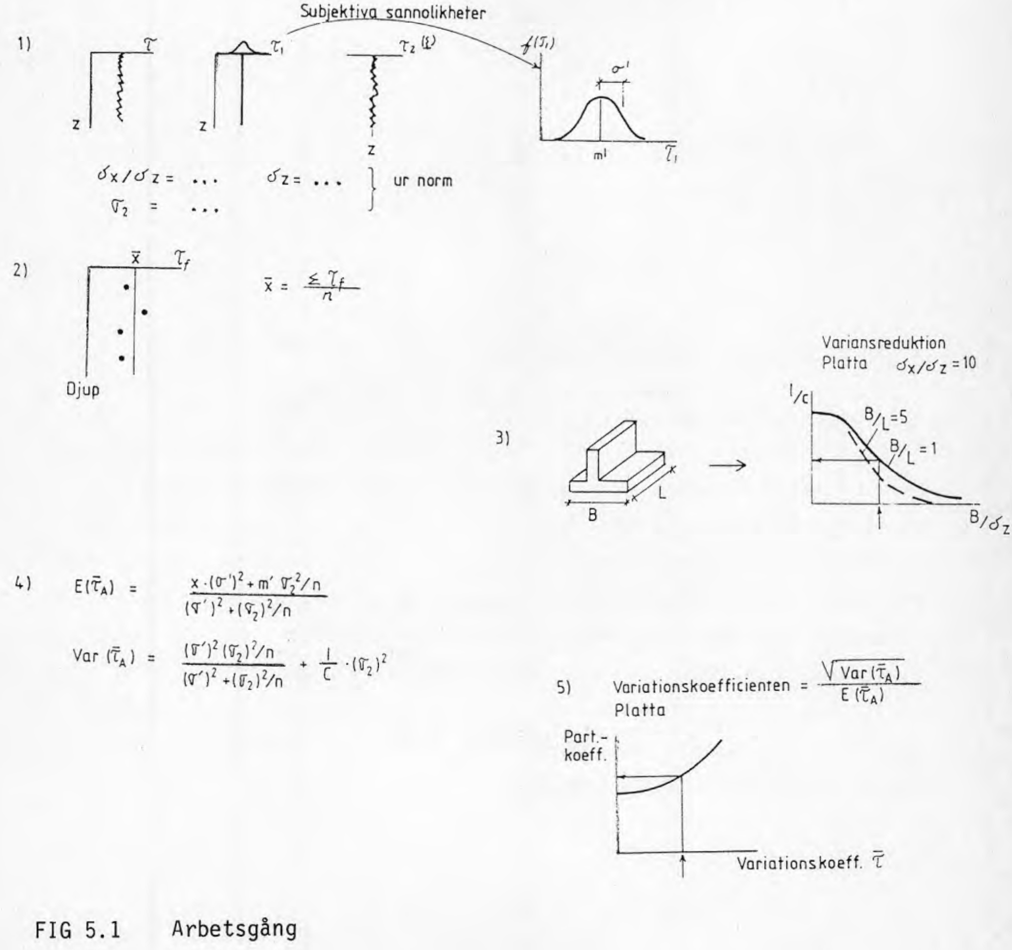



FIG 5.1 Arbetsgång

Arbetsgången vid uppdatering:

1) Beskriv med hjälp av subjektiva snnolikheter förhandskunskapen om medelvärdet $\mu$ som en normalfördelning $N(m', \sigma')$. (Medelvärdet $\mu$ har ett vänteväirde $m'$. Medelvärdets standardavvikelse är $\sigma'$.)

2) Tag n stycken prov. Provresultaten är $x_1, x_2 \ldots x_n$. Beräkna provens medelvärde $\bar{x} = \frac{\Sigma xi}{n}$.

3) Bestäm variansreduktionsfaktorn $\frac{1}{c}$. Uppdatera fördelningen för medelvärdet så att vi går från m' till m" och från $\sigma'$ till $\sigma''$, dvs vi beskriver efter uppdateringen medelvärdet $\mu$ som normalfördelat $N(m'',\sigma'')$.

$$\frac{1}{(\sigma'')^2} = \frac{1}{(\sigma')^2} + \frac{n}{(\sigma_2)^2} \quad \text{och} \tag{5.11}$$

$$m'' = \left[(1/\sigma')^2 \cdot m' + (n/\sigma_2{}^2)\bar{x}\right] \;/\; \left[(1/\sigma')^2 + n/(\sigma_2)^2\right] \tag{5.12}$$

Rymdmedelvärdet över ytan A blir normalfördelat med momenten

$$E\left[\bar{\tau}_A\right] = m'' \tag{5.13}$$

$$Var\left[\bar{\tau}_A\right] = (\sigma'')^2 + \frac{1}{c}\,\sigma_2{}^2 \tag{5.14}$$

där $\frac{1}{c}$ är variansreduktionsfaktor.

I många praktiska fall är det aktuella området så stort att antagandet om konstant medelvärde är orealistiskt. För en stringent behandling av problemet krävs en mer utvecklad modell. Denna blir dock avgjort mer komplex ur statistisk synpunkt och därför kanske ägnad att användas bara vid svåra problemställningar. För många användare av partialkoefficientmetoden kan den enkla modellen vara tillräckligt svår. Med vissa modifikationer i användningen bör dess tillämpning kunna utvidgas till att i viss mån beakta de mer komplexa fallen. Som ett sätt att modifiera modellen föreslås att man arbetar med olika storlekar på den kända standardavvikelsen enligt följande:

Om man betraktar en begränsad del eller hela området får man olika fördelningar av egenskapen.

Om man betraktar hela området, exempelvis belastat av en stor platta, kommer egenskapen att ha en fördelning som motsvarar fördelningen A i Figur 5.2. Undersöker man och betraktar ett litet område gäller fördelningen B.

Betraktar vi däremot ett litet område, vars läge är okänt eller inte har undersökts, blir problemet svårare. Man kan därvid ha ett värde på egenskapen som kan variera enligt A, dvs det finns risk att egenskapen kan anta genomgående små eller stora värden inom området. Man får vid provtagning och uppdatering ge akt på att man betraktar området i rätt skala.

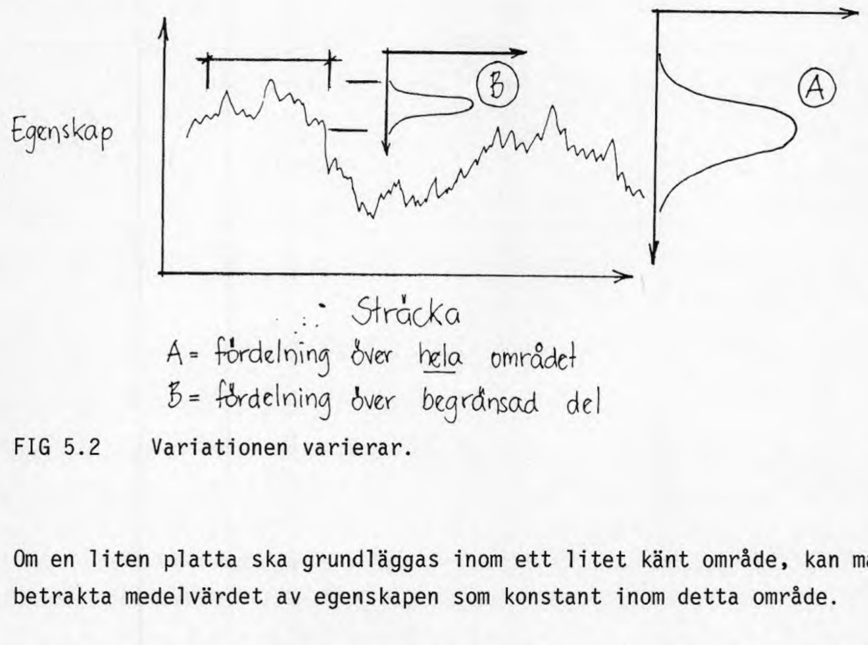



FIG 5.2 Variationen varierar.

Om en liten platta ska grundläggas inom ett litet känt område, kan man betrakta medelvärdet av egenskapen som konstant inom detta område.

Om plattan är stor gäller att bortse från den småskaliga variationen, eftersom den försvinner i variansreduktionen. Bestämningen av medelvärdet kan dock ge osäkrare resultat, eftersom uppdateringsformeln förutsätter oberoende data. Man får därför endast utnyttja data från provpunkter som ligger på större inbördes avstånd än det storskaliga fluktuationsavståndet eller använda en mer komplicerad jordmodell.

Det svåraste problemet gäller en liten platta grundlagd på en obekant plats inom ett stort område. I det fallet måste hänsyn tas till både den storskaliga variationen och den småskaliga. För att kunna göra detta måste man ha en jordmodell som kan ta in kunskapen om provpunkternas lägen och grundläggningens läge, olika korrelationsskalor etc. Någon sådan modell finns inte utvecklad för praktiskt bruk. För att med nuvarande modell i någon mån kunna beakta de olika variationerna föreslås följande: En subjektiv arbetsmetodik används genom att åsätta bästa möjliga uppskattning av de båda delarna, både deras standardavvikelse och deras fluktuationsavstånd. Man åsätter $\sigma'$ "i den lilla skalan" och beaktar den storskaliga variationen genom att införa en ytterligare varians $\sigma^2_3$. Den storskaliga variationen betraktas som oberoende.

Bestämning av variansreduktionsfaktorn $1/c_3$ kan göras enligt följande:

Tillägget till varians m h t storskaligheten ska återspegla avståndet til provtagningspunkterna. Som ett förslag för praktiskt bruk föreslås

$$L < \Theta \qquad 1/c_3 = 0$$

$$L > \Theta \qquad 1/c_3 = (1 - \frac{\Theta}{L})$$

där L = avstånd från provtagningsområde till möjliga grundläggningspunkten

$\Theta$ = storskaliga variationers fluktationsavstånd.

Vid uppdateringen måste de båda olika skalorna separeras så att man beaktar kraven på representativa provområden och tillräckliga inbördes punktavstånd i de båda tidigare fallen. Det nu aktuella fallet (liten platta, okänt läge) kan betraktas som sammansatt av de båda tidigare.

Ovan har redovisats möjligheten att praktiskt utnyttja en enkel stokastisk jordmodell. Att skapa en modell som är helt "automatisk" är inte möjligt. Det måste alltid finnas ett mått av "konst" i modelleringen, dvs det geotekniska kunnandet och erfarenheten är fortfarande avgörande.

## 5.4. Beräkning av partialkoefficienter

### 5.41 Inledande exempel

Med $\beta$-metoden kan partialkoefficienter beräknas. För att kunna utföra beräkningarna måste man känna till ingående parameterar och deras variationskoefficient. Partialkoefficientens storlek är därvid beroende av de ingående parametrarnas variationskoefficient och dess betydelse i brottgränsuttrycket. I det här projektet har utarbetats en förenklad rutin med vilken partialkoefficienterna lätt beräknas utan beräkning med $\beta$-metoden. Rutinen utgår från att parametrarnas rangordning har skattats. I exemplet nedan redovisas hur den förenklade metoden kan användas i praktiken.

I den förenklade metoden ingår således att rangordna de ingående parametrarnas betydelse för det betraktade problemet. I $\beta$-metoden anger storleken av sensitivitetsfaktorn $\alpha_i$ variabelns betydelse (rangordning). Nedan redovisas resultatet av beräkningar dels för det förhållande att endast storleken på variationskoefficienten är avgörande för rangordningen och därmed partialkoefficienternas storlek och dels att andra faktorer än variationskoefficienternas storlek styr rangordningen.

I den förenklade $\beta$-metoden beräknas sensitivitetsfaktorn $\alpha_i$ enligt följande princip:

Det gäller att $\Sigma\alpha_i^2 = 1{,}0$. För den högst rangordnade parametern antas att $\alpha_1^2 = 0{,}9$. Nästa parameter i ordning tar 90% av återstoden dvs $\alpha_2^2$ är 90% av (1,0-0,9). Nästa parameter tar ånyo 90% av återstoden dvs $\alpha_3^2$ = 90% av 0,1(1,0-0,9), osv. Partialkoefficenten beräknas enligt ekvationerna

$$\gamma_m = \frac{1}{1+\alpha_i \beta V} \qquad \text{Motståndsparameter} \qquad (5.9a)$$

$$\gamma_f = 1+\alpha_i \beta V \qquad \text{Lastparameter} \qquad (5.9b)$$

För en motståndsparameter (mothållande) gäller $\alpha_i < 0$ och för en lastparameter (pådrivande) $\alpha_i > 0$.

Om flera parametrar har samma rangordning får de "dela på kakan". Exempelvis om de två högst rangordnade parametrarna har samma rangordning gäller för båda $_i^2 = 0{,}9/2$.

För ett exempel med tre oberoende parametrar a, b och c har utförts beräkningar enligt ovanstående rutin för olika variationskoefficienter hos parametrarna. Parametrarna a och b är motståndsparametrar och parameter c är lastparameter. Resultatet av beräkningarna redovisas som fall 15 i Tabell 5.2.

För att visa rangordningens betydelse har även partialkoefficienter beräknats för det fall att parameter b alltid är högst rankad. (Fall 2 c-5 c).

I tabell 5.2 anges även storleken på den "totala säkerhetsfaktorn F" $= \gamma_1\gamma_2\gamma_3$. I tabellen är den eller de högst rangordnade parametrarna understrukna.

- o Om endast en parameter har en variationskoefficient > 0 erhålls en låg total säkerhetsfaktor dock ej den lägsta enligt de presenterade fallen (jämför fall 1, 2c och 3c).
- o Om två parametrar har lika stor betydelse och är högst rangordnade blir totalsäkerhetsfaktorn hög.
- o Om samtliga ingående parametrar har samma rangordning erhålls den högsta totala säkerhetsfaktorn.
- o Om en parameter har liten variationskoefficient men rangordnas högst blir den totala säkerhetsfaktorn lägst.

Fallen 2c och 3c skiljer sig märkbart från övriga genom att den högst rangordnade ej har störst variationskoefficient utan har en mycket mindre variationskoefficient. I ett verkligt problem är dessa fall ej möjliga.

Av detta exempel lär man följande:

- o Rangordningen av parametrarnas betydelse för problemet har mycket stor inverkan på partialkoefficienternas storlek.
- o Om tre parametrar ingår med olika rangordning har den tredje parametern mycket liten inverkan på lösningen, bl a med hänsyn till att variationskoefficienten är låg.

Dessutom är avsikten att visa att en förenklad -metod ej är speciellt svår eller omständlig att använda.

Tabell 5.2. Resultat av beräkningar med olika variationskoefficienter och olika rangordning.

| Fall | Param. | Var.koeff | Sens.faktor $\alpha_i^2$ | $\alpha_i$ | Partial-koeff | Total F" |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | a | 0,1 | -1,0 | - 1,0 | 1,75 | |
| | b | 0 | | 0 | 1,0 | |
| | c | 0 | | 0 | 1,0 | 1,75 |
| 2 | a | 0,1 | - 0,9 | -0,95 | 1,69 | |
| | b | 0,05 | - 0,9·0,1 | -0,30 | 1,07 | |
| | c | 0,02 | 0,1·0,1 | 0,1 | 1,01 | 1,83 |
| 3 | a | 0,1 | - 0,9 | -0,95 | 1,69 | |
| | b | 0,05 | - 0,1/2 | -0,22 | 1,05 | |
| | c | 0,05 | 0,1 | 0,32 | 1,07 | 2,10 |
| 4 | a | 0,1 | - 0,9/2 | -0,67 | 1,40 | |
| | b | 0,1 | - 0,9/2 | -0,67 | 1,40 | |
| | c | 0,05 | 0,1 | 0,32 | 1,07 | 2,10 |
| 5 | a | 0,1 | - 1,0/3 | -0,58 | 1,33 | |
| | b | 0,1 | - 1,03/3 | -0,58 | 1,33 | |
| | c | 0,1 | 1,0/3 | 0,58 | 1,33 | 2,21 |
| 4b | a | 0,1 | - 0,9 | -0,95 | 1,69 | |
| | b | 0,1 | - 0,9·0,1 | -0,30 | 1,15 | |
| | c | 0,05 | 0,1·0,1 | 0,1 | 1,02 | 1,98 |
| 5b | a | 0,1 | - 0,9 | -0,95 | 1,69 | |
| | b | 0,1 | - 0,1/2 | -0,22 | 1,11 | |
| | c | 0,1 | -0,1/2 | 0,22 | 1,10 | 2,06 |
| 2c | a | 0,1 | - 0,9·0,1 | -0,30 | 1,15 | |
| | b | 0,05 | - 0,9 | -0,95 | 1,26 | |
| | c | 0,2 | 0,1·0,1 | 0,1 | 1,01 | 1,46 |
| 3c | a | 0,1 | - 0,9·0,1 | -0,30 | 1,15 | |
| | b | 0,05 | - 0.9 | -0,95 | 1,26 | |
| | c | 0,05 | 0,1·0,1 | 0,1 | 1,02 | 1,46 |
| 4c | a | 0,1 | - 0,9·0,1 | -0,30 | 1,15 | |
| | b | 0,1 | - 0,9 | -0,95 | 1,69 | |
| | c | 0,05 | 0,1·0,1 | 0,1 | 1,02 | 1,98 |
| 5c | a | 0,1 | - 0,1/2 | -0,22 | 1,11 | |
| | b | 0,1 | - 0,9 | -0,95 | 1,69 | |
| | c | 0,1 | 0,1/2 | 0,22 | 1,10 | 2,06 |

## 5.42 Ex Platta på undergrund av lera

I detta exempel varierar variationskoefficienten. Med $\beta$-metoden kan partialkoefficienterna för ingående last- och motståndsparametrar beräknas. Enligt NR ska endast motståndsparametern "belastas" med en partialkoefficient. Avsikten med nedan redovisade beräkningsexempel är att beskriva hur valet av parametrarnas betydelse inverkar på partialkoefficienternas storlek.

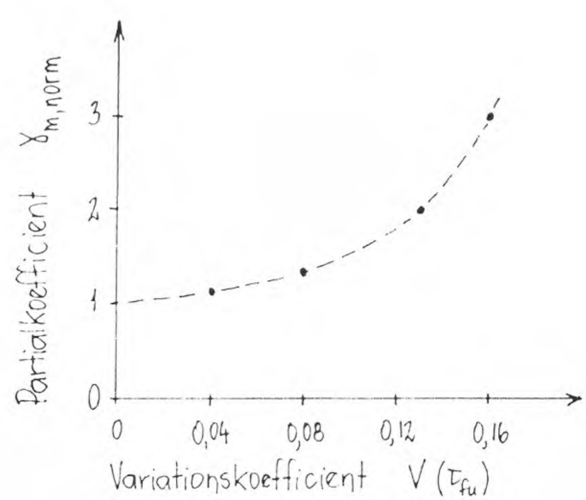
Brottekvationen är $N_c \, \tau_{fu} - q \geq 0$

För $\beta = 4{,}3$, dvs säkerhetsklass 2, har partialkoefficienter på bärighetsfaktorn $N_c$, skjuvhållfastheten $\tau_{fu}$ och densiteten $\rho$ beräknats för olika kombinationer av variationskoefficienter för parametrarna. I allmänhet har skjuvhållfastheten den största genomslagskraften i liknande geoberäkningar. Resultatet av beräkningarna har sammanfattats i diagramform, se Figur 5.2, med $\gamma_{m,norm}$ som funktion av variationskoefficienten för skjuvhållfastheten. Det gäller att $\gamma_{m,norm}$ kan betraktas som den partialkoefficient som skulle erhållas enligt NR vid olika förhållanden, gynnsamma eller ogynnsamma. $\gamma_{m,norm}$ har i detta fall beräknats enligt:

$$\gamma_{m,norm} = \gamma_{N_c} \cdot \gamma_\tau / 1{,}1$$

där $\gamma_{N_c}$ = beräknad partialkoefficient för $N_c$
$\gamma_\tau$ = beräknad partialkoefficient för $\tau$

Faktorn 1,1 i ekvationen beror på att beräkningen utförs i säkerhetsklass 2 där $\gamma_n = 1{,}1$.




Figur 5.2. Partialkoefficienten $\gamma_{m,norm}$ som funktion av variationskoefficienten för lerans skjuvhållfasthet.

För detta exempel kan en indelning göras av partialkoefficienten $\gamma_{m,norm}$ baserat på en värdering av gynnsamheten (se BFS 1988:18 kap 6:354) (se även kap 5.12 ovan) vid bedömning av jordens egenskaper. Indelningen återges i Tabell 5.3.

Tabell 5.3.
Indelning av gynnsamheten vid bedömning av jordens egenskaper.

| | Förhållanden | | | |
|---|---|---|---|---|
| | Mkt gynnsamma | Gynnsamma | Ogynnsamma | Mkt ogynnsamma |
| Variations-koefficient | 0,04 | 0,08 | 0,13 | 0,16 |
| $\gamma_{m,norm}$ | 1,15 | 1,35 | 2,0 | 3,0 |

## 5.5. Sammanfattning

I kap 5 sammanfattas de viktigaste principerna som ligger till grund för partialkoefficientmetoden och dess praktiska tillämpning inom geotekniken.

Väsentliga delar är:

- o Partialkoefficientmetodens principer
- o Sambandet mellan säkerhetsindex $\beta$ och partialkoefficienter
- o Ett förenklat sätt att bestämma partialkoefficienterna
- o Möjligheten att statistiskt beskriva jorden

### 5.51 Bestämning av partialkoefficienter

Det finns ett teoretiskt samband mellan partialkoefficienter och säkerhetsindex $\beta$. En stringent bestämning av partialkoefficienterna kräver att man för det enskilda fallet beräknar $\beta$ och sedan ur detta resultat bestämmer de partialkoefficienter som motsvarar $\beta$. Att göra denna beräkning för ett tillräckligt stort antal varianter på möjliga konstruktioner och sedan därur med statistisk analys beräkna partialkoefficienter (t ex som funktion av variabelns spridning) är möjligt, men mycket tidskrävande. Av denna anledning har man i Nybyggnadsregler endast angivit intervall för partialkoefficienterna.

I denna rapport föreslås en förenklad metod att beräkna de partialkoefficienter som motsvarar ett visst $\beta$-värde. Principen är densamma som föreslagits av Thoft-Christensen & Baker (1982). Deras värden ger dock dålig överensstämmelse med korrekta värden, se Olsson, Rehnman & Stille (1985). Förklaringen torde ligga i att metoden inte var avsedd att användas med medelvärdet som karakteristiskt värde. Den nu föreslagna metoden är enkel att använda och tycks enligt hittills gjorda kontrollberäkningar ge betydligt bättre överensstämmelser.

Det måste dock beaktas att merparten av kontrollberäkningarna gjorts under förenklade antaganden, t ex att ingående variabler är oberoende. Ett större kontrollberäkningsprogram krävs därför innan den helt kan släppas för allmän tillämpning. Metoden bygger i korthet på att man rangordnar ingående stokastiska variabler efter deras betydelse och sedan fördelar sensitivitetsfaktorn $\alpha_i$ efter en enkel princip.

När man känner $\alpha_i$, $\beta$ och variationskoefficienten kan sedan partialkoefficienten lätt beräknas för den aktuella variabeln. Här måste dock påpekas att i NR antas att endast en motståndsvariabel ska ha partialkoefficient. Det är dock författarnas mening, att den vinst man göra med en mer stringent metodik överväger besväret med att arbeta med fler partialkoefficienter. Man får bl a en klarare överblick över var det lönar sig att reducera osäkerheterna. Normalt bör man också få en mindre överstark konstruktion. Att på ett korrekt sätt beakta säkerhetsklasserna är inget problem eftersom det sker via valt värde på $\beta$. Man kan också tänka sig att tillåta metoden som ett alternativ till normens partialkoefficientmetod och $\beta$-metoden.

### 5.52 Statistisk jordmodell och variansreduktion

Den viktigaste ingående faktorn i en geoberäkning är jordens hållfasthet och osäkerheten i den.

För att kunna behandla problemen rationellt behöver man använda en statistisk jordmodell som uppfyller geoteknikens krav:

- o Beakta lokal erfarenhet
- o Beakta undersökningens omfattning och dess kvalitet
- o Ge möjlighet att beakta fysikalisk medelvärdesbildning och variansreduktion
- o Vara enkel att använda
- o Ge möjlighet att ta hänsyn till provtagningspunkternas läge relativt intressant område.

I rapporten diskuteras dessa faktorer och bakomliggande principer. En möjlig modell är den som föreslagits av Olsson (1986). Den har dock nackdelen att möjligheten att beakta punkternas läge uteslutits till förmån för enkelheten. I rapporten ges några förslag till hur man bör kunna subjektivt hantera vissa av de problem som därvid uppkommer, men för mer krävande användning behöver modellen utvecklas. Den kommer dock då att bli betydligt mer komplicerad att använda. En sådan modell får stor betydelse som likare när det gäller att ta fram "tumregler" för tillämpning av den enklare modellen som i svårighetsgrad är mer anpassad till partialkoefficientmetoden.

En fråga som kvarstår gäller vilka fluktuationsavstånd som gäller för svenska jordar. Dessa har stor betydelse när det gäller beräkning av variansreduktionen, som i sin tur starkt påverkar osäkerheten och därmed partialkoefficienterna. I rapporten beskrivs olika tillämpbara metodiker, men det återstår fortfarande att från verkliga data göra bestämningar.

## 5.6 Rekommendationer

Författarna vill rekommendera följande när det gäller partialkoefficientmetoden:

- o Partialkoefficienter på alla ingående, osäkra variabler
- o Partialkoefficienter beräknas med ett empiriskt förfarande, (t ex det föreslagna när det kontrollerats)
- o Variansreduktion bör beaktas. (Data måste dock tas fram).
- o Kontroll skall krävas för undvikandet av grova fel. När det gäller kontroll av antaganden om materialparametrar osv, bör utökad kontroll medföra reduktion av partialkoefficienter.

Ovanstående rekommendationer strider i viss mån mot de riktlinjer som finns i NR. Det är dock författarnas uppfattning att vinster finns i ovanstående förslag, bland annat genom möjligheten att vara mer entydig i krav och genom den ökade förståelsen för problemen som principerna medför. Denna förståelse kan i sin tur minska risken för grova fel vid övergången till ett nytt system.

REFERENSER

Andersson, J., Olsson, L. & Stille, H. (1984). Beslutsmodeller för förundersökningar. Bergytebestämning med kriging. BeFo 81:1/84.

Baecher, G.B. (1978). Search in geotechical engineering. Technical report. Department of Civil Engineering, MIT.

Baecher & Rackwitz (1982). Factors of safety and pile load tests. Int. J. of Num. Anal. Meth. in Geomechanics, vol 6, No. 4, 1982.

Baecher, G.B. (1983). Simplified geotechnical data analysis. In Thoft-Christensen, P. (ed). Reliability theory and its application in structural and Soil Engineering, NATO-ASI.

Floss, R. (ed) (1983). Beiträge zur Anwendung der Stochastik und Zuverlässigheitstheorie in der Bodenmechanik. Lerstuhl und Prüfamt für Grundbau, Bodenmechanik und FFelsmechanik der Technischen Universität München. Se särskilt artikel av Reitmeyer, Kruse och Rackwitz.

Gordon, A.D. (1980). Slotseq. A Fortran IV program for comparing two sequences of Observations. Computers & Geosciences Vol 6.

Harr, M.E. (1987). Reliability-Based Design in Civil Engineering. (Mc Graw-Hill Book Company) New York.

Hasofer, AM & Lind, N.C. (1974). An Exact and Invariant First Order Reliability Format. J. of the Eng. Mech. Div. ASCE, Vol No. EM1, 1974.

Lumb, P. (1974). Application of statistics in Soil Mechanics, I.K. Lee (editor), Soil Mechanics - New Horizons, Butterworth & Co (punlishers) Ltd.

Maddock, W.P. & Jordaan, I.J. (1982). Decision analysis applied to code formulation. Can. J.Civ. Eng 9 (1982).

Olsson, L. & Stille, H. (1980). Lönar sig en kompletterande grundundersökning? Beslutsteori tilämpad på ett spontningsprojekt. BFR R174:1980.

Olsson, L., Bengtsson, P-E., Berggren, B., Stille, H. (1984). Variansreduktionens betydelse, NGM -84, Vol 1, s 255-263, Linköping.

Olsson, L., Rehnman, S-E.- Stille, H. (1985). Partialkoefficientemtoden. Illustrerad beräkning. Rapport R45:1985. BFR, Stockholm.

Olsson, L. (1986). Användning av -metoden i geotekniken - illustrerad med spontberäkning. Inst för jord- och bergmekanik, KTH (avh).

Olsson, L., Berggren, B., Bengtsson, P-E., Stille. H. (1989). Reliability based partial koefficient. A simplified approach. Proc. XII ICSMFE, Rio de Janeiro.

Réthái, L. Probabilistic solutions in geotechnics. Developments in geotechical engineering 46. (Elsevier Science Publishers).

Thoft-Christensen & Baker (1982). Structural Reliability and its Application. Springer Verlag.

Vanmarcke, E.H. (1977). Probabilistic Modelling of Soil Profiles. J. of the Geotechnical Engng., Div. ASCE, Vol 103, No. GT11 Nov. 77.

**BILAGA 1**

Beräkning av variansreduktion med numerisk integration

Givet: En storhet som kan beskrivas som en (stationär) stokastisk process. Det gäller att medelvärdet över ett område = punktmedelvärdet, dvs medelvärdet är detsamma oavsett om medelvärdesbildningen sker över en linje, en yta eller en volym. I en dimension (medelvärdsbildning över sträckan T):

Uttryck $$X_T(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} x(u)du \qquad (I.1)$$

Däremot ändras variansen så att variansen för medelvärdet över sträckan T ges av var $[X_T] = \sigma_T^2 = \Gamma^2(T)\,\sigma^2$

där $\sigma^2$ = punktvariansen

$\Gamma^2(T)$ = variansfunktionen som beskriver hur mycket variansen reduceras genom medelvärdesbildningen (motsvarar alltså variansreduktionsfaktorn 1/c).Mellan variansfunktionen $\Gamma^2(T)$ och korrelationsfunktionen $\rho(\Delta t)$ råder följande samband

$$\Gamma^2(T) = 1/T^2 \iint \rho(t_1-t_2)dt_1\, dt_2 \qquad (I.2)$$

Detta uttryck kan tolkas som medelvärdet av korrelationen mellan alla punkter på linjen. Motsvarande gäller för ytor och volymer.

För att beräkna detta medelvärde kan man använda statistisk metodik och använda medelvärdet av slumpmässigt valda prov som en uppskatnting av det verkliga medelvärdet.

Arbetsgång:

a. Välj slumpmässigt ut två opunkter som tillhör området.

b. Beräkna avståndet mellan punkterna: $\Delta x$, $\Delta y$, $\Delta z$ (i y-, y- och z-led)

c. Beräkna korrelationen mellan punkterna

$\rho_i = \exp - [\Delta x/bx)^2 + (\Delta y/by)^2 + (\Delta z/bz)^2]$

d. Upprepa n gånger

e. $\Gamma^2 = \sum \rho_i/n$

I vissa fall har man inte ett tredimensionellt problem. Då försvinner givetvis en eller två av termerna i korrelationsfunktionen. Antalet prov (n) behöver troligtvis inte väljas större än ca 100, vilket gör att metoden är lämplig för persondator alt programmerbar räknare utan att programtiden blir för lång.

Exempel på beräkningar med $\beta$-metoden

För att visa på $\beta$-metodens möjligheter samt hur lösningsmetodiken kan se ut redovisas nedan några exempel. Exemplen är valda för att visa $\beta$-metodens möjligheter för olika typer av ekvationer. Detta innebär att ekvationerna är förenklade och de kan även avvika från normal praxis vad gäller användning idag. Slutsatser från storlekar på delresultat skall helst ej tas från dessa exempel. Tidigare påpekade svårigheter att bedöma värdena på parametrarnas statistiska egenskaper (medelvärde och varians) kvarstår.

Lösningarna nedan visar dock hur en sannolikhetsbaserad dimensioneringsmetod med datorstöd kan innebära ett effektivt hjälpmedel vid dimensionering av geokonstruktioner.

## Exempel 1 DIMENSIONERING AV PLATTA PÅ MARK

Dimensionerna av en kvadratisk platta ska bestämmas så att konstruktionen uppfyller krav enligt säkerhetsklass 2, dvs BETA = 4,3 (sannolikheten för brott < $10^{-5}$). Undergrunden består av lera.

Bärförmågan R antas kunna beräknas med ekvationen

$$R = N_c \cdot \tau_{fu} \cdot A$$

där $N_c$ = bärighetsfaktor
$\tau_{fu}$ = odränerad skjuvhållfasthet
A = area

Brottgränsekvationen får formen

$$g = R - S = N_c \cdot \tau_{fu} \cdot A - P$$

där S = lasteffekten

I exemplet antas alla parametrar utom arean A vara stokastiska och normalfördelade. Dessutom antas de vara statistiskt oberoende av varandra.

Bärighetsfaktorn Nc antas från tidigare geoteknisk erfarenhet kunna beskrivas med

$$E(N_c) = 5{,}14 \qquad \sigma(N_c) = 0{,}514 \qquad \text{dvs } V(N_c) = \frac{\sigma(N_c)}{E(N_c)} = 0{,}10$$

där E( ) = medelvärde
σ( ) = standardavvikelse
V( ) = variationskoefficient

Den odränerade skjuvhållfastheten $\tau_{fu}$ har bestämts med fem prov.

$$\tau_{fu} = 10,\ 13,\ 12,\ 11,\ 14 \text{ kPa}$$

Skjuvhållfasthetens medelvärde blir

$$E(\tau_{fu}) = \frac{\Sigma\ \tau fu}{n} = \frac{10+13+12+11+14}{5} = 12 \text{ kPa}$$

och standardavvikelsen

$$\sigma(\tau_{fu}) = \frac{\sqrt{\Sigma[\tau fu-E(\tau fu)]^2}}{n-1} = \frac{\sqrt{2^2+1^2+0^2+1^2+2^2}}{4} = \frac{\sqrt{10}}{4} = 0{,}80 \text{ kPa}$$

Fåtalsprovningen uppdateras med tidigare erfarenhet (enligt Olsson, 1986). Det antas att variansen $\sigma_2{}^2$ är känd hos en underliggande fördelning hos jordegenskapen så att $\sigma_2$ = 2 kPa.

Förhandskunskapen om medelvärdet m" och standardavvikelsen $\sigma'$ hos egenskapen (skjuvhållfastheten) antas med subjektiv sannolikhet till

m" = 11 kPa $\qquad$ $\sigma'$ = 2 kPa

Enligt ovan har skjuvhållfastheten medelvärdet $E(\tau_{fu})$ = 12 kPa.

Alltså gäller

$\bar{x}$ = 12,0 (5 prover)

Uppdatering ger som resultat

$$\left(\frac{1}{\sigma''}\right)^2 = \frac{1}{(\sigma')^2} + \frac{n}{(\sigma_2)^2} = \frac{1}{2^2} + \frac{5}{2^2}$$

$$\sigma'' = 0{,}82 \text{ kPa}$$

Insättning i ekv (11) ger

$$m'' = [\frac{1}{(\sigma')^2}\cdot m' + (n/(\sigma_2)^2)\cdot\bar{x}]/[1/(\sigma')^2+n/(\sigma_2)^2]$$

$$m'' = (\frac{1}{2^2}\cdot 11 + \frac{5}{2^2}\cdot 12)/(\frac{1}{2^2}+\frac{5}{2^2}) = 11{,}8 \text{ kPa}$$

Rymdmedelvärdet och variansen över ytan A fås enligt ekvationerna

$$E[Y(A)] = m'' = 11{,}8 \text{ kPa}$$

$$VAR[Y(A)] = (\sigma'')^2 + \frac{1}{c}\cdot\sigma_2{}^2$$

I Bilaga 1 anges hur variansreduktionsfaktorn beräknas. Nedan används ett förenklat förfarande för att uppskatta storleken på variansreduktionsfaktorn.

Om det antas att fundamentbredden blir 1,0 m (glidytans längd $\approx 2 \cdot b$) och att fluktuationsavståndet är 0,1 à 0,5 m kan variansreduktionsfaktorn uppskattas till (enligt Vanmarcke 1977)

$$1/c = \frac{0{,}1 \text{ à } 0{,}5}{2 \cdot 1{,}0} = 0{,}05 \text{ à } 0{,}25$$

Variansreduktionsfaktorn 1/c har i detta exempel konservativt antagits vara 0,4.

Alltså erhålls

$$\sigma^2 = 0{,}82^2 + 0{,}4 \cdot 2^2 = 2{,}27$$

$$\sigma = 1{,}51 \text{ kPa}$$

Lasten P beskrivs med sitt medelvärde E(P) och standardavvikelse (varians) $\sigma(P)$. I exemplet gäller

$$E(P) = 20 \text{ kN} \qquad \text{dvs } V(P) = \frac{\sigma(P)}{E(P)} = 0{,}10$$

$$\sigma(P) = 2 \text{ kN}$$

Vid dimensioneringen krävs nu att man anger kravet på säkerhet mot brott.

I detta fall ska kravet enligt säkerhetsklass 2 uppfyllas, dvs BETA = 4,3.

Ansätt $\alpha_i(N_c) = \alpha_i(\tau_{fu}) = -1$

$\alpha_i(P) = 1$

Beräkna $x_i^* = \mu_i + \alpha_i \beta \sigma_i$

$N_c^* = 5{,}14 + (-1) \cdot 4{,}3 \cdot 0{,}514 = 2{,}93$

$\tau_{fu} = 11{,}8 + (-1) \cdot 4{,}3 \cdot 1{,}51 = 5{,}31$ kPa

$P^* = 20 + 1 \cdot 4{,}3 \cdot 2 = 28.6$ kN

Sätt in värdena på $N_c^*$, $\tau_{fu}^*$ och $P^*$ i brottgränsekvationen

$$2{,}93 \cdot 5{,}31 \cdot B^2 - 28{,}6 \geq 0$$

$$B = 1{,}36 \text{ m}$$

Derivera brottgränsekvationen partiellt

$$\frac{\partial g}{\partial N_c} = \tau_{fu} \cdot B^2$$

$$\frac{\partial g}{\partial \tau_{fu}} = N_c \cdot B^2$$

$$\frac{\partial g}{\partial P} = -1$$

Sätt in värdena i ovanstående ekvationer

$$\frac{\partial g}{\partial N_c} = 5{,}31 \cdot 1{,}36^2 = 9{,}82$$

$$\frac{\partial g}{\partial \tau_{fu}} = 2{,}93 \cdot 1{,}36^2 = 5{,}42$$

$$\frac{\partial g}{\partial P} = -1$$

Summera $\sum (\frac{\partial g}{\partial x_i} \cdot \sigma_i)^2$

$$\sum (\frac{\partial g}{\partial x_i} \cdot \sigma_i)^2 = (9{,}82 \cdot 0{,}514)^2 + (5{,}42 \cdot 1{,}51)^2 + (-1 \cdot 2)^2 = 96{,}46$$

Beräkna $\alpha_i = -\frac{\partial g}{\partial x_i} \cdot \sigma_i / \sqrt{\Sigma (\frac{\partial g}{\partial x_i} \cdot \sigma_i)^2}$

$$\alpha_i(N_c) = -9{,}82 \cdot 0{,}514 / \sqrt{96{,}46} = -0{,}514$$

$$\alpha_i(\tau_{fu}) = -5{,}42 \cdot 1{,}51 / \sqrt{96{,}46} = -0{,}833$$

$$\alpha_i(P) = -(-1 \cdot 2) / \sqrt{96{,}46} = 0{,}204$$

Beräkna $x_i^* = \mu + \alpha_i \cdot \sigma i$

$$N_c^* = 5{,}14 + (-0{,}514) \cdot 4{,}3 \cdot 0{,}514 = 4{,}00$$

$$\tau_{fu}^* = 11{,}8 + (-0{,}833) \cdot 4{,}3 \cdot 1{,}51 = 6{,}39 \text{ kPa}$$

$$P^* = 20 + 0{,}204 \cdot 4{,}3 \cdot 2 = 21{,}8 \text{ kN}$$

Sätt in dessa nya värden på $N_c^*$, $\tau_{fu}^*$ och $P^*$ i brottgränsekvationen

$4,00 \cdot 6,39 \cdot B^2 - 21,8 \geq 0$

$B^2 \quad \geq 21,8/(4,00 \cdot 6,39) = 0,853$

$B \quad \geq 0,92$ m

$\frac{\partial g}{\partial N_c} = 6,39 \cdot 0,92^2 = 5,41$

$\frac{\partial g}{\partial \tau_{fu}} = 4,00 \cdot 0,92^2 = 3,36$

$\frac{\partial g}{\partial P} = -1$

$\sum(\frac{\partial g}{\partial x_i} \cdot \sigma_i)^2 = (5,41 \cdot 0,514)^2 + (3,38 \cdot 1,51)^2 + (-1 \cdot 2)^2 = 37,78$

$\alpha_i(N_c) = -\ 5,41 \cdot 0,514/\sqrt{37,78} = -0,452$

$\alpha_i(\tau_{fu}) = -\ 3,38 \cdot 1,51/\sqrt{37,78} = 0,830$

$\alpha_i(P) = -\ (-1 \cdot 2)/\sqrt{37,78} = 0,325$

$N_c^* = 5,14 + (-0,452) \cdot 4,3 \cdot 0,514 = 4,14$

$\tau_{fu}^* = 11,8 + (-0,830) \cdot 4,3 \cdot 1,51 = 6,41$ kPa

$P^* = 20 + 0,325 \cdot 4,3 \cdot 2 = 22,8$ kN

$4,14 \cdot 6,14 \cdot B^2 \geq 22,8$

$B^2 \quad \geq 22,8/(4,14 \cdot 6,41) = 0,859$

$B \quad \geq 0,93$ m

$\frac{\partial g}{\partial N_c} = 6,41 \cdot 0,93^2 = 5,54$

$\frac{\partial g}{\partial \tau_{fu}} = 4,14 \cdot 0,93^2 = 3,59$

$\frac{\partial g}{\partial P} = -1$

$$\sum\left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\cdot\sigma_i\right)^2 = (5{,}54\cdot 0{,}514)^2 + (3{,}59\cdot 1{,}51)^2 + (-1\cdot 2)^2 = 41{,}49$$

$$\alpha_i(N_c) = -\ 5{,}54\cdot 0{,}514/\sqrt{41{,}49} = -0{,}442$$

$$\alpha_i(\tau_{fu}) = -\ 3{,}59\cdot 1{,}51/\sqrt{41{,}49} = -0{,}842$$

$$\alpha_i(P) = -\ (-1\cdot 2)/\sqrt{41{,}49} = 0{,}310$$

$$N_c^* = 5{,}14 + (-0{,}442)\cdot 4{,}3\cdot 0{,}514 = 4{,}16$$

$$\tau_{fu}^* = 11{,}8 + (-0{,}842)\cdot 4{,}3\cdot 1{,}51 = 6{,}34 \text{ kPa}$$

$$P^* = 20 + 0{,}31\cdot 4{,}3\cdot 2 = 22{,}7 \text{ kN}$$

$$4{,}16\cdot 6{,}34\cdot B^2 - 22{,}7 \geq 0$$

$$B^2 \geq 22{,}7/(4{,}16\cdot 6{,}34) = 0{,}861$$

$$B \geq 0{,}93 \text{ m}$$

Dimensioneringen ger B = 0,93.

De slutliga värdena på de stokastiska variablerna för att ge denna lösning är

$$N_c^* = 4{,}16$$

$$\tau_{fu}^* = 6{,}34 \text{ kPa}$$

$$P^* = 22{,}7 \text{ kN}$$

Motsvarande partialkoefficienter blir

$$\gamma(N_c) = E(N_c)/N_c^* = 5{,}14/4{,}16 = 1{,}24$$

$$\gamma(\tau_{fu}) = E(\tau_{fu})/\tau_{fu}^* = 11{,}8/6{,}34 = 1{,}86$$

$$\gamma(p) = P^*/E(P) = 22{,}7/20 = 1{,}14$$

$$\gamma(N_c)\cdot\gamma(\tau_{fu})\cdot\gamma(p) = 2{,}63$$

Det ska observeras att partialkoefficienterna i de här utförda beräkningarna är relaterade till ett karakteristiskt värde lika med medelvärdet.

Som ett alternativ till lösningen med $\beta$ -metoden kan man utföra en klassning av de stokastiska variablerna och ur denna klassning skatta $\alpha_i$. Rangordningen av parametrarna ger i detta exempel

1) $\tau_{fu}$
2) $N_c$
3) $P$

Antag att den viktigaste parameterna motsvarar $\alpha_i^2 = 0{,}90$

$$\alpha_i(\tau_{fu}) \quad = - \sqrt{0{,}90} = -0{,}949$$

Antag att nästa parameter motsvarar 90% av resterande $\Sigma\ \alpha_i^2$

$$\alpha_i(N_c) \quad = \sqrt{0{,}9 \cdot 0{,}1} = -0{,}30$$

Eftersom $\Sigma\alpha_i^2 = 1{,}0$ blir $\alpha_i$ för den sista parametern

$$\alpha_i(P) = \sqrt{0{,}1 \cdot 0{,}1} = 0{,}10$$

Detta innebär

$$\gamma(N_c) = E(N_c)/N_c^* = [5{,}41/[5{,}41+(-0{,}30) \cdot 4{,}3 \cdot 0{,}514] = 1{,}14$$

$$\gamma(\tau_{fu}) = E(\tau_{fu})/\tau_{fu}^* = 11{,}8/[11{,}8+(-0{,}949) \cdot 4{,}3 \cdot 1{,}51] = 2{,}09$$

$$\gamma(P) = P^*/E(P) = [20+0{,}10 \cdot 4{,}3 \cdot 2]/20 = 1{,}04$$

vilket insatt i brottgränsekvationen ger

$$(5{,}14/1{,}1) \cdot (11{,}8/2{,}09) \cdot B^2 - 20 \cdot 1{,}04 \geq 0$$

$$B^2 \quad \geq 20 \cdot 1{,}04/[(5{,}14/1{,}14) \cdot (11{,}8/2{,}09)] = 0{,}817$$

$$B \quad \geq 0{,}90 \text{ m}$$

Jämfört med den tidigare, strikta lösningen erhålls således ett värde något på osäkra sidan. En annan del av problemet är att beräkna sättningar, dvs studium av bruksgränstillståndet.

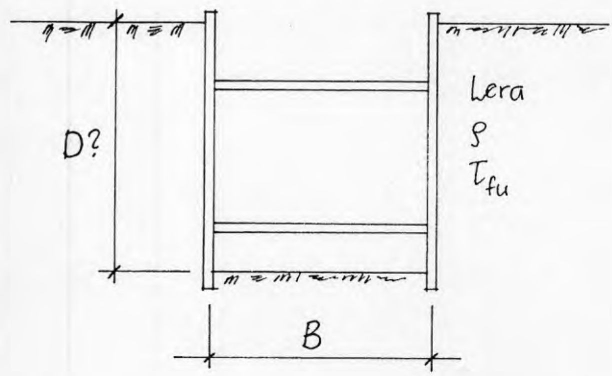
Konventionell analys med $F_c = 3{,}0$ ger

$$5{,}14 \cdot 11{,}8 \cdot B^2 - 3 \cdot 20 \geq 0$$

$$B^2 = 3 \cdot 20/(5{,}14 \cdot 11{,}8) = 0{,}99$$

$$B \geq 1{,}0 \text{ m}$$

Exempel 2 BESTÄMNING AV MAXIMALT SCHAKTDJUP I LERA M H T RISKEN FÖR BOTTENUPPTRYCKNING




I detta exempel ska maximalt schaktdjup bestämmas så att risken för bottenupptryckning $p_f < 10^{-4}$, motsvarande $\beta = 3{,}8$.

Risken för bottenupptryckning antas kunna beskrivas med brottgränsekvationen

$$N_c \cdot \tau_{fu} - g\rho D \geq 0$$

där
$N_c$ = bärighetsfaktor f(B,D,L)
$\tau_{fu}$ = odränerad skjuvhållfasthet
$g$ = tyngdaccelerationen = 9,81 m/s$^2$
$\rho$ = jordens densitet
$D$ = schaktdjup

För exemplet antas följande värden

| | | |
|---|---|---|
| $N_c$ | $E(N_c) = 6{,}5$ | $\sigma(N_c) = 0{,}65$ |
| $\tau_{fu}$ | $E(\tau_{fu}) = 12$ kPa | $\sigma(\tau_{fu}) = 2$ kPa |
| $\rho$ | $E(\rho) = 1{,}6$ t/m$^3$ | $\sigma(\rho) = 0{,}08$ t/m$^3$ |

där E( ) = medelvärde
σ( ) = standardavvikelse

Antag $\alpha(N_c) = \alpha(\tau_{fu}) = -1$

$\alpha(\rho) = 1$

Beräkna $x^* = \mu_i + \alpha_i \beta\sigma_i$

$N_c^* = 6.5 + (-1) \cdot 3{,}8 \cdot 0{,}65 = 4{,}03$

$\tau_{fu}^* = 12 + (-1) \cdot 3{,}8 \cdot 2 = 4{,}40$ kPa

$\rho^* = 1{,}6 + 1 \cdot 3{,}8 \cdot 0{,}08 = 1{,}90$ t/m$^3$

Beräkna D ur brottgränsekvationen

$$4{,}03\cdot 4{,}40 - 9{,}81\cdot 1{,}90\cdot D \geq 0$$
$$D \leq 0{,}95 \text{ m}$$

Derivera partiellt

$$\frac{\partial g}{\partial N_c} = \tau_{fu} \qquad \frac{\partial g}{\partial \tau_{fu}} = N_c$$

$$\frac{\partial g}{\partial \rho} = - gD$$

Beräkna $\frac{\partial g}{\partial x_i}$ i $x^*$

$$\frac{\partial g}{\partial N_c} = 4{,}4 \qquad \frac{\partial g}{\partial \tau_{fu}} = 4{,}03$$

$$\frac{\partial g}{\partial \rho} = -9{,}81\cdot 0{,}95 = -9{,}32$$

Beräkna $\sum (\frac{\partial g}{\partial x_i}\cdot \sigma i)^2$

$$\sum(\frac{\partial g}{\partial x_i}\cdot \sigma_i)^2 = (4{,}4\cdot 0{,}65)^2 + (4{,}03\cdot 2)^2 + (-9{,}32\cdot 0.08)^2 = 73{,}70$$

Beräkna $\alpha i = - \frac{\partial g}{\partial x_i}\cdot \sigma i / \sqrt{[\Sigma(\frac{\partial g}{\partial x_i}\cdot \sigma i)^2]}$

$$\alpha(N_c) = - 4{,}4\cdot 0{,}65/\sqrt{73{,}70} = - 0{,}333$$

$$\alpha(\tau_{fu}) = - 4{,}03\cdot 2/\sqrt{73{,}70} = -0{,}939$$

$$\alpha(\rho) = -(-9{,}32\cdot 0{,}08)/\sqrt{73{,}7} = 0{,}087$$

Beräkna $x^*$

$$N_c^* = 6{,}5 +(-0{,}333)\cdot 3{,}8\cdot 0{,}65 = 5{,}68$$

$$\tau_{fu}^* = 12 + (-0{,}939)\cdot 3{,}8\cdot 2 = 4{,}86 \text{ kPa}$$

$$\rho^* = 1{,}6 + 0{,}087\cdot 3{,}8\cdot 0{,}08 = 1{,}626 \text{ t/m}^3$$

Beräkna D $5{,}68\cdot 4{,}86 - 9{,}81\cdot 1{,}626\cdot D \geq 0$

$$D \leq 1{,}73 \text{ m}$$

Beräkna $\frac{\partial g}{\partial x_i}$ i x*

$\frac{\partial g}{\partial N_c} = 4{,}86$ $\qquad$ $\frac{\partial g}{\partial \tau_{fu}} = 5{,}68$

$\frac{\partial g}{\partial P} = - 9{,}81 \cdot 1{,}73 = -17{,}0$

Beräkna $\sum (\frac{\partial g}{\partial x_i} \cdot \sigma i)^2$

$\sum (\frac{\partial g}{\partial x_i} \cdot \sigma_i)^2 = (4{,}86 \cdot 0{,}65)^2 + (5{,}68 \cdot 2)^2 (-17{,}0 \cdot 0.08)^2 = 140{,}88$

Beräkna $\alpha i$

$\alpha(N_c) = -4{,}86 \cdot 0{,}65/\sqrt{140{,}88} = -0{,}266$

$\alpha(\tau_{fu}) = - 5{,}68 \cdot 2/\sqrt{140{,}88} = -0{,}957$

$\alpha(\rho) = - -17{,}0 \cdot 0{,}08/\sqrt{140{,}88} = 0{,}115$

Beräkna $x^*$

$N_c^* = 6{,}5 + (-0{,}266) \cdot 3{,}8 \cdot 0{,}65 = 5{,}84$

$\tau_{fu}^* = 12 + (-0{,}957) \cdot 3{,}8 \cdot 2 = 4{,}73$ kPa

$\rho^* = 1{,}6 + 0{,}115 \cdot 3{,}8 \cdot 0{,}08 = 1{,}635$ t/m$^3$

Beräkna D

$5{,}84 \cdot 4{,}73 - 9{,}81 \cdot 1{,}635 \cdot D \geq 0$

$D \leq 1{,}72$ m

Beräkna $\frac{\partial g}{\partial x_i}$ i x*

$\frac{\partial g}{\partial N_c} = 4{,}73$ $\qquad$ $\frac{\partial g}{\partial \tau_{fu}} = 5{,}84$

$\frac{\partial g}{\partial \rho} = -9{,}81 \cdot 1{,}72 = -16{,}9$

Beräkna $\sum (\frac{\partial g}{\partial x_i} \cdot \sigma i)^2$

$\sum (\frac{\partial g}{\partial x_i} \cdot \sigma_i)^2 = (4{,}73 \cdot 0{,}65)^2 + (5{,}84 \cdot 2)^2 + (-16{,}9 \cdot 0{,}08)^2 = 147{,}70$

Beräkna $\alpha_i$

$\alpha_i(N_c) = - 4{,}73\cdot 0{,}65/\sqrt{147{,}70} = -0{,}253$

$\alpha_i(\tau_{fu}) = -5{,}84\cdot 2/\sqrt{147{,}70} = -0{,}961$

$\alpha_i(\rho) = - -16{,}9\cdot 0{,}08/\sqrt{147{,}70} = 0{,}111$

Beräkna $x^*$

$N_c^* = 6{,}5+(-0{,}253)\cdot 3{,}8\cdot 0{,}65 = 5{,}88$

$\tau_{fu}^* = 12 +(-0{,}961)\cdot 3{,}8\cdot 2 = 4{,}70$ kPa

$\rho^* = 1{,}6+0{,}111\cdot 3{,}8\cdot 0{,}08 = 1{,}634$ t/m$^3$

Beräkna D

$5{,}88\cdot 4{,}70 - 9{,}81\cdot 1{,}634\cdot D \geq 0$
$D \leq 1{,}72$ m

Lösning

$\beta = 3{,}8$ ger

$D \leq 1{,}72$ m

$N_c^* = 5{,}88$

$\tau_{fu}^* = 4{,}70$ kPa

$\rho^* = 1{,}634$ t/m$^3$

vilket innebär partialkoefficienterna

$\gamma(N_c) = E(N_c)/N_c^* = 6{,}5/5{,}88 = 1{,}105$

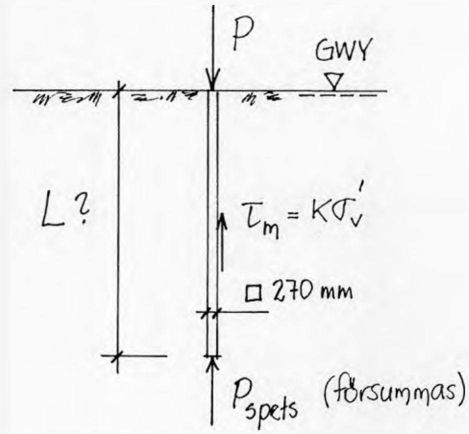
$\gamma(\tau_{fu}) = E(\tau_{fu})/\tau_{fu}^* = 12/4{,}70 = 2{,}55$

$\gamma(\rho) = \rho^*/E(\ ) = 1{,}634/1{,}60 = 1{,}021$

Totalsäkerhetsfaktorn är

$\gamma(N_c) \cdot \gamma(\tau_{fu})\cdot \gamma(\rho) = 1{,}105\cdot 2{,}55\cdot 1.021 = 2{,}88$

Exempel 3 DIMENSIONERING AV PÅLE I KOHESIONSJORD M H T RISKEN FÖR BÄRIGHETSBROTT HOS ENSKILD PÅLE




I exemplet ska enskild betongpåles längd beräknas så att risken för bärighetsbrott $p_f < 10^{-4}$ motsvarande $\beta = 3{,}8$.

Pålens maximala last antas kunna beräknas genom ekvationen

$$R_m = \int_0^L \tau_m \cdot \theta \cdot d_z$$

Mantelmotståndet antas kunna beskrivas med jordens effektiva överlagringstryck enligt

$$\tau_m = K \cdot \sigma_v' = K \cdot \int_0^z g\rho' \, d_z$$

Pålens tvärsnitt är 270 x 270 mm.

Följande värden på stokastiska variablerna P, ρ' och K antas gälla

| | | | |
|---|---|---|---|
| $E(P)$ | = 600 kN | $\sigma(P)$ | = 50 kN |
| $E(\rho')$ | = 1,0 t/m$^3$ | $\sigma(\rho')$ | = 0,05 t/m$^3$ |
| $E(K)$ | = 0,45 | $\sigma(K)$ | = 0,05 |

För att förenkla beräkningarna antas utefter pålens längd att K och ρ' är helt korrelerade ($\rho_K = 1{,}0$, $\rho_{\rho'} = 1{,}0$).

Brottgränsekvationen får formen

$$\int_0^L K\cdot \left(\int_0^z g\rho' \, dz\right) \theta \, d\cdot - P \geq 0$$

Utvecklingen ger

$$K\cdot\theta\cdot g\cdot\rho'\cdot \int_0^L \left(\int_0^z dz\right)dz - P \geq 0$$

$$K\cdot\theta\cdot g\cdot\rho'\cdot \int_0^L zdz - P \geq 0$$

$$K\cdot\theta\cdot g\cdot\rho'\cdot L^2/2 - P \geq 0$$

De deterministiska variablerna blir

$$\theta = 4\cdot 0{,}270 = 1{,}08 \text{ m}$$

$$g = 9{,}81 \text{ m/s}^2$$

Pålens längd ska beräknas

Lösning

Antag $\alpha(K) = \alpha(\rho') = -1$

$\alpha(P) = 1$

Beräkna $x_i{}^* = \mu_i + \alpha_i \beta \sigma_i$

$K^* = 0{,}45 + (-1)\cdot 3{,}8\cdot 0{,}05 = 0{,}260$

$\rho^{*\prime} = 1{,}0 + (-1)\cdot 3{,}8\cdot 0{,}05 = 0{,}810 \text{ t/m}^3$

$P^*1 = 600 + 1\cdot 3{,}8\cdot 50 = 790 \text{ kN}$

L beräknas ur brottgränsekvationen

$$0{,}260\cdot 1{,}08\cdot 9{,}81\cdot 0{,}810\cdot L^2/2 - 790 \geq 0$$

$$L \geq 26{,}6 \text{ m}$$

Derivera brottgränsekvationen partiellt

$$\frac{\partial g}{\partial K} = \theta g\rho'\cdot L^2/2$$

$$\frac{\partial g}{\partial \rho'} = K\theta g\cdot L^2/2 \qquad \frac{\partial g}{\partial P} = -1$$

Beräkna $\frac{\partial g}{\partial x_i}$ i $x^*$

$$\frac{\partial g}{\partial K} = 1{,}08\cdot 9{,}81\cdot 0{,}810\cdot \frac{26{,}6^2}{2} = 3{,}04\cdot 10^3$$

$$\frac{\partial g}{\partial \rho'} = 0{,}260\cdot 1{,}08\cdot 9{,}81\cdot \frac{26{,}6^2}{2} = 975$$

$$\frac{\partial g}{\partial P} = -1$$

Beräkna $\sum(\frac{\partial g}{\partial x_i}\cdot\sigma_i)^2$

$$\sum(\frac{\partial g}{\partial x_i}\cdot\sigma_i)^2 = (3{,}04\cdot 10^3\cdot 0{,}05)^2 + (975\cdot 0{,}05)^2 + (-1\cdot 50)^2 = 2{,}80\cdot 10^4$$

Beräkna $\alpha_i = -\frac{\partial g}{\partial x_i}\cdot\sigma_i/(\sqrt{\sum(\frac{\partial g}{\partial x_i}\cdot\sigma_i)^2})$

$$\alpha(K) = -\ 3{,}04\cdot 10^3\cdot 0{,}05/\sqrt{2{,}80\cdot 10^4} = -0{,}908$$

$$\alpha(\rho') = -\ 975\cdot 0{,}05/\sqrt{2{,}80\cdot 10^4} = -0{,}291$$

$$\alpha(P) = -\ -1\cdot 50/\sqrt{2{,}80\cdot 10^4} = 0{,}299$$

Beräkna $x^*$

$$K^* = 0{,}45 + (-0{,}908)\cdot 3{,}8\cdot 0{,}05 = 0{,}277$$

$$\rho' = 1{,}0 + (-0{,}291)\cdot 3{,}8\cdot 0{,}05 = 0{,}945 \text{ t/m}^3$$

$$P^* = 600 + 0{,}299\cdot 3{,}8\cdot 50 = 657 \text{ kN}$$

Beräkna L

$$0{,}277\cdot 1{,}08\cdot 9{,}81\cdot 0{,}945\cdot L^2/2 - 657 \geq 0$$

$$L \geq 21{,}8 \text{ m}$$

Beräkna $\frac{\partial g}{\partial x_i}$ i $x^*$

$$\frac{\partial g}{\partial K} = 1{,}08 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}945 \cdot \frac{21{,}8^2}{2} = 2{,}38 \cdot 10^3$$

$$\frac{\partial g}{\partial \rho'} = 0{,}277 \cdot 1{,}08 \cdot 9{,}81 \cdot \frac{21{,}8^2}{2} = 697$$

$$\frac{\partial g}{\partial P} = -1$$

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x_i} \cdot \sigma_i\right)^2 = (2{,}38 \cdot 10^3 \cdot 0{,}05)^2 + (697 \cdot 0{,}05)^2 + (-1{,}50)^2 = 1{,}79 \cdot 10^4$$

$$\alpha(K) = -\ 2{,}38 \cdot 10^3 \cdot 0{,}05 / \sqrt{1{,}79 \cdot 10^4} = -\ 0{,}889$$

$$\alpha(\rho') = -\ 697 \cdot 0{,}05 / \sqrt{1{,}79 \cdot 10^4} = -\ 0{,}260$$

$$\alpha(P) = -\ -1 \cdot 50 / \sqrt{1{,}79 \cdot 0{,}4} = 0{,}374$$

Beräkna $x^*$

$$K^* = 0{,}45 + (-0{,}889) \cdot 3{,}8 \cdot 0{,}05 = 0{,}281$$
$$\rho' = 1{,}0 + (-0{,}260) \cdot 3{,}8 \cdot 0{,}05 = 0{,}951 \text{ t/m}^3$$
$$P^* = 600 + 0{,}374 \cdot 3{,}8 \cdot 50 = 671 \text{ kN}$$

Beräkna L

$$0{,}281 \cdot 1{,}08 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}951 \cdot L^2/2 - 671 \geq 0$$
$$L \geq 21{,}8 \text{ m}$$

Lösning

$\beta = 3{,}8$ ger

$L = 21{,}8$ m
$K^* = 0{,}281$
$\rho' = 0{,}951$ t/m$^3$
$P^* = 671$ kN

vilket ger partialkoefficienterna

$$\gamma(K) = \frac{E(K)}{K^*} = \frac{0{,}45}{0{,}281} = 1{,}60$$

$$\gamma(\rho') = \frac{E(\rho')}{\rho'^*} = \frac{1{,}0}{0{,}951} = 1{,}052$$

$$\gamma(P) = \frac{P^*}{E(P)} = \frac{671}{600} = 1{,}118$$

$$\gamma(K) \cdot \gamma(\rho') \cdot \gamma(P) = 1{,}60 \cdot 1{,}052 \cdot 1{,}118 = 1{,}88$$

## Exempel 4 BERÄKNING AV PÅLGRUPPS BÄRIGHET M H T RISKEN FÖR BÄRIGHETSBROTT

Den enskilda pålens bärförmåga antas kunna beskrivas med en normalfördelning med de karaktäristiska momenten medelvärde och standardavvikelse.

I exemplet antas

$E(R_{n=1}) = 1500$ kN $\qquad \sigma(R_{n=1}) = 200$ kN

I exemplet beräknas dimensionerande last på pålgruppen för $\beta = 4{,}3$ och då pålgruppen innehåller 1, 2 resp 4 pålar.

Brottgränsekvationen blir

$$g = R - S \geq 0$$

"Pålgrupp" bestående av 1 påle.

$$g = R_{n=1} - S_{n=1} \geq 0$$
$$E = (R_{n=1}) = 1500 \text{ kN}$$
$$\sigma(R_{n=1}) = 200 \text{ kN}$$

Partiell derivering av brottgränsekvationen ger

$$\frac{\partial g}{\partial R} = 1 \qquad \frac{\partial \rho}{\partial S} = -1$$

$$\sum \left(\frac{\partial g}{\partial x_i} \cdot \sigma_i\right)^2 = (1 \cdot 200)^2 + (-1 \cdot 0)^2 = 200^2$$

$$\alpha_i(R) = -\ 1 \cdot 200/\sqrt{200^2} = -1$$

$$\alpha_i(S) = -\ -0/\sqrt{200^2} = 0$$

$$R^* = 1500 + (-1) \cdot 4{,}3 \cdot 200 = 640 \text{ kN}$$

$$R^* - S^* \geq 0 \quad \therefore \quad S^* \leq 640 \text{ kN}$$

Pålgrupp bestående av 2 pålar

$$g = R_{n=2} - S_{n=2} \geq 0$$

$$E(R_{n=2}) = 1500 + 1500 = 3000 \text{ kN}$$

$$\sigma(R_{n=2}) = \sqrt{200^2 + 200^2} = 200\sqrt{2} \text{ kN}$$

$$R^* = 3000 + (-1) \cdot 4{,}3 \cdot 200\sqrt{2} = 1784 \text{ kN}$$

$$S^* \leq 1784 \text{ kN}$$

Pålgrupp bestående av 4 pålar

$$g = R_{n=4} - S_{n=4} \geq 0$$

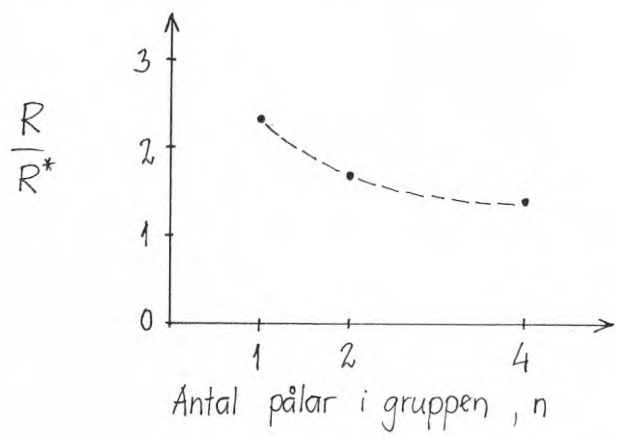
$$E(R_{n=4}) = 4 \cdot 1500 = 6000 \text{ kN}$$

$$\sigma(R_{n=4}) = \sqrt{4 \cdot 200^2} = 2 \cdot 200 \text{ kN}$$

$$R^* = 6000 + (-1) \cdot 4{,}3 \cdot 2 \cdot 200 = 4280 \text{ kN}$$

$$S^* \leq 4280 \text{ kN}$$

Resultatet sammanfattas i figuren nedan




Det skall dock betonas att resultatet beror på graden av korrelation mellan pålarna. Ovan har antagits att pålarna är helt oberoende, vilket är på osäkra sidan. (För helt beroende pålar gäller $R = R^*$ oberoende av antalet pålar i gruppen).

**Exempel 5 DIMENSIONERING AV PLATTA PÅ MARK M H T RISKEN FÖR ÖVERSKRIDANDE AV BRUKBARHETSGRÄNS (Bruksstadie-verifiering)**

Sättningen hos en enskild platta på mark antas kunna beräknas med ekvationen

$$\delta = K\cdot \frac{P}{E\cdot d}$$

där
$\delta$ = sättning
K = koefficient
P = last
E = jordens elasticitetsmodul
d = plattans tvärmått

"Bruksgränsekvationen" blir

$$\delta_{gräns} - K\cdot \frac{P}{E\cdot d} \geq 0$$

Koefficienten K beskrivs med $E(K) = 0{,}8$, $\Delta(K) = 0{,}05$

Lasten beskrivs med $E(P) = 150$ kN, $\sigma(P) = 15$ kN

Elasticitetsmodulen beskrivs med $E(E) = 20$ MPa, $\sigma(E) = 2$ MPa

Bruksgränsen ansätts som $E(\delta_{gräns}) = 10$ mm, $\sigma(\delta_{gräns}) = 0$ mm

Plattans tvärmått d ska beräknas så att risken att överskrida brukbarhetsgränsen är mindre än $10^{-2}$, motsvarande $\beta = 2{,}6$.

Detta innebär att bruksgränsekvationen blir

$$\delta_{gräns} - K\cdot \frac{P}{E\cdot d} \geq 0$$

Värdena på de stokastiska variablerna K, P, och E är angivna ovan.

Anta $\alpha_i(P) = \alpha_i(K) = 1$

$\alpha_i(E) = -1$

$i^* = \mu_i + \alpha_i \beta\sigma_i$

$K^* = 0{,}8 + 1\cdot 2{,}6\cdot 0{,}05 = 0{,}93$

$P^* = 150 + 1\cdot 2{,}6\cdot 15 = 189$ kN

$E^* = 20\cdot 10^3 + (-1)\cdot 2{,}6\cdot 2\cdot 10^3 = 14{,}8\cdot 10^3$ kPa

Insättning i bruksgränsekvationen ger

$$10\cdot10^{-3} - 0{,}93\cdot 189/(14{,}8\cdot10^{3}\cdot d) \geq 0$$

$$d \geq 1{,}19 \text{ m}$$

Derivera bruksgränsekvationen partiellt

$$\frac{\partial g}{\partial K} = -\frac{P}{E\cdot d}$$

$$\frac{\partial g}{\partial P} = -\frac{K}{E\cdot d}$$

$$\frac{\partial g}{\partial E} = \frac{KP}{E^2\cdot d}$$

Beräkna derivatorna i $x^*$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = - 189/(14{,}8\cdot10^{3}\cdot1{,}19) = 0{,}0107$$

$$\frac{\partial g}{\partial P} = - 0{,}93/(14{,}8\cdot10^{3}\cdot1{,}19) = -5{,}33\cdot10^{-5}$$

$$\frac{\partial g}{\partial E} = (0{,}93\cdot189)/[(14{,}8\cdot10^{3})^2\cdot 1{,}19] = 6{,}74\cdot10^{-7}$$

Beräkna $\left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\cdot\sigma_i\right)^2$

$$\sum\left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\cdot\sigma_i\right)^2 = (-0{,}0107\cdot0{,}05)^2 + (-5{,}33\cdot10^{-5}\cdot15)^2 +$$
$$+ (6{,}74\cdot10^{-7}\cdot2\cdot10^{3})^2 = 2{,}74\cdot10^{-6}$$

Beräkna $\alpha_i$

$$\alpha_i = -\frac{\partial g}{\partial x_i}\cdot\sigma_i/[\sum\sqrt{(\frac{\partial g}{\partial x_i}\cdot\sigma_i)^2}]$$

$$\alpha_i(K) = - -0{,}0107\ 0{,}05/\sqrt{5{,}48\cdot10^{-6}} = 0{,}323$$

$$\alpha_i(P) = - -5{,}33\cdot10^{-5}\cdot15/\sqrt{5{,}48\cdot10^{-6}} = 0{,}483$$

$$\alpha_i(E) = - 6{,}74\cdot10^{-7}\cdot2\cdot10^{3}/\sqrt{5{,}48\cdot10^{-6}} = -0{,}814$$

Beräkna $x^*$

$$K^* = 0{,}8 + 0{,}323\cdot2{,}6\cdot0{,}05 = 0{,}842$$

$$P^* = 150 + 0{,}483\cdot2{,}6\cdot15 = 168{,}8 \text{ kN}$$

$$E^* = [20 + (-0{,}814)\cdot2{,}6\cdot2]\cdot10^{3} = 15{,}8\cdot10^{3} \text{ kPa}$$

Sätt in i brottgränsekvationen

$$10\cdot10^{-3} -0{,}842 \cdot 168{,}8/(15{,}8\cdot10^{3}\cdot d) \geq 0$$

$$d \geq 0{,}90$$

Beräkna derivatorna i x*

$$\frac{\partial g}{\partial K} = 168{,}8/(15{,}8\cdot10^{3}\cdot0{,}90) = -0{,}0119$$

$$\frac{\partial g}{\partial P} = - 0{,}842/\ (15{,}8\cdot10^{3}\cdot0{,}90) = -5{,}92\cdot10^{-5}$$

$$\frac{\partial g}{\partial E} = 0{,}842\cdot168{,}8/[(15{,}8\cdot10^{3})^{2}\cdot0{,}90]= 6{,}32\cdot10^{-7}$$

Beräkna $\sum (\frac{\partial g}{\partial x_i}\cdot\sigma_i)^2$

$$\sum (\frac{\partial g}{\partial x_i}\cdot\sigma_i)^2 = (-0{,}0119\cdot0{,}05)^2 + (-5{,}92\cdot10^{-5}\cdot15)^2 +$$

$$+ (6{,}32\cdot10^{-7}\cdot2\cdot10^{3})^2 = 2{,}74\cdot10^{-6}$$

Beräkna $\alpha_i$

$$\alpha_i(K) = - -0{,}0119\cdot0{,}05/\sqrt{2{,}74\cdot10^{-6}} = 0{,}359$$

$$\alpha_i(P) = - -5{,}92\cdot10^{-5}\cdot15/\sqrt{2{,}74\cdot10^{-6}} = 0{,}536$$

$$\alpha_i(E) = - 6{,}32\cdot10^{-7}\cdot2\cdot10^{3}/\sqrt{2{,}74\cdot10^{-6}} = -0{,}764$$

Beräkna $x^*$

$$K^* = 0{,}8 + 0{,}359\cdot2{,}6\cdot0{,}05 = 0{,}847$$

$$P^* = 150 + 0{,}536\cdot2{,}6\cdot15 = 170{,}90 \text{ kN}$$

$$E^* = (20+ -0{,}764\cdot2{,}6\cdot2)\cdot10^{3} = 16{,}03\cdot10^{3} \text{ kPa}$$

Sätt in i brottgränsekvationen

$$10\cdot10^{-3} - 0{,}847\cdot 170{,}9/(16{,}03\cdot10^{3}\cdot d) \geq 0$$

$$d \geq 0{,}90$$

Lösning

$\beta = 2{,}6$ ger

$d \geq 0{,}90$
$K^* = 0{,}847$
$P^* = 170{,}9$ kN
$E^* = 16{,}0\cdot10^{3}$ kPa

R25: 1991

ISBN 91-540-5326-9

Statens råd för byggnadsforskning, Stockholm

Art.nr: 6811025

Abonnemangsgrupp:
Z. Konstruktioner och material

Distribution:
Svensk Byggtjänst
171 88 Solna

Cirkapris: 52 kr exkl moms