



Det här verket har digitaliserats vid Göteborgs universitetsbibliotek och är fritt att använda. Alla tryckta texter är OCR-tolkade till maskinläsbar text. Det betyder att du kan söka och kopiera texten från dokumentet. Vissa äldre dokument med dåligt tryck kan vara svåra att OCR-tolka korrekt vilket medför att den OCR-tolkade texten kan innehålla fel och därför bör man visuellt jämföra med verkets bilder för att avgöra vad som är riktigt.

This work has been digitized at Gothenburg University Library and is free to use. All printed texts have been OCR-processed and converted to machine readable text. This means that you can search and copy text from the document. Some early printed books are hard to OCR-process correctly and the text may contain errors, so one should always visually compare it with the images to determine what is correct.



Rapport

R44:1976

**Ett olinjärt elastiskt
balkpelarelement**

Lennart Ågårdh

Byggforskningen

TEKNISKA HOGSKOLAN I LUND
SEKTIONEN FOR VÅG- OCH VATTEN
BIBLIOTEKET

Rapport R44:1976

ETT OLINJÄRT ELASTISKT BALKPELARELEMENT
för finit elementanalys av balkar och ramar

Lennart Ågårdh

Denna rapport hänför sig till forskningsanslag 690502-7 från
Statens råd för byggnadsforskning till Institutionen för bygg-
nadsstatik, Chalmers tekniska högskola, Göteborg.

Statens råd för byggnadsforskning, Stockholm
ISBN 91-540-2613-X

LiberTryck Stockholm 1976

ETT OLINJÄRT ELASTISKT BALKPELARELEMENT

för finitelementanalys av balkar och ramar

Sammanfattning

I en noggrann analys av byggnaders beteende under exceptionella förhållanden kan man inte bortse från materialets gradvisa plasticering och dess inverkan på konstruktionselementens deformationer. Med gränslastmetoden kan man uppskatta konstruktionens bärförmåga under förutsättning att materialet besitter nödvändiga flyt- och tøjhårdningsegenskaper. Ofta är ej bärförmågan enbart avgörande vid dimensioneringen utan även konstruktionens förskjutningar. Dessa kan beräknas vid en successiv pålastning av konstruktionen med hänsyn till materialets tøjhårdningsegenskaper. Vid ett flerfaldigt statiskt obestämt system av balkar av elasto-plastiskt material krävs användning av datorer. Analysen kan genomföras med inkrementell förskjutningsmetod med hänsyn till bärverksgeometriens förändring under pålastningsförloppet. Denna metodik är väl etablerad för element av linjärt elastiskt material. För elasto-plastiskt material är metoder med numerisk integration över tvärsnittet och längs balkaxeln beprövade. Vid ett stort antal obekanta blir beräkningsvolymen omfattande både för genereringen och lösningen av systemekvationerna.

I den här föreslagna metoden ersätts de numeriskt beräknade elementsambanden med analytiska uttryck. Därvid blir beräkningstiden för genereringen av systemekvationerna avsevärt kortare. Dessutom behövs inte så stora lagringsareor för mellanresultat, vilket medför att denna typ av problem även kan beräknas med små datorer. En annan fördel är att genereringsfelet vid etableringen av systemekvationerna begränsas till de idealiseringsfel, som medföljer valet av analytiska uttryck.

I FIG.1 visas i ett transformationsdiagram lösningsgången i strukturanalysen vid användning av numeriskt beräknade elementsamband (N) jämfört med analytiskt beräknade (A).

Förutsättningar och antagande för de beräknade sambanden är i korthet:

Teknisk balkteori används men med ett olinjärt elastiskt samband mellan spänning och tøjning.

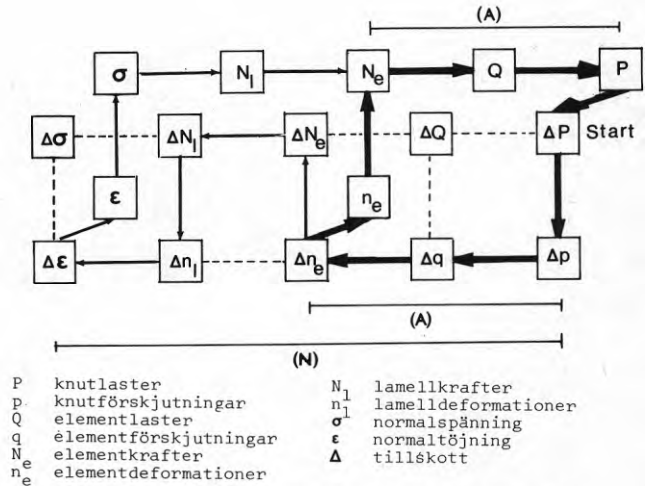


FIG.1. Transformationsdiagram för strukturanalys med numeriskt beräknade elementsamband (N) och analytiskt uppställda (A).

Skjuvdeformationer och effekten av skjuvspänningar försummas.

Tvärsnittet har minst ett symmetriplan, i vilket de verkande krafterna och deformationerna mäts.

Balkpelarelementet är isotropt och prismatiskt.

Betraktade kraftvariabler är ändmoment, axialkraft och tillhörande deformationer är ändvinklar och förlängning.

Axialkraftens bidrag till balkmomentet försummas.

Dimensionslösa variabler används och valet av referensnivåer diskuteras ingående.

Balklammellens böjstivhet.

Två olika modeller används för beskrivning av spännings-töjnings sambandet. Båda avser material med samma egenskaper för tryck- och drag-spänningar. Den första modellen är ett uddagrads-polynom i töjningen vilket används för små deformationer av balklammellen. Den andra modellen är ett bilinjärt samband avsett för stora deformationer.

Momentet M och den axiella töjningen ϵ_T i balklammellen ges på explicit analytisk form ($\kappa =$ krökningen, N=axialkraften)

$$\begin{cases} M = M_i(\kappa, N) \\ \epsilon_T = \epsilon_{Ti}(\kappa, N) \end{cases} \quad i=1,2,3 \quad (1)$$

Uttrycket $M_i(\kappa, N)$ är giltigt för $(\kappa, N) \in D_i$ där D_i är ett begränsat område i (κ, N) -planet, vars utseende beror av tvärsnitt och spännings-töjningsmodell. Ekvationerna (1) är här approximativa men avvikelserna från noggrant beräknade värden är små. Exempel på formlernas noggrannhet visas på dubbelsymmetriskt och enkelsymmetriskt tvärsnitt.

För stora krökningar, $(\kappa, N) \in D_3$ används den bilinjära spännings-töjningsmodellen. Ekvationerna (1) är då utan ytterligare idealiseringar. Exempel med dubbel- och enkelsymmetriskt tvärsnitt redovisas.

Inom övergångsområdet D_2 beräknas momentet $M_i(\kappa, N)$ med (tredjegrads-)spliineinterpolation. De fyra koefficienterna bestäms ur vill-

koren att M och $\partial M/\partial \kappa$ skall överensstämma längs två interpolationslinjer $\kappa = \kappa_A$ och $\kappa = \kappa_1$ inom respektive D_1 och D_3 . Koefficienterna ges på explicit analytisk form.

Balklammellens böjande moment M kan skrivas

$$M = [P(N)]^T F_i [Q_i(\kappa)] \quad (2)$$

$$(\kappa, N) \in D_i \quad i=1,2,3$$

där P innehåller potenser av axialkraften N, $Q_i(\kappa)$ potenser av krökningen och F_i slutligen är en styvhetsmatris vars element beror av tvärsnitt och spännings-töjningsmodell. Explicita uttryck för randkurvorna till områdena D_i ges även.

I FIG.2 visas moment-krökningsdiagrammet för ett rektangulärt tvärsnitt jämfört med numeriskt beräknade värden. Materialet är en aluminiumlegering (C IIII-1). I FIG. 3 visas definitionsområden D_i inom vilka formlerna är giltiga.

Balklammellens flexibilitetssamband.

Utgående från de explicita analytiska uttrycken på moment-kröknings-axialkraftssambandet på styvhetsform kan koefficienterna i ett motsvarande samband på flexibilitetsform bestämmas med en lämplig numerisk metod. Här har splineinterpolation med polynomansatsen (3) använts.

$$\begin{cases} \kappa = \sum d_{ij} M^i N^j \\ \epsilon = \sum e_{ij} M^{i+1} N^{j-1} \end{cases} \quad (3)$$

där symmetrivillkor ger samband mellan

koefficienterna e och d. I FIG. 4 visas krökningspolynomet (3) för ett rektangulärt tvärsnitt jämfört med numeriskt beräknade värden.

Balkpelarelementets flexibilitetssamband.

Integration av uttrycken (3) längs balkelementaxeln under antagande av linjär momentfördelning och konstant axialkraft ger balkpelarelementets flexibilitetssamband, se FIG. 5.

$$\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ n_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{1e}(M_1, M_2, N_2) \\ f_{2e}(M_1, M_2, N_2) \\ f_{3e}(M_1, M_2, N_2) \end{bmatrix} \quad (4)$$

Tangentflexibilitetsmatrisen fås efter differentiering.

$$\Delta n_e = f_e^{\tan} \Delta n_e \quad (5)$$

med

$$\Delta n_e = [\Delta m_1 \quad \Delta m_2 \quad \Delta n_2]^T$$

$$\Delta n_e = [\Delta M_1 \quad \Delta M_2 \quad \Delta N_2]^T$$

Elementets styvhetsmatris på inkrementell form fås slutligen efter invertering.

$$\Delta n_e = F_e^{\tan} \Delta n_e \quad (6)$$

$$F_e^{\tan} = (f_e^{\tan})^{-1}$$

Efter transformering av (6) till ett globalt koordinatsystem kan strukturstyvhetsmatrisen etableras på inkrementell form och lösningen genomföres i enlighet med (A) i FIG.1 ovan.

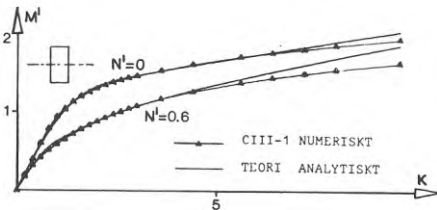


FIG.2. Analytiskt framställda moment-krökningssamband jämförda med numeriskt beräknade.

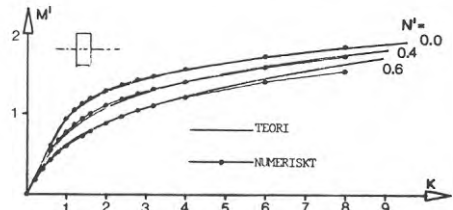


FIG. 4. Krökningspolynom (3) jämfört med numeriskt beräknade värden.

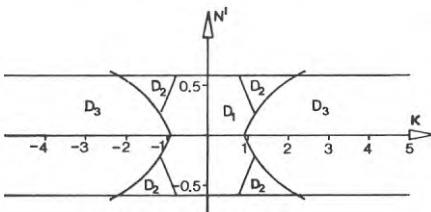


FIG.3. Definitionsområden D_i för ekvationerna (2).

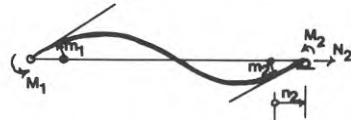


FIG.5. Balkpelarelementet med variabler.

FÖRORD

Föreliggande rapport utgör första delen i en rapportserie om ett forskningsprojekt rörande olinjärt elastiska balkar och ramar, som initierades år 1966 vid institutionen för byggnadsstatik, Chalmers Tekniska Högskola, Göteborg. Andra delen behandlar beräkningen av en struktur, sammansatt av balkelement. Resultaten i denna rapport är en vidareutveckling av tidigare publicerade arbeten.

Övriga skrifter, som publicerats inom projektet vid institutionen är "Analysis of non-linear beams", 1968 (lic. avhandling), "Finit elementmetod för elasto-plastiska balkar och ramar med stora förskjutningar" 1973 (tillsammans med Jan Bäcklund), "Analytical moment-curvature-axial force diagrams for simply symmetric cross-sections of strain hardening materials", 1974 (tillsammans med Kjell Mattiasson), "Analytical and numerical analyses of nonlinear beam elements", 1974 (doktorsavhandling).

Anslag från BFR har erhållits 1969 och 1974. Kjell Mattiasson har bistått med programmering och beräkningar. Utskriften av manuskriptet har gjorts av Britta Ågårdh. Till ovan nämnda riktas ett varmt tack för värdefullt medarbetarskap.

Göteborg i december 1975

Lennart Ågårdh

INNEHÅLL

BETECKNINGAR	7
1 INLEDNING	11
Rapportens omfattning	11
Användningsområde	11
Idealiseringar	11
Historik	12
2 DIMENSIONSLÖSA VARIABLER	13
Allmänt	
Lamellvariablernas referensnivåer	13
Elementvariablernas referensnivåer	16
Lokalt system	16
Globalt system	16
Strukturvariablernas referensnivåer	18
Sammanfattning	18
3 ANALYTISKA SPÄNNINGSTÖJNINGSSAMBAND	19
Allmänt	19
De konstitutiva ekvationerna i balkböjning	19
Analytiskt uttryck - spänningstabell	19
Anpassning av analytiska uttryck	20
Analytiskt spänningstöjningssamband	20
Byte av referensnivåer	21
Exempel 3.1	22
Sammanfattning	23
4 BALKLAMELLENS STYVHETER	24
Allmänt	24
Definitioner, förutsättningar och antaganden	24
Grundläggande samband	25
Balklammellens böjstyvhet, små krökningar	29
Axiell töjning	30
Böjande moment	30
Definitionsområde D_1	31
Exempel 4.1. Dubbelsymmetriskt tvärsnitt	32
Exempel 4.2. Enkelsymmetriskt tvärsnitt	35
Balklammellens böjstyvhet, stora krökningar	39
Idealisering av σ - ϵ -diagrammet	39
Axiell töjning och böjande moment	40
Definitionsområde D_3	41
Exempel 4.3. Dubbelsymmetriskt tvärsnitt	43
Exempel 4.4. Enkelsymmetriskt tvärsnitt	45
Balklammellens böjstyvhet, medelstora krökningar	48
Härledning av F_2	48
Valet av interpolationspunkter	51
Exempel 4.5. Dubbelsymmetriskt tvärsnitt	52
Definitionsområdet D_2	55
Slutsatser	56
Exempel 4.6. Enkelsymmetriskt tvärsnitt	57
Definitionsområdet D_2	59
Slutsatser	60
Sammanfattning	60

5	BALKLAMELLENS FLEXIBILITETER	62
	Allmänt	62
	Grundläggande samband	62
	Exempel 5.1. Dubbelsymmetriskt tvärsnitt	63
	Byte av referensnivåer	65
	Sammanfattning	65
6	BALKELEMENTETS FLEXIBILITETER	66
	Allmänt	66
	Elementets sekantflexibiliteter	66
	Exempel 6.1. Dubbelsymmetriskt tvärsnitt	70
	Elementets tangentflexibiliteter	71
	Sammanfattning	72
	Litteratur	72
7	REFERENSER	73

BETECKNINGAR

Följande beteckningar har använts i denna rapport. Alla beteckningar definieras där de först uppträder. Vissa beteckningar har flera betydelser i fall där sammanblandning är utesluten. Sidhänvisningar avser ställen där beteckningen definieras, eller ett tidigare ej använt index uppträder. Index listas separat. "x" avser normaliserad variabel, " \bar{x} " absolut variabel, " \bar{x}_0 " referensnivå. Beteckningar i listan avser normaliserade variabler, referensnivåer anges även.

Versaler

A	tvärsnittsarea, $\bar{A}_0 = \bar{b}_0 \bar{h}_0$, sid 14, delområde, sid 26-28, koefficient, sid 50, olinjär transformation, fig 6.2, sid 68
B	koefficient, sid 50, linjär transformation, fig 6.2, sid 68
C	delområde, sid 48, koefficient, sid 50, linjär transformation, fig 6.2, sid 68
\bar{C}	komplementmängd, sid 48
D	delområde, sid 29, koefficient, sid 50, differentialoperator, sid 68
E	elasticitetsmodul, \bar{E}_0 = tangentmodul i origo, sid 13, 21
F	styvhetssamband, sid 17, 18, 26, 29
G,H	matriser, sid 48
I	tröghetsmoment, $\bar{I}_0 = \bar{b}_0 \bar{h}_0^3$, sid 14, 27, 28, 40
L	elementlängd, \bar{L}_0 = referenslängd, sid 13
M	böjande moment, $\bar{M}_0 = \bar{\sigma}_0 \bar{b}_0 \bar{h}_0^2$, sid 14, 16
N	axialkraft, $\bar{N}_0 = \bar{\sigma}_0 \bar{b}_0 \bar{h}_0$, sid 14, 16
P	strukturlastvektor, sid 18, 29
Q	elementlastvektor, sid 17, 29
R	randkurvor, sid 31
S	skalningsmatriser, sid 17, statistiskt moment, sid 27, 28, 40
T	koordinattransformation, sid 17, tvärkraft, sid 25
U,V	elementkraftskomponenter, sid 17

Gemena

a	koefficient, sid 63
b	tvärsnittsbredd, \bar{b}_0 = maximal bredd, sid 13 35,40
c,d	parameter, koefficient, sid 50,62,65
e	koefficient, sid 63
f	flexibilitetssamband, sid 15,65,68
f_0	tyngdpunktsavstånd, $\bar{f}_{00}=\bar{h}_0$, sid 27
h	tvärsnittshöjd, $\bar{h}_0=\bar{h}/2$, sid 13
i,j,k	index, potenser, sid 20
m	ändvinkel, $\bar{m}_0=\bar{\kappa}_0\bar{L}_0$, sid 16
n	elementförlängning $\bar{n}_0=\bar{\epsilon}_0\bar{L}_0$, sid 16
p	strukturförskjutningsvektor, sid 18, gradtal, sid 20
q	elementförskjutningsvektor, sid 17
r	gradtal, sid 63
u,v	elementförskjutningar, sid 17
x,y,z	koordinater, $\bar{x}_0=\bar{L}_0$, $\bar{y}_0=\bar{b}_0$, $\bar{z}_0=\bar{h}_0$, sid 14,25

Index

A	interpolationspunkt κ_A , sid 51, moment M_A beräknat med anpassningen CIII-A, sid 51
E2	Euler-2 lasten \bar{N}_{E2} , sid 25
L	interpolationspunkt κ_L , sid 51, moment M_L beräknat med anpassningen CIII-L, sid 51
R	reducerat tröghetsmoment I_R , reducerat statiskt moment S_R , sid 40
T	normaltöjning ϵ_T i tyngdpunktsnivån, sid 15, 25
T0	integrationsfunktion $\epsilon_{T0}(N')$, sid 62
a	approximerande punkt, ϵ_a , σ_a , κ_a , sid 21,63
a+,a-	z_{a+} , z_{a-} , sid 27

e	element, f_e = flexibilitetssamband för element
g	globalt koordinatsystem, F_{eg} = styvhets-samband för element beskrivet i globalt system
i,j,k	summationsindex, potenser
krit	kritisk axialkraft, map instabilitet, sid 25
l	lamell, F_l = styvhets-samband för lamellen
max	maximalt studerat värde, ϵ_{max} , sid 21, N_{max} , sid 25
prop	proportionalitetsgräns, sid 63
s	struktur, F_s = strukturstyvhet, sid 18
x,y,z,	koordinatriktning, ϵ_x , κ_y , sid 25
u,ö	under, över ϵ_u , $\epsilon_ö$, sid 14
σ	F_σ , högreordningens tilläggsterm, sid 17
0	referensnivåer \bar{A}_0 , sid 13
0i	referensnivåer för element nr i, sid 21,65
1,2	elementändar M_1 , M_2 , sid 25
1+,2+	sid 28
+ -	A_+ avser del av A där $z > 0$, sid 27

Superfix

t	transponering
tan	tangentflexibilitet, f_{tan} , sid 71
'	deriveringssymbol, används även vid transformationer $N' = N/EA$, sid 15,21,65
-1	invertering, sid 17

Grekiska

α	koefficienter i spänningstöjningspolynom, sid 20
β	tvärsnittskonstanter, sid 27
Δ	differentialer, sid 68, avvikelse $\Delta\epsilon_T$, sid 36
∂	partialderivata
ϵ	normaltöjning, $\bar{\epsilon}_0 = \bar{\sigma}_0 / \bar{E}_0$, sid 14
κ	krökning, $\bar{\kappa}_0 = \bar{\epsilon}_0 / \bar{h}_0$, sid 14
λ	slankhet, $\bar{L} / \sqrt{\bar{I} / \bar{A}}$
Σ	summationstecken
σ	spänning (påkänning) $\bar{\sigma}_0 =$ vald referensnivå, sid 13

Specialtecken

[]	vektor, $[P(N)]^t = [1 \ N \ N^2]$, sid 29
{ }	funktion, $\sigma\{z\kappa + \epsilon_T\}$, sid 26
\bar{A}	betecknar absolutvariabel A, sid 13
$\check{\sigma}$	betecknar uppmätt spänning, sid 21

Enheter

Exempel i denna skrift har redovisats i dimensionslös (normaliserad) form. För övrigt har SI-systemet använts.

1 INLEDNING

1.1. Rapportens omfattning

I denna rapport behandlas axialbelastade, fritt upplagda, balk-elements böjning. De fundamentala förutsättningarna för framställningen är i korthet:

Den tekniska balkteorin används men med ett olinjärt, analytiskt och entydigt samband mellan spänning och töjning istället för Hookes lag. Skjuvdeformationer och instabilitetsfenomen behandlas ej.

Balklamellens moment och axiella töjning uttrycks i de två variablerna krökning och axialkraft på analytisk form. (Se kap 4.)

Balklamellens krökning och axiella töjning framställs som analytiska uttryck i moment och axialkraft. (Se kap 5.)

Integration av krökning och axiell töjning längs balkelementaxeln ger ändvinklar och förlängning av balkelementet uttryckta i ändmoment och axialkraft. (Se kap 6.)

Differentiering av ändvinklarna och förlängningen med avseende på ändmoment och axialkraft ger ändvinkeltillskotten och förlängnings-tillskottet. (Se kap 6.)

Resultatet av analysen ger balkelementets tangentflexibilitet i explicit analytisk form. Användningen av dessa i analysen av balkar och ramar beskrivs i del II.

1.2. Användningsområde

Den analytiskt framställda tangentflexibilitetsmatrisen har vissa fördelar jämfört med numeriskt beräknade motsvarigheter. En numerisk behandling är å andra sidan mera generell och klarar lättare godtyckliga spännings-töjningssamband, tvärsnittsformer, upprepade av- och pålastningar ovan proportionalitetsgränsen etc. För de material, tvärsnitt och lastfall, som för närvarande är möjliga att behandla med analytiska metoder kan beräkningstid och kärminnesutrymme sparas. För strukturer med ett stort antal obekanta kan dessa besparingar vara avsevärda. I dessa fall kan även beräkningsfelen äventyra resultaten vid en numerisk beräkning, som i varje belastningssteg startar med tvärsnitt och spännings-töjningssamband.

1.3. Idealiseringar

Generella metoder för icke-linjär analys av strukturer blev aktuella först i samband med utvecklingen av snabba datorer. Geometrisk olinjäritet beaktas i strukturanalysen, medan en fysikalisk olinjäritet uttrycks i elementsambanden. Dessa ges i allmänhet i inkrementell form. Lösningen av strukturproblemet göres genom en successiv ökning av lasten och beräkning av lastförskjutningssambandet för varje laststeg. I tidigare publicerade härledningar av olinjära elementsamband på analytisk form kan olika idealiseringsnivåer särskiljas:

1. Elementets olinjära last-förskjutningssamband hänföres till "olinjära fjädrar" i elementändarna.
2. Elementets olinjära egenskaper antas utbredda längs balkaxeln.
3. Axialkraftens inverkan på balklamellens moment-krökningssamband medtagen.
4. Balkelementets axiella förlängning medtagen.
5. Ändmomentens inverkan på balkelementets förlängning medtagen.
6. Bidraget till ändvinklarna av balklamellens skjuvdeformationer medtagen.
7. Axialkraftens inverkan i balklamellens momentekvation medtagen. (Balkelementets geometriska olinjäritet.)
8. Skjuvspänningarnas inverkan på materialets plasticering medtagen.
9. Belastningshistorian medtagen.

Ovanstående uppdelning ger vissa möjligheter att systematiskt bedöma approximationsgraden i analytiskt beskrivna balkelementsamband.

1.4. Historik

Wilson (1960), presenterade en tangentflexibilitetsmatris för ett olinjärt elastiskt balkelement med tre frihetsgrader, svarande mot nivå 4 ovan. Axialkraftens inverkan enligt punkt 3 var emellertid endast uppskattad med en enkel tumregel. Moment-krökningssambandet beskrevs med ett "Ramberg-Osgoodpolynom". Goldberg och Richard (1963) angav en (tangent-) styvhetsmatris med enbart ändmoment-ändvinkelsamband, med ett inverterat Ramberg-Osgoodpolynom svarande mot punkt 1 ovan. Richard och Goldberg (1965), angav en flexibilitetsmatris för moment-ändvinkelsambandet. Den olinjära delen av uttrycket för ändvinkeln var av "Ramberg-Osgood"-form och antogs koncentrerad till balkänden utan interaktion av motstående moment. I Ågårdh (1968) presenterades olinjära flexibilitetsamband för ändmoment och utbredd last (och punktlast) på ett fritt upplagt balkelement. En flexibilitetsmatris (av typ 3×3) för sambanden på inkrementell form gavs även. Moment-krökningssambanden var av potensserieform där koefficienterna var funktioner av parametrar beroende av tvärsnitt och spännings-töjningssamband. Idealiseringsnivå 2 ovan. I Smith (1972) används i princip inversen till flexibilitetsmatrisen enligt Richard, loc cit, för att ge samband för ett icke-linjärt platt-element. I Ågårdh (1974) gavs en flexibilitetsmatris av typ 2×2 där axialkraftens inverkan på moment-krökningssambandet inkluderades, nivå 3 ovan. Moment-krökningssambanden var allmänna polynom vars koefficienter anpassades till numeriskt beräknade moment-krökningssamband för olika axialkrafter.

I föreliggande rapport har en flexibilitetsmatris härletts för ett balkelement med tre frihetsgrader, ändvinklar och förlängning. Detta svarar mot nivå 5 ovan. Moment-krökningssambanden är polynom i moment och axialkraft vars koefficienter bestäms genom anpassning till analytiska uttryck för momentet uttryckt i krökning och axialkraft.

2 DIMENSIONSLÖSA VARIABLER

2.1. Allmänt

I denna framställning används genomgående dimensionslösa så kallade normaliserade variabler för att öka den numeriska precisionen, underlätta automatisk databehandling, samt underlätta kvalitativa jämförelser mellan resultat av olika beräkningar. Normaliserade variabler erhålls genom att dividera variabler och parametrar med vissa referensnivåer. Dessa kan givetvis väljas godtyckligt. För att uppnå syftet med användningen av normaliserade variabler skall dessa stå i enkla relationer till varandra. I denna rapport definieras referensnivåerna och ur definitionerna härleds samband mellan de normaliserade variablerna i teknisk balkteori. (En mera logisk framställning vore att definiera önskade relationer mellan normaliserade variabler och ur dessa samt valda referensnivåer härleda övriga referensnivåer, se Ågårdh (1974)) I en strukturanalys måste referensnivåerna vara gemensamma för alla material och tvärsnitt (strukturnormaliserade variabler). Övergång till gemensamma referensnivåer kan göras i strukturprogrammet. I elementanalysen bör väljas referensnivåer, som är speciellt lämpade för det aktuella materialet och tvärsnittet (elementnormaliserade variabler). I detta kapitel diskuteras ett allmänt val av referensnivåer.

2.2. Lamellvariablernas referensnivåer

Referensnivåerna kan uppdelas i valda och härledda. De valda referenserna ges i nedanstående tabell avseende ett visst karakteristiskt element. Symboler med streck betecknar absoluta variabler. Beteckningar motsvarande "normaliserad spänning" eller "spänning" kommer ibland att användas trots att exempelvis "spänningsparametern" vore mera adekvat.

Absolut variabel		Vald referensnivå		Normaliserad variabel
Spänning	$\bar{\sigma}$	Karakteristisk spänning	$\bar{\sigma}_0$	$\sigma = \bar{\sigma}/\bar{\sigma}_0$
Elasticitetsmodul	\bar{E}	Tangentmodul i origo	\bar{E}_0	$E = \bar{E}/\bar{E}_0$
Tvärsnittsbredd	\bar{b}	Maximal tvärsnittsbredd	\bar{b}_0	$b = \bar{b}/\bar{b}_0$
Tvärsnittshöjd	\bar{h}	Halva tvärsnittshöjden	\bar{h}_0	$h = \bar{h}/\bar{h}_0$
Elementlängd	\bar{L}	Elementets längd	\bar{L}_0	$L = \bar{L}/\bar{L}_0$

Låt de "normaliserade motsvarigheterna" till tvärsnittets area och tröghetsmoment vara:

$$A = \bar{A}/\bar{A}_0 \quad , \quad \bar{A}_0 = \bar{b}_0 \bar{h}_0 \quad (2.1)$$

$$I = \bar{I}/\bar{I}_0 \quad , \quad \bar{I}_0 = \bar{b}_0 \bar{h}_0^3 \quad (2.2)$$

Koordinater i lamellens höjded och elementets längdled sätts till:

$$z = \bar{z}/\bar{z}_0 \quad , \quad \bar{z}_0 = \bar{h}_0 \quad (2.3)$$

$$x = \bar{x}/\bar{x}_0 \quad , \quad \bar{x}_0 = \bar{L}_0 \quad (2.4)$$

Tvärsnittets deformationsvariabler töjning och krökning ges referenserna $\bar{\epsilon}_0, \bar{\kappa}_0$ varvid:

$$\epsilon = \bar{\epsilon}/\bar{\epsilon}_0 \quad , \quad \bar{\epsilon}_0 = \bar{\sigma}_0/\bar{E}_0 \quad (2.5)$$

$$\kappa = \bar{\kappa}/\bar{\kappa}_0 \quad , \quad \bar{\kappa}_0 = \bar{\epsilon}_0/\bar{h}_0 \quad (2.6)$$

Tvärsnittets kraftvariabler axialkraft och moment får referenserna \bar{N}_0, \bar{M}_0 varvid:

$$N = \bar{N}/\bar{N}_0 \quad , \quad \bar{N}_0 = \bar{\sigma}_0 \bar{A}_0 = \bar{\sigma}_0 \bar{b}_0 \bar{h}_0 \quad (2.7)$$

$$M = \bar{M}/\bar{M}_0 \quad , \quad \bar{M}_0 = \bar{\sigma}_0 \bar{I}_0/\bar{h}_0 = \bar{\sigma}_0 \bar{b}_0 \bar{h}_0^2 \quad (2.8)$$

Ekvationerna (2.1) - (2.8) skall här uppfattas som definitioner. Dessa leder till följande samband i den (linjära) tekniska balkteorin. Momentet kan skrivas

$$\bar{M} = (\bar{\sigma}_u - \bar{\sigma}_g) \bar{I}/\bar{h} \quad (2.9)$$

och krökningen kan skrivas

$$\bar{\kappa} = (\bar{\epsilon}_u - \bar{\epsilon}_g)/\bar{h} \quad (2.10)$$

där $\bar{\sigma}_u$ och $\bar{\sigma}_g$ betecknar spänningar i under- respektive överkant och $\bar{\epsilon}_u$, $\bar{\epsilon}_g$ betecknar töjningar i under- respektive överkant.

Divideras ekv (2.9) med \bar{M}_0 och ekv (2.10) med $\bar{\kappa}_0$ fås i normaliserad form

$$M = (\sigma_u - \sigma_g)I/h \quad (2.11)$$

$$\kappa = (\epsilon_u - \epsilon_g)/h \quad (2.12)$$

Hookes lag i normaliserad form blir:

$$\sigma = \bar{\sigma}/\bar{\sigma}_0 = \bar{E}\bar{\epsilon}/\bar{\sigma}_0 = E\bar{E}_0\bar{\epsilon}\bar{\epsilon}_0/\bar{\sigma}_0 = E\epsilon \quad (2.13)$$

Införes (2.13) i (2.11) fås efter kombination med (2.12)

$$M = EI (\epsilon_u - \epsilon_g)/h = EI \kappa \quad (2.14)$$

Ekvation (2.14) ger sambandet mellan böjande moment M och krökning κ i normaliserad form.

Axialkraften kan skrivas:

$$\bar{N} = \bar{\sigma}_T \bar{A} \quad (2.15)$$

Den axiella töjningen i tyngdpunktsnivån $\bar{\epsilon}_T$ blir:

$$\bar{\epsilon}_T = \bar{\sigma}_T / \bar{E} \quad (2.16)$$

Divideras ekv (2.15) med \bar{N}_0 och (2.16) med $\bar{\epsilon}_0$ samt kombineras resultaten fås i normaliserad form:

$$N = \sigma_T A = \epsilon_T EA \quad (2.17)$$

Ekvation (2.17) ger sambandet mellan lamellens töjning i tyngdpunkten och axialkraft i normaliserad form.

För balklamellen gäller således följande samband mellan normaliserade variabler i den linjära tekniska balkteorin:

$$n_1 = \begin{bmatrix} \kappa \\ \epsilon_T \end{bmatrix} = f_1 N_1 = \begin{bmatrix} 1/EI & 0 \\ 0 & 1/EA \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Ekvation (2.18) är lamellens flexibilitetssamband enligt linjär teknisk balkteori. Motsvarande samband gäller mellan referensnivåerna

$$\begin{bmatrix} \bar{\kappa}_0 \\ \bar{\epsilon}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\bar{E}_0 \bar{I}_0 & 0 \\ 0 & 1/\bar{E}_0 \bar{A}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{M}_0 \\ \bar{N}_0 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

vilket framgår av ekv (2.5) - (2.8). Valet av referensnivåer för elementvariablerna kommer att träffas enligt samma principer. Dessa erhålles genom att använda för det aktuella elementet relevanta värden på referensbredd, referensspänning osv.

Slutligen kan nämnas att det är lämpligt att representera olinjära funktioner i elementanalysen på formen $\sigma' = \sigma/E = \sigma(\epsilon)/E$, $M' = M/EI = M(\kappa, \epsilon_T)/EI$, $N' = N/EA = N(\kappa, \epsilon_T)/EA$ varvid linjär teori följande samband erhålles:

$$\sigma' = \epsilon, \quad M' = \kappa, \quad N' = \epsilon_T$$

Detta underlättar i hög grad kvalitativa jämförelser och kontroller.

2.3. Elementvariablernas referensnivåer

Lokalt system

För balkelementets deformationer gäller i ett lokalt koordinat-system enligt linjär teknisk balkteori, cf fig 4.1, 6.1,

$$\begin{bmatrix} \bar{m}_1 \\ \bar{m}_2 \\ \bar{n}_2 \end{bmatrix} = (\bar{L}/\bar{E}\bar{I}) \begin{bmatrix} 1/3 & -1/6 & 0 \\ -1/6 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{I}/\bar{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{M}_1 \\ \bar{M}_2 \\ \bar{N}_2 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Med referensnivåerna

$$\bar{m}_{10} = \bar{k}_0 \bar{L}_0 = \bar{M}_0 \bar{L}_0 / \bar{E}_0 \bar{I}_0 \quad (2.21)$$

$$\bar{n}_0 = \bar{\epsilon}_0 \bar{L}_0 = \bar{N}_0 \bar{L}_0 / \bar{E}_0 \bar{A}_0 \quad (2.22)$$

fås då följande samband mellan balkelementets normaliserade variabler

$$\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ n_2 \end{bmatrix} = (L/EI) \begin{bmatrix} 1/3 & -1/6 & 0 \\ -1/6 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & I/A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ N_2 \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

eller

$$n_e = f_e N_e \quad (2.24)$$

där f_e är balkelementets normaliserade flexibilitetsmatris i det lokala koordinatsystemet.

Balkelementets styvhetsmatris F_e kan fås efter invertering av f_e . Dessa matriser ger även sambanden mellan tillskott i elementkrafter och tillskott i elementdeformationer. I kap 6 härleds motsvarande olinjära samband, med ovanstående val av referensnivåer.

Globalt system

I strukturanalysen används samband mellan krafter och deformationer beskrivna i ett globalt koordinatsystem. Vid olinjär analys används dessutom samband mellan tillskottskrafter och tillskottsdeformationer. Transformationen från de lokala (elementorienterade) koordinatsystemen till det globala (strukturorienterade) koordinatsystemet diskuteras i del II, varvid även valet av referensnivåer i dessa ekvationer beröres. Nedan ges den fundamentala transformationen mellan tillskottskrafter ΔQ och tillskottsförskjutningar Δq för ett element beskrivna i det globala systemet, se fig 2.1.

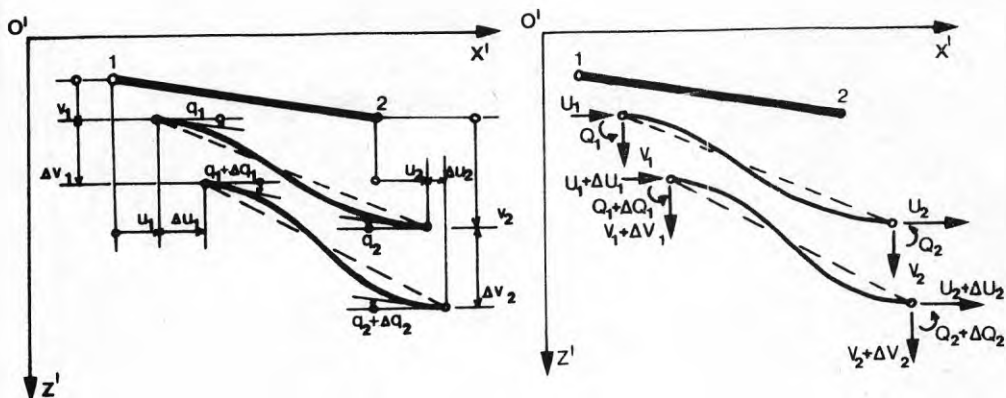


FIG. 2.1. Elementvariabler i det globala systemet.

$$\bar{F}_{eg}^{tan} \Delta \bar{q} = \Delta \bar{Q} \quad (2.25)$$

$$\text{där } \Delta \bar{q} = [\Delta \bar{q}_1 \quad \Delta \bar{q}_2 \quad \Delta \bar{u}_1 \quad \Delta \bar{u}_2 \quad \Delta \bar{v}_1 \quad \Delta \bar{v}_2]^t$$

$$\Delta \bar{Q} = [\Delta \bar{Q}_1 \quad \Delta \bar{Q}_2 \quad \Delta \bar{U}_1 \quad \Delta \bar{U}_2 \quad \Delta \bar{V}_1 \quad \Delta \bar{V}_2]^t$$

$$\text{samnt } \bar{F}_{eg}^{tan} = \bar{T}^t \bar{F}_e^{tan} \bar{T} + \bar{F}_\sigma,$$

där F_σ innehåller termer av högre ordning, se Bäcklund, Ågårdh (1973). Med referensnivåerna

$$\bar{q}_0 = \bar{m}_{10} = \bar{\epsilon}_0 \bar{L}_0 / \bar{h}_0 = \bar{M}_0 \bar{L}_0 / \bar{E}_0 \bar{I}_0 \quad (2.26)$$

$$\bar{u}_0 = \bar{v}_0 = \bar{\epsilon}_0 \bar{L}_0 = \bar{N}_0 \bar{L}_0 / \bar{E}_0 \bar{A}_0 \quad (2.27)$$

$$\bar{Q}_0 = \bar{M}_0 \quad (2.28)$$

$$\bar{U}_0 = \bar{V}_0 = \bar{N}_0 \quad (2.29)$$

fås den normaliserade elementstyhetsmatrisen efter för- och eftermultiplikation med skalningsmatriserna \bar{S}_1 och \bar{S}_2 .

$$\bar{F}_{eg}^{tan} = (\bar{S}_1)^{-1} \bar{F}_e^{tan} \bar{S}_2 \quad (2.30)$$

där

$$\bar{S}_1 = \text{diag} [\bar{M}_0 \quad \bar{M}_0 \quad \bar{N}_0 \quad \bar{N}_0 \quad \bar{N}_0 \quad \bar{N}_0] \quad (2.31)$$

och

$$\bar{S}_2 = \text{diag} [\bar{m}_{10} \quad \bar{m}_{10} \quad \bar{\epsilon}_0 \bar{L}_0 \quad \bar{\epsilon}_0 \bar{L}_0 \quad \bar{\epsilon}_0 \bar{L}_0 \quad \bar{\epsilon}_0 \bar{L}_0] \quad (2.32)$$

$$\text{ty } \Delta q = (\bar{S}_2)^{-1} \Delta \bar{q}.$$

Utföres dessa multiplikationer och utnyttjas de samband mellan referensnivåer som gäller fås att elementen i den absoluta styvhetsmatrisen skall multipliceras med nedanstående faktorer för att övergå i normaliserad form. (\bar{x} betecknar element i den absoluta tangentstyvhetsmatrisen.)

$$\bar{F}_{eg}^{\text{tan}} = \frac{\bar{\Gamma}_0}{\bar{E}\bar{I}_0} \left[\begin{array}{cc|cccc} \bar{x} & \bar{x} & \bar{h}_0 & \bar{x} & \bar{x} & \bar{x} & \bar{x} \\ \bar{x} & \bar{x} & \bar{h}_0 & \bar{x} & \bar{x} & \bar{x} & \bar{x} \\ \hline \bar{x} & \bar{x} & & \bar{x} & \bar{x} & \bar{x} & \bar{x} \\ \bar{h}_0 & \bar{x} & \bar{h}_0^2 & \bar{x} & \bar{x} & \bar{x} & \bar{x} \\ \bar{x} & \bar{x} & \bar{h}_0^2 & \bar{x} & \bar{x} & \bar{x} & \bar{x} \\ \bar{x} & \bar{x} & & \bar{x} & \bar{x} & \bar{x} & \bar{x} \end{array} \right] \quad (2.33)$$

I praktiken ställs den normaliserade styvhetsmatrisen upp direkt, baserad på normaliserade variabler och parametrar. Ekvation (2.33) ger emellertid sambanden mellan termerna i den absoluta och den normaliserade elementstyvheten.

2.4. Strukturvariablernas referensnivåer

Strukturvariablerna utgöres av krafter och förskjutningar i bärverkets knutar beskrivna i ett globalt koordinatsystem. Sambanden mellan krafter och förskjutningar ges av den fundamentala strukturstyvheten. Då såväl geometriska som fysikaliska olinjäriteter beaktas, definieras strukturstyvheten i inkrementell form, dvs ett linjärt samband mellan tillskott i krafter och tillskott i förskjutningar. Det linjära ekvationssystem som skall lösas för varje lastökning blir då

$$\bar{F}_s^{\text{tan}} \Delta \bar{P} = \Delta \bar{P} \quad (2.34)$$

med

$$\Delta \bar{P} = [\Delta \bar{q}_1 \quad \Delta \bar{q}_2 \quad \Delta \bar{u}_1 \quad \Delta \bar{u}_2 \quad \Delta \bar{v}_1 \quad \Delta \bar{v}_2 \quad \dots]^t$$

$$\Delta \bar{P} = [\Delta \bar{Q}_1 \quad \Delta \bar{Q}_2 \quad \Delta \bar{U}_1 \quad \Delta \bar{U}_2 \quad \Delta \bar{V}_1 \quad \Delta \bar{V}_2 \quad \dots]^t$$

Ekvationssystemet löses i normaliserad form där referensnivåerna för knutlaster och knutförskjutningar överensstämmer med motsvarande elementvariablers referensnivåer i det globala systemet, se ekv (2.33). Analysen utvecklas närmare i del II av detta forskningsprojekt.

2.5. Sammanfattning

Referensnivåer för lamell- och elementvariabler har definierats så att motsvarande dimensionslösa eller normaliserade variabler står i enkla relationer till varandra för det linjärt elastiska fallet. I strukturanalysen måste alla elementvariabler ha gemensamma referensnivåer, varför övergång till sådana bör göras i strukturprogrammet. Elementsambanden härleds med fördel i "elementnormaliserade" variabler.

3 ANALYTISKA SPÄNNINGSTÖJNINGSSAMBAND

3.1. Allmänt

De konstitutiva ekvationerna för ett material ger sambanden i "medeltal" mellan krafter och deformationer på mikronivån. Ett olinjärt sådant samband förklaras av sprickor i mikrostrukturen. Denna förklaring medför några väsentliga konsekvenser för material-sambanden, nämligen 1. Spännings-töjningssambandet ovan proportionalitetsgränsen måste bestämmas experimentellt för varje materialtyp. 2. Sambandet kan lätt förändras lokalt av yttre omständigheter. 3. Sambandet mellan spänning och töjning är irreversibelt, dvs belastningshistorien måste beaktas i de konstitutiva ekvationerna.

De konstitutiva ekvationerna i balkböjning.

Den tekniska balkteorin förutsätter ett linjärt elastiskt material med reversibla samband mellan spänning och töjning (Hookes lag). Detta är också uppfyllt för flera viktiga konstruktionsmaterial i en begränsad omgivning till origo (små töjningar).

Ovan proportionalitetsgränsen ger den tekniska balkteorin i många fall god överensstämmelse med experiment, då Hookes lag ersätts med ett olinjärt samband mellan normalspänning och normaltöjning. Detta gäller vid en "förstagångspålastning", se Johansson (1972). Det olinjära sambandet kan erhållas genom anpassning av ett analytiskt uttryck till uppmätta samband mellan spänning och töjning se Ågårdh (1968) eller genom användning av samhörande spännings och töjningsvärden i numerisk integration över tvärsnittet. För reverserad belastning kan god överensstämmelse med experiment erhållas om hänsyn till "Bauchinger-effekten" tas i de konstitutiva ekvationerna, Kaldjian (1967), (1968), Popov (1969), Baron (1969), Park (1972), Chen (1973), Ågårdh (1974) m fl.

Analytiskt uttryck - spänningstabell

Användning av ett analytiskt uttryck för spänningen har vissa fördelar jämfört med användning av en spännings-töjnings-tabell kombinerad med numerisk integration över tvärsnittet. Å andra sidan är det senare en mera generell metodik. Avsikten med detta forskningsprojekt är att belysa skillnader i strukturanalysen mellan användning av å ena sidan numerisk integration på tvärsnitts- och elementnivå, jämförd med användning av analytiska uttryck på motsvarande nivåer. Jämförelserna göres för sådana fall där analytiska uttryck är tillämpliga. Följande fördelar med analytiska uttryck skall prövas:

1. Det analytiska sambandet mellan spänning och töjning kan användas i analysen för att ge samband på tvärsnitts- och elementnivå. Användning av sådana lösningar är tids- och utrymmessparande vid datorberäkningar.

2. Osäkerheten i spännings-töjningsvärdena ovan proportionalitetsgränsen leder till tabelldata med låg precision, vilket i sin tur medför avrundningsfel som kan ackumuleras i analysen och leda till ökad beräkningstid och numerisk instabilitet med okontrollerbara fel i resultaten.

Fördelen under punkt 1 gäller under förutsättning att explicita lösningar kan erhållas för valda analytiska uttryck på spännings- töjningssambanden.

Erfarenheterna av strukturanalys (ramar) för stort antal obekanta med numerisk integration över tvärsnittet är begränsade och jämförelser med analytiska metoder har tidigare ej presenterats.

Anpassning av analytiska uttryck

Anpassningar av analytiska uttryck till spänningstöjningsdata erhållna ur enaxliga drag- eller tryckprov har publicerats i stort antal, se exempelvis Osgood (1946). Användningen av sådana uttryck i olinjär teknisk balkteori är väl etablerad, se Chajes (1968), Jhansale, Topper (1969).

Ett analytiskt uttryck för spänningstöjningssambandet bör vara enkelt att anpassa till givna materialdata samt vara användbart för så generella utseenden av spännings-töjningsdiagram som möjligt. Det bör vidare vara av sådan form att det möjliggör en teoretisk behandling som leder till enkla, användbara och för ändamålet tillräckligt noggranna resultat.

I detta kapitel skall ett uttryck presenteras, som användes i Mattiasson, Agårdh (1974) och som kan karakteriseras med termen: "Olinjärt elastiskt, linjärt deformationshårdnande". Uttrycket uppfyller ganska väl det första och sista kravet. Det andra kravet är uppfyllt för material såsom vissa stål- och aluminiumlegeringar.

3.2. Analytiskt spännings-töjningssamband

Det analytiska uttrycket för spännings-töjningssambandet som presenteras här, definieras på styvhetsform, d v s spänningen är en explicit udda funktion av töjningen. Sambanden ges i normaliserad form, övergång till andra referensnivåer visas även nedan.

Låt normalspänningen σ vara följande udda funktion av töjningen ϵ .

$$\sigma = \begin{cases} \sum_{k=1}^p \alpha_k \epsilon^k & |\epsilon| \leq \epsilon_a \\ \sigma_a + \alpha_a (\epsilon - \epsilon_a) & \epsilon > \epsilon_a \\ -\sigma_a + \alpha_a (\epsilon + \epsilon_a) & \epsilon < -\epsilon_a \end{cases} \quad (3.1)$$

De två sista ekvationerna kan sammanfattas till

$$\sigma = \alpha_a \epsilon + \epsilon_a (|\sigma_a / \epsilon_a| - \alpha_a) \text{sign}(\epsilon) \quad |\epsilon| > \epsilon_a$$

eller

$$\sigma = \alpha_a \epsilon + \epsilon_a (|\sigma_a / \epsilon_a| - \alpha_a), \quad |\epsilon| > \epsilon_a \quad (3.2)$$

där ϵ_a sättes till $-\epsilon_a$ för $\epsilon < 0$. De obekanta koefficienterna $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5 \dots \alpha_p$ samt α_a bestäms ur mätdata på följande sätt: (Låt $\tilde{\sigma}(\epsilon)$ beteckna ur mätdata erhållet (normaliserat) värde på spänningen, svarande mot (den normaliserade) töjningen ϵ .)

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma(0) = 0 \\ \sigma'(0) = \tilde{\sigma}'(0) \\ \sum_{k=j}^p k! \alpha_k \epsilon_a^{k-j} / (k-j)! = \tilde{\sigma}^{(j)}(\epsilon_a), \quad j = 0, 1, 2, \dots \end{array} \right. \quad (3.3)$$

vilket ger $(p+3)/2$ ekvationer. I Ågårdh (1968) visas lösningar för $p = 3, 5, 7$ och 9 . Här väljes $p=5$ vilket ger

$$\sigma = \begin{cases} \alpha_1 \epsilon + \alpha_3 \epsilon^3 + \alpha_5 \epsilon^5 & |\epsilon| \leq \epsilon_a \\ \alpha_a \epsilon + \epsilon_a (|\sigma_a / \epsilon_a| - \alpha_a) \text{sign}(\epsilon) & |\epsilon| > \epsilon_a \end{cases} \quad (3.4)$$

med

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{2k} = 0 \\ \alpha_1 = E \\ \alpha_3 = (5\sigma_a - (4E + E_a)\epsilon_a) / 2\epsilon_a^3 \\ \alpha_5 = -(3\sigma_a - (2E + E_a)\epsilon_a) / 2\epsilon_a^5 \\ \alpha_a = E_a \end{array} \right. \quad (3.5)$$

där $\sigma_a = \tilde{\sigma}(\epsilon_a)$, $E_a = \tilde{\sigma}'(\epsilon_a)$ och $E = \tilde{\sigma}'(0)$. Den oberoende parametern ϵ_a väljes så att felet inom $(0, \epsilon_{\max})$ minimeras.

Byte av referensnivåer

Om mätdata representeras i ett diagram med valda referensnivåer $\bar{\sigma}_0$ och $\bar{\epsilon}_0$, och koefficienterna α_k bestäms utgående från denna representation, fås för varje annan representation $\bar{\sigma}_{0i}$ och $\bar{\epsilon}_{0i}$ koefficienterna α'_k med

$$\begin{aligned} \alpha'_k &= \alpha_k (\bar{\sigma}_0 / \bar{\sigma}_{0i}) (\bar{\epsilon}_{0i} / \bar{\epsilon}_0)^k, \quad k=1, 3, 5 \\ \alpha'_a &= \alpha_a (\bar{\sigma}_0 / \bar{\sigma}_{0i}) (\bar{\epsilon}_{0i} / \bar{\epsilon}_0) \end{aligned} \quad (3.6)$$

vilket kan tolkas som en koordinattransformation, som kan utföras av strukturprogrammet vid övergång till globala referenser för sådana fall där flera material ingår i strukturen.

Exempel 3.1.

Spännings-töjningsdiagram för aluminium redovisas bland annat i Baehre, Bröchner, Sjölund (1965). Härur har ett diagram betecknat CIII-1 valts för exempel i denna rapport, se även Ågårdh (1974). Väljes $\epsilon_a = 1.45$, $\sigma_a = 0.95$, $\alpha_a = 0.08$ och $\epsilon_{max} \approx 6.0$ erhålles den olinjärt elastiska, linjärt deformationshårdnande anpassningen CIII-A i fig 3.1.

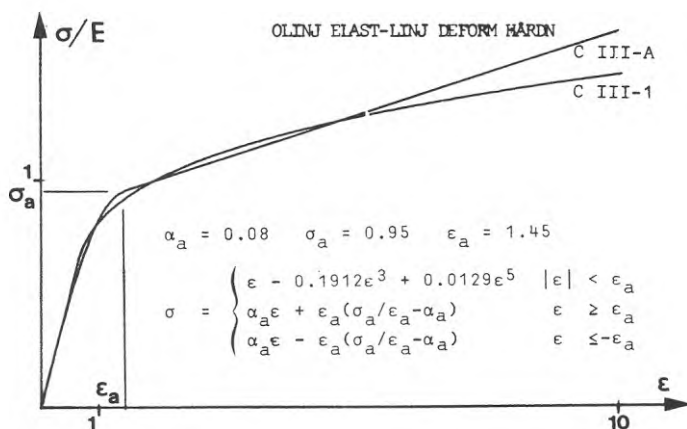


FIG.3.1. Till mätdata anpassat σ - ϵ -diagram

Anpassningen kan även göras för användning i förenklade uttryck avsedda för stora töjningar. Då väljes ett linjärt elastiskt, linjärt deformationshårdnande diagram CIII-L, se fig 3.2.

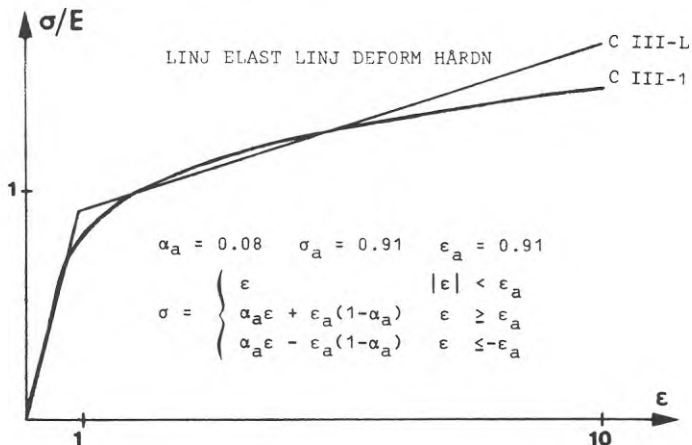


FIG.3.2. Till mätdata anpassat σ - ϵ -diagram

Genom att variera parametrarna α_a , σ_a och ϵ_a kan man uppnå god anpassning till olika töjningsintervall, cf fig 3.3.

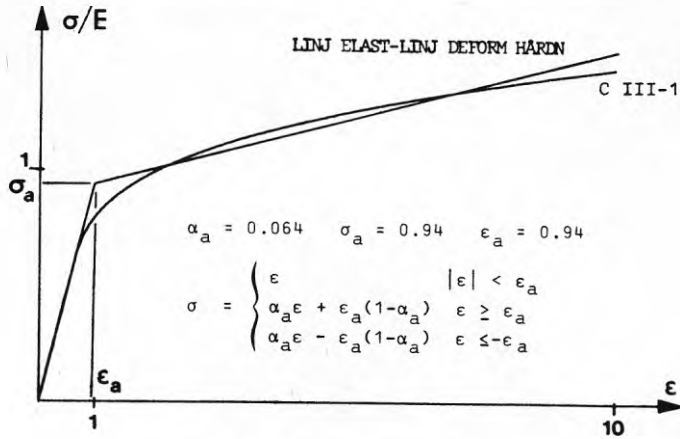


FIG.3.3. Till mätdata anpassat σ - ϵ -diagram

3.3. Sammanfattning

Ett analytiskt uttryck CIII-A, bestående av två polynom av grad 5 resp grad 1, anpassas till mätdata CIII-1 från dragprov. Avsikten är att utnyttja polynomen vid studium av en balklamells moment-krökningsdiagram för små axialkrafter och krökningar.

För stora krökningar och axialkrafter, används vid motsvarande studium ett analytiskt uttryck CIII-L, bestående av två räta linjer.

Uttryck av ovannämnda karaktär är enkla att anpassa med acceptabel noggrannhet till mätdata för en stor klass konstruktionsmaterial, företrädesvis stål- och aluminiumlegeringar.

4 BALKLAMELLENS STYVHETER

4.1. Allmänt

I detta kapitel skall balklamellens moment beräknas uttryckt i axialkraft och krökning. De antaganden som ligger till grund för analysen diskuteras i nästa avsnitt. Här skall nämnas något om bakgrunden till valet av oberoende variabler.

Strukturanalysen av balkar och ramar sker med förskjutningsmetod vilket innebär att systemmatrisen sammansätts av balkelementens styvheter. Dessa definierar sambanden mellan ändmoment-tillskott och ändvinkel-tillskott samt axialkrafttillskott och längdtillskott. Uppställning av dessa (tangent-) styvheter bör i olinjär teori ske via elementets flexibiliteter, se Bäcklund, Ågårdh (1973). Dessa beräknas, se kap 6, genom integration längs elementet av lamellens flexibiliteter, vilka utgöres av krökning och längdändring uttryckta i moment och axialkraft, se kap 5.

Det har hittills visat sig vara omöjligt att härleda den olinjära balklamellens flexibiliteter på explicit form baserad på spännings-töjningssamband och tvärsnittsgeometri. Man kan då anpassa ett lämpligt analytiskt uttryck till beräknade styvhets samband mellan lamellens variabler. På grund av symmetriegenskaper räcker det att anpassa ett analytiskt uttryck till en av deformationsvariablerna, exempelvis krökningen som funktion av moment och axialkraft. Det "ekvivalenta" analytiska uttrycket till den andra deformationsvariabeln, bestämmas därefter ur symmetrivillkoren, se kapitel 5. Anpassningen av krökningen $\bar{\kappa}$ som funktion av moment och axialkraft baseras på härledda samband mellan moment, krökning och axialkraft. Detta leder till explicita formler för koefficienterna i den anpassade flexibiliteten. I detta kapitel skall därför sådana samband för momentet uttryckt i axialkraft och krökning presenteras. Formlerna är giltiga inom begränsade områden i $(\bar{N}, \bar{\kappa})$ -planet.

4.2. Definitioner, förutsättningar och antaganden

Den följande analysen av den olinjärt elastiska balklamellens deformationer bygger på den tekniska balkteorin med olinjärt samband mellan materialets spänningar och töjningar. Tillämpningen på slanka balkar och balkpelare medför att skjuvdeformationerna kan försummas. Analysen genomföres för måttliga axialkrafter, se nedan.

Tvärsnittet är enkel- (eller dubbel-) symmetriskt och variablerna mäts i tyngdpunkten, varvid momentet verkar i ett symmetriplan, se fig 4.1. Alla deformationer antas försiggå i detta plan.

Spänningen är en entydig funktion av töjningen, vilket medför att analysen antas gälla en förstagångspålastning ovan proportionalitetsgränsen.

Det förutsätts att axialkraftsparametern $N' = N/EA$ är måttlig, så att inget instabilitetsfenomen kan uppträda i elementet. Om den kritiska lasten med avseende på plan knäckning uttrycks med $N_{krit} = \bar{N}_{krit}/\bar{N}_{E2}$ fås följande uttryck på maximala axialkraftsparametern

$$N'_{max} = |N_{krit}| \pi^2 / \bar{\epsilon}_0 \lambda^2 \quad (4.1)$$

där λ är elementets slankhet. För ett balkelement av aluminium med $\bar{\sigma}_0 = \bar{\sigma}_{0,2} = 350 \text{ MPa}$ och slankheten $\lambda > 40$ är $N_{krit} = 1$, se Aluminiumnormen (1966) och $|N'_{max}| \approx 2000/\lambda^2$, vilket för $\lambda = 80$ ger $|N'_{max}| \approx 0.31$ och $\lambda = 70$ ger $|N'_{max}| \approx 0.41$. Ekvation (4.1) ger en uppfattning om inom vilka gränser axialkraftsparametern N' tillåts variera.

4.3. Grundläggande samband

Ur ett parallelepipediskt balkelement med enkel- (eller dubbel-) symmetriskt tvärsnitt skäres en lamell ut med snitten \bar{x} och $\bar{x} + \Delta\bar{x}$, se fig 4.1.

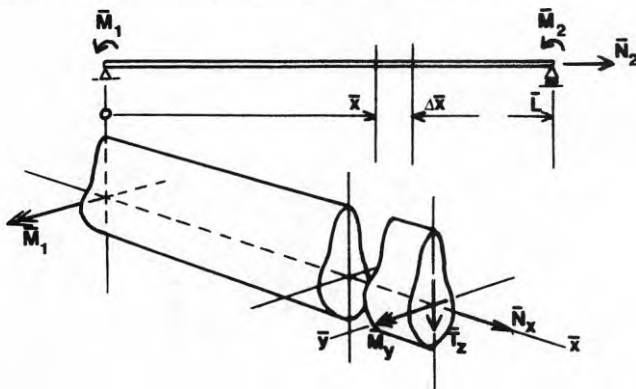


FIG 4.1. Balkelement och balklamell

Skjuvdeformationerna försummas varför tvärkraften ej tas med bland lamellens krafter. Beteckna \bar{M}_y med \bar{M} och \bar{N}_x med \bar{N} och samla lamellens krafter i kolumnen \bar{N}_1 .

$$\bar{N}_1 = [\bar{M} \ \bar{N}]^t \quad (4.2)$$

där t står för transponering. Lamellens deformationer n_1 karakteriseras av krökning $\bar{\epsilon}_y$ och axiell töjning i tyngdpunktslagret $\epsilon_x\{0\}$.

$$\bar{n}_1 = [\bar{\kappa} \ \bar{\epsilon}_T]^t \quad (4.3)$$

där de förkortade beteckningarna $\bar{\kappa}$ och $\bar{\epsilon}_T$ har införts.

Antagandet om balklamellens geometri - plana tvärsnitt förblir plana efter deformationen, och konstitutiva ekvationer för materialet - se kapitel 3, ger de ekvationer som ligger till grund för analysen. Således

$$\bar{\epsilon}_x = \bar{\kappa}z + \bar{\epsilon}_T \quad (4.4)$$

$$\bar{\sigma}_x = \bar{\sigma}\{\bar{\epsilon}_x\} \quad (4.5)$$

$$\bar{M} = \int_{\bar{A}} z \bar{\sigma}\{\bar{\kappa}z + \bar{\epsilon}_T\} d\bar{A} \quad (4.6)$$

$$\bar{N} = \int_{\bar{A}} \bar{\sigma}\{\bar{\kappa}z + \bar{\epsilon}_T\} d\bar{A} \quad (4.7)$$

Formellt kan ekv (4.6)-(4.7) skrivas:

$$\bar{N}_1 = \bar{F}_1 \{\bar{n}_1\} \quad (4.8)$$

dvs en olinjär vektorvärd funktion \bar{F}_1 kallad balklamellens styvhet, avbildar lamellens deformationer $\bar{n}_1 = [\bar{\kappa}, \bar{\epsilon}_T]^t$ på lamellens krafter $\bar{N}_1 = [\bar{M}, \bar{N}]^t$. Övergång till normaliserade variabler ger, se kap 2.

$$M = \bar{M}/\bar{M}_0 = \int_A z \sigma\{\kappa z + \epsilon_T\} dA \quad (4.9)$$

$$N = \bar{N}/\bar{N}_0 = \int_A \sigma\{\kappa z + \epsilon_T\} dA \quad (4.10)$$

ty $\bar{\sigma}\{\bar{\epsilon}\}/\bar{\sigma}_0 = \sigma\{\bar{\epsilon}/\bar{\epsilon}_0\} = \sigma\{\epsilon\}$ och $\bar{\epsilon}/\bar{\epsilon}_0 = (\bar{\kappa}z + \bar{\epsilon}_T)/\bar{\epsilon}_0 = \kappa z + \epsilon_T$

med ett allmänt val av referensnivåer.

Införes de konstitutiva ekvationerna för materialet enligt ekv (3.10) i ekvationerna (4.9) och (4.10) fås, cf fig 4.2.

$$M = \sum_{k=1}^p \alpha_k \int_{A_1} (\kappa z + \epsilon_T)^k z dA + \int_{A_2} (\alpha_a (\kappa z + \epsilon_T) \pm \epsilon_a (|\sigma_a/\epsilon_a| - \alpha_a)) z dA \quad (4.11)$$

$$N = \sum_{k=1}^p \alpha_k \int_{A_1} (\kappa z + \epsilon_T)^k dA + \int_{A_2} (\alpha_a (\kappa z + \epsilon_T) \pm \epsilon_a (|\sigma_a/\epsilon_a| - \alpha_a)) dA \quad (4.12)$$

Tecknen i ekv (4.11) och (4.12) väljes så att + tecken tillämpas på den del av området där $\epsilon > 0$ och - tecken för den del där $\epsilon < 0$. Ekvationerna skall omformuleras så att + tecken gäller för $\kappa > 0$ och - tecken för $\kappa < 0$. Vidare skall integraler över området A_2 uttryckas i tvärsnittsskonstanter och integraler över området A_1 . Områdena uppdelas även på delområden A_+ och A_- där A_{1+} och A_{2+} definieras av z_{a+} , se nedan och A_{1-} och A_{2-} definieras av z_{a-} .

Ekvationerna kan då skrivas med användning av binomialteoremet

$$M = \sum_{k=0}^P \alpha_k \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \kappa^{k-j} \epsilon_T^j \int_{A_1} z^{k-j+1} dA + \alpha_a (\kappa \int_{A_2} z^2 dA + \epsilon_T \int_{A_2} z dA) + \epsilon_a (|\sigma_a / \epsilon_a| - \alpha_a) \left(\int_{A_{2+}} z dA - \int_{A_{2-}} z dA \right) \quad (4.13)$$

$$N = \sum_{k=0}^P \alpha_k \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \kappa^{k-j} \epsilon_T^j \int_{A_1} z^{k-j} dA + \alpha_a (\kappa \int_{A_2} z dA + \epsilon_T \int_{A_2} dA) + \epsilon_a (|\sigma_a / \epsilon_a| - \alpha_a) \left(\int_{A_{2+}} dA - \int_{A_{2-}} dA \right) \quad (4.14)$$

där ϵ_a skall väljas för $\kappa < 0$.

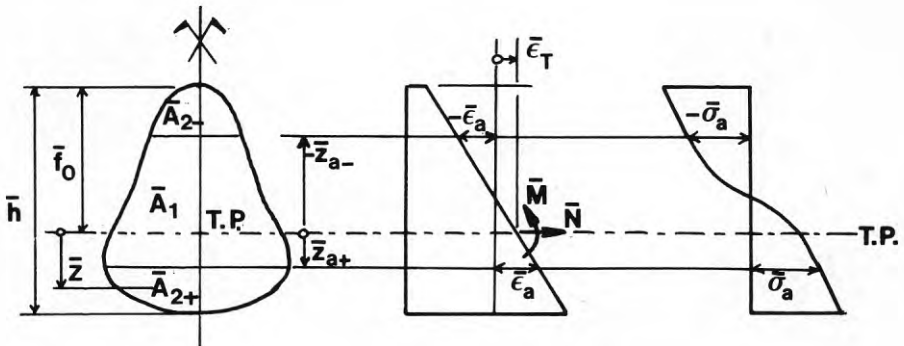


FIG. 4.2. Tvärsnitt med töjnings- och spänningsfördelning.

Inför beteckningarna

$$\beta_k = \int_{A_1} z^{k+1} dA, I_k = \int_{A_k} z^2 dA, S_k = \int_{A_k} z dA, A_k = \int_{A_k} dA \quad (4.15)$$

Med dessa beteckningar kan ekv (4.13) och (4.14) skrivas

$$M = \sum_{k=1}^P \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \alpha_k \beta_{k-j} \kappa^{k-j} \epsilon_T^j + \alpha_a (I_2 \kappa + S_2 \epsilon_T) + \epsilon_a (|\sigma_a / \epsilon_a| - \alpha_a) (S_{2+} - S_{2-}) \quad (4.16)$$

$$N = \sum_{k=1}^P \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \alpha_k \beta_{k-j-1} \kappa^{k-j} \epsilon_T^j + \alpha_a (S_2 \kappa + A_2 \epsilon_T) + \epsilon_a (|\sigma_a / \epsilon_a| - \alpha_a) (A_{2+} - A_{2-}) \quad (4.17)$$

Med

$$I_2 = I - I_1 \quad , \quad S_2 = S - S_1 \quad , \quad A_2 = A - A_1$$

$$S_{1+} = S_{1+} + S_{1-} \quad , \quad S_{2+} = S_+ - S_{1+} \quad , \quad S_{2-} = S_- - S_{1-}$$

$$A_{1+} = A_{1+} + A_{1-} \quad , \quad A_{2+} = A_+ - A_{1+} \quad , \quad A_{2-} = A_- - A_{1-}$$

kan de sista termerna i ekv (4.16) och (4.17) skrivas

$$\begin{aligned} & \alpha_a ((I - I_1)\kappa + (S - S_1)\epsilon_T) + \\ & + \epsilon_a (|\sigma_a/\epsilon_a| - \alpha_a)(S_+ - S_- + S_{1-} - S_{1+}) = \\ & = \alpha_a I\kappa - \alpha_a (I_1\kappa + S_1\epsilon_T) - \epsilon_a (|\sigma_a/\epsilon_a| - \alpha_a)(S_{1+} - S_{1-}) + \\ & + \epsilon_a (|\sigma_a/\epsilon_a| - \alpha_a)(S_+ - S_-) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \alpha_a ((-S_1)\kappa + (A - A_1)\epsilon_T) + \epsilon_a (|\sigma_a/\epsilon_a| - \alpha_a)(A_+ - A_- + A_{1-} - A_{1+}) = \\ & = \alpha_a A\epsilon_T - \alpha_a (S_1\kappa + A_1\epsilon_T) - \epsilon_a (|\sigma_a/\epsilon_a| - \alpha_a)(A_{1+} - A_{1-}) + \\ & + \epsilon_a (|\sigma_a/\epsilon_a| - \alpha_a)(A_+ - A_-) \end{aligned}$$

Insättning i ekv (4.16) och (4.17) ger slutligen

$$\begin{aligned} M = & \alpha_a I\kappa + \epsilon_a (|\sigma_a/\epsilon_a| - \alpha_a) 2S_+ + \sum_{k=1}^p \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \alpha_k \beta_{k-j} \kappa^{k-j} \epsilon_T^j - \\ & - (\alpha_a (I_1\kappa + S_1\epsilon_T) + \epsilon_a (|\sigma_a/\epsilon_a| - \alpha_a)(S_{1+} - S_{1-})) \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} N = & \alpha_a A\epsilon_T + \epsilon_a (|\sigma_a/\epsilon_a| - \alpha_a)(A_+ - A_-) + \sum_{k=1}^p \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \alpha_k \beta_{k-j} \kappa^{k-j} \epsilon_T^j - \\ & - (\alpha_a (S_1\kappa + A_1\epsilon_T) + \epsilon_a (|\sigma_a/\epsilon_a| - \alpha_a)(A_{1+} - A_{1-})) \end{aligned} \quad (4.19)$$

Området med arean A_1 definieras av

$$z_{a+} = \begin{cases} (\epsilon_a - \epsilon_T)/\kappa & -f_0 \leq (\epsilon_a - \epsilon_T)/\kappa \leq h - f_0 \\ (h - f_0) & (\epsilon_a - \epsilon_T)/\kappa > h - f_0 \\ -f_0 & (\epsilon_a - \epsilon_T)/\kappa < -f_0 \end{cases} \quad (4.20)$$

och

$$z_{a-} = \begin{cases} (-\epsilon_a - \epsilon_T)/\kappa & -f_0 \leq (-\epsilon_a - \epsilon_T)/\kappa \leq h - f_0 \\ -f_0 & (-\epsilon_a - \epsilon_T)/\kappa < -f_0 \\ h - f_0 & (-\epsilon_a - \epsilon_T)/\kappa > h - f_0 \end{cases} \quad (4.21)$$

där ϵ_a bytes mot $-\epsilon_a$ för $\kappa < 0$ i ekv (4.18) - (4.21). Notera den analoga uppbyggnaden av momentekvationen (4.18) och projektionsekvationen (4.19). För små krökningar är $A_1 = A$ och enbart dubbelsummorna kvarstår, se avsnitt 4.4. För stora krökningar ersätts den krökta delen av σ - ϵ -diagrammet med en rät linje, gradtalet sättes till $p=1$ och $|\sigma_a/\epsilon_a| = \alpha_1$, se avsnitt 4.5.

I området mellan små och stora krökningar approximeras moment-krökningssambandet med ett polynom av lämpligt gradtal, se avsnitt 4.6. Inom dessa delområden i N - κ -planet betecknade med respektive D_1, D_2 och D_3 , skall momentet framställas som matrisprodukter

$$M = \begin{cases} [P(N)]^t F_1 [Q_1(\kappa)] & \text{inom } D_1 \\ [P(N)]^t F_2 [Q_2(\kappa)] & \text{inom } D_2 \\ [P(N)]^t F_3 [Q_3(\kappa)] & \text{inom } D_3 \end{cases} \quad (4.22)$$

där $[P(N)]^t = [1 \ N/\alpha_1 A \ (N/\alpha_1 A)^2]^t$

$$[Q_1(\kappa)]^t = [\kappa \ \kappa^2 \ \kappa^3 \ \kappa^4 \ \kappa^5] \quad (4.23)$$

$$[Q_2(\kappa)]^t = [1 \ \kappa \ \kappa^2 \ \kappa^3] \quad (4.24)$$

$$[Q_3(\kappa)]^t = [1/\kappa^2 \ 1/(a\kappa+b)^2 \ 1 \ \kappa] \quad (4.25)$$

samt F av N och κ oberoende matriser, karakteristiska för material och tvärsnitt. Sedan F beräknats, är momentet känt med god noggrannhet som funktion av axialkraft och krökning. Vissa inskränkningar gäller, se respektive avsnitt.

4.4. Balklamellens böjstyvheter, små krökningar

I detta avsnitt studeras små krökningar för vilka tvärsnittets fibrer har spänningar ovan proportionalitetsgränsen. Den maximala töjningen ϵ i tvärsnittet antas uppfylla villkoret

$$|\epsilon_{\max}| \leq \epsilon_a \quad (4.26)$$

varför materialets konstitutiva samband får formen, cf kapitel 3.

$$\sigma = \sum_{k=1}^p \alpha_k \epsilon^k \quad (4.27)$$

Lamellens styvheter kan då skrivas se ekv (4.18), (4.19), med $\beta_{-1} = A_1 = A$, $\beta_1 = I$, $\alpha_1 = E$

$$M = \sum_{k=1}^p \alpha_k \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \beta_{k-j} \kappa^{k-j} \epsilon_T^j \quad (4.28)$$

$$N = \sum_{k=1}^p \alpha_k \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \beta_{k-j-1} \kappa^{k-j} \epsilon_T^j \quad (4.29)$$

Detta ekvationssystem kan för det allmänna fallet endast lösas numeriskt med iteration. För att möjliggöra en analytisk behandling måste approximationer införas.

Axiell töjning

För $\kappa=0$ är sambandet mellan axialkraftsparametern $N'=N/EA$ och axiell töjning ϵ_T identiskt med $\sigma'=\sigma/E-\epsilon$ -diagrammet. För $\kappa \neq 0$ och måttliga axialkrafter är axialkraften praktiskt taget linjär i ϵ_T varför termer med högre grad av ϵ_T i ekv (4.29) kan försummas, cf ex 4.1 och 4.2 nedan.

$$N = \sum_{k=1}^P \alpha_k \kappa^{k-1} (\beta_{k-1} \kappa + k \beta_{k-2} \epsilon_T) \quad (4.30)$$

varur

$$\epsilon_T = (N - \sum_{k=1}^P \alpha_k \beta_{k-1} \kappa^k) / \sum_{k=1}^P k \alpha_k \beta_{k-2} \kappa^{k-1} \quad (4.31)$$

vilket för små κ kan utvecklas i serie, där termer av högre grad än 5 i κ försummas. ($\beta_{-1}=A$)

$$\epsilon_T = (N - \sum_{k=1}^P \alpha_k \beta_{k-1} \kappa^k) \sum_{j=0}^2 (-1)^j \kappa^{2j} (3\alpha_3 \beta_1 + 5\alpha_5 \beta_3 \kappa^2)^j / (\alpha_1 A)^{j+1} \quad (4.32)$$

Felet i ϵ_T enligt ekv (4.32) är av storleksordningen $O(\kappa^6)$ för dubbelsymmetriska och $O(\kappa^5)$ för enkelsymmetriska tvärsnitt, under förutsättning att termen

$$|3\alpha_3 \beta_1 + 5\alpha_5 \beta_3 \kappa^2| < \alpha_1 A / \kappa^2$$

vilket bör gälla inom definitionsområdet D_1 , se nedan. Efter ihopmultiplikationen erhålles:

$$\begin{aligned} \epsilon_T = \frac{N}{\alpha_1 A} & (1 - 3\alpha_3 \beta_1 \kappa^2 / \alpha_1 A - (5\alpha_5 \beta_3 / \alpha_1 A - 9\alpha_3^2 \beta_1^2 / (\alpha_1 A)^2) \kappa^4) - \\ & - (\alpha_3 \beta_2 / \alpha_1 A) \kappa^3 - (\alpha_5 \beta_4 / \alpha_1 A - 3\alpha_3^2 \beta_1 \beta_2 / (\alpha_1 A)^2) \kappa^5 \end{aligned} \quad (4.33)$$

Neutrala lagrets läge definieras av kvoten ϵ_T / κ .

Böjande moment

Ekv: (4.33) ger den axiella töjningen ϵ_T uttryckt i axialkraften N och krökningen κ . Insättning av ekv (4.31) i ekv (4.28) ger momentet M uttryckt i axialkraft och krökning.

$$M = \sum_{l=1}^P \alpha_l \sum_{j=0}^1 \binom{l}{j} \beta_{l-j} \kappa^{l-j} \left((N - \sum_{k=1}^P \alpha_k \beta_{k-1} \kappa^k) / \sum_{k=1}^P k \alpha_k \beta_{k-2} \kappa^{k-1} \right)^j \quad (4.34)$$

För små krökningar och axialkrafter kan högre potenser av κ och N försummas. Numeriska experiment visar, se exempel 4.1 och 4.2, att god överensstämmelse med noggrant beräknade moment kan erhållas efter serieutveckling av nämnaren i ekv (4.34) med termer av upp till andra graden i N och femte graden i κ . Efter ihopmultiplikationen fås

$$M = [P(N)]^t [F_1][Q_1(\kappa)] \quad (4.35)$$

med $[P(N)]^t = [1 \ N / \alpha_1 A \ (N / \alpha_1 A)^2]$, $[Q_1(\kappa)]^t = [\kappa \ \kappa^2 \ \kappa^3 \ \kappa^4 \ \kappa^5]$

Styvhetsmatrisen F_1 är oberoende av axialkraft och krökning. Notera att $\alpha_1=E$, $\beta_{-1}=A$, $\beta_1=I$ och att alla beteckningar förekommer.

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha_3\beta_3/\alpha_1 I \\ 0 & 3\alpha_3\beta_2/\alpha_1 I & 0 \\ 3\alpha_3/\alpha_1 & 0 & 10\alpha_5\beta_3/\alpha_1 I - 18\alpha_3^2\beta_1/\alpha_1^2 A \\ 0 & \alpha_5\beta_5/\alpha_1 I - 3\alpha_3^2\beta_2^2/\alpha_1^2 AI & \\ 5\alpha_5\beta_4/\alpha_1 I - 9\alpha_3^2\beta_2/\alpha_1^2 A & 0 & \\ 0 & 81\alpha_3^3\beta_1^2/\alpha_1^3 A^2 - 90\alpha_3\alpha_5\beta_3/\alpha_1^2 A & \end{bmatrix} \alpha_1 I$$

Definitionsområde D_1

Ekvationerna (4.28) och (4.29) är giltiga under förutsättning att den maximala töjningen $|\epsilon| \leq \epsilon_a$ vilket även kan skrivas:

$$-\epsilon_a < \kappa z + \epsilon_T \leq \epsilon_a$$

För ett allmänt enkelsymmetriskt tvärsnitt inträffar de maximala töjningarna för $z = -f_0$ och $z = h-f_0$ varför

$$-(\epsilon_a - \kappa f_0) \leq \epsilon_T \leq (\epsilon_a - \kappa(h-f_0)) \quad (4.36)$$

som med ϵ_a utbytt mot $-\epsilon_a$ och omvända olikhetstecken även gäller $\kappa < 0$. Insättning av ϵ_T enligt ekv (4.31) ger randkurvorna $N' = R_k(\kappa)$ för definitionsområdets ränder. Således

$$-R_1(\kappa) \leq N' \leq R_2(\kappa) \quad , \quad \kappa > 0 \quad (4.37)$$

$$-R_2(\kappa) < N' \leq R_1(\kappa) \quad , \quad \kappa < 0$$

$$\text{med } R_1(\kappa) = -(\alpha_3\beta_2\kappa^3 + \alpha_5\beta_4\kappa^4)/\alpha_1 A + (\epsilon_a - \kappa f_0)(1 + 3\alpha_3\beta_1\kappa^2/\alpha_1 A + 5\alpha_5\beta_3\kappa^4/\alpha_1 A) \quad \text{och}$$

$$R_2(\kappa) = (\alpha_3\beta_2\kappa^3 + \alpha_5\beta_4\kappa^4)/\alpha_1 A + (\epsilon_a - \kappa(h-f_0))(1 + 3\alpha_3\beta_1\kappa^2/\alpha_1 A + 5\alpha_5\beta_3\kappa^4/\alpha_1 A)$$

där ϵ_a bytes mot $-\epsilon_a$ för $\kappa < 0$. För dubbelsymmetriska tvärsnitt förenklas ekv (4.37) till

$$|N'| \leq R(\kappa) \quad (4.37a)$$

$$\text{med } R(\kappa) = (|\epsilon_a| - |\kappa|)(1 + 3\alpha_3\beta_1\kappa^2/\alpha_1 A + 5\alpha_5\beta_3\kappa^4/\alpha_1 A)$$

dvs ett med avseende på (κ, N) axlarna symmetriskt område, se exempel 4.1.

Exempel 4.1. Dubbelsymmetriskt tvärsnitt.

För en rektangulär tvärsnitt är $\beta_k = 2/(k+2)$ för udda k , annars 0. Insättning i ekv (4.31) med $\alpha_1 = 1$ ger:

$$\epsilon_T = N' / (1 + \alpha_3 k^2 + \alpha_5 k^4) \quad (4.31a)$$

Anpassning till materialet CIII-1, betecknat CIII-A se ex 3.1, ger

$$\epsilon_T = N' / (1 - 0.1912k^2 + 0.01295k^4) \quad (4.31b)$$

som jämförs med noggrant beräknade töjningar ur tab 4.1. i fig 4.3. De noggrant beräknade resultat, som används såsom jämförelse med analytiskt beräknade värden i exemplen nedan, är beräknade med numeriska metoder som anges i Ågårdh (1974).

TAB. 4.1. Töjningar ϵ_T . Anpassning CIII-A
Rektangel

N' \ κ	0.0	0.4	0.8	1.2
0.0	0.000	0.000	0.000	0.000
0.2	0.202	0.208	0.229	0.269
0.4	0.413	0.427	0.472	0.559
0.6	0.651	0.675	0.756	0.892

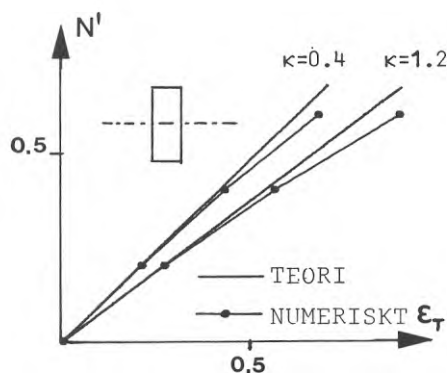


FIG.4.3. Töjningar enligt ekv. (4.33) jämförda med noggrant beräknade värden. Symmetriskt tvärsnitt. Anpassning CIII-A.

Insättning av ekv (4.31a) i ekv (4.34) ger styvhetsmatrisen $F_1(\alpha_1=1)$:

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3\alpha_3/5 & 0 & 3\alpha_5/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3\alpha_3 & 0 & 6\alpha_5 - 6\alpha_3^2 & 0 & 9\alpha_3^3 - 18\alpha_3\alpha_5 \end{bmatrix} \alpha_1 I$$

Efter ihopmultiplikation enligt ekv (4.35) fås det "elementnormaliserade" momentet

$$\begin{aligned} M/\alpha_1 I &= (1+3\alpha_3(N/\alpha_1 A)^2)\kappa + 6(\alpha_3/10 + (\alpha_5 - \alpha_3^2)(N/\alpha_1 A)^2)\kappa^3 \\ &+ 9(\alpha_5/21 + (\alpha_3^3 - 2\alpha_3\alpha_5)(N/\alpha_1 A)^2)\kappa^5 \end{aligned} \quad (4.35a)$$

eller med α enligt exempel 3.1

$$\begin{aligned} M' &= (1-0.5737(N')^2)\kappa - (0.1147 + 0.1416(N')^2)\kappa^3 \\ &+ (0.00555 - 0.01834(N')^2)\kappa^5 \end{aligned} \quad (4.35b)$$

vilket jämförs med noggrant beräknade moment ur tab 4.2 i fig 4.4

TAB. 4.2. Noggrant beräknade moment.
Rektangulärt tvärsnitt. Anpassning CIII-A.

$\kappa \backslash N'$	0.0	0.2	0.4	0.6
0.2	0.1991	0.1944	0.1797	0.1522
0.4	0.3927	0.3831	0.3526	0.2957
0.6	0.5757	0.5604	0.5123	0.4215
0.8	0.7431	0.7213	0.6522	0.5208
1.0	0.8908	0.8610	0.7662	0.5963
1.2	1.0155	0.9757	0.8546	0.6589
1.4	1.1150	1.0651	0.9266	0.7138
1.6	1.1891	1.1358	0.9877	0.7638
1.8	1.2450	1.1926	1.0410	0.8103
2.0	1.2895	1.2388	1.0882	0.8543
2.4	1.3586	1.3111	1.1685	0.9361
2.8	1.4130	1.3683	1.2342	1.0113
3.2	1.4595	1.4174	1.2911	1.0805
3.6	1.5015	1.4617	1.3425	1.1437
4.0	1.5406	1.5030	1.3903	1.2024
5.2	1.6490	1.6170	1.5209	1.3608
6.0	1.7175	1.6885	1.6016	1.4567
7.2	1.8176	1.7925	1.7169	1.5911
8.0	1.8834	1.8604	1.7913	1.6761

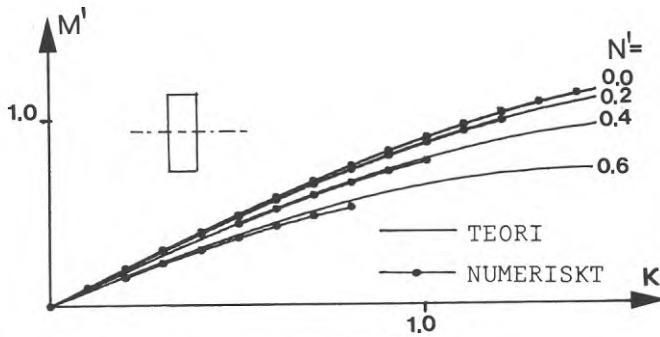


FIG.4.4. Moment enligt ekv (4.35b) jämförda med noggrant beräknade värden.

Avvikelse från noggrant beräknade värden är störst i en omgivning av randen $R(\kappa)$. Följande (normaliserade) absolutfel gäller i detta exempel.

TAB.4.3. Avvikelser

N'	0.0	0.2	0.4	0.6
κ	1.4	1.2	1.0	0.8
$ \Delta M _{\max} \cdot 10^4$	0.01	17	72	288

Slutligen är det av intresse för resultaten i ekv (4.31b) och (4.35b) att studera definitionsområdet D_1 . Insättning i ekv (4.37a) ger med $f_0 = h - f_0 = 1$:

$$|N/\alpha_1 A| \leq (\epsilon_a - |\kappa|)(1 + \alpha_3 \kappa^2 + \alpha_5 \kappa^4) \quad (4.37b)$$

Med parametrar för σ - ϵ -diagrammet CIII-A från exempel 3.1. fås randkurvorna

$$|N'| \leq (1.45 - |\kappa|)(1 - 0.1912\kappa^2 + 0.01295\kappa^4) \quad (4.37c)$$

som visas i fig 4.5.

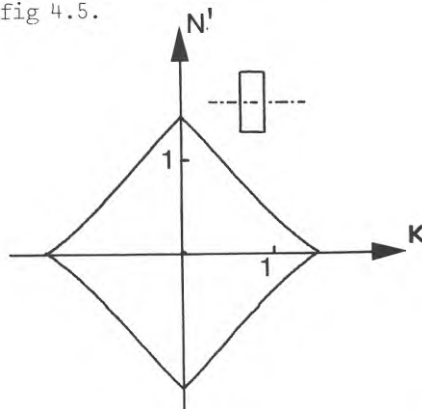


FIG.4.5 Randkurvor enligt ekv (4.37c) för definitionsområdet D_1 .

Exempel 4.2 Enkelsymmetriskt tvärsnitt.

Ett exempel motsvarande exempel 4.1 men med ett T-tvärsnitt enligt fig 4.6 skall redovisas. Konstanterna β_k blir $\beta_{-1}=A=0.3800$, $\beta_0=0$, $\beta_1=0.1440$, $\beta_2=0.0808$, $\beta_3=0.1292$, $\beta_4=0.1348$, $\beta_5=0.1743$, $f_0=0.5736$ och $(h-f_0)=1.4264$ och $b_1=0.1$.

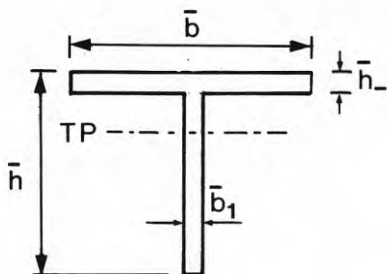


FIG.4.6. T-tvärsnittets geometri

T-tvärsnittets töjning i tyngdpunktsnivån fås efter insättning av α_k enligt ex 3.1 och β_k enligt ovan i ekv (4.31)

$$\epsilon_T = (N' + 0.04066\kappa^3 - 0.00459\kappa^5) / (1 - 0.2174\kappa^2 + 0.02202\kappa^4) \quad (4.31c)$$

Insättning av α_k och β_k i ekv (4.33) ger

$$\epsilon_T = (1 + 0.2174\kappa^2 + 0.02523\kappa^4)N' + 0.04066\kappa^3 + 0.0042\kappa^5 \quad (4.33a)$$

som är en approximation för (4.31c). Avvikelserna mellan noggranna beräkningar ur tab 4.4 och ekv (4.31c) framgår av fig 4.7.

TAB. 4.4. Noggrant beräknade töjningar ϵ_T
T-tvärsnitt. Anpassning CIII-A

N' \ κ	0.0	0.4	0.8	1.2
0.0	0.000	0.003	0.022	0.078
0.2	0.202	0.211	0.254	0.344
0.4	0.413	0.432	0.500	0.616
0.6	0.651	0.681	0.780	0.915

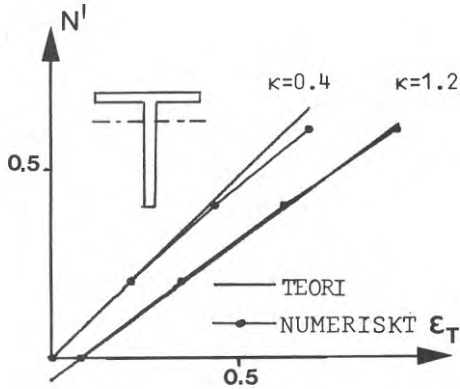


FIG. 4.7. Töjningar ϵ_T enligt ekv 4.31c jämförda med noggrant beräknade värden. ($\kappa=1.2, N>0 \notin D_1$)

Avvikelserna $\Delta\epsilon_T$ från noggrant beräknade töjningar ϵ_T , erhållna ur ekv (4.31c) och (4.33a), är störst i en omgivning av randen $R(\kappa)$ se tab 4.5 och fig 4.9.

TAB. 4.5. Avvikelser $\Delta\epsilon_T$ från noggrant beräknade värden ϵ_T

N'	-0.2	0.0	0.2	0.4	0.6
κ	1.1	1.0	0.8	0.7	0.5
ϵ_T	-0.2027	0.0448	0.2541	0.4772	0.6994
(4.31c): $\Delta\epsilon_T \cdot 10^4$	-34	0	20	175	606
(4.33a): $\Delta\epsilon_T \cdot 10^4$	-37	-1	20	176	163

Insättning av tvärsnittskonstanter och spännings-töjningsparametrar i ekv 4.35 ger styvhetsmatrisen

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & -0.1716 & 0.0 & 0.0026 \\ 0.0 & -0.3218 & 0.0 & -0.0094 & 0.0 \\ -0.5737 & 0.0 & -0.1333 & 0.0 & -0.0056 \end{bmatrix} \alpha_1 I$$

som efter ihopmultiplikation med $[P(N)]$ och $[Q(\kappa)]$ ger:

$$M' = (1 - 0.5737(N')^2)\kappa - 0.3219(N')\kappa^2 - (0.1716 + 0.1333(N')^2)\kappa^3 - 0.0094(N')\kappa^4 + (0.0026 - 0.0056(N')^2)\kappa^5 \quad (4.35c)$$

I fig 4.8 jämförs noggrant beräknade moment ur tabell 4.6 med resultat av ekv (4.35c).

TAB.4.6. Noggrant beräknade moment.
T-tvårsnitt. Material CIII-A.

$\frac{N'}{K}$	-0.2	0.0	0.2	0.4	0.6
0.2	0.1965	0.1986	0.1914	0.1741	0.1442
0.4	0.3900	0.3890	0.3689	0.3281	0.2614
0.6	0.5726	0.5632	0.5235	0.4510	0.3404
0.8	0.7374	0.7131	0.6465	0.5370	0.3896
1.0	0.8781	0.8315	0.7327	0.5680	0.4271
1.2	0.9895	0.9174	0.7951	0.6390	0.4594
1.4	1.0730	0.9827	0.8446	0.6766	0.4891
1.6	1.1383	1.0357	0.8866	0.7103	0.5172
1.8	1.1916	1.0808	0.9237	0.7414	0.5444
2.0	1.2365	1.1206	0.9577	0.7710	0.5710
2.4	1.3088	1.1898	1.0195	0.8271	0.6232
2.8	1.3645	1.2505	1.0765	0.8807	0.6745
3.2	1.4097	1.3058	1.1306	0.9330	0.7254
4.0	1.4841	1.4058	1.2335	1.0351	0.8264
5.2	1.5858	1.5371	1.3801	1.1847	0.9766
6.0	1.6519	1.6162	1.4736	1.2827	1.0761
7.2	1.7498	1.7251	1.6077	1.4270	1.2242
8.0	1.8147	1.7932	1.6936	1.5211	1.3221

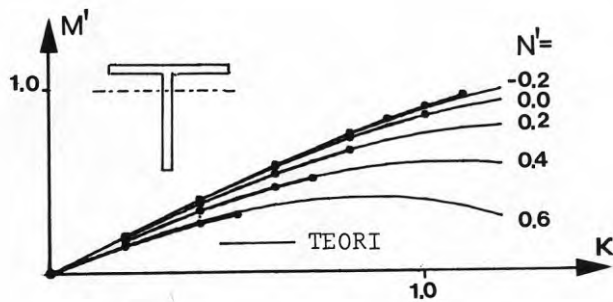


FIG. 4.8a. Moment enligt ekv (4.35c) jämförda med noggrant beräknade värden.

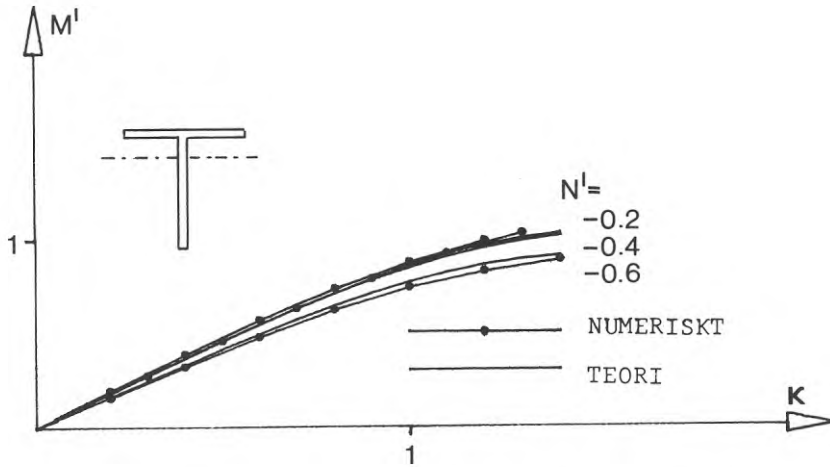


FIG. 4.8b. Moment enligt ekv (4.35c) jämförda med noggrant beräknade värden

Randkurvorna för definitionsområdet D_1 fås efter insättning av konstanterna i ekv (4.37).

$$R_1(\kappa) = (0.04066\kappa^3 - 0.004594\kappa^5) + (\pm 1.45 - 0.5736\kappa)(1 - 0.2174\kappa^2 + 0.02202\kappa^4)$$

och

$$R_2(\kappa) = (-0.04066\kappa^3 + 0.004594\kappa^5) + (\pm 1.45 - 1.4264\kappa)(1 - 0.2174\kappa^2 + 0.02202\kappa^4) \quad (4.37d)$$

som visas i fig 4.9.

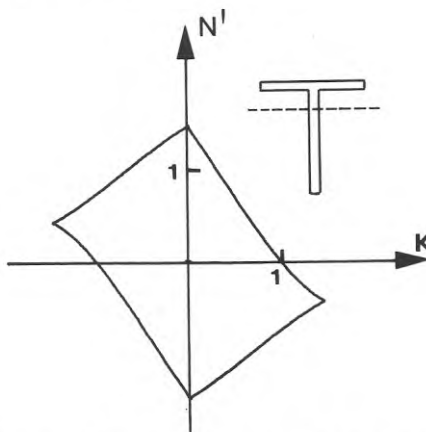


FIG. 4.9. Randkurvor för definitionsområdet D_1 för T-tvårsnitt

Av fig 4.9 framgår för övrigt att lastfall i 1:a och 3:e kvadranterna utnyttjar tvärsnittet dåligt.

4.5. Balklamellens böjstyvhet, stora krökningar

I detta avsnitt skall en explicit formel för böjande momentet M uttryckt i krökningen κ och axialkraften N härledas. I motsats till ekv. (4.35) gäller denna stora krökningar och är inom sitt giltighetsområde D_3 utan approximationer utöver den tekniska balkteorin och nedanstående idealisering av spänningstöjnings-sambandet.

Idealisering av σ - ϵ -diagrammet

Den krökta delen av funktionen $\sigma(\epsilon)$, $|\epsilon| < \epsilon_a$, se ekv (3.1) har mycket liten inverkan på det böjande momentet för stora krökningar. Dels är hävarmen liten och dels är, för de flesta tvärsnitt, spänningsvolymen liten i en omgivning av tyngdpunktslagret. Polynomet $\sigma(\epsilon)$ kan därför utan större fel ersättas med en rät linje för $|\epsilon| < \epsilon_a$, dvs $p=1$ i ekv 3.1, cf fig 3.2. Inverkan på böjande momentet för stora krökningar är begränsad, se fig 4.10, där moment-krökningsdiagrammet för rektangulärt tvärsnitt och olika anpassningar av σ - ϵ -diagrammet enligt fig 3.1 och fig 3.2 jämförs

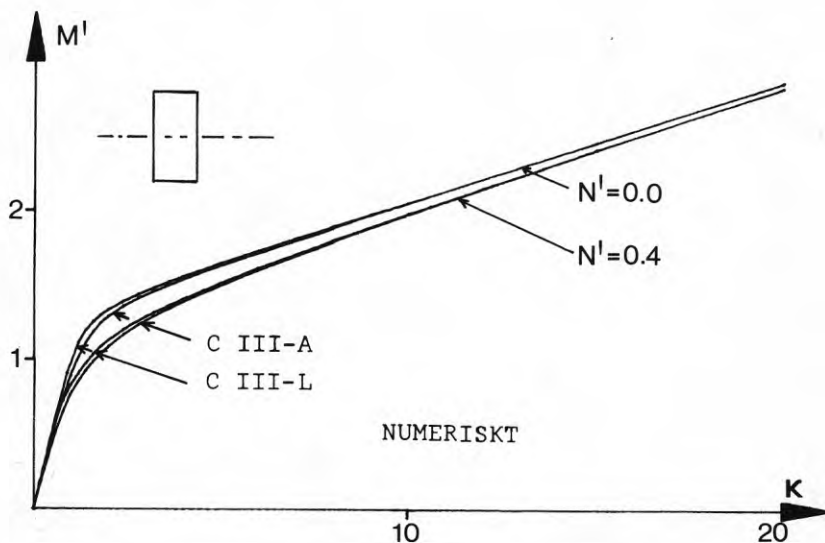


FIG. 4.10. Moment-krökningsdiagram för rektangulärt tvärsnitt och olika anpassningar till materialet CIII-1.

Med $p=1$ i ekv. (3.1) och (3.2) erhålles

$$\sigma = \begin{cases} \alpha_1 \epsilon & |\epsilon| \leq \epsilon_a \\ \alpha_a \epsilon + \epsilon_a (\alpha_1 - \alpha_a) & |\epsilon| > \epsilon_a \end{cases}, \quad (4.38)$$

där ϵ_a byttes mot $-\epsilon_a$ för $\epsilon < 0$

Axiell töjning och böjande moment

Införes $p=1$ i ekv (4.18) och (4.19) erhålles ($\beta_1=1$)

$$M = \alpha_a I \kappa + \epsilon_a (\alpha_1 - \alpha_a) 2S_+ + (\alpha_1 - \alpha_a) I_R / \kappa^2 \quad (4.39)$$

$$N = \alpha_a A \epsilon_T + \epsilon_a (\alpha_1 - \alpha_a) (A_+ - A_-) + (\alpha_1 - \alpha_a) S_R / \kappa \quad (4.40)$$

där ϵ_a bytes mot $-\epsilon_a$ för $\kappa < 0$ och där det "reducerade tröghetsmomentet" I_R och det "reducerade statistiska momentet" S_R kan skrivas

$$I_R = (I_1 + (\epsilon_T - \epsilon_a) S_{1+} / \kappa + (\epsilon_T + \epsilon_a) S_{1-} / \kappa) \kappa^3 \quad (4.41)$$

$$S_R = (S_1 + (\epsilon_T - \epsilon_a) A_{1+} / \kappa + (\epsilon_T + \epsilon_a) A_{1-} / \kappa) \kappa^2 \quad (4.42)$$

som kan kombineras med ekv (4.20) och (4.21) varvid

$$I_R = (I_1 - z_{a+} S_{1+} - z_{a-} S_{1-}) \kappa^3 \quad (4.43)$$

$$S_R = (S_1 - z_{a+} A_{1+} - z_{a-} A_{1-}) \kappa^2 \quad (4.44)$$

Låt $b(z) > 0$ definiera tvärsnittsbredd för $z_{a-} \leq z \leq z_{a+}$ varvid enligt definitioner:

$$I_R = \left(\int_0^{z_{a+}} b(z) (z^2 - z_{a+} z) dz + \int_{z_{a-}}^0 b(z) (z - z_{a-} z) dz \right) \kappa^3 \quad (4.45)$$

$$S_R = \left(\int_0^{z_{a+}} b(z) (z - z_{a+}) dz + \int_{z_{a-}}^0 b(z) (z^2 - z_{a-} z) dz \right) \kappa^2 \quad (4.46)$$

Enligt integralkalkylens medelvärdesats existerar $z_1, z_2 \dots \in (z_{a-}, z_{a+})$ så att:

$$I_R = -(b(z_1) z_{a+}^3 - b(z_2) z_{a-}^3) \kappa^3 / 6 \quad (4.47)$$

$$S_R = -(b(z_3) z_{a+}^2 - b(z_4) z_{a-}^2) \kappa^2 / 2 \quad (4.48)$$

För de flesta standardprofiler är bredden $b(z)$ konstant i en omgivning av tyngdpunkten. För tillräckligt stora krökningar, se nedan, gäller således: (med $b(z)=b_1$)

$$I_R = -b_1 (z_{a+}^3 - z_{a-}^3) \kappa^3 / 6 = -I_1 \kappa^3 / 2 \quad (4.49)$$

$$S_R = -b_1 (z_{a+}^2 - z_{a-}^2) \kappa^2 / 2 = -S_1 \kappa^2 \quad (4.50)$$

Med z_{a+} och z_{a-} enligt ekv (4.20) - (4.21) fås efter förenklingar

$$I_R = -\epsilon_a (\epsilon_a^2 / 3 + \epsilon_T^2) b_1 \quad (4.51)$$

$$S_R = 2\epsilon_a \epsilon_T b_1 \quad (4.52)$$

Det reducerade tröghetsmomentet I_R och det reducerade statistiska momentet S_R är således endast beroende av den axiella töjningen ϵ_T , varför denna kan elimineras utan iteration. Insättning av ekv (4.51).

och (4.52) i ekv (4.39) - (4.40) ger

$$M = \alpha_a I \kappa + \epsilon_a (\alpha_1 - \alpha_a) (2S_+ - b_1 (\epsilon_a^2/3 + \epsilon_T^2)/\kappa^2) \quad (4.53)$$

$$N = (\alpha_a A + 2b_1 \epsilon_a (\alpha_1 - \alpha_a)/\kappa) \epsilon_T + \epsilon_a (\alpha_1 - \alpha_a) (A_+ - A_-) \quad (4.54)$$

där ϵ_a ersättes med $-\epsilon_a$ för $\kappa < 0$. Beräkningen av momentet i ett tvärsnitt göres med uttrycken

$$M/\alpha_1 I = (\alpha_a/\alpha_1) \kappa + \epsilon_a (1 - \alpha_a/\alpha_1) (2S_+ - b_1 (\epsilon_a^2/3 + \epsilon_T^2)/\kappa^2)/I \quad (4.55)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_T/\kappa = & (N/\alpha_1 A - \epsilon_a (1 - \alpha_a/\alpha_1) (A_+ - A_-)/A) / \\ & (\kappa \alpha_a/\alpha_1 + 2b_1 \epsilon_a (1 - \alpha_a/\alpha_1)/A) \end{aligned} \quad (4.56)$$

som även kan formuleras

$$M = [P(N)]^t F_3 [Q_3(\kappa)] \quad (4.57)$$

med $[P(N)]^t$ enligt ekv (4.35) och

$$[Q_3(\kappa)]^t = [1/\kappa^2 \quad 1/(\kappa(\alpha_a/\alpha_1) + 2b_1 \epsilon_a (1 - \alpha_a/\alpha_1)/A)^2 \quad 1 \quad \kappa]$$

samt

$$F_3 = \begin{bmatrix} -b_1 \epsilon_a^3 (1 - \alpha_a/\alpha_1)/3I & -b_1 \epsilon_a^3 (1 - \alpha_a/\alpha_1)^3 (A_+ - A_-)^2/A^2 I \\ 0 & 2b_1 \epsilon_a^2 (1 - \alpha_a/\alpha_1)^2 (A_+ - A_-)/AI \\ 0 & -b_1 \epsilon_a (1 - \alpha_a/\alpha_1)/I \\ 2\epsilon_a (1 - \alpha_a/\alpha_1) S_+/I & \alpha_a/\alpha_1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \alpha_1 I$$

där "styvhetsmatrisen" F_3 är oberoende av krökning och axialkraft. Beräkningen av momentet sker utan iteration, men varje par av oberoende variabler (κ, N) måste ligga inom tillåtet område D_3 .

Definitionsområde D_3

För de flesta standardprofiler existerar en omgivning till tyngdpunktsnivån, för vilken bredden är konstant = b_1 . För varje axialkraft N (och $\alpha_a > 0$) existerar då en "gränskrökning" $\kappa_b(N)$ så att $b(z_{a+}) = b(z_{a-}) = b_1$ för $\kappa > \kappa_b(N)$, se fig 4.11.

Villkoret kan även uttryckas: (med figurens beteckningar)

$$-f_0 + h_- \leq z_{a-} \leq z_{a+} \leq h - f_0 - h_+$$

varur efter kombination med ekv (4.20) - (4.21)

$$-(h - f_0 - h_+ + \epsilon_a/\kappa) \leq \epsilon_T/\kappa \leq (f_0 - h_- - \epsilon_a/\kappa) \quad (4.58)$$

som med omvända olikhetstecken och ϵ_a utbytt mot $-\epsilon_a$ även gäller $\kappa < 0$.

Insättning av ekv (4.56) i ekv (4.58) ger randkurvorna $N' = R_{\kappa}(\kappa)$ för definitionsområdet D_3 . Således

$$-R_1(\kappa) \leq N' \leq R_2(\kappa) \quad \kappa > 0 \quad (4.59)$$

$$-R_2(\kappa) \leq N' \leq R_1(\kappa) \quad \kappa < 0$$

med

$$R_1(\kappa) = (h - f_0 - h_+ - \epsilon_a / \kappa) (\kappa \alpha_a / \alpha_1 + 2b_1 \epsilon_a (1 - \alpha_a / \alpha_1) / A) - \epsilon_a (1 - \alpha_a / \alpha_1) (A_+ - A_-) / A$$

och

$$R_2(\kappa) = (f_0 - h_- - \epsilon_a / \kappa) (\kappa \alpha_a / \alpha_1 + 2b_1 \epsilon_a (1 - \alpha_a / \alpha_1) / A) + \epsilon_a (1 - \alpha_a / \alpha_1) (A_+ - A_-) / A$$

där ϵ_a bytes mot $-\epsilon_a$ för $\kappa < 0$. För dubbelsymmetriska tvärsnitt förenklas ekv (4.59) till

$$|N'| \leq R(\kappa) \quad (4.60)$$

med

$$R(\kappa) = (|\kappa| - |\epsilon_a|) (\alpha_a / \alpha_1 + (1 - \alpha_a / \alpha_1) (2b_1 / A)) |\epsilon_a / \kappa|$$

dvs ett symmetriskt (ej sammanhängande) område i (κ, N) -planet, se fig 4.14.

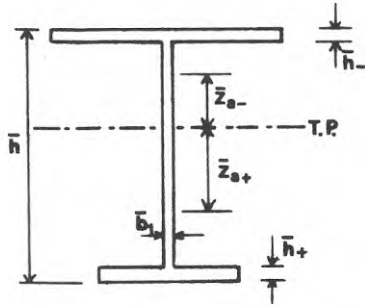


FIG.4.11. Enkelsymmetriskt I-tvärsnitt med variabler

Exempel 4.3. Dubbelsymmetriskt tvärsnitt.

I detta exempel skall töjningar och krökningar studeras för en böjd och axiellt belastad balkklamell med rektangulärt tvärsnitt. Materialet är CIII-1, som för stora krökningar approximeras med anpassningen i fig 3.2 betecknad CIII-L. Jämförelser med noggrant beräknade resultat av anpassningen i fig 3.1 betecknad CIII-A göres.

Insättning av $b=1$, $A=2$ i ekv (4.56) ger töjningen ϵ_T : ($\alpha_1=1$)

$$\epsilon_T = \kappa N' / (\epsilon_a (1 - \alpha_a) + \alpha_a \kappa) \quad (4.56a)$$

Med $\alpha_a=0.08$ och $\epsilon_a=0.91$ fås (-tecken för $\kappa < 0$)

$$\epsilon_T = 12.5 \kappa N' / (\kappa \pm 10.465) \quad (4.56b)$$

som jämförs med noggrant beräknade töjningar för CIII-A ur tab 4.7. i fig 4.12.

TAB. 4.7. Noggrant beräknade töjningar ϵ_T .
Rektangulärt tvärsnitt. Anpassning CIII-A.

κ \ N'	2.0	4.0	8.0
0.1	0.2012	0.3466	0.5427
0.2	0.4024	0.6932	1.0855
0.4	0.8061	1.3865	2.1710
0.6	1.2313	2.0797	3.2564

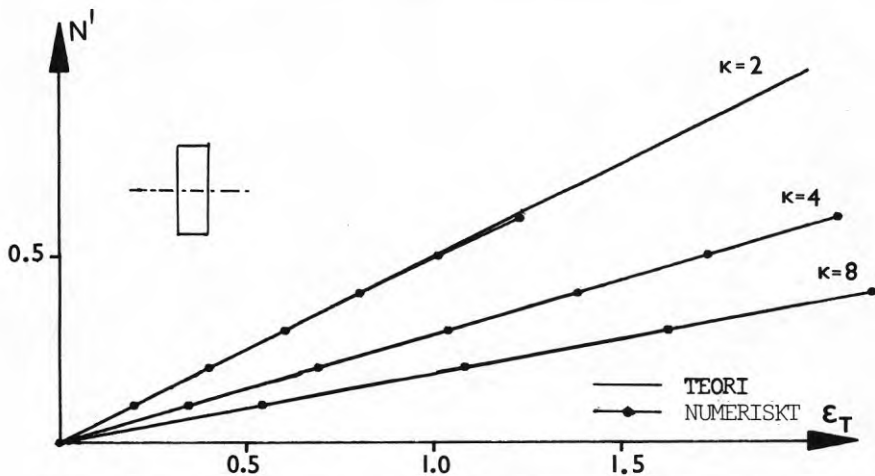


FIG. 4.12. Töjningar enligt ekv (4.56b), anpassning CIII-L, jämförda med noggrant beräknade värden för anpassning CIII-A. Rektangulärt tvärsnitt.

Insättning av tvärsnittskonstanter i ekv (4.57) ger "styvnhetsmatrisen":

$$F_3 = \begin{bmatrix} -0.5\varepsilon_a^3(1-\alpha_a) & 0 & 1.5\varepsilon_a(1-\alpha_a) & \alpha_a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.5\varepsilon_a(1-\alpha_a) & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{I} \quad (4.57a)$$

och

$$[Q_3(\kappa)]^t = [1/\kappa^2 \quad 1/(\varepsilon_a(1-\alpha_a) + \alpha_a\kappa)^2 \quad 1 \quad \kappa]$$

Efter hopmultiplikation och insättning av spänningstöjningsparametrar fås det "elementnormaliserade" momentet (2 dec.)

$$M' = 0.08\kappa + 1.26 - 0.34/\kappa^2 - (14N'/(10.5 + \kappa))^2 \quad (4.57b)$$

vilket jämförs med motsvarande noggrant beräknade moment för materialet CIII-A i fig 4.13.

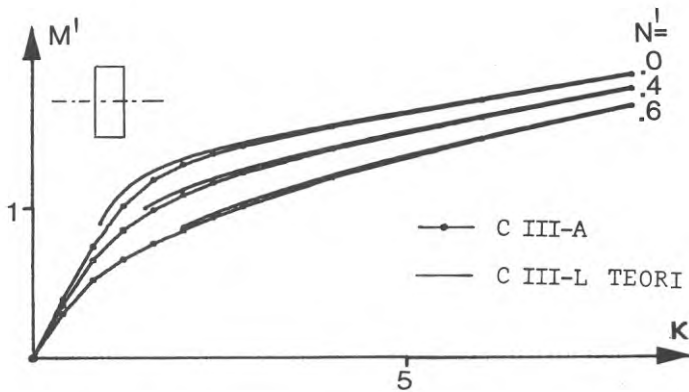
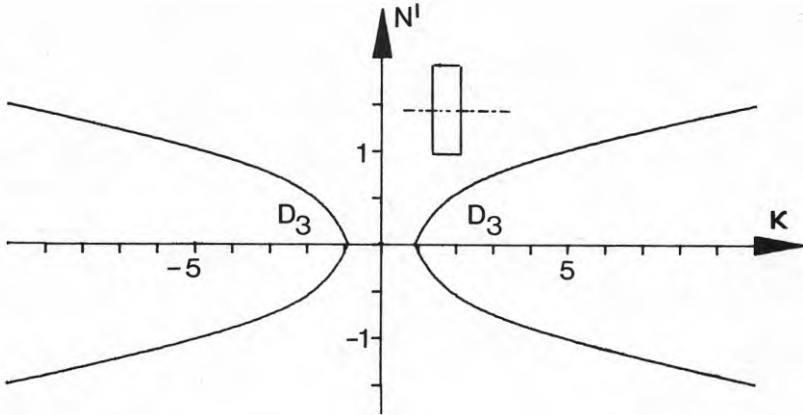


FIG. 4.13. Noggrant beräknade moment för anpassningen CIII-A jämförda med ekv (4.57b)

Definitionsområdet D_3 har ränderna, cf ekv (4.60)

$$R(\kappa) = \pm(|\kappa| - 0.91)(0.08 + 0.84|\kappa|) \quad (4.60a)$$

som visas i fig 4.14.

FIG. 4.14. Definitionsområden D_3 Exempel 4.4. Enkelsymmetriskt tvärsnitt

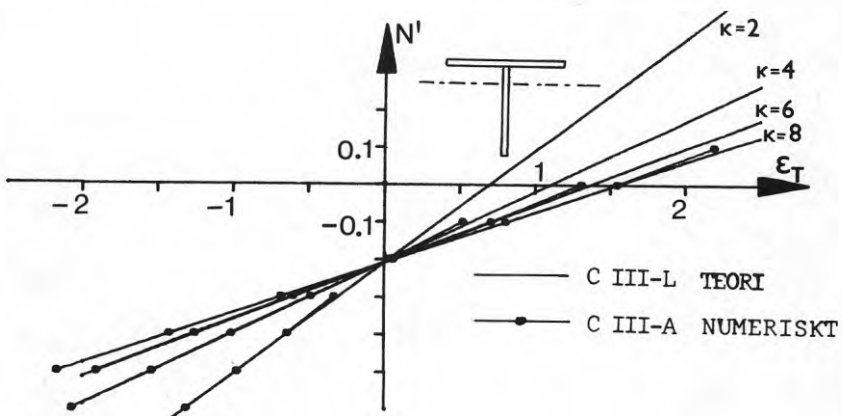
I följande exempel studeras formler för stora krökningar för det enkelsymmetriska tvärsnittet i fig 4.6. Insättning av $f_0 = -0.5737$, $h_- = 0.2$, $b_1 = 0.1$ i ekv (4.56) ger:

$$\varepsilon_T = 12.5\kappa(N' + 0.25\varepsilon_a(1 - \alpha_a)) / (\kappa + 6.58\varepsilon_a(1 - \alpha_a)) \quad (4.56c)$$

Med $\alpha_a = 0.08$ och $\varepsilon_a = 0.91$ fås

$$\varepsilon_T = \kappa(12.5N' \pm 2.61) / (\kappa \pm 5.51) \quad (4.56d)$$

med -tecken för $\kappa < 0$. Denna formel är giltig inom D_3 , cf fig 4.17. Noggrant beräknade töjningar för materialet CIII-A ur tabell 4.8. jämförs med ekv (4.56d) i fig 4.15.

FIG. 4.15. Töjning ε_T enligt ekv (4.56d) jämförd med noggrant beräknade värden för anpassningen CIII-A.

Insättning av tvärsnittsparametrar i styvhetsmatrisen i ekv (4.58)
ger ($\alpha_1=1$)

$$F_3 = \begin{bmatrix} -0.23\epsilon_a^3(1-\alpha_a) & +0.04\epsilon_a^3(1-\alpha_a)^3 & 1.41\epsilon_a(1-\alpha_a) & \alpha_a \\ 0 & -0.35\epsilon_a^2(1-\alpha_a)^2 & 0 & 0 \\ 0 & -0.69\epsilon_a(1-\alpha_a) & 0 & 0 \end{bmatrix} I \quad (4.57c)$$

och

$$[Q_3(\kappa)]^T = [1/\kappa^2 \quad 1/(0.53\epsilon_a(1-\alpha_a)+\alpha_a\kappa)^2 \quad 1 \quad \kappa]$$

som efter ihopmultiplikation och insättning av parametrar ger
formeln:

$$M' = 0.08\kappa + 1.18 - 0.16/\kappa^2 - (3.96 + 37.93N' + 90.84(N')^2)/(5.51 + \kappa)^2 \quad (4.57d)$$

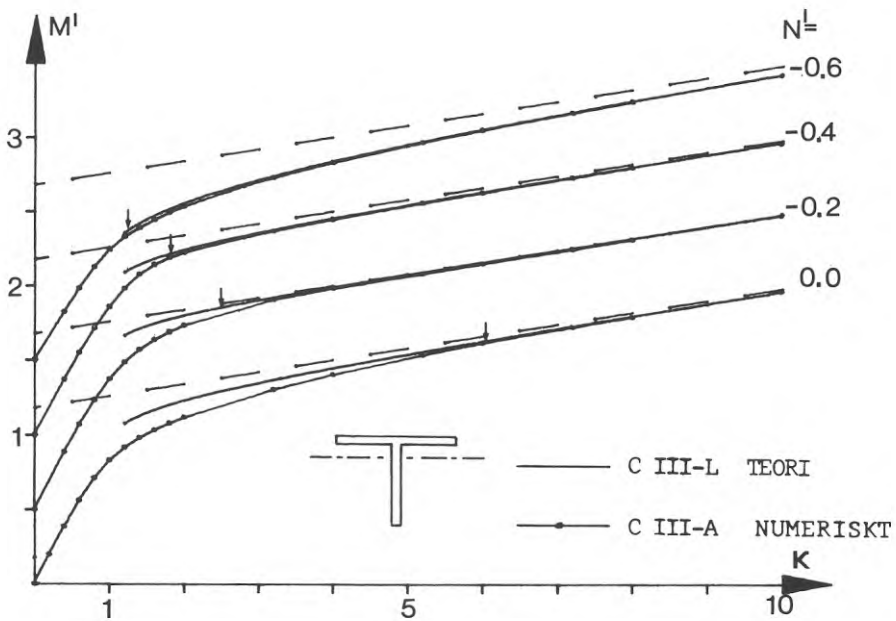


FIG. 4.16. Noggrant beräknade moment för CIII-A jämförda med ekv (4.57d) för CIII-L. Pilarna anger gränskrökningar, se p 34.

TAB. 4.8. Noggrant beräknade töjningar ϵ_T .
T-tvårsnitt. Anpassning CIII-A.

$N' \backslash \kappa$	2	4	6	8
-0.6	-1.3092	-2.06664	-2.5600	-2.9071
-0.4	-0.6415	-1.0123	-1.2541	-1.4242
-0.2	-0.0995	0.0418	0.0517	0.0587
0.0	0.2725	0.8499	1.3049	1.5417
0.2	0.5910	1.2998	1.9991	2.6170
0.4	0.8960	1.6619	2.4339	3.1771
0.6	1.2146	2.0072	2.8083	3.5987

Definitionsområdet D_3 slutligen har ränderna $R_1(\kappa)$ och $R_2(\kappa)$, cf ekv (4.59) med

$$R_1(\kappa) = (1.4264 - \epsilon_a / \kappa)(\kappa \alpha_a + 0.5263 \epsilon_a (1 - \alpha_a)) + 0.2495 \epsilon_a (1 - \alpha_a)$$

$$R_2(\kappa) = (0.3736 - \epsilon_a / \kappa)(\kappa \alpha_a + 0.5263 \epsilon_a (1 - \alpha_a)) - 0.2495 \epsilon_a (1 - \alpha_a)$$

som efter insättning blir

$$R_1(\kappa) = (1.426|\kappa| - 0.91)(0.08 + 0.44/|\kappa|) + 0.21$$

$$R_2(\kappa) = (0.374|\kappa| - 0.91)(0.08 + 0.44/|\kappa|) - 0.21 \quad (4.59b)$$

se fig 4.17.

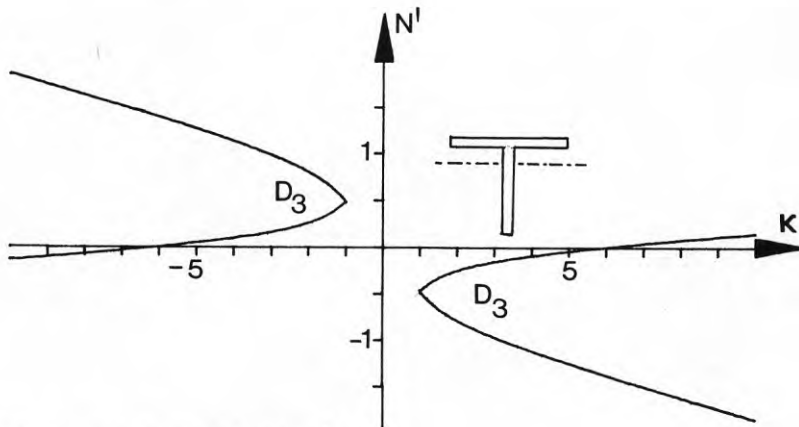


FIG. 4.17. Definitionsområde D_3

4.6. Balklamellens böjstyvhet, medelstora krökningar

I detta avsnitt skall balklamellens moment uttryckas i krökningen κ och axialkraften N' inom det övergångsområde D_2 , som definieras av

$$D_2 = C \cap e(D_1) \cap e(D_3) \quad (4.61)$$

där C betecknar mängden av alla (κ, N') , som uppfyller $|N'| < N_{\max}$ och (D_1) betecknar komplementet till D_1 , cf fig 4.22. Inom D_2 bör M' , beroende på valen av σ - ε -diagram, uppfylla olikheterna.

$$M'_A \leq M' \leq M'_L \quad (4.62)$$

där M'_A betecknar noggrant beräknade moment för anpassningen CIII-A och M'_L motsvarande för anpassningen CIII-L. Jämför med exempel 3.1 och fig 4.10. Likhet gäller för vissa valda linjer $\kappa = \kappa_A, \kappa = \kappa_L$ i (κ, N') -planet, se sid 51.

Härledning av F_2

Böjstyvheten F_2 i formeln

$$M = [P(N)]^t F_2 [Q_2(\kappa)] , (\kappa, N') \in D_2 \quad (4.63)$$

med

$$[Q_2(\kappa)]^t = [1 \quad \kappa \quad \kappa^2 \quad \kappa^3]$$

beräknas ur villkoren:

$$\begin{cases} M(\kappa_A) = [P(N)]^t F_1 [Q_1(\kappa_A)] \\ \partial M(\kappa_A) / \partial \kappa = [P(N)]^t F_1 [\partial Q_1(\kappa_A) / \partial \kappa] \\ M(\kappa_L) = [P(N)]^t F_3 [Q_3(\kappa_L)] \\ \partial M(\kappa_L) / \partial \kappa = [P(N)]^t F_3 [\partial Q_3(\kappa_L) / \partial \kappa] \end{cases} \quad (4.64)$$

Här är κ_A och κ_L interpolationspunkter, se sid 51. Resultatet kan skrivas

$$F_2 = F_1 G + F_3 H \quad (4.65)$$

där G och H beräknas ur (4.64) varvid kolumnerna i G och H blir

$$G_{.1} = -\kappa_L^2 \left[\begin{array}{c} 2\kappa_A^2 \\ \kappa_A^2(\kappa_A + \kappa_L) \\ 2\kappa_A^3\kappa_L \\ 3\kappa_A^4\kappa_L - \kappa_A^5 \\ 4\kappa_A^5\kappa_L - 2\kappa_A^6 \end{array} \right] / (\kappa_L - \kappa_A)^3$$

$$G_{.2} = \kappa_L \left[\begin{array}{c} 4\kappa_A^2 + \kappa_A\kappa_L + \kappa_L^2 \\ 2\kappa_A(\kappa_A^2 + \kappa_L^2 + \kappa_A\kappa_L) \\ 3\kappa_A\kappa_L(\kappa_A\kappa_L + \kappa_A^2) \\ 4\kappa_A^3\kappa_L^2 + 4\kappa_A^4\kappa_L - 2\kappa_A^5 \\ 5\kappa_A^4\kappa_L^2 + 5\kappa_A^5\kappa_L - 4\kappa_A^6 \end{array} \right] / (\kappa_L - \kappa_A)^3$$

$$G_{.3} = - \left[\begin{array}{c} 2(\kappa_A^2 + \kappa_A\kappa_L + \kappa_L^2) \\ \kappa_A(\kappa_A^2 + \kappa_A\kappa_L + 4\kappa_L^2) \\ 6\kappa_A^2\kappa_L^2 \\ -\kappa_A^3(\kappa_A^2 + \kappa_A\kappa_L + 8\kappa_L^2) \\ -2\kappa_A^4(\kappa_A^2 + \kappa_A\kappa_L - 5\kappa_L^2) \end{array} \right] / (\kappa_L - \kappa_A)^3$$

$$G_{.4} = \left[\begin{array}{c} \kappa_A + \kappa_L \\ 2\kappa_A\kappa_L \\ \kappa_A^2(3\kappa_L - \kappa_A) \\ 2\kappa_A^3(2\kappa_L - \kappa_A) \\ \kappa_A^4(5\kappa_L - 3\kappa_A) \end{array} \right] / (\kappa_L - \kappa_A)^3$$

samt

$$H_{.1} = \kappa_A^2 \left[\begin{array}{c} (5\kappa_L - 3\kappa_A) / \kappa_L^2 \\ (d\kappa_L(5\kappa_L - 3\kappa_A) + c(3\kappa_L - \kappa_A)) / (d\kappa_L + c)^3 \\ 3\kappa_L - \kappa_A \\ 2\kappa_L^2 \end{array} \right] / (\kappa_L - \kappa_A)^3$$

$$H_{.2} = \kappa_A \left[\begin{array}{c} 2(\kappa_A^2 + \kappa_A \kappa_L - 5\kappa_L^2) / \kappa_L^3 \\ 2(d(\kappa_A^2 - \kappa_A \kappa_L - 5\kappa_L^2) - 3c\kappa_L) / (d\kappa_L + c)^3 \\ -6\kappa_L \\ -\kappa_A^2 - \kappa_A \kappa_L - 4\kappa_L^2 \end{array} \right] / (\kappa_L - \kappa_A)^3$$

$$H_{.3} = \left[\begin{array}{c} (5\kappa_L^2 + 5\kappa_A \kappa_L - 4\kappa_A^2) / \kappa_L^3 \\ (d(5\kappa_L^2 + 5\kappa_A \kappa_L - 4\kappa_A^2) + 3c(\kappa_A + \kappa_L)) / (d\kappa_L + c)^3 \\ 3(\kappa_L + \kappa_A) \\ 2(\kappa_L^2 + \kappa_A \kappa_L + \kappa_A^2) \end{array} \right] / (\kappa_L - \kappa_A)^3$$

$$H_{.4} = \left[\begin{array}{c} 2(\kappa_A - 2\kappa_L) / \kappa_L^3 \\ 2(d(\kappa_A - 2\kappa_L) - c) / (d\kappa_L + c)^3 \\ -2 \\ -(\kappa_A + \kappa_L) \end{array} \right] / (\kappa_L - \kappa_A)^3$$

$$\text{där } c = 2b_1 \varepsilon_a (1 - \alpha_a / \alpha_1) / A \\ d = \alpha_a / \alpha_1$$

Efter hopmultiplikation enligt ekv (4.65) fås böjstyvheten F_2 som en 3×4 matris. Denna är sålunda en interpolerad styvhet, där momentet framställs med polynomet:

$$M = A + B\kappa + C\kappa^2 + D\kappa^3 \quad (4.66)$$

Konstanterna A, B, C, D bestäms enligt ekv (4.64) oberoende av axialkraftsparametern N' .

Valet av interpolationspunkter.

Moment- krökningsdiagrammen i området D_2 skall betraktas som övergångskurvor mellan området D_1 , där σ - ϵ -diagrammet har approximerats med ett polynom, och området D_3 , där σ - ϵ -diagrammet har approximerats med två räta linjer. Noggrannheten kan därför endast bedömas vid en jämförelse med resultat av noggranna beräkningar baserade på det verkliga σ - ϵ -diagrammet. Övergångskurvans utseende beror av valet av interpolationspunkter men variationen är måttlig vid små variationer av interpolationspunkter inom D_1 respektive D_3 .

Interpolationspunkterna $(\kappa, N')_A$ och $(\kappa, N')_L$ bör om möjligt väljas oberoende av N' . Den beräknade interpolationsstyvheten F_2 gäller då (för dubbelsymmetriska tvärsnitt) liksom övriga styvheter F_1 och F_3 för alla $|N'| < N'_{\max}$

För enkelsymmetriska tvärsnitt gäller att moment-krökningsdiagrammet är "osymmetriskt med avseende på origo". Följande samband gäller emellertid

$$M(\kappa, N) = -M(-\kappa, -N) \quad (4.67)$$

varför det räcker att studera $\kappa > 0$ och $|N| \leq N'_{\max}$. I vissa fall kan det vara svårt eller omöjligt att finna vertikala interpolationslinjer κ_A och κ_L som ger en interpolationsstyvhet F_2 med acceptabel noggrannhet inom hela interpolationsområdet D_2 . Man kan då välja κ_A, κ_L , enligt randkurvan $R(\kappa)$ för några olika axialkrafter N . Detta ger då olika interpolationsstyvheter F_2 . Detta kan emellertid enkelt beaktas vid framställningen av balklamellens flexibiliteter uttryckta i moment och axialkraft, se kap 5.

Det är möjligt att beräkna optimala lägen av κ_A och κ_L , men detta skulle utgöra en onödig komplikation av analysen. Välj istället ($\kappa > 0$) κ_A och κ_L , så att

$$\begin{cases} \kappa_L - \kappa_A = \min \\ (\kappa_A, N') \in D_1, (\kappa_L, N') \in D_3, N' < N'_{\max} \\ \partial^2 M / \partial \kappa^2 = 2C + 6D\kappa < 0 \quad \kappa \in (\kappa_A, \kappa_L) \end{cases} \quad (4.68)$$

Det är ej utrett om dessa villkor är möjliga att uppfylla samtidigt för alla typer av tvärsnitt. Det sista villkoret kan omformuleras:

$$\begin{aligned} \kappa_A &\geq -C/3D \quad \text{om } D < 0 \\ \kappa_L &\leq -C/3D \quad \text{om } D > 0 \end{aligned} \quad (4.69)$$

Koefficienterna C och D fås ur tredje och fjärde kolumnerna av G och H , se ekv (4.65). Denna formulering är tillräcklig men ej nödvändig för övergångskurvans konvexitet i (κ_A, κ_L) , ty C och D beror av κ_A och κ_L . Denna konvexitet utgör en garanti för att avvikelserna från noggranna beräkningar är måttliga.

Exempel 4.5. Dubbelsymmetriskt tvärsnitt

I detta exempel avses att studera ett rektangulärt tvärsnitt och beräkna interpolationsstyhetsen F_2 för några olika val av (κ_A, κ_L) och jämföra det beräknade momentet M' med noggrant beräknade moment för anpassningarna CIII-A och CIII-L, cf ex 3.1.

Med $\kappa_A=1$, $\kappa_L=2.6$ och spännings- töjningsparametrar för anpassningarna CIII-A och CIII-L fås (2dec redovisas)

$$G = \begin{bmatrix} -3.30 & 8.48 & -5.06 & 0.88 \\ -5.94 & 13.15 & -7.48 & 1.27 \\ -8.58 & 17.82 & -9.90 & 1.66 \\ -11.22 & 22.50 & -12.32 & 2.05 \\ -13.86 & 27.17 & -14.75 & 2.44 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 0.36 & -0.84 & 0.59 & -0.12 \\ 1.66 & -3.83 & 2.67 & -0.50 \\ 1.66 & -3.81 & 2.64 & -0.49 \\ 3.30 & -7.48 & 5.06 & -0.88 \end{bmatrix}$$

som ger (3 dec redovisas)

$$F_2 = \begin{bmatrix} -0.169 & 1.496 & -0.494 & 0.059 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 1.278 & -3.086 & 1.229 & -0.154 \end{bmatrix} \quad (4.65a)$$

eller efter sammanmultiplikation med $[P(N')]$ och $[Q_2(\kappa)]$:
(2 dec redovisas)

$$\begin{aligned} M' &= (-0.17 + 1.28(N')^2) + (1.50 - 3.09(N')^2)\kappa + \\ &+ (-0.49 + 1.23(N')^2)\kappa^2 + (0.06 - 0.15(N')^2)\kappa^3 \\ \kappa &\in D_2 \end{aligned} \quad (4.56b)$$

I tabell 4.9 visas hur några av övergångskurvans koefficienter varierar med valet av κ_A och κ_L för olika axialkrafter.

TAB. 4.9. Variationen av D och $-C/3D$ enligt ekv (4.65 med valet av κ_A och κ_L .

κ_A	κ_L	$N'=0$		$N'=0.4$		$N'=0.6$	
		D	$-C/3D$	D	$-C/3D$	D	$-C/3D$
1	2	-0.026	-1.75	0.001	72.	0.035	1.75
1	3	0.056	2.86	0.032	2.97	0.003	5.17
1	2.6	0.059	2.80	0.034	2.90	0.003	5.15
0.8	2.6	0.051	2.91	0.050	2.63	0.048	2.26

I figurerna 4.18-4.21 visas övergångskurvornas utseendet för de val av κ_A och κ_L , som träffats i tabell 4.9 jämförda med noggrant beräknade moment för anpassningarna CIII-A respektive CIII-L.

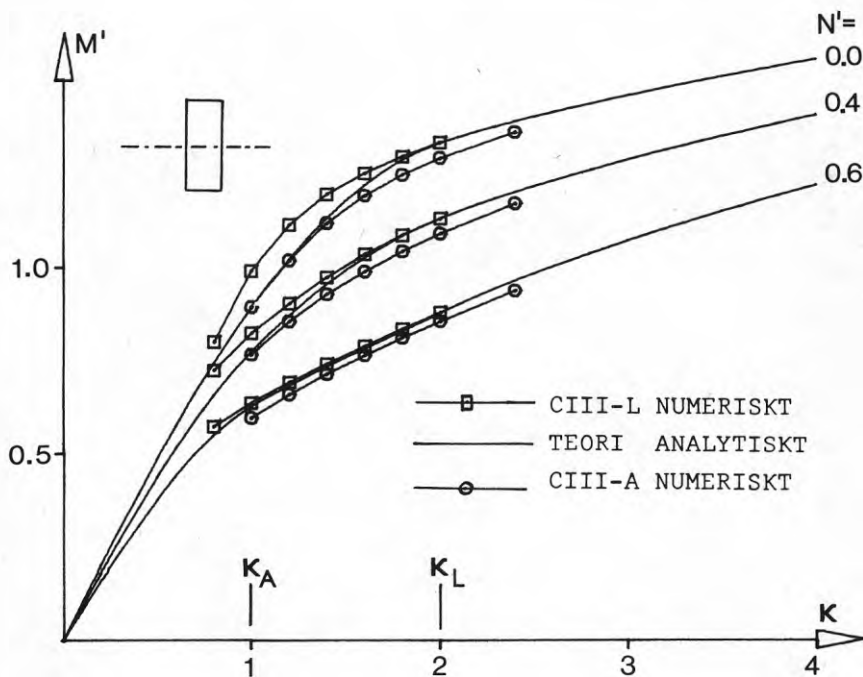
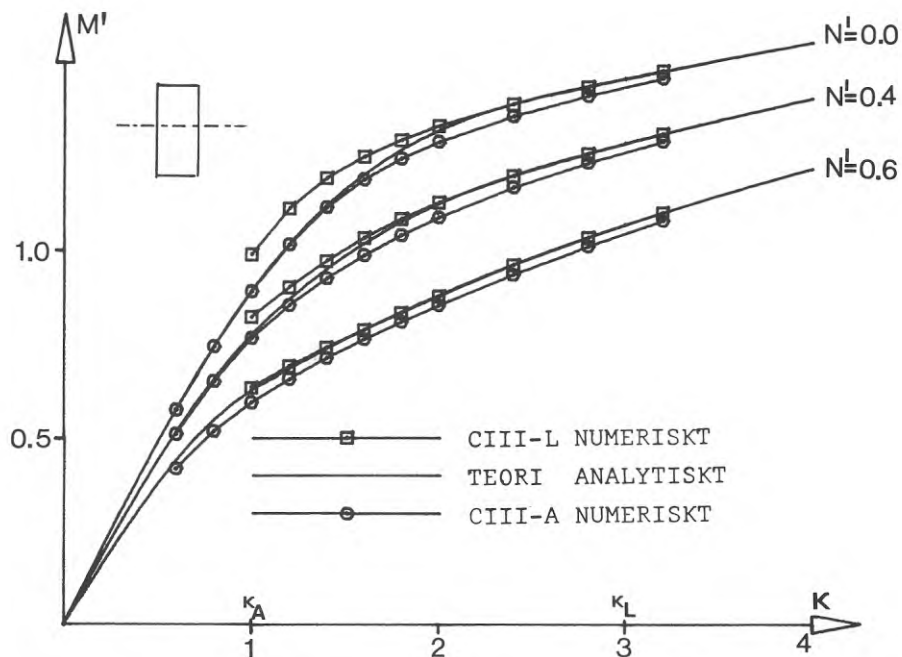
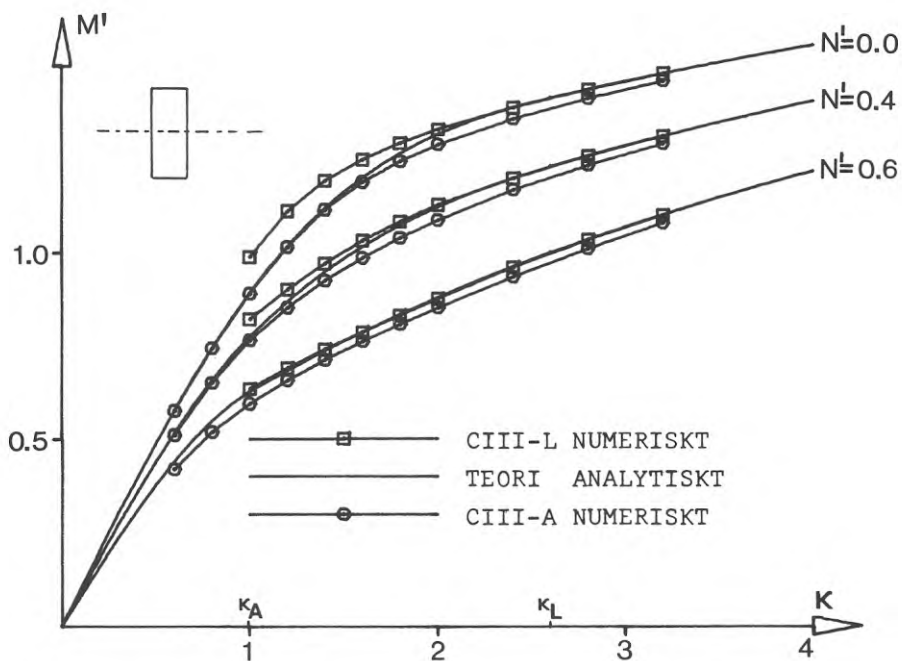


FIG. 4.18. Moment-krökningskurvor enligt ekv (4.35b), (4.65b) och (4.57d) jämförda med noggrant beräknade värden för anpassningarna CIII-A och CIII-L. $\kappa_A=1.0$, $\kappa_L=2.0$.

FIG. 4.19. $\kappa_A = 1.0$, $\kappa_L = 3.0$.FIG. 4.20. $\kappa_A = 1.0$, $\kappa_L = 2.6$.

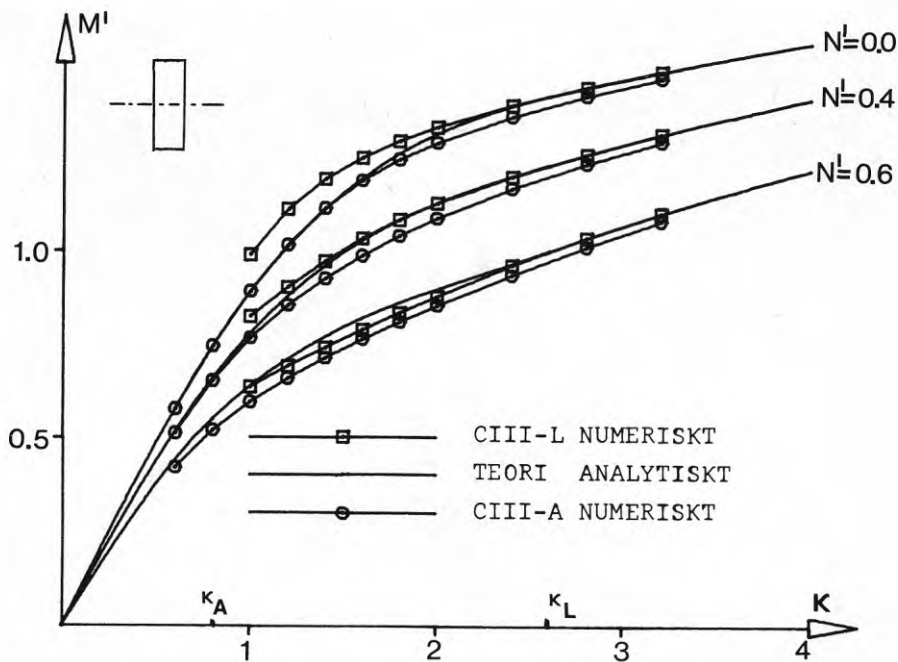


FIG. 4.21. $\kappa_A = 0.8$, $\kappa_L = 2.6$

Definitionsområdet D_2

Genom kombination av definitionsområdena D_1 och D_3 se figurerna 4.5 och 4.14 samt $|N'| < N_{\max}$ fås definitionsområdet D_2 för den interpolerade styvheten. Här väljes $N_{\max} = 0.6$ vilket för exemplet i 4.2 motsvarar $\lambda < 60$. Se figur 4.22.

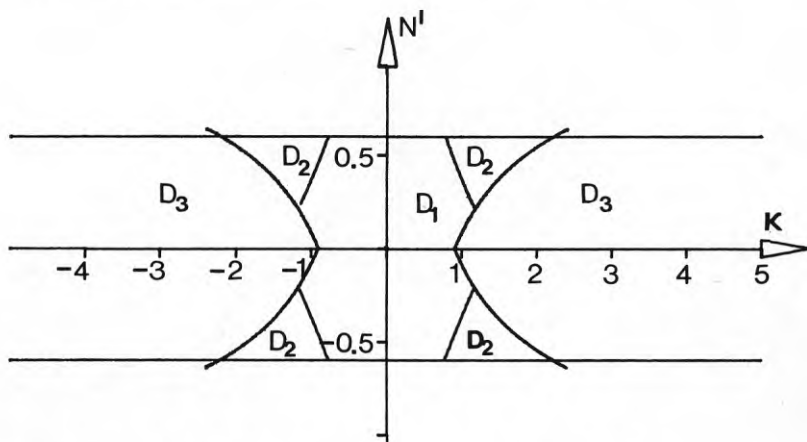


FIG. 4.22. Definitionsområden D_1 , D_2 och D_3

Slutsatser

Exempel 4.5, som även utnyttjar resultaten av exempel 4.1 och 4.3, visar att det är möjligt att finna interpolationspunkter κ_A och κ_L sådana att styvhetsmatrisen F_2 kan etableras och fås att gälla med god noggrannhet inom hela området D_2 . Avvikelserna från noggrant beräknade moment för det verkliga materialet CIII-1 är små.

I fig 4.23 visas resultatet av en beräkning av moment-kröknings sambandet enligt ekv (4.35b), (4.57b) och (4.65b) jämförd med noggrant beräknade moment för materialet CIII-1.

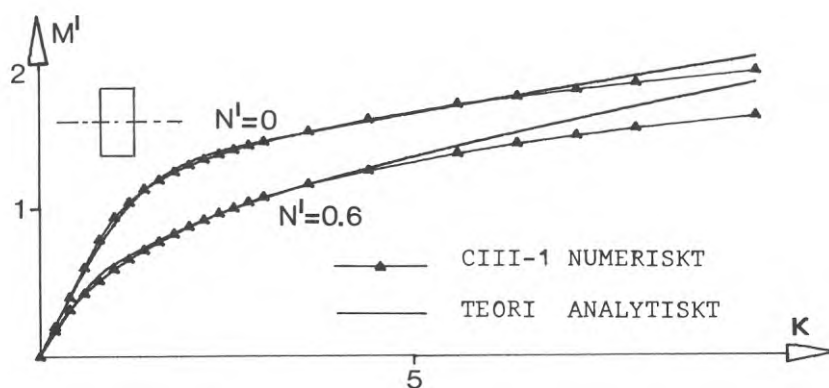


FIG. 4.23. Moment-krökningsdiagram för material CIII-1 jämförda med analytiska beräkningar.

Exempel 4.6. Enkelsymmetriskt tvärsnitt.

I detta exempel skall T-tvärsnittet i fig 4.6. studeras. Avsikten är här att etablera övergångsstyvheter F_2 för $(\kappa, N') \in D_2$. Det visar sig vara svårt att finna interpolationspunkter κ_A, κ_L , som uppfyller villkoren (4.68) för alla $|N'| < N'_{\max}$. Anledningen är att små variationer av N' längs randkurvan för D_3 ger stora variationer i κ , cf fig 4.17. I tabell 4.10 visas några val av interpolationspunkter och i fig 4.24-4.26 momentkrökningsdiagram baserade på motsvarande styvheter F_2 .

Tabell 4.10. Variationer av koefficienter D och $-C/3D$ med valet av interpolationspunkter.

κ_A	κ_L	$N'=-0.6$		$N'=-0.4$		$N'=-0.2$	
		D	$-C/3D$	D	$-C/3D$	D	$-C/3D$
0.8	- 2	$1391 \cdot 10^{-4}$	1.91	$35 \cdot 10^{-4}$	25.3	$-546 \cdot 10^{-4}$	-0.2
0.8	- 3	$656 \cdot 10^{-4}$	2.54	$557 \cdot 10^{-4}$	2.79	$477 \cdot 10^{-4}$	2.94
		$N'=0.0$		$N'=0.2$		$N'=0.4$	
1.2	- 5	$30 \cdot 10^{-4}$	5.96	$118 \cdot 10^{-4}$	3.24	$-327 \cdot 10^{-4}$	3.61
1.1	- 8.0	$44.7 \cdot 10^{-4}$	6.24	$2.36 \cdot 10^{-4}$	15.58	$-59 \cdot 10^{-4}$	5.33

För $\kappa_A=0.8$ och $\kappa_L=2.0$ fås följande styvhet som visas för $N'=-0.6$ och $N'=-0.4$ i fig (4.24).

$$F_2 = \begin{bmatrix} 0.088 & 0.864 & -0.075 & -0.035 \\ -0.074 & 0.379 & -0.918 & 0.289 \\ -1.127 & 2.954 & -3.532 & 0.967 \end{bmatrix} \quad (4.65c)$$

eller utskrivet (2 dec)

$$M' = (0.09 - 0.07N' - 1.13(N')^2) + (0.86 + 0.38N' + 2.95N')^2 \kappa + (-0.08 - 0.92N' - 3.53(N')^2) \kappa^2 + (-0.04 + 0.29N' - 0.97(N')^2) \kappa^3$$

$$\kappa \in D_2 \quad (4.65d)$$

För $\kappa_A = 0.8$ och $\kappa_L = 3.0$ fås följande styvhet, som visas för $N'=-0.2$ i fig 4.25.

$$F_2 = \begin{bmatrix} -0.020 & 1.183 & -0.367 & 0.042 \\ 0.381 & -0.960 & 0.297 & -0.026 \\ 0.247 & -1.085 & 0.124 & 0.024 \end{bmatrix} \quad (4.65e)$$

I fig 4.26 visas diagram baserade på valen $\kappa_A=1.2$, $\kappa_L=5$ och $\kappa_A=1.1$, $\kappa_L=8$.

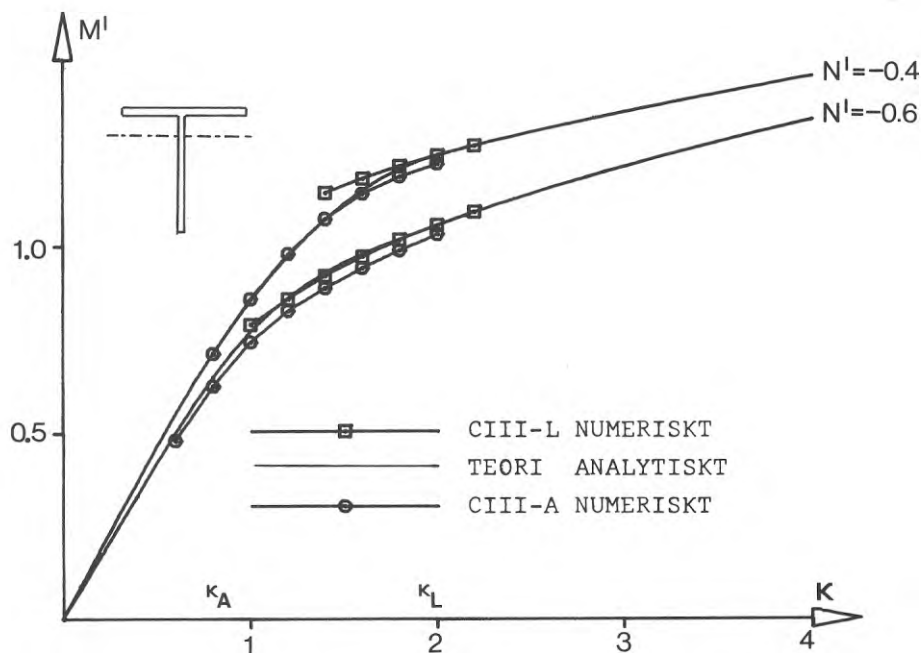


FIG. 4.24. Momentkrökningskurvor enligt ekv (4.35c), ekv (4.65d) och (4.57d) jämförda med noggrant beräknade värden för anpassningarna CIII-A och CIII-L. $\kappa_A=0.8$, $\kappa_L=2.0$

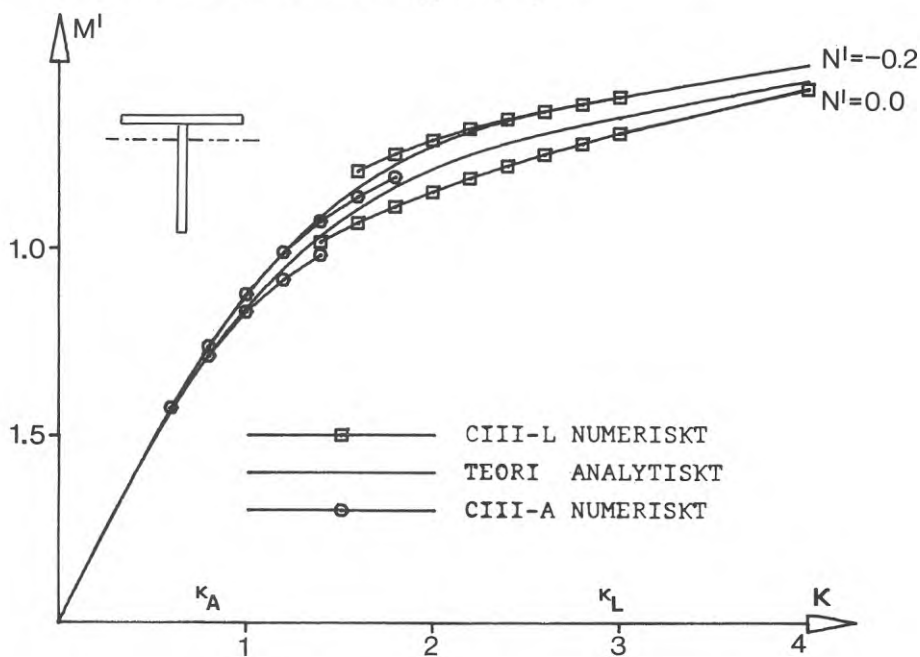


FIG. 4.25. $\kappa_A=0.8$, $\kappa_L=3$

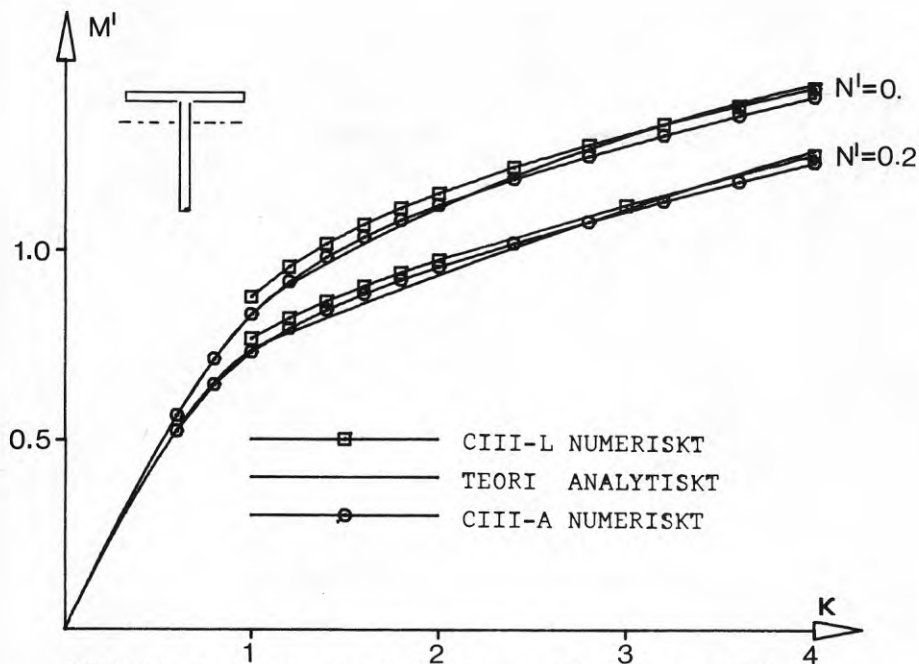


FIG.4.26. $\kappa_A = 1.2$, $\kappa_L = 5.0$ samt $\kappa_A = 1.1$ och $\kappa_L = 8.0$

Definitionsområdet D_2

Kombineras definitionssområdena D_1 och D_3 , cf fig 4.9 och 4.17 fås D_2 enligt ekv (4.61). Maximal axialkraftsparameter $N_{\max} = 0.6$ har valts. Se fig 4.27.

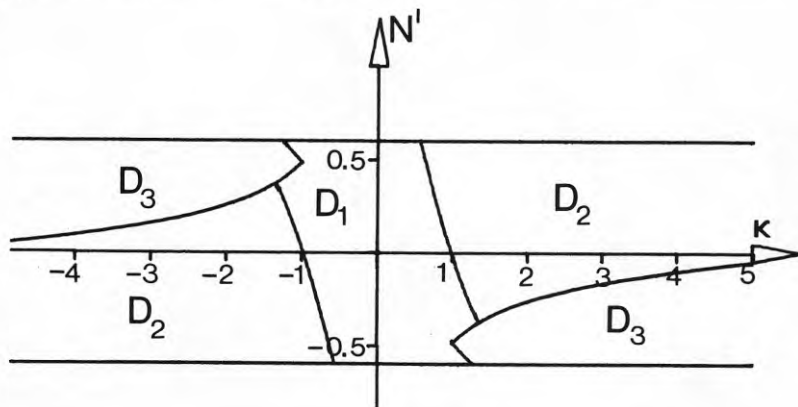


FIG. 4.27. Definitionssområden D_1 , D_2 och D_3 . T-tvårsnitt.

Slutsatser

Ovanstående exempel visar resultaten av en beräkning av övergångsstyvheten F_2 för ett enkelsymmetriskt tvärsnitt. Det valda tvärsnittet har den egenskapen att området kring tyngdpunktsnivån med konstant bredd är mycket begränsat. Detta har den effekten att i ogynnsamma lastfall (första och tredje kvadranterna i (κ, N') -planet) endast gäller mycket stora krökningar, ($\kappa > 6$). Således måste långa interpolationsintervall användas, vilket inverkar ogynnsamt på resultatet. Tvärsnittets effektiva böjmotstånd för lastfall i första och tredje kvadranten är emellertid så lågt, se fig 4.28, att tvärsnittet ej bör användas för dessa lastfall. I fig 4.28 visas momentkrökningsdiagrammen för materialet CIII-1 jämförda med resultat av beräkning från analytiska uttryck inom respektive giltighetsområden. För $N' = 0.6$ har ingen beräkning baserad på analytiska formler gjorts.

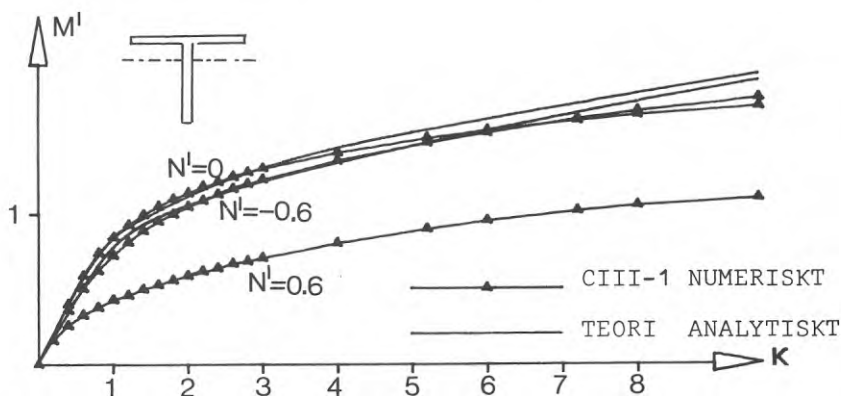


FIG. 4.28. Moment-krökningsdiagram för material CIII-1 jämförda med analytiska beräkningar.

4.7. Sammanfattning

I detta kapitel har analytiska uttryck för böjande momentet i en balklamell uttryckts i axialkraft och krökning. Momentet kan beräknas ur explicita formler utan iterationer. De oberoende variablerna krökning och axialkraft kan ligga inom tre definitionsområden D_i där D_1 gäller små krökningar, D_3 stora krökningar och D_2 ett övergångsområde vars storlek beror av tvärsnittets geometri. För $(\kappa, N') \in D_1$ beräknas momentet såsom ett polynom i krökning och axialkraft. Formlerna är approximativa med fullt tillräcklig noggrannhet för praktiskt bruk. Spännings-töjningsdiagrammet approximeras med ett femtegradspolynom med enbart uddagradertermer. Gränsen för definitionsområdet D_1 har nåtts när den mest ansträngda fibern har nått maximalt tillåten töjning. För $(\kappa, N') \in D_3$ beräknas momentet ur antagandet om en bilinjär anpassning till

spännings-töjningsdiagrammet. En explicit formel för momentet kan fås för sådana lastfall, att töjningen ϵ_a faller inom en omgivning till tyngdpunktsnivån där tvärsnittsbredden b_1 är konstant. Töjningen ϵ_a är spännings-töjningsdiagrammets brytpunkter. Det tvärsnitt där definitionsområdet D_3 är maximalt är således rektangulärt. För $(\kappa, N') \in D_2$ framställs momentet som ett tredjegradspolynom i krökningen vars fyra koefficienter bestäms ur villkoren att momentet och första derivatan av momentet skall överensstämma i två interpolationspunkter $(\kappa, N')_A$ och $(\kappa, N')_L$ som tillhör D_1 respektive D_3 . För små interpolationsintervall $\kappa_L - \kappa_A$ fås mycket god överensstämmelse med moment-krökningsdiagrammet för det ursprungliga experimentellt uppmätta spännings-töjningsdiagrammet. För tvärsnitt där bredden varierar kraftigt i en omedelbar omgivning till tyngdpunkten, måste tvärsnittet approximeras med ett tvärsnitt med samma area men med konstant bredd i en omedelbar omgivning till tyngdpunktsnivån. Metoden i detta kapitel ersätter således tidigare beskrivna metoder att beräkna momentet i ett balktvärsnitt, företrädesvis numerisk integration med iterationer, med explicita formler.

5. BALKLAMELLENS FLEXIBILITETER

5.1. Allmänt

I detta kapitel skall balklamellens (normaliserade) deformationer - krökning κ och axiell töjning ϵ_T - uttryckas i "momentparametern" $M' = M/EI$ och "axialkraftsparametern" $N' = N/EA$. Analytiska uttryck på denna form kan emellertid endast anpassas till de i kap. 4 funna lösningarna, några slutna explicita lösningar på flexibilitetsform kan ej härledas. Valet av approximerande funktioner baseras på följande villkor:

1. Bästa möjliga approximation i mini-maxnorm inom $|\kappa| \leq \kappa_{\max}$, $N \leq N_{\max}$
2. Härledning av balkelementets deformationsvariabler m_1 m_2 n_2 på explicit analytisk form måste vara möjlig

Dessa villkor kan uppfyllas vid val av polynom i de två variablerna moment och axialkraft, se Ågårdh (1974). I de följande avsnitten visas i ett exempel en enkel metod att bestämma sådana polynom, samt exempel på tillämpningar på dubbelsymmetriska tvärsnitt.

5.2. Grundläggande samband

Studera den kontinuerliga och flera gånger deriverbara funktionen $\phi(M,N)$ (med kontinuerliga derivator) med

$$\kappa = \partial\phi(M,N)/\partial M \quad , \quad \epsilon_T = \partial\phi(M,N)/\partial N \quad (5.1)$$

varur man efter differentiering erhåller

$$\Delta\kappa = (\partial^2\phi(M,N)/\partial M^2)\Delta M + (\partial^2\phi(M,N)/\partial N\partial M)\Delta N \quad (5.2)$$

och

$$\Delta\epsilon_T = (\partial^2\phi(M,N)/\partial N^2)\Delta N + (\partial^2\phi(M,N)/\partial M\partial N)\Delta M \quad (5.3)$$

där symmetrivillkoret enligt Maxwell-Bettis sats är uppfyllt. Ansätt nu polynomet

$$\kappa = \sum_{j,k} d_{j,k} N^j M^k / (EA)^j (EI)^k \quad (5.4)$$

där $d_{j,k}$ är koefficienter, som bestämmas med någon lämplig numerisk metod. Ur symmetrivillkoret ovan fås då att

$$\epsilon_T = \frac{1}{A} \sum_{j,k} j d_{j,k} (N/EA)^{j-1} (M/EI)^{k+1} / (k+1) + \epsilon_{T0} (N/EA) \quad (5.5)$$

där $\epsilon_{T0}(N)$ fås ur randvillkoret för $M \equiv 0$. För måttliga axialkrafter är det tillräckligt noggrant att sätta $\epsilon_{T0}(N') = N'$, cf kap.4.

För större axialkrafter och speciellt för σ - ϵ -diagram med ett lågt värde på kvoten $\sigma_{prop}/\sigma_{max}$ kan noggrannare resultat erhållas om

$$\epsilon_{T0}(N') = N' + a(N')^r$$

där a och r bestäms genom anpassning till σ - ϵ -diagrammet, se Ramberg-Osgood (1943).

Exempel 5.1. Dubbelsymmetriska tvärsnitt

De formler som härletts i kap.4 och som ger sambanden mellan moment, krökning och axialkraft, kan nu användas för att beräkna koefficienterna i det anpassade polynomet. I detta exemplet specialiseras på ett dubbelsymmetriskt tvärsnitt med anpassningen:

$$\kappa = M' + (M')^{p_1} \sum_{j=0}^q d_j (N')^j + (M')^{p_2} \sum_{j=0}^q e_j (N')^j \quad (5.6)$$

Koefficienterna $d_j, e_j, j=0, 2, 4$ bestäms ur villkoren:

$$\begin{bmatrix} \kappa_a \\ (\partial\kappa/\partial M)_{\kappa_a} - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (M')^{p_1} & (M')^{p_1} (N')^2 & (M')^{p_1} (N')^4 \dots \\ p_1 (M')^{p_1-1} & p_1 (M')^{p_1-1} (N')^2 & p_1 (M')^{p_1-1} (N')^4 \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_0 \\ d_2 \\ d_4 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

för olika N -värden. Derivatans $(\partial\kappa/\partial M)_{\kappa=\kappa_a}$ fås

ur $1/(\partial M/\partial \kappa)$ vilken i sin tur beräknas ur ekv. (4.22)

$$\partial M/\partial \kappa = [P(N)]^t F_j [\partial Q_j(\kappa)/\partial \kappa] \quad (5.8)$$

Anpassningen till momentkrökningsdiagrammet i fig.4.23 för $N'=0, 0.2, 0.4$ ger för $\kappa_a=4.5, q=4, p_1=3, p_2=5$ följande approximerande polynom.

$$\begin{aligned} \kappa = M' + (-0.262 + 4.166(N')^2 + 2.784(N')^4)(M')^3 + \\ + (0.380 - 0.669(N')^2 - 1.412(N')^4)(M')^5 \end{aligned} \quad (5.9)$$

som ger följande uttryck för ϵ_T enligt ekv (5.5):

$$\begin{aligned} \epsilon_T = N' + \frac{I}{A} ((2.083N' + 2.784(N')^3)(M')^4 + \\ + (-0.223N' - 0.941(N')^3)(M')^6) \end{aligned} \quad (5.10)$$

I fig. 5.1. jämförs ekv (5.9) med numeriskt beräknade momentkrökningsvärden för rektangulärt tvärsnitt och materialet CIII-1. Polynomet ansluter utomordentligt väl till de numeriskt beräknade värdena. Ekvation (5.10) jämförs med motsvarande axialkraft-axiella töjningsvärden i fig 5.2. Även här gäller god överensstämmelse med numeriskt beräknade värden.

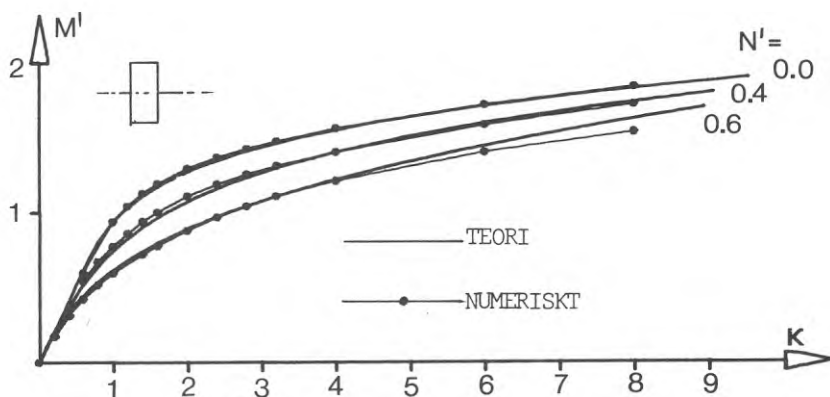


FIG. 5.1. Approximerande polynomet (5.9) jämfört med numeriskt beräknade moment-krökningar.

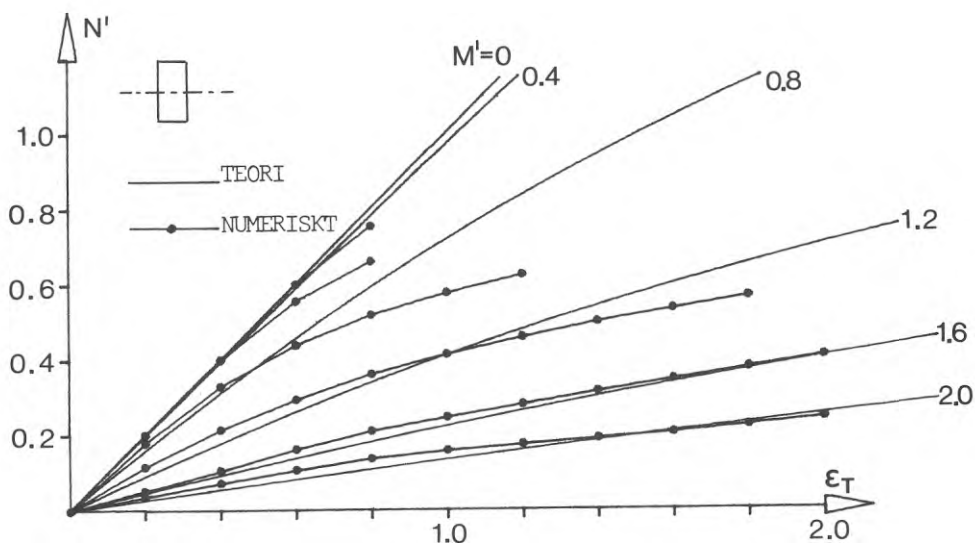


FIG. 5.2. Approximerande polynomet (5.10) jämfört med numeriskt beräknade värden.

5.3. Byte av referensnivåer

Om anpassningen enligt ekv (5.4) gjorts till ett momentkrökningsdiagram representerat i ett visst system av referensnivåer κ_0, \bar{M}_0 , fås nya koefficienter d_{jk}^i avseende representationen $\kappa_{0i}, \bar{M}_{0i}$ ur de ursprungliga koefficienterna enligt

$$d_{jk}^i = d_{jk} (\bar{\epsilon}_{0i} / \bar{\epsilon}_0)^{j+k-1} (\bar{h}_0 / \bar{h}_{0i})^{k-1} \quad (5.11)$$

vilket kan tolkas som en koordinattransformation, som lämpligen göres i strukturprogrammet.

5.4. Sammanfattning

Balklamellens deformationer beskrivs med två polynom vars koefficienter beräknas genom anpassning till analytiska samband med en lämplig numerisk metod. Med polynom som approximerande funktioner är gradtal p, q och approximerande punkt κ_a oberoende parametrar, som väljes beroende på (eller beräknas ur) tvärsnittsform och det intervall $0 < \kappa < \kappa_{\max}$, som approximationen skall vara "bäst" inom. Sammanfattningsvis kan lamellens flexibilitet enligt ovan anpassas med:

$$\begin{bmatrix} \kappa \\ \epsilon_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^p \sum_{j=0}^q d_{jk} (N')^j (M')^k \\ \frac{I}{A} \sum_{k=1}^p \sum_{j=1}^q j d_{jk} (N')^{j-1} (M')^{k+1} / (k+1) \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

som även gäller enkelsymmetriska tvärsnitt. I fortsättningen kommer emellertid endast specialfallet

$$\begin{bmatrix} \kappa \\ \epsilon_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M' + \sum_{k=3}^p c_k (N')^k \\ N' + \frac{I}{A} \sum_{k=3}^p c_k' (N')^{k+1} / (k+1) \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

med $c_k(N')$ = ett polynom med jämna potenser av N' att användas såsom en anpassning till momentkrökningsdiagrammen för dubbel-symmetriska tvärsnitt, se Ågårdh (1974)

Balklamellens flexibilitet \bar{F}_1 är således en olinjär vektorvärd funktion (med två komponenter) som avbildar lamellens krafter $\bar{N}_1 = [\bar{M}, \bar{N}]^t$ på lamellens deformationer $\bar{n}_1 = [\kappa, \epsilon_T]^t$, cf ekv (4.8).

6 BALKELEMENTETS FLEXIBILITETER

6.1. Allmänt

Utgående från formel (5.12) fås uttryck för ändvinklar och balkelementets förlängning, genom integration av krökningen längs balkelementaxeln. Axialkraften betraktas som konstant längs elementet. Denna beräkning ger den olinjära sekantflexibiliteten, som består av tre polynom i tre variabler. Axialkraftens bidrag till momentekvationen för lamellen beaktas ej i härledningen av elementsambanden. Hänsyn till denna geometrisk olinjäritet eller "2:a ordningens effekt", tas i strukturanalysen genom att välja flera korta element.

6.2. Elementets sekantflexibiliteter.

Studera fig. 6.1, där kraft-och deformationsvariabler är definierade.

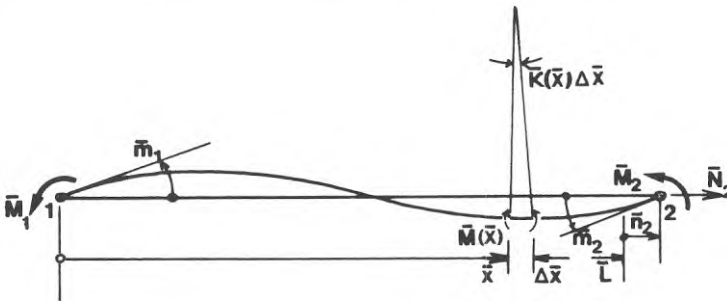


FIG.6.1. Balkelement i det lokala koordinatsystemet.

Jämviktsekvationer för balkelementet ger transformationen från elementets till lamellens kraftvariabler.

$$\bar{M}(x) = -\bar{M}_1(\bar{L}-\bar{x})/\bar{L} + \bar{M}_2 \bar{x}/\bar{L} \quad (6.1)$$

$$\bar{N}(x) = \bar{N}_2$$

vilket kan skrivas (efter division med \bar{M}_0 resp \bar{N}_0):

$$\begin{bmatrix} M(x) \\ N(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(L-x)/L & x/L & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ N_2 \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ N_2 \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

Lamellens flexibilitet på dimensionslös form är, cf kommentaren till ekv (5.12)

$$n_1 = f_1\{N_1\} \quad (6.3)$$

Med komponenterna utskrivna fås: ($f\{x\}$ betecknar funktion av x)

$$\begin{bmatrix} \kappa(x) \\ \epsilon_T(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M/EI + \sum_{k=3}^p c_k \{N/EA\} M^k / (EI)^k \\ N/EA + EI \sum_{k=3}^p c'_k \{N/EA\} M^{k+1} / (EI)^{k+1} (k+1) \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

Den geometriska transformationen fås ur exempelvis areamomentmetoden:

$$\bar{m}_1 = - \int_0^{\bar{L}} (\bar{L} - \bar{x}) \bar{\kappa}(\bar{x}) d\bar{x} / \bar{L} \quad (6.5)$$

$$\bar{m}_2 = \int_0^{\bar{L}} \bar{x} \bar{\kappa}(\bar{x}) d\bar{x} / \bar{L}$$

$$\bar{n}_2 = \int_0^{\bar{L}} \bar{\epsilon}_T(\bar{x}) d\bar{x}$$

Efter division med $\bar{m}_{10} = \bar{\kappa}_0 \bar{L}_0$ och $\bar{n}_0 = \bar{\epsilon}_0 \bar{L}_0$, cf ekv. (2.21)-(2.22) fås

$$m_1 = - \int_0^L (L-x) \kappa(x) dx / L \quad (6.6)$$

$$m_2 = \int_0^L x \kappa(x) dx / L$$

$$n_2 = \int_0^L \epsilon_T(x) dx$$

eller

$$n_e = C^t n_1$$

som kan kombineras med ekv. (6.2) och (6.3) enligt diagrammet i fig. 6.2.

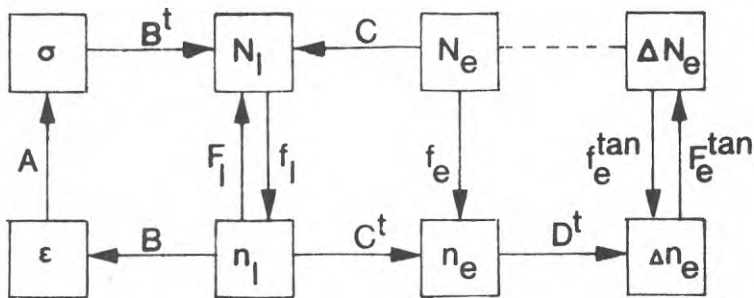


FIG. 6.2. Diagram för elimineringen.

Den resulterande sekantflexibiliteten f_e för elementet har komponenterna

$$\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ n_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{e1}(M_1, M_2, N_2) \\ f_{e2}(M_1, M_2, N_2) \\ f_{e3}(M_1, M_2, N_2) \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

$$\begin{aligned} \text{där } f_{e1} &= -\int_0^L (L-x)\kappa(x)dx/L = -\int_0^L (L-x) \sum_{k=1}^p c_k M^k dx / (EI)^k L \\ &= -L \sum_{k=1}^p c_k / (EI)^k \int_0^L (1-x/L)(-M_1(1-x/L) + M_2 x/L)^k dx / L = \\ &= L \sum_{k=1}^p c_k / (EI)^k \int_0^1 (\xi-1)(M_1(\xi-1) + M_2 \xi)^k d\xi = \\ &= L \sum_{k=1}^p c_k / (EI)^k \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} M_1^{k-j} M_2^j \int_0^1 (\xi-1)^{k-j+1} \xi^j d\xi = \\ &= L \sum_{k=1}^p \sum_{j=0}^k c_k (k-j+1)(-1)^j M_1^{k-j} M_2^j / (k+1)(k+2)(EI)^k \end{aligned}$$

På samma sätt beräknas

$$f_{e2} = L \sum_{k=1}^p \sum_{j=0}^k c_k (k-j+1)(-1)^j M_1^{k-j} M_2^j / (k+1)(k+2)(EI)^k$$

Termen c_k kan skrivas ($c_1=1$)

$$c_k(N) = \sum_{i=0}^q d_{ik} N^i / (EA)^i \quad k=3,5,\dots$$

så att ($c'_1 = 0$)

$$c'_k = \sum_{i=2}^q i d_{ik} N^{i-1} / (EA)^i, \quad k=3,5,\dots$$

$$c''_k = \sum_{i=2}^q i(i-1) d_{ik} N^{i-2} / (EA)^i, \quad k=3,5,\dots$$

Slutligen fås termen:

$$\begin{aligned} f_{e3} &= \int_0^L \varepsilon_T(x) dx = \int_0^L (N_2/EA + \sum_{k=3}^p c'_k M_k^{k+1} / (k+1)(EI)^k) dx \\ &= N_2 L/EA + L \sum_{k=3}^p c'_k \int_0^1 ((M_1(\xi-1) + M_2 \xi)^{k+1} / (k+1)(EI)^k) d\xi = \\ &= N_2 L/EA + L \sum_{k=3}^p \sum_{j=0}^{k+1} c'_k \binom{k+1}{j} M_1^{k+1-j} M_2^j \int_0^1 (\xi-1)^{k+1-j} \xi^j d\xi / (k+1)(EI)^k = \\ &= N_2 L/EA + L \sum_{k=3}^p \sum_{j=0}^{k+1} c'_k (-1)^j M_1^{k+1-j} M_2^j / (k+1)(k+2)(EI)^k \end{aligned}$$

Resultatet kan sammanfattas:

$$\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ n_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 L/3EI - M_2 L/6EI \\ -M_1 L/6EI + M_2 L/3EI \\ N_2 L/EA + \sum_{k=3}^p c'_k M_2^{k+1} / (k+1)(k+2)(EI)^k \end{bmatrix} +$$

$$+ \sum_{k=3}^p \sum_{j=0}^k L \begin{bmatrix} c_k (k-j+1) (-1)^j M_1^{k-j} M_2^j / (k+1)(k+2)(EI)^k \\ c_k (k-j+1) (-1)^j M_1^j M_2^{k-j} / (k+1)(k+2)(EI)^k \\ c'_k (-1)^j M_1^{k+1-j} M_2^j / (k+1)(k+2)(EI)^k \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

Ekv (6.8) utgör således den olinjära elementflexibiliteten som avbildar ändmoment och axialkraft på ändvinklar och längdändring av elementet.

Exempel 6.1. Dubbelsymmetriskt tvärsnitt

Beräkning av ändvinkeln m_1 och förlängningen n_2 enligt formel (6.8) för anpassningen i ekv (5.10) visas i fig 6.3 och 6.4.

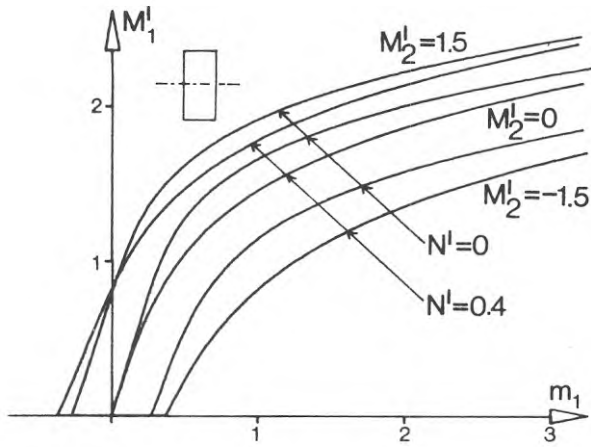


FIG. 6.3. Ändvinkel i balkelement.

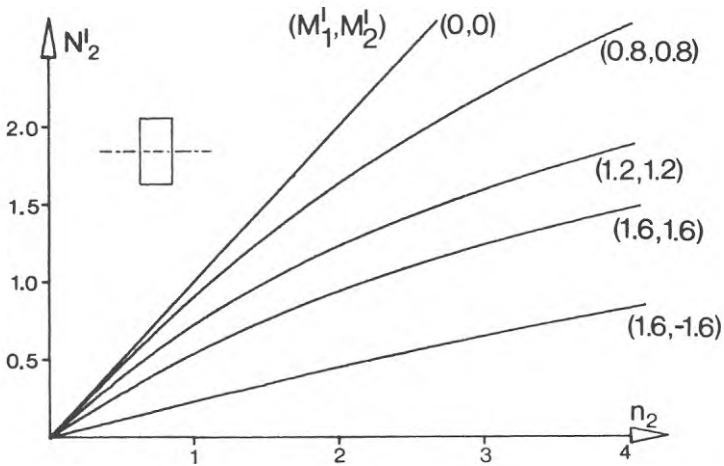


FIG. 6.4. Förlängning i balkelement.

6.3. Elementets tangentflexibiliteter

I strukturanalysen används förskjutningsmetoden vilket kräver elementsamband på styvhetsform. Dessa erhålls genom invertering av den linjära tangentflexibilitetsmatrisen som i sin tur erhålls ur differentiering av ekv (6.8). Således

$$\begin{bmatrix} \Delta m_1 \\ \Delta m_2 \\ \Delta n_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial f_{1e}/\partial M_1 & \partial f_{1e}/\partial M_2 & \partial f_{1e}/\partial N_2 \\ \partial f_{2e}/\partial M_1 & \partial f_{2e}/\partial M_2 & \partial f_{2e}/\partial N_2 \\ \partial f_{3e}/\partial M_1 & \partial f_{3e}/\partial M_2 & \partial f_{3e}/\partial N_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta M_1 \\ \Delta M_2 \\ \Delta N_2 \end{bmatrix} = f_e^{\tan} \Delta N_e \quad (6.9)$$

med elementen:

$$\partial f_{1e}/\partial M_1 = (L/3EI + L \sum_{k=3}^p \sum_{j=0}^k c_k (k-j+1)(k-j)(-1)^j M_1^{k-j-1} M_2^j / ((k+1)(k+2)(EI)^k)$$

$$\partial f_{1e}/\partial M_2 = (-L/6EI + L \sum_{k=3}^p \sum_{j=1}^k c_k (k-j+1)(-1)^j M_1^j M_2^{k-j-1} / ((k+1)(k+2)(EI)^k)$$

$$\partial f_{1e}/\partial N_2 = (L \sum_{k=3}^p \sum_{j=0}^k c_k' (k-j+1)(-1)^j M_1^{k-j} M_2^j / ((k+1)(k+2)(EI)^k)$$

$$\partial f_{2e}/\partial M_1 = (-L/6EI + L \sum_{k=3}^p \sum_{j=1}^k c_k (k-j+1)(-1)^j M_2^{k-j} / ((k+1)(k+2)(EI)^k)$$

$$\partial f_{2e}/\partial M_2 = (L/3EI + L \sum_{k=3}^p \sum_{j=0}^k c_k (k-j+1)(k-j)(-1)^j M_1^j M_2^{k-j-1} / ((k+1)(k+2)(EI)^k)$$

$$\partial f_{2e}/\partial N_2 = (L \sum_{k=3}^p \sum_{j=0}^k c_k' (k-j+1)(-1)^j M_1^j M_2^{k-j} / ((k+1)(k+2)(EI)^k)$$

$$\partial f_{3e}/\partial M_1 = (L \sum_{k=3}^p \sum_{j=0}^k c_k' (k-j+1)(-1)^j M_1^{k-j} M_2^j / ((k+1)(k+2)(EI)^k)$$

$$\partial f_{3e}/\partial M_2 = (L \sum_{k=3}^p \sum_{j=1}^{k+1} c_k' (-1)^j M_1^{k-j+1} M_2^{j-1} / ((k+1)(k+2)(EI)^k) =$$

$$= (L \sum_{k=3}^p \sum_{j=0}^k c_k' (-1)^j (k-j+1) M_1^j M_2^{k-j} / ((k+1)(k+2)(EI)^k)$$

$$\partial f_{3e}/\partial N_2 = (L \sum_{k=3}^p \sum_{j=0}^{k+1} c_k'' (-1)^j M_1^{k+1-j} M_2^j / ((k+1)(k+2)(EI)^k) + L/EA$$

Av symmetriskäl krävs att

$$\partial f_{2e}/\partial M_1 = \partial f_{1e}/\partial M_2 \quad (\text{byt } j \text{ mot } k-j+1)$$

$$\partial f_{3e}/\partial M_1 = \partial f_{1e}/\partial N_2 \quad (\text{framgår direkt})$$

$$\partial f_{3e}/\partial M_2 = \partial f_{2e}/\partial N_2 \quad (\text{byt } j \text{ mot } k+1-j \text{ och summera från } 0 \text{ till } k.)$$

Notera att $(-1)^j = (-1)^{k+1-j}$ ty k är udda.

6.4. Sammanfattning

Balkelementets tangentflexibilitetsmatris har framställts på analytisk form, med hänsyn till axialkraftens inverkan på de konstitutiva ekvationerna. Med analytiska uttryck enligt ekv (6.9) kan tangentflexibilitetsmatrisen snabbt beräknas för varje laststeg, som funktion av kända balkändmoment och axialkraft. För ett balkelement med rektangulärt tvärsnitt har variabler av högst grad 6 utnyttjats. Den resulterande matrisen av typ 3×3 kan snabbt inverteras och elementen i den resulterande tangentstyhetsmatrisen kan summeras in i relevanta positioner i strukturstyhetsmatrisen. Förutom den tidsbesparing och besparing av lagringsutrymme för spännings- och tvärsnittsbeskrivningar, som är nödvändiga i traditionella numeriska metoder, har ovan föreslagna metod ytterligare en fördel. Inga numeriska fel (av betydelse), utöver de idealiseringsfel, som ligger i valet av anpassning av ett polynom (enligt kap 5) till moment-krökningsdiagrammet, uppkommer i genereringen av koefficienterna i strukturstyhetsmatrisen. Detta kan visa sig vara betydelsefullt vid användning av de analytiskt beskrivna elementssambanden i analys av strukturer med ett stort antal obekanta.

Litteratur

I företrädesvis äldre litteratur har statistiskt obestämda balkar och ramar analyserats med hänsyn till olinjära spännings- töjningsdiagram på annat sätt än matrisformulerade kraft- och förskjutningsmetoder, se Ylinen (1962), Mikkola (1966). Det är även av intresse att följa forskningsresultaten beträffande analys av olinjärt elastiska balkpelare, axiellt belastade till brott.

De grundläggande arbeten av teoretisk natur har publicerats av Seppälä (1961), (1965), (1967). Differentialekvationen för den excentriskt belastade, olinjärt elastiska balkpelaren löses med potensserieutveckling. Förhållandena i omgivningen av brotlasten studeras. Resultaten är emellertid ej avsedda för praktiskt bruk, och är knappast tillgängliga för den praktiskt verkssamme ingenjören.

I Johansson (1967) har en omfattande litteraturinventering inom området presenterats.

Chen har i ett antal arbeten (1970), (1971), (1972) studerat bärformågan i balkpelare och upprättat interaktionsdiagram för olika typer av tvärsnitt och laterala belastningar. Moy (1974) beräknar interaktionsdiagram för fast inspända, lateralt belastade balkpelare.

I Życzkowski (1965) beräknas (flyt-) interaktionskurvor för många enkelsymmetriska tvärsnitt av stel-plastiskt material. Resultatet, explicita analytiska uttryck av (flyt) momentet som funktion av axialkraften, erhålles med potensserieutveckling. (I denna rapport ges formler (se ekv 4.57), som efter gränsövergång $\kappa \rightarrow \infty$, ger motsvarande resultat för en annan klass enkelsymmetriska tvärsnitt.)

7 REFERENSER

Baehre, Bröchner, Sjölund, Untersuchungen zur Anwendung der plastischen Tragwerksbemessung bei Aluminium Konstruktionen. Väg och Vattenbyggaren Nr 9, Stockholm 1965.

Baron, F, Venkatesan, M, S, Inelastic response for arbitrary histories of loads. Journal of the Mechanics Division, ASCE, vol 95 (1969), EM3 pp 763-786.

Bäcklund, J, och Ågårdh, L, Finit elementmetod för elasto-plastiska balkar och ramar med stora förskjutningar. Chalmers Tekniska Högskola, Institutionen för Byggnadsstatik, Publikation 73:2, Göteborg 1973.

Chajes, A, Inelastic deflections of beams. Journal of the Structural Division, ASCE, Vol 94, No ST6, June 1968.

Chen, W, F, General Solution of inelastic beam-column problem. Journal of the Engineering Mechanics Division, Vol 96, No EM4, Aug 1970.

Chen, W, F, Further studies of inelastic beam-column problem. Journal of the Structural Division, Vol 97, No ST2, Feb 1971.

Chen, W, F, Atsuta, T, Simple interaction equations for beam-columns. Journal of the Structural Division, ASCE, Vol 98, No ST7, July 1972.

Chen, W, F, Inelastic Response of Column Segments Under Biaxial Loads. Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol 99 (1973), No EM4, pp 685-701

Goldberg, J, E, Richard, R, M, Analysis of nonlinear structures, ASCE, Vol 89, No ST4, Aug 1963.

Jhansale, H, R, and Topper, T, H, Inelastic deflection of beams (discussion), Journal of the Structural Division, ASCE, Vol 95, No ST3, March 1969.

Johansson, G, Tillämpning av plasticitetsteori inom stålbyggnadstekniken 3. Litteraturinventering, Chalmers Tekniska Högskola, Institutionen för Konstruktionsteknik, Stål- och Träbyggnad, Publ.S67:1, Göteborg 1967

Johansson, G, Beräkning av stålbalkars nedböjningar i elastiskt och i efterelastiskt område. Chalmers Tekniska Högskola, Institutionen för Konstruktionsteknik, Stål- och Träbyggnad, Publ.S72:3, Göteborg 1972.

Kaldjian, M, Moment-Curvature of beams as Ramberg-Osgood functions. Journal of the Structural Division, ASCE, Vol 93, No ST5, Oct 1967.

Kaldjian, M, J, Tan, N, R, S, Earthquake response of a Ramberg-Osgood Structure. Journal of the Structural Division, ASCE, Vol 94, No ST10, Oct 1968.

Mattiasson, K, och Ågårdh, L, Analytical moment-curvature axial force diagrams for simply symmetric cross-sections of strain-hardening materials. Chalmers Tekniska Högskola, Institutionen för byggnadsstatik, Publikation 74:1, Göteborg 1974.

Mikkola, M, An analysis of physically nonlinear structures, Doktorsavhandling, Tekniska Högskolan Otaniemi, Publikation nr 112, Helsingfors 1966.

Moy, S,C,F, Method of Analysis of Laterally Loaded Columns. Journal of the Structural Division, ASCE, Vol 100, No ST5, May 1974

Osgood, N,R, Stress-strain formulas. Journal of the aeronautical sciences, Jan 1946, pp 45-48.

Park, R, Theorization of Structural Behaviour with a view to Defining Resistance and Ultimate Deformability. IABSE symposium, Introductory report, Vol 12, Lissabon (1972)

Popov, E,P, Pinkney, B,R, Cyclic yield reversal in steel building connections. Journal of the Structural Division, ASCE, Vol 95, No ST3, March 1969.

Ramberg, W, Osgood, W,R, Description of stress-strain curves by three parameters. NACA, Technical Notes, No 902, Washington, July 1943.

Richard, M, Goldberg, J, E, Analysis of nonlinear structures: force method. Journal of Structural Division ASCE, Vol 91, No ST6, Dec 1965.

Seppälä, V, Zur Bernoullischen Biegungstheorie unter Zugrundelegung einer nichtlinearen Verformungsfunktion. Ann.Acad. Scient.Fenn.AVI.76. Helsinki 1961.

Seppälä, V, Zur Theorie der Biegung eines Stabes nach erlittenen Bruch und vor dem endgültigen Kollaps. Ann.Acad. Scient.Fenn.A.VI.174. Helsinki 1965

Seppälä, V, Über das nichtlineare Problem des Tragvermögens eines inhomogenen Stabes. Acad.Scient.Fenn. A.VI.237. Helsinki 1967.

Smith, H, Nonlinear beam and plate elements. Journal of the Structural Division, ASCE, Vol 98, No ST3, Mars 1972.

Wilson, E,L, Matrix Analysis of Non-Linear Structures Proceedings, ASCE, Second Conference on Electronic Computation, Pittsburg 1960, pp 415-428.

Ylinen, A, Theory of Continuous beams whose material does not follow Hooke's law. Archiwum Mechaniki Stosowanej, Vol 14, No2, Warszawa, 1962.

Zyczkowski, M, Plastic interaction curves for combined bending and tension of beams with arbitrary cross-section. *Archiwum Mechaniki Stosowanej*, No 2, 1965.

Ågårdh, L, Analysis of non-linear beams. Chalmers Tekniska Högskola, Institutionen för byggnadsstatik, Publikation 68:3, - Göteborg 1968.

Ågårdh, L, Analytical and numerical analyses of non-linear beam elements with special consideration of initial and numerical errors. *Doktorsavhandlingar vid Chalmers Tekniska Högskola*, No 152, Göteborg 1974.

R44:1976

**Denna rapport hänför sig till forskningsanslag 690502-7 från
Statens råd för byggnadsforskning till Chalmers tekniska
högskola, Institutionen för byggnadsstatik, Göteborg.**

**Distribution: Svensk Byggtjänst, Box 1403, 111 84 Stockholm
Grupp: konstruktion**

Pris: 26 kronor + moms