



Det här verket har digitaliserats vid Göteborgs universitetsbibliotek och är fritt att använda. Alla tryckta texter är OCR-tolkade till maskinläsbar text. Det betyder att du kan söka och kopiera texten från dokumentet. Vissa äldre dokument med dåligt tryck kan vara svåra att OCR-tolka korrekt vilket medför att den OCR-tolkade texten kan innehålla fel och därför bör man visuellt jämföra med verkets bilder för att avgöra vad som är riktigt.

This work has been digitized at Gothenburg University Library and is free to use. All printed texts have been OCR-processed and converted to machine readable text. This means that you can search and copy text from the document. Some early printed books are hard to OCR-process correctly and the text may contain errors, so one should always visually compare it with the images to determine what is correct.



Rapport

R25:1972

TEKNISKA HOGSKOLAN I LUND
SEKTIONEN FOR VAG- OCH VATTEN
BIBLIOTEKET

Spänningar och deformationer i knutpunkter utan draghållfasthet

Hans Falk

Byggforskningen

Spänningar och deformationer i knutpunkter utan draghållfasthet

Hans Falk

Knutpunkter mellan en horisontell och en vertikal konstruktionsdel av elastiskt material har studerats. De har förutsatts sakna draghållfasthet vinkelrätt mot kontaktytan mellan horisontal och vertikal. Beräkningarna har genomförts med hjälp av en finit element metod.

För varierande excentricitet hos belastningen på den vertikala delen av knutpunkten har storleken hos kontaktytan mellan bjälklag och vägg beräknats, vidare kontaktryckets form och storlek, storleken hos huvuddragspänningarna i knutpunktsområdet samt sambandet mellan excentriciteten hos vägglasten och vinkeländringen mellan bjälklag och vägg. Resultaten redovisas i diagram och figurer.

Sista avsnittet av rapporten behandlar andra typer av knutpunkter. Kompletterande diagram för beräkning av sambandet mellan lastexcentriciteter och vinkeländring i dessa knutpunktstyper anges. Kompletteringarna har hämtats ur beräkningsmaterialet för den i tidigare avsnitt behandlade knutpunktstypen.

I rapport 26/65 från Byggeforskningen presenterade Falk (1969) en undersökning rörande bärförmågan hos elementväggar. Denna undersökning omfattade bl.a. ett par försöksserier. Vid försöken belastades betongväggar mellan bjälklag med centrisk eller excentrisk belastning. Det visade sig härvid att förhållandena i knutpunkten mellan bjälklag och vägg hade avgörande betydelse för väggens verkningsätt och bärförmåga.

Som en följd av det ovan relaterade arbetet påbörjades en undersökning som syftade till att klarlägga förhållandena i knutpunkter mellan horisontella och vertikala byggnadsdelar vid monteringsbygge. Denna undersökning har bestått av en experimentell del och en teoretisk del. I föreliggande rapport redovisas den teoretiska undersökningen.

Större delen av rapporten behandlar förhållandena i en knutpunkt av den typ som visas i Fig. 1. Knutpunkten har studerats för vertikala laster med varierande excentriciteter på väggdelen.

Avsikten med undersökningen har främst varit att studera de förhållanden i knutpunkten som bestämmer verkningsätt och bärförmåga, dvs framför allt sambandet mellan moment i knutpunkten och vinkeländringen mellan horisontal och vertikal vid olika lastnivåer. Detta samband är avgörande eftersom

det utgör gränsvillkor för väggen vid beräkning av dess verkningsätt och stabilitet. Härutöver har spänningsförhållandena i knutpunkten studerats.

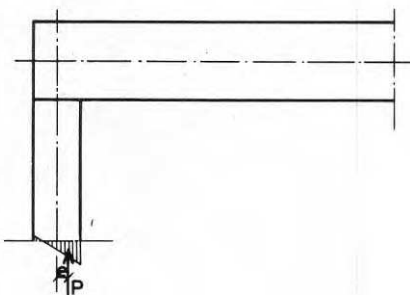


FIG. 1 Knutpunkt mellan horisontell och vertikal konstruktionsdel.

Vid studiet av knutpunkten har förutsatts att den består av idealelastiskt material. Vidare har antagits att knutpunkten i kontaktytan mellan bjälklag och vägg inte kan uppta dragspänningar vinkelrätt mot denna yta. Däremot har förutsatts att dragspänningar parallellt med kontaktytan och skjivspänningar kan överföras mellan horisontalen och vertikalen. Under dessa förutsättningar kan knutpunkten tänkas ersatt med den i Fig. 2 visade konstruktionen, som alltså består av ett homogent vinkelformat stycke med en slits motsvarande den "dragspricka" som skulle uppkomma i den verkliga konstruktionen.

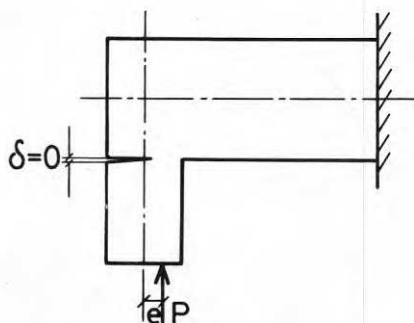


FIG. 2 Idealiserad modell av knutpunkten i FIG. 1.

Vid beräkningarna har alltså knutpunktskonstruktionen enligt Fig. 2 studerats. Dimensionerna har i samtliga fall varit desamma, vilket innebär att förhållandet mellan vägg tjocklek och bjälklagstjocklek har varit 1:1,6. För olika djup, s, på slitsen (dragsprickan) har den excentricitet hos lasten på väggen bestämts, som ger vertikalspänningen

Byggeforskningen Sammanfattningar

R25:1972

Nyckelord:

monteringsbygge, bärförmåga, verkningsätt, knutpunkter (utan draghållfasthet), horisontella – vertikala byggnadsdelar, finit elementberäkningsmetoder

Rapport R25:1972 avser anslag C 336 från Statens råd för byggnadsforskning till Institutionen för byggnadsstatik, KTH.

UDK 624.046
624.075.4
SfB A
(29)
ISBN 91-540-2039-5

Sammanfattning av.

Falk, H, 1972, *Spänningar och deformationer i knutpunkter utan draghållfasthet, En "Finite Element" analys av knutpunkter mellan horisontella och vertikala konstruktionsdelar.* (Statens institut för byggnadsforskning) Stockholm. Rapport R25:1972, 40 s., ill. 14 kr.

Rapporten är skriven på svenska med svensk och engelsk sammanfattning.

Distribution:

Svensk Byggtjänst
Box 1403, 1184 Stockholm
Telefon 08-24 28 60

Grupp: konstruktion

noll (0) vid "dragsprickans" rot. Ur denna lastexcentricitet har sedan spännings- och deformationstillståndet i knutpunkten kunnat bestämmas.

Den beräkningsmetod som använts är en finit element metod av enklaste slag. Metoden har beskrivits av t.ex. Wilson (1963). Den bygger på uppdelning av konstruktioner i triangulära element. Inom varje element är normal- och skjuvspänningarna konstanta. Dessa konstanta spänningar omräknas i ekvivalenta krafter angripande i elementets hörnpunkter. Under antagande att deformationerna inom ett element varierar lineärt kan ett samband mellan elementets hörnpunktsdeformationer och hörnkrafterna beräknas. Villkoret att deformationerna i en hörnpunkt för de i hörnpunkten sammanträffande elementen skall vara lika och villkoret att summan av alla krafter som angriper i en hörnpunkt skall vara lika med noll ger möjlighet att bestämma deformationerna, hörnkrafterna och därmed spänningarna i konstruktionen. För att lösa det stora lineära ekvationssystem som blir resultatet av den använda metoden har ett speciellt datorprogram utarbetats.

Beräkningsresultat

Beträffande beräkningsresultaten kan allmänt sägas att de bör tolkas med en viss försiktighet eftersom den använda metoden är approximativ och eftersom inga resultat från beräkning av liknande konstruktioner finns att jämföra med. Erfarenhetsmässigt vet man dock att metoden tenderar att ge för små deformationer eftersom beräkningarna förutsätter att de triangulära elementens sidor förblir räta linjer vid deformationen. Detta innebär att elementen har större styvhet än motsvarande delar i den verkliga konstruktionen. I själva kontaktområdet mellan bjälklag och vägg är i det aktuella fallet elementindelningen mycket tät, varför avvikelserna sannolikt är relativt små.

I Fig. 3 visas sambandet mellan den relativa excentriciteten hos lasten på väggen och kontaktytans storlek. Som jämförelse har motsvarande samband vid triangulär och rektangulär kontaktryckfördelning angivits.

Beträffande spänningstillståndet i knutpunkten finns i rapporten två figurserier. I den ena visas kontaktrycket mellan bjälklag och vägg för samtliga tio genomräknade belastningsfall. I den andra figurserien visas för samtliga belastningsfall huvuddragsspänningarnas storlek i olika delar av knutpunkten.

I Fig. 4 visas det beräknade sambandet mellan lastexcentriciteten i knutpunkten och vinkeländringen mellan horisontal och vertikal θ g a av elastiska deformationer. I rapporten lämnas ett beräkningsexempel, som visar hur diagrammet användes.

I ett avslutande avsnitt diskuteras knutpunkter av den typ som visas i

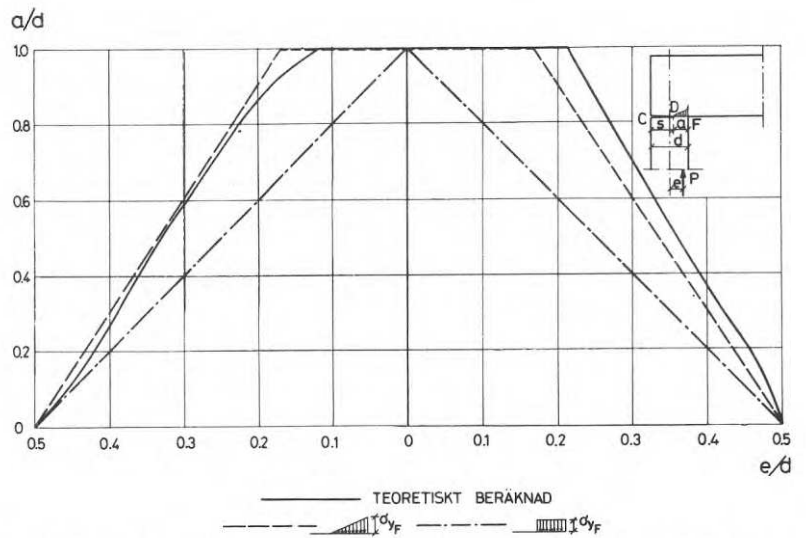


FIG. 3 Samband mellan relativ lastexcentricitet e/d och relativ kontaktlängd a/d i knutpunkten.

Fig. 5. Inledningsvis anges hur sådana knutpunkter skulle kunna beräknas med den metod som använts vid beräkningarna av resultaten i de föregående avsnitten av rapporten. Därefter diskuteras vilka förutsättningar som måste gälla för att resultat tillämpliga på t.ex. knutpunkten i Fig. 5 skall kunna erhållas ur det beräkningsmaterial som framtagits vid beräkningen av knutpunkterna enligt Fig. 1.

På basis av denna diskussion beräknades det diagram som visas i Fig. 6. Detta anger samband mellan lasten på den undre väggen i knutpunktskonstruktionen enligt Fig. 5 och vinkeländringen mellan bjälklaget och den övre väggen.

Avslutningsvis diskuteras hur diagrammen i Fig. 4 och Fig. 6 skall modifieras

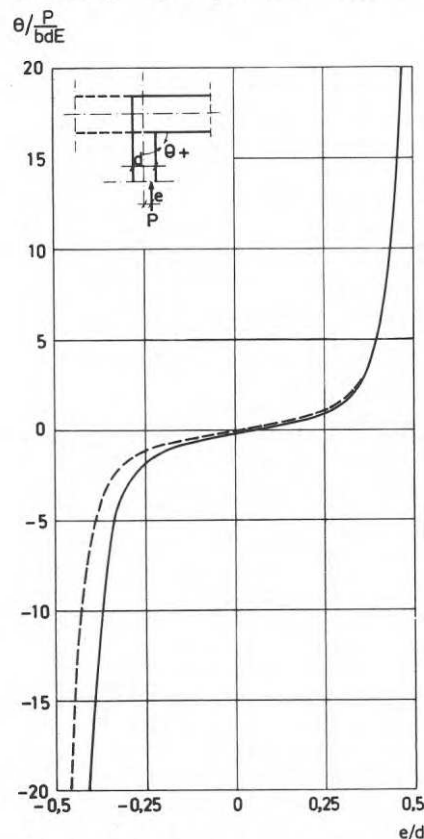


FIG. 4 Samband mellan vinkeländringen Θ mellan horisontal och vertikal och den relativa lastexcentriciteten e/d .

för att kunna tillämpas på knutpunkter där bjälklaget är genomgående, dvs när knutpunkterna är symmetriska. Som resultat av denna diskussion har modifierationer (streckade kurvor) av dessa diagram genomförts som gör diagrammen användbara även för dessa knutpunktstyper.

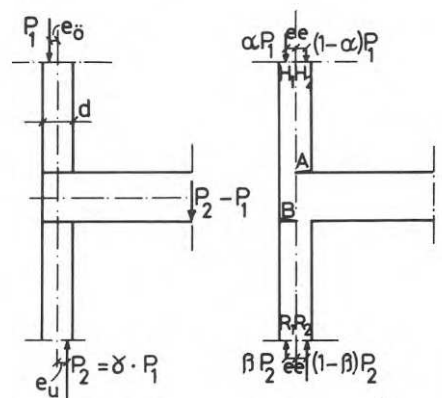


FIG. 5 Knutpunkt med väggar på båda sidor om bjälklaget. Beteckningar.

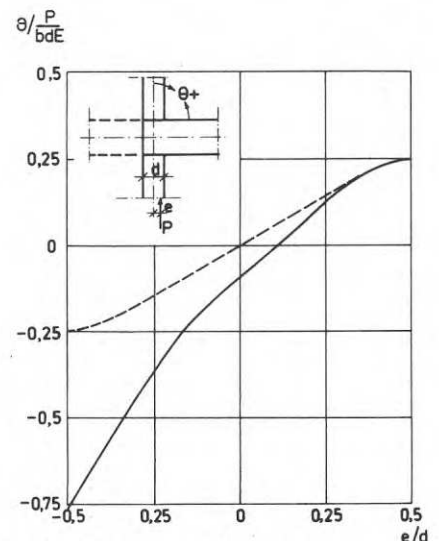


FIG. 6 Samband mellan relativ lastexcentricitet e/d hos lasten P på den undre väggen och vinkeländringen Θ mellan bjälklaget och den övre väggen (eller vice versa).
 — Symmetrisk knutpunkt
 - - - - - Osymmetrisk knutpunkt

Stresses and deformations in joints without tensile strength

Hans Falk

In the investigation, joints between a horizontal and a vertical structural member of elastic material have been studied. The joints have been assumed to have no tensile strength normal to the contact area between the horizontal and the vertical member. In the calculations a finite element method has been used.

For varying eccentricities of the force on the vertical part of the joints the magnitude of the contact area between floor slab and wall has been computed. Furthermore the magnitude and shape of the contact pressure, the magnitude of the main tensile stresses and the relationship between the eccentricity of the force on the wall and the angle of rotation between the wall and the floor slab have been calculated. The results are presented in sketches and diagrams.

The last section of the report concerns other types of joints. Additional diagrams showing the relationship between eccentricity and angle of rotation in these types of joints are presented. These supplementary diagrams have been calculated from the results concerning the type of joints dealt with in the previous part of the report.

In Building Research Institute Report 26/69 Falk (1969) presented an investigation concerning the bearing capacity of prefabricated wall panels. This investigation included among other things a couple of test series. At these tests concrete walls between floor slabs were loaded with centric or eccentric loads. The results of the tests showed that the conditions in the joint between floor slabs and wall panel were of vital importance to the performance and bearing capacity of the wall.

As a result of the work described above an investigation was started, designed to analyse the conditions in joints between horizontal and vertical structural parts in prefabricated buildings. This investigation comprised one experimental part and one theoretical study. This report contains an account of the theoretical investigation.

Most of the report concerns the conditions in a joint of the type shown in Fig. 1. The influence of vertical loads with varying eccentricity on the wall part of the joint has been studied.

The basic purpose of the investigation was to study conditions in the joint which determine the performance and the load carrying capacity of the wall, that is, primarily the relationship between the moment in the joint and the angle of rotation between the horizontal and the vertical member at different loads. This relationship is of vital importance because it establishes the boundary conditions

for the wall in the computations of performance and stability. In addition to this, the stress conditions of the joint have been studied. In the studies the joint has been assumed to consist of

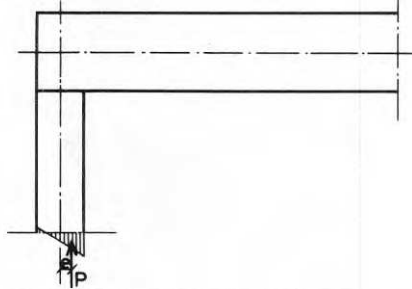


FIG. 1 Joint between horizontal and vertical member in a structure.

ideally elastic material. Furthermore the assumption has been made that in the area of contact between floor slabs and wall panel the joint cannot resist tensile stresses normal to the contact area, while it has been assumed that tensile stresses and shear stresses can be transmitted between the horizontal and the vertical member. Under these assumptions the joint can be considered replaced by the structure shown in Fig. 2. This structure consists of one homogeneous L-shaped piece of material with a cut corresponding to the "tensile crack" that would appear in the real structure.

The joint structure in Fig. 2 was studied in this investigation. The dimensions were identical in all the cases of loading.

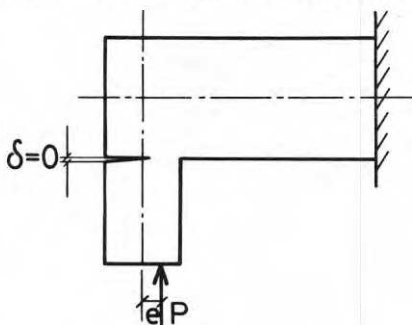


FIG. 2 Idealized model of the joint in FIG. 1.

This means that the relationship between the thickness of the wall and the thickness of the floor slab has been 1:1.6. For different depths, s, of the cut (tensile crack) the value of the eccentricity of the force on the wall has been determined, which makes the vertical normal stress equal to zero at the "root" of the tensile crack. When this eccentricity is known it is possible to calculate the stresses and deformations of the joint.

The method of calculation used in this investigation is a finite element method

National Swedish Building Research Summaries

R25:1972

Key words:

prefabricated buildings, bearing capacity, performance, joints (without tensile strength), horizontal and vertical structural members, finite element computation methods

Report R25:1972 has been supported by Grant C 336 from the National Swedish Council for Building Research to the Department of Building Statics & Structural Engineering, Royal Institute of Technology.

UDC 624.046
624.075.4
SfB A
(29)
ISBN 91-540-2039-5

Summary of:

Falk, H, 1972, *Spänningar och deformationer i knutpunkter utan draghållfasthet. En "Finite Element" analys av knutpunkter mellan horisontella och vertikala konstruktionsdelar.* Stresses and deformations in joints without tensile strength, A finite element analysis of joints between horizontal and vertical structural members. (Statens institut för byggnadsforskning) Stockholm. Report R 25:1972, 40 p., ill. 14 Sw.Kr

The report is in Swedish with Swedish and English summaries.

Distribution:

Svensk Byggtjänst
Box 1403, S-111 84 Stockholm
Sweden

of a very simple kind. The method had been described e.g. by Wilson (1963). The structure is replaced by a number of triangular elements. Normal and shear stresses in each element are considered to be constant. These constant stresses are converted into equivalent forces (nodal forces) acting at the corners (nodal points) of the element. Under the assumption that the displacement field of an element is linear a relationship between the displacements of the nodal points and the nodal forces can be calculated. The condition, that the displacements of all triangular elements interconnected at a nodal point must be equal and the condition that the sum of all forces acting at a nodal point must be equal to zero makes it possible to calculate the displacements of the nodal points, the nodal forces and also the stresses in the structure.

A special computer program has been written for solving the large system of linear equations, that will result from the method used.

Results of the calculations

A general conclusion about the calculation results is that they must be interpreted with a certain amount of caution, as the method used is approximate and as there are no results of calculations for similar structures with which to compare. We know, however, from experience that the method tends to underestimate the deformations, because of the assumption of a linear displacement relationship for the element. This means that the triangular element has a larger rigidity than the corresponding part of the real structure. In the case in question the element grid is very fine near the contact area. This probably means that the errors are relatively small.

In Fig. 3 the relationship between the relative eccentricity of the force on the wall and the area of contact is shown. For comparison the corresponding curves for triangular and rectangular contact stress are also drawn in Fig. 3.

In the report, two series of diagrams are shown concerning the state of stress in the joint. In the first series the shape and magnitude of the contact pressure is shown for the ten cases of loading included in this investigation. In the second the magnitude of the main tensile stress in the area near the joint is shown for the same cases of loading.

In Fig. 4 the computed relationship between the eccentricity of the force in the joint and the angle of rotation between the horizontal and vertical member caused by elastic deformations is shown. In the report there is also an example of calculation showing the use of this diagram. In a diagram referring to this example relationships are shown between the force acting on the wall and the eccentricity of this force for the structure studied in the example. The relationships are given for a number of values of the eccentricity of the external load. The relationships are given with and without regard to the deformation of the joint.

In connection with the description of the results, the accuracy of the results and the limits within which they are

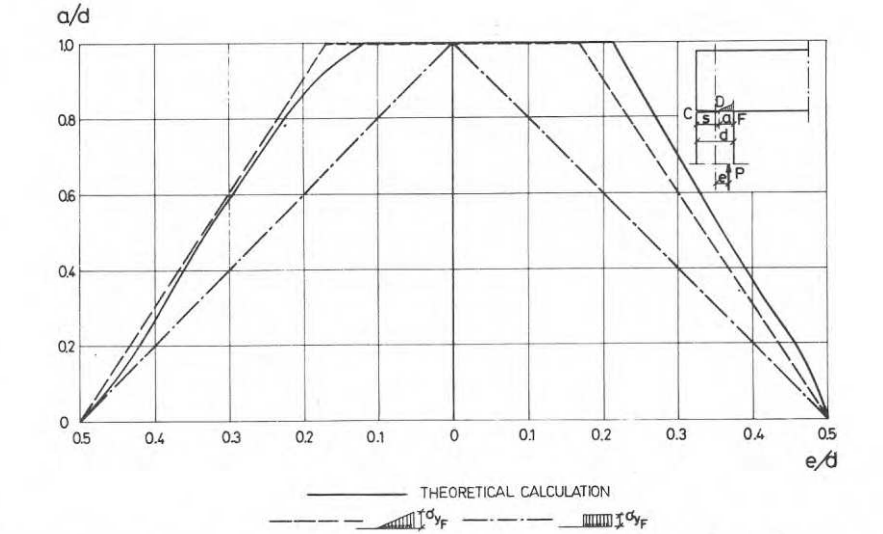


FIG. 3 Relationship between the relative eccentricity e/d of the load and the relative contact length a/d in the joint.

valid are discussed.

In a concluding section of the report joints of the type shown in Fig. 5 are discussed. The first part of this section is devoted to demonstrating how joints of this type could be analysed with the method used in the calculations of the results in the preceding sections. It then goes on to discuss which assumptions must be valid to make it possible to calculate results applicable to the joint in Fig. 5 from the results from the calculations for the joint in Fig. 1. On the basis of these discussions the diagram shown in Fig. 6 was produced. This diagram shows the relationship between the force on the wall below the floor slab in the joint structure in Fig. 5 and the angle of rotation between the floor slab and the wall above the floor slab.

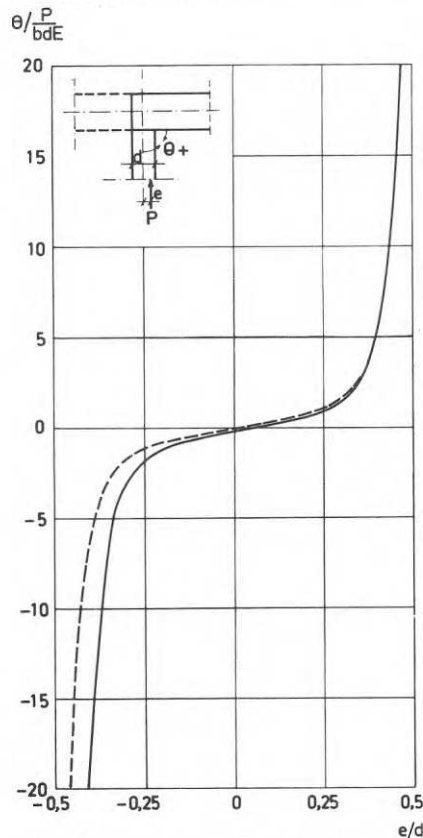


FIG. 4 Relationship between the angle of rotation θ , between horizontal and vertical member of the joint and the relative eccentricity e/d of the load.

The report winds up with a discussion on how the diagrams in Fig. 4 and Fig. 6 should be modified to be applicable to joints where the floor slab passes through the joint, that is, joints which are symmetrical. As a result of this discussion modifications (dash curves) of these diagrams have been carried out, which make the diagrams applicable even for these types of joints.

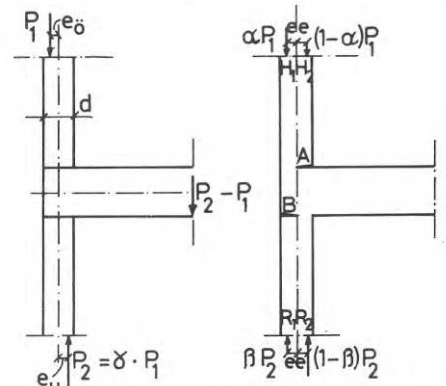


FIG. 5 Joint with walls above and below the floor slab. Notations.

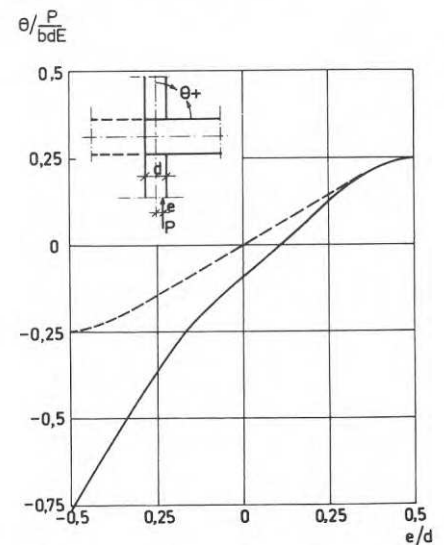


FIG. 6 Relationship between the relative eccentricity e/d of the load P on the lower wall and the angle of rotation θ between the floor slab and the upper wall (or vice versa).

— Symmetrical joint
 - - - Asymmetrical joint

Rapport R 25:1972

SPÄNNINGAR OCH DEFORMATIONER I KNUTPUNKTER UTAN DRAGHÅLLFASTHET

En "Finite Element" analys av knutpunkter mellan horisontella och vertikala konstruktionsdelar

STRESSES AND DEFORMATIONS IN JOINTS WITHOUT TENSILE STRENGTH

A finite element analyses of joints between horizontal and vertical structural members

Denna rapport avser anslag C 336 från Statens råd för byggnadsforskning till Institutionen för byggnadsstatik, KTH. Försäljningsintäkterna tillfaller fonden för byggnadsforskning.

Statens institut för byggnadsforskning
ISBN 91-540-2039-5

Rotbeckman Stockholm 1972

INNEHÅLL	
SAMMANFATTNING	
SUMMARY	
BETECKNINGAR OCH DEFINITIONER	4
INLEDNING	8
Allmänt	8
Målsättning	9
Förutsättningar	9
Beräkningsmodell	10
Beräkningsmetod	12
Datorprogram	13
Elementindelning	16
<u>BERÄKNINGSRESULTAT</u>	17
Allmänna synpunkter	17
Kontaktytans storlek	18
Dragspänningar i knutpunkten	21
Vinkeländring i knutpunkten på grund av elastiska deformationer	26
Beräkningsexempel	27
Diskussion av beräkningsresultaten	33
Resultatens giltighetsområde	34
<u>BEHANDLING AV ANDRA KNUTPUNKTSTYPER</u>	35
Beräkningsmetod	35
Alternativ beräkning	37
LITTERATURFÖRTECKNING	40

BETECKNINGAR

NOTATIONS

$B=B_0=B_1$	$\frac{s h}{E_V J_V}$	
D	Dragsprickans bredd	(FIG. 2)
	<i>Width of the tension crack</i>	(FIG. 2)
E	Elasticitetsmodul	
	<i>Modulus of elasticity</i>	
$E_H J_H$	Böjstyvhet för bjälklag	
	<i>Bending stiffness of floor slab</i>	
$E_V J_V$	Böjstyvhet för vägg	
	<i>Bending stiffness of wall</i>	
L	Bjälklagslängd	
	<i>Length of floor slab</i>	
P	Kraft på vägg	
	<i>Force on a wall</i>	
P_E	$\frac{\pi^2 E_V J_V}{h^2}$	knäcklast enligt Euler 2:a knäckfall
		<i>buckling load according to Euler II</i>
$P_1(P_2)$	Belastning på vägg över (under) bjälklag i en knutpunkt	
	<i>Force on a wall above (below) the floor slab in a joint</i>	
S	Dragsprickans djup	(FIG. 3)
	<i>Depth of the tension crack</i>	(FIG. 3)
a	Kontaktytans längd	(FIG. 3)
	<i>Length of the contact area</i>	(FIG. 3)
b	Väggens, (bjälklagets, knutpunktens) bredd vinkelrät mot belastningsplanet	
	<i>Width of the wall (floor slab, joint) in the direction right angle to the plane of loading</i>	
d	Vägg tjocklek	
	<i>Thickness of a wall</i>	
e, e_1, e_2	Excentricitet	(Jfr t.ex. FIG. 3)
	<i>Excentricity</i>	(Comp. e.g. FIG. 3)

e_0	"Inre" lastexcentricitet (FIG. 11) <i>"Internal" excentricity of vertical force (FIG. 11)</i>
e_0^-	"Yttre" lastexcentricitet (FIG. 11) <i>"External" excentricity of vertical force (FIG. 11)</i>
$e_0(e_u)$	Excentricitet hos lasten på vägg ovanför (under) bjälklaget i en knutpunkt <i>Excentricity of the load on a wall above (below) the floor slab in a joint</i>
h	Vägghöjd <i>Height of a wall</i>
s	$\frac{3 E_H J_H}{L}$
t	Bjälklagstjocklek <i>Thickness of a slab</i>
u	$= \frac{h}{2} \frac{P}{E_V J_V} = \frac{\pi}{2} \frac{P}{P_E}$
x, y	Koordinataxlar, koordinater <i>Coordinate axes, coordinates</i>
α	Lastfaktor (Jfr FIG. 3) <i>Loadfactor (Comp. FIG. 3)</i>
β	Lastfaktor <i>Loadfactor</i>
γ	P_1/P_2
δ_Q	Deformation i godtycklig riktning i punkten Q <i>Displacement in an arbitrary direction at the point Q</i>
$\delta_{Q1}, (\delta_{Q2})$	Deformation i godtycklig riktning i punkten Q, förorsakad av last i punkten H1, (H2) <i>Displacement in an arbitrary direction at the point Q caused by a force at the point H1, (H2)</i>
$\delta_{Qx}, (\delta_{Qy})$	Deformation i x, (y)-riktningen i punkten Q <i>Displacement in the x, (y)-direction at the point Q</i>
$\Phi(u)$	$= \frac{3}{u} \left(\frac{1}{\sin 2u} - \frac{1}{2u} \right)$
$\Psi(u)$	$= \frac{3}{2u} \left(\frac{1}{2u} - \frac{1}{\tan 2u} \right)$

σ	Spänning i en punkt <i>Stress at a point</i>
$\sigma_A, \sigma_B \dots$	Spänning i punkten A, B... <i>Stress at the point A, B ...</i>
$\sigma_{Ay}, (\sigma_{By})$	Spänning i y-riktningen i punkterna A (B) <i>Stress in the y-direction at the point A (B)</i>
$\sigma_{AH1}, \sigma_{AH2}$ $\sigma_{AR1}, \sigma_{BR1}$ $\sigma_{BH1}, \sigma_{BH2}$ $\sigma_{BR1}, \sigma_{BR2}$	Vertikal spänning i punkterna A, resp. B orsakade av laster i punkterna H1, H2, R1 och R2 resp. (FIG. 13) <i>Vertikal stress at the point A and B caused by forces at the points H1, H2, R1 and R2 (FIG. 13)</i>
$\sigma_{Cy}, (\sigma_{Gy})$	Spänning i y-riktningen i punkten C (G) <i>Stress in the y-direction at the point C (G)</i>
σ_{Dr}	Huvuddragspänning <i>Main tension stress</i>
σ_{Dy}	Spänning i y-riktningen i punkten D <i>Stress in the y-direction at the point D</i>
$\sigma_{Dy1}, (\sigma_{Dy2})$	Spänning i y-riktningen i punkten D av belastning i punkten H1, (H2) <i>Stress in the y-direction at the point D caused by a force at the point H1, (H2)</i>
σ_{med}	Medel tryckspänning i den vertikala knutpunktsdelen (väggen) <i>Average compressive stress in the vertical member (wall) of the joint</i>
$\sigma_{Q1}, (\sigma_{Q2})$	Spänning i godtycklig riktning i punkten Q, förorsakad av last i punkten H1, (H2) <i>Stress in an arbitrary direction at the point Q, caused by a force at the point H1, (H2)</i>
$\sigma_{Qx}, (\sigma_{Qy})$	Normalspänning i x, (y)-riktningen i punkten Q <i>Normal stress in the x, (y)-direction at the point Q</i>
$\sigma_x, (\sigma_y)$	Spänning i x, (y)-riktning i en punkt <i>Stress in the x, (y)-direction at a point</i>
τ_{Qxy}	Skjuvspänning i xy-riktningarna i punkten Q <i>Shear stress in the xy-directions at the point Q</i>
θ	Vinkeländring mellan bjälklag och vägg i knutpunkten <i>Angle of rotation between floor slab and wall at the joint</i>

θ_{P_1} (θ_{P_2}) Del av vinkeländring mellan bjälklag och vägg i en knutpunkt förorsakad av lasten P_1 , (P_2)

7

Part of the angle of rotation between floor slab and wall, in a joint, caused by the force P_1 , (P_2)

Vid Institutionen för Byggnadsstatik, KTH har under flera år undersökningar rörande stabiliteten hos prefabricerade byggnader utförts. Härvid har framför allt bärförmågan hos enskilda vägg-element i samverkan med anslutande bjälklag studerats. Eftersom förhållandena i själva knutpunkten mellan bjälklag och vägg är av avgörande betydelse, se *Falk (1969)*, för väggens bärförmåga har en speciell undersökning av verkningssättet hos knutpunkter mellan en horisontell (bjälklag) och en vertikal (vägg) konstruktionsdel genomförts.

Knutpunktsundersökningen har bestått av två delar, som har utförts parallellt. Den ena delen är en experimentell undersökning av knutpunkter av betong, för vilken redogörelse lämnas i annat sammanhang och den andra delen en teoretisk undersökning, vilken beskrivs i föreliggande uppsats.

ALLMÄNT

Vid den teoretiska undersökningen har en knutpunkt av den typ som visas i FIG. 1 studerats. Knutpunkten består av ideal-elastiskt material. Belastningen är en centrisk eller excentrisk tryckkraft på konstruktionens vertikala del.

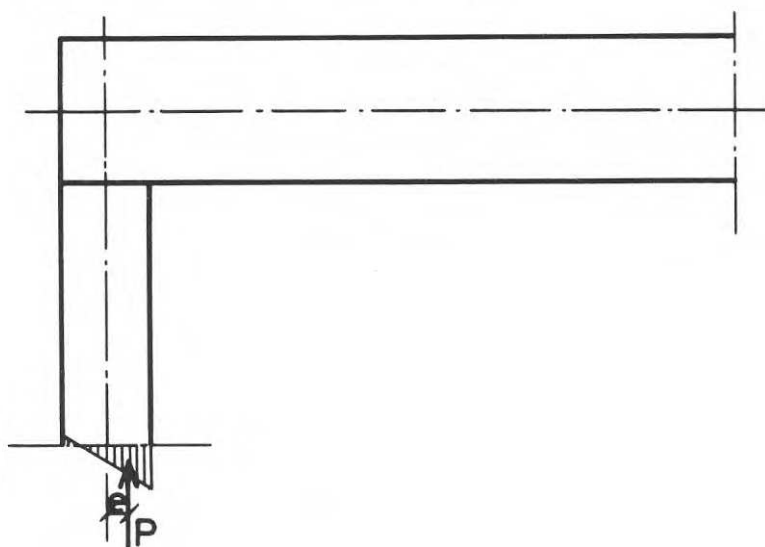


FIG. 1 Knutpunkt mellan horisontell och vertikal konstruktionsdel

Joint between horisontal and vertikal member in a structure

Förhållandet mellan horisontalens och vertikalens tjocklek har valts till 1.6 : 1, vilket torde vara ett relativt normalt förhållande mellan tjocklekarna hos bjälklag och vägg vid monteringsbygge.

Efter ett inledande studium stod det klart att en behandling av knutpunktsproblemet med rent elasticitetsteoretiska metoder dels skulle vara mycket arbetskrävande, dels skulle kräva omfattande beräkningar med hjälp av dator. Därför valdes en behandling där en för databehandling direkt anpassad metod, en s.k. *finit element metod*, användes.

MÅLSÄTTNING

Syftet med den teoretiska undersökningen har i första hand varit att bestämma de förhållanden, som är avgörande för väggens stabilitet, dvs. de gränsvillkor, som råder i väggens upplagsområden. Det är härvid främst sambandet mellan momentet i knutpunkten och vinkeländringen mellan vägg och bjälklag i knutpunkten, som är bestämmande. Vidare har avsikten varit att studera spänningsförhållandena i själva knutpunkten, eftersom knutpunktens bärförmåga i vissa fall är avgörande för hela konstruktionens brottlaster.

FÖRUTSÄTTNINGAR

Vid beräkningarna har förutsatts att både horisontalen och vertikalen (väggen och bjälklagen) består av idealelastiskt material samt att deformationerna är små. Vid de redovisade belastningsfallen har *Poissons tal* satts = 0.

Beträffande kontaktområdet mellan horisontalen och vertikalen har antagits att inga dragspänningar kan överföras vinkelrätt mot kontaktytan, utan belastningen överförs från vägg till bjälklag i form av tryckspänningar. I det område där tryckspänningarna överförs har antagits, att skjuvspänningar och med kontaktytan parallella tryck- och dragspänningar kan uppträda.

Förutsättningen att materialet är idealelastiskt medför att re-

sultaten inte kan användas för detaljberäkning av betongkonstruktioner annat än vid små påkänningar. Man torde dock med ledning av beräkningarna kunna bedöma t.ex. var en eventuell sprickbildning i en betongknutpunkt bör inledas.

Av övriga förutsättningar är antagandet att deformationerna är små vanligen riktigt vid påkänningar inom det elastiska området för normala konstruktionsmaterial. För *Poissons tal* brukar värdet 0 ofta användas vid elasticitetsteoretisk behandling av betongkonstruktioner. Inverkan av avvikelser från detta värde torde vara relativt begränsade.

Förutsättningen att vertikala tryckspänningar, skjuvspänningar och normalspänningar parallella med kontaktytan, kan upptas i kontaktsnittet torde motsvara vad som i den elasticitetsteoretiska litteraturen kallas "kontakttryck under närvaro av tillräcklig friktion för att glidning skall förhindras." För att denna förutsättning skall vara uppfylld fordras en viss råhet hos kontaktytorna. Vid t.ex. obehandlade betongytor och grovbearbetade stålytor torde denna förutsättning vara någorlunda väl uppfylld.

BERÄKNINGSMODELL

Vid beräkningarna har den i FIG. 2 visade delen av konstruktionen i FIG. 1 studerats.

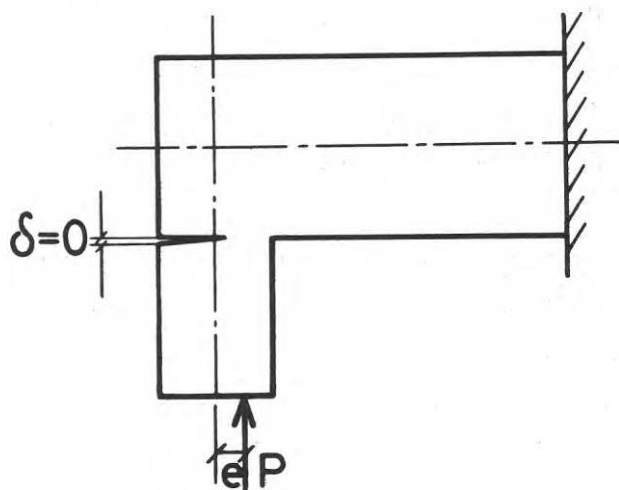


FIG. 2 Idealiserad modell av knutpunkten i FIG. 1
Idealized model of the joint in FIG. 1

Förutsättningen att knutpunkten i kontaktområdet kan uppta tryckspänningar, skjuvspänningar och normalspänningar parallella med kontaktytan men inte dragspänningar vinkelräta mot kontaktytan gör, att knutpunkten kan betraktas som ett homogent vinkelformat stycke med en slits i det område där en dragspricka mellan bjälklag och vägg skulle uppkomma. Slitsens bredd (δ i FIG. 2) är 0 när konstruktionen är obelastad.

Bjälklagsdelens längd från knutpunktens innerhörn till inspänningssnittet är = 1.6 ggr. bjälklagstjockleken och vägghöjden från innerhörnet till den belastade änden har valts till 1.4 ggr. väggtjockleken.

Vid valet av bjälklagslängd och vägghöjd har hänsyn tagits till att förhållandena i själva kontaktområdet inte skall påverkas av randvillkoren vid "upplagen" dvs. i belastningssnittet och inspänningssnittet. Det kan förefalla, som om de valda längderna är något för små med hänsyn till *Saint-Venants princip*. Kontrollberäkningar har emellertid visat, att man med de valda dimensionerna inte får någon skillnad i kontaktryckspänningar mellan bjälklag och vägg eller i vinkeländring mellan bjälklag och vägg, antingen man väljer att låta lasten på väggen angripa i form av två punktlaster, eller som en serie punktlaster motsvarande en triangulärt fördelad belastning.

Anledningen till att dimensionerna har valts så små trots att *Saint-Venants princip* talar för större längder på bjälklag och vägg är den valda beräkningsmetoden. Denna bygger på att konstruktionen indelas i ett stort antal triangulära element. Speciellt i områden med spänningskoncentrationer måste indelningen vara mycket tät. Med ledning av elementindelningen byggs ett lineärt ekvationssystem upp. Detta blir större ju fler element som använts. Hur stort ekvationssystemet får vara bestäms av den för lösningen av systemet tillgängliga datorns kapacitet (= de ekonomiska resurserna). Eftersom i det aktuella fallet spänningskoncentrationerna är stora tvingas man begränsa storleken på den beräknade konstruktionen till förmån för en tätare elementindelning i kontaktområdet.

Den beräkningsmetod, som använts är en *finiit element metod* av enklaste slag. Metoden har beskrivits av *Wilson (1963)*. Som nämnts i det föregående bygger den på uppdelning av konstruktionen i triangulära element av godtycklig form och storlek. Vidare förutsätter den, att materialet är elastiskt och att deformationerna varierar lineärt inom varje element. Spänningarna som påverkar ett element tänkes vid beräkningen ersatta med krafter i elementens hörn. Yttre belastningar ersättes också med koncentrerade krafter i elementhörnen.

Genom att föreskriva, att krafter, som angriper i en för flera element gemensam hörnpunkt, skall hålla varandra i jämvikt och att deformationerna för alla elementhörnpunkter i en sådan gemensam hörnpunkt skall vara lika kan man teckna ett lineärt ekvationssystem, som ger möjlighet till beräkning av deformationerna i varje elementhörnpunkt. Ur deformationsvärdena kan de krafter som angriper elementets hörnpunkter beräknas och dessa kan sedan omräknas i spänningar i elementet.

Metoden har vissa nackdelar. Den allvarligaste är att den inte medför kontinuitet hos spänningarna inom konstruktionen, utan ger spänningar, som är konstanta inom varje element. Detta innebär att spänningarna ändras språngvis, när man går över från ett element till ett annat. Om man vill beräkna spänningarna i en för flera element gemensam hörnpunkt måste man därför använda sig av ett på något sätt viktat medelvärde. Här har en metod som angivits av *Wilson (1963)* använts vid beräkning av sådana medelvärden.

Till metodens nackdelar kan också räknas att, man p.g.a. diskontinuiteten i spänningarna, måste använda sig av ett relativt stort antal element för att beräkna spänningarna i ett område med stora spänningsvariationer. Å andra sidan har man möjlighet att använda ett stort antal element, utan att datorns kapacitet överskrides eftersom styvhetsmatrisen för varje element blir relativt liten. Härigenom blir ekvationssystemets "bandbredd" liten, om man begränsar antalet element som sammanträffar i

varje elementhörnpunkt.

DATORPROGRAM

Ett datorprogram anpassat till det speciella problemet har utarbetats. Programmet är uppbyggt i segmentform dvs. i flera relativt fristående avsnitt. Några segment är direkt gjorda för de aktuella beräkningarna medan några är mera generellt användbara.

Kärnan i datorprogrammet är en subrutin för lösning av det stora ekvationssystemet som beräkningsmetoden leder till. Programmet medger, med tillgängligt minnesutrymme 200 K på en IBM i 360 serien, med dubbel precision, möjlighet till behandling av ett system, där antalet elementhörnpunkter är ca 475 vilket motsvarar ett ekvationssystem med ca 950 obekanta. Utan modifieringar kan programmet användas för system med upp till 999 hörnpunkter dvs. 1998 obekanta om tillräckligt minnesutrymme (ca 400 K) finnes. För att programmet skall vara användbart utan modifieringar fordras dessutom, att antalet element som sammanträffar i en gemensam hörnpunkt inte är större än åtta.

För lösning av ekvationssystemet använder datorprogrammet s.k. *Gauss - Seidel* iteration med överrelaxation enligt *Carré*. Se t.ex. *Fox (1962)* eller *Carré (1961)*. Utöver det rent numeriska knep som överrelaxationen enligt *Carré* innebär, har en på energibetraktelsen byggd så kallad grupprelaxationsmetod använts för att förbättra konvergensen hos iterationsprocessen. Metoden har beskrivits av *Wilson (1963)*, och går i stort sett ut på, att man med jämna mellanrum justerar de framitererade deformationerna, så att yttre och inre arbetet i konstruktionen blir lika stora.

Trots att överrelaxationen och grupprelaxationen påskyndar lösningens konvergens, blir konvergensen relativt långsam speciellt vid belastningsfall med stora spänningskoncentrationer.

LÖSNINGSFÖRFARANDE

Om väggdelen i konstruktionen enligt FIG. 2 belastas med excent-

risk last P med excentriciteten e kommer "dragsprickan" mellan bjälklag och vägg att få ett visst icke på förhand känt djup. Med den beräkningsmetod som har använts innebär det stora svårigheter att bestämma djupet på sprickan om excentriciteten e är given. Därför valdes i stället att för ett bestämt sprickdjup s bestämma motsvarande excentricitet e .

Följande förfarande användes:

En knutpunkt med sprickdjupet s enligt FIG. 3 studeras

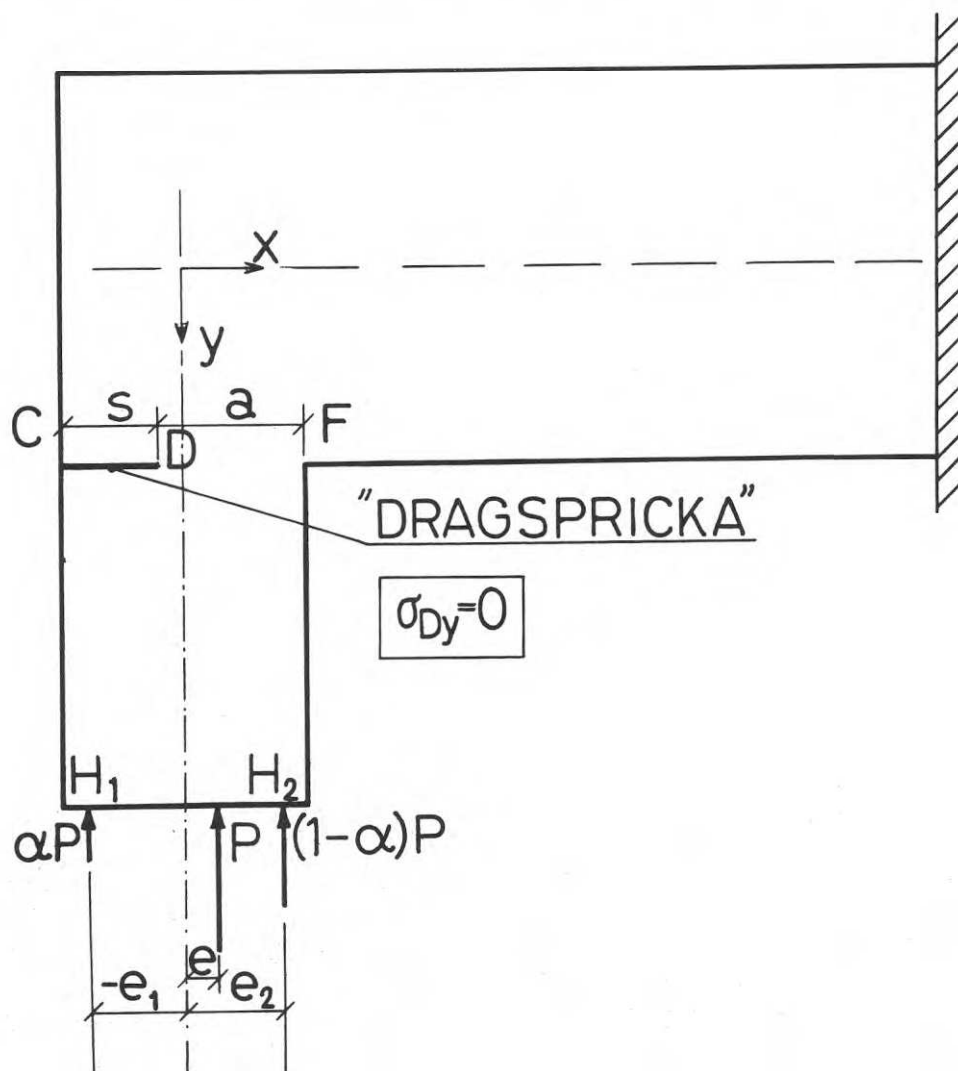


FIG.3 Knutpunkt med beteckningar använda i texten

Joint with notations used in the text ("dragspricka" = "tension crack")

Den antas i ett första steg belastad med en last P i punkten H_1 . Med hjälp av datorprogrammet kan spänningarna och deformationer-

na σ_{j1} resp. δ_{j1} i konstruktionen av denna belastning beräknas. (σ och δ kan här betyda spänningar och deformationer i både x- och y-led). I nästa steg belastas konstruktionen med lasten P i punkten H_2 och spänningar och deformationer σ_{j2} resp. δ_{j2} beräknas.

De båda belastningsfallen gav i punkten D dvs. vid dragsprickans rot normalspänningarna σ_{Dy1} resp. σ_{Dy2} vinkelrätt mot kontaktytan. Eftersom punkten D är ändpunkt på kontaktytan skall normalspänningen i denna punkt i det verkliga belastningsfallet vara 0 om man bortser från de lokala störningar som rent teoretiskt uppstår i punkten. (Med den valda beräkningsmetoden finns f.ö. mycket små möjligheter att beakta dessa lokala störningar).

Eftersom systemet är idealelastiskt är spänningarna direkt proportionella mot belastningen. Detta innebär att man kan finna ett sådant värde på en konstant α att en belastning bestående av punktlasterna $\alpha \cdot P$ angripande i punkten H_1 och $(1 - \alpha) \cdot P$ i punkten H_2 ger normalspänningen $\sigma_{Dy} = 0$ vinkelrätt mot kontaktytan i punkten D. Man finner

$$\sigma_{Dy} = \alpha \cdot \sigma_{Dy1} + (1 - \alpha) \cdot \sigma_{Dy2} = 0$$

vilket ger

$$\alpha = - \frac{\sigma_{Dy2}}{\sigma_{Dy1} - \sigma_{Dy2}} \quad (1)$$

Om punkterna H_1 och H_2 motsvarar excentriciteterna e_1 och e_2 fås excentriciteten e för resultanten till $\alpha \cdot P$ i H_1 och $(1 - \alpha) \cdot P$ i H_2 ur ekv. (2)

$$e = - \alpha \cdot e_1 + (1 - \alpha) \cdot e_2 \quad (2)$$

Spänningar och deformationer i övriga delar av konstruktionen p.g.a. belastningen $\alpha \cdot P$ i H_1 och $(1 - \alpha) \cdot P$ i H_2 beräknas på motsvarande sätt. För en punkt Q gäller alltså

$$\sigma_Q = \alpha \cdot \sigma_{Q1} + (1 - \alpha) \cdot \sigma_{Q2} \quad (3)$$

$$\delta_Q = \alpha \cdot \delta_{Q1} + (1 - \alpha) \cdot \delta_{Q2} \quad (4)$$

I dessa uttryck står σ_Q och δ_Q för spänningar och deformationer i godtycklig riktning. Dvs. t.ex. för σ_{Qx} , σ_{Qy} , τ_{Qxy} resp. δ_{Qx} och δ_{Qy} .

De ovan nämnda belastningarna P i H_1 resp. H_2 behöver som nämnts tidigare inte vara punktlaster i just dessa punkter utan kan bestå av en serie laster (motsvarande t.ex. en triangulär belastning) med resultanten P angripande i H_1 resp. H_2 .

Som nämnts under rubriken "Beräkningsmetod" har för vissa belastningsfall inverkan av olika belastningssätt kontrollerats. Det visade sig att det för kontaktryckspänningarna och spänningarna närmast kontaktområdet, liksom för vinkeländringen mellan bjälklag och vägg, var betydelselöst om lasterna $\alpha \cdot P$ och $(1 - \alpha) \cdot P$ i H_1 och H_2 påfördes som punktlaster i H_1 resp. H_2 eller som serier av punktlaster, motsvarande triangulära belastningar, trots att spänningarna och deformationerna närmast punkterna H_1 och H_2 naturligtvis blev radikalt olika.

ELEMENTINDELNING

I FIG. 4 visas hur elementindelningen gjorts vid en konstruktion där sprickan mellan bjälklag och vägg har ett djup δ , som är 0.6 ggr. väggjockleken d och där alltså kontaktytans bredd är 0.4 d . I FIG: 4 visas också hur de två lasterna i H_1 och H_2 angriper.

Samma elementindelning som den i FIG. 4 visade har använts i samtliga fall, bortsett från att vissa ändringar har fått göras p.g.a. skillnader i kontaktytans storlek. Dessa ändringar har dock endast berört ett fåtal element i anslutning till "drag-sprickans" rot.

Lastangreppspunkterna H_1 och H_2 hade för de flesta fallen det läge som anges i FIG: 4. I senare beräkningar har punkterna H_1 och H_2 flyttats p.g.a. att belastningssättet förändrats.

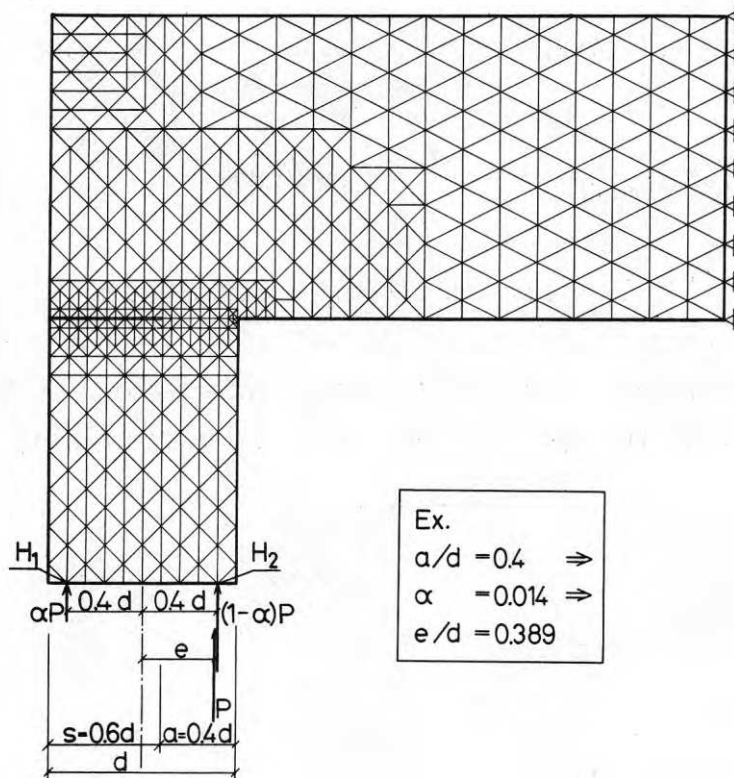


FIG. 4 Knutpunkt med den elementindelning som använts vid beräkningarna

Joint with the finite element layout used at the computations

BERÄKNINGSRESULTAT

ALLMÄNNA SYNPUNKTER

I det följande visas i diagramform en del resultat från beräkningarna. Det bör betonas att resultaten skall tolkas med en viss försiktighet eftersom metoden är approximativ. Erfarenhetsmässigt vet man att den använda metoden tenderar att ge för små deformationer p.g.a. att de triangulära elementen antas behålla sin triangulära form vid deformationen, dvs. sidorna i elementen är även efter deformationen räta linjer. Detta innebär att elementen har större styvhet än motsvarande delar i den verkliga konstruktionen.

I kontaktområdet mellan bjälklag och vägg är elementindelningen mycket tät (FIG. 4). Man kan därför vänta sig att resultaten är tillfredsställande noggranna utom naturligtvis i punkten F enl.

FIG. 3 där elasticitetsteorin ger oändligt stora spänningar (eller 0-spänningar).

KONTAKTYTANS STORLEK

I diagram (FIG. 5) visas det beräknade sambandet mellan den relativa lastexcentriciteten e/d och den relativa kontaktlängden a/d . Som jämförelse har inlagts motsvarande samband om kontaktrycket har en triangulär, resp. rektangulär fördelning.

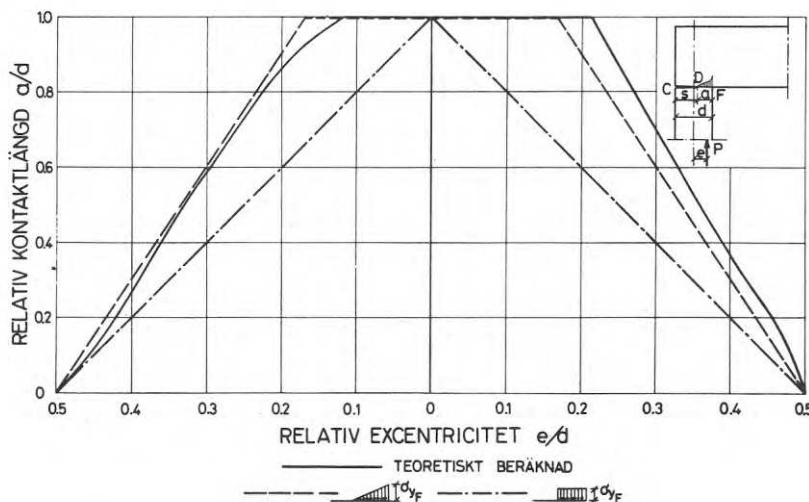


FIG. 5 Samband mellan relativ lastexcentricitet e/d och relativ kontaktlängd a/d i knutpunkten

Relationship between the relative eccentricity e/d of the load and the relative contact length a/d in the joint

De punkter som utgör beräkningsunderlaget för kurvan i FIG. 5 har följande a/d -värden: I: För positiva excentriciteter dvs. om fogen öppnar sig vid punkten C enligt FIG. 3. $a/d = 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6$ och 1.0 . II: För negativa excentriciteter dvs. där fogen öppnar sig vid punkt F. $a/d = 0.2, 0.5, 0.8$ och 1.0 . Dessutom motsvarar självklart a/d -värdet 0 excentriciteterna $e/d = \pm 0.5$.

Man finner att man, om lastexcentriciteten är positiv, dvs. om lasten angriper på bjälklagssidan om väggens centrumlinje, har större kontaktyta än vad som motsvarar triangulär och rektangulär spänningsfördelning. Vid negativa excentriciteter har man en relativt god överensstämmelse mellan den verkliga kontakt-

ytan och den som svarar mot en triangulär spänningsfördelning förutsatt att $e/d < -0.2$. Speciellt god är överensstämmelsen inom området från $e/d = 0.2$ till $e/d = -0.4$.

"Kärnområdet" för knutpunkten, dvs. det område inom vilket lasten på väggen kan angripa utan att dragspänningar eller drag-spricka uppstår mellan bjälklag och vägg, sträcker sig från $e/d = -0.120$ till $e/d = 0.211$. Kärnområdets bredd $0.33 d$ är densamma som vid triangulär spänningsfördelning.

KONTAKTRYCKETS FORM OCH STORLEK

I FIG. 6 visas kontaktryckets fördelning över kontaktytan för de tio belastningsfall som genomräknats. I figurerna har också lastresultantens läge angivits liksom den mot detta resultantläge svarande triangulära spänningsfördelningen.

Som framgår av diagrammen i FIG. 6 är kontaktrycket relativt rätlinigt fördelat över kontaktytan utom i området närmast hörnpunkten F. För de belastningsfall (FIG. 6a - f) som ger kontaktryckspänningar skilda från 0 i denna punkt sker en mycket kraftig stegring av kontaktrycket inom ett område på $\sim 1/20$ av väggjockleken närmast punkten. Denna stegring är helt naturlig eftersom man vid elasticitetsteoretisk beräkning får oändligt stora spänningar (eller 0-spänningar) i en hörnpunkt av denna typ.

För att ge en uppfattning om spänningarnas storlek i kontaktområdet har i FIG. 6 angivits dels de beräknade vertikalspänningarna σ_{Gy} i en punkt G belägen i väggytan mycket nära punkt F, dels kontaktryckspänningen σ_{Cy} i punkten C.

I själva verket är den för punkt G angivna tryckspänningen i FIG. 6a - f, den spänning som fås om spänningen i punkten F beräknas genom extrapolation, med hjälp av ett andragradspolynom, av spänningarna i väggytan i tre punkter belägna längs väggytan på avstånden $1/80$, $3/80$ och $6/80$ av väggjockleken, från punkten F. Att spänningarna angivits råda i punkten G beror på att spänningarna i punkten F som nämnts är oändligt stora. De angivna

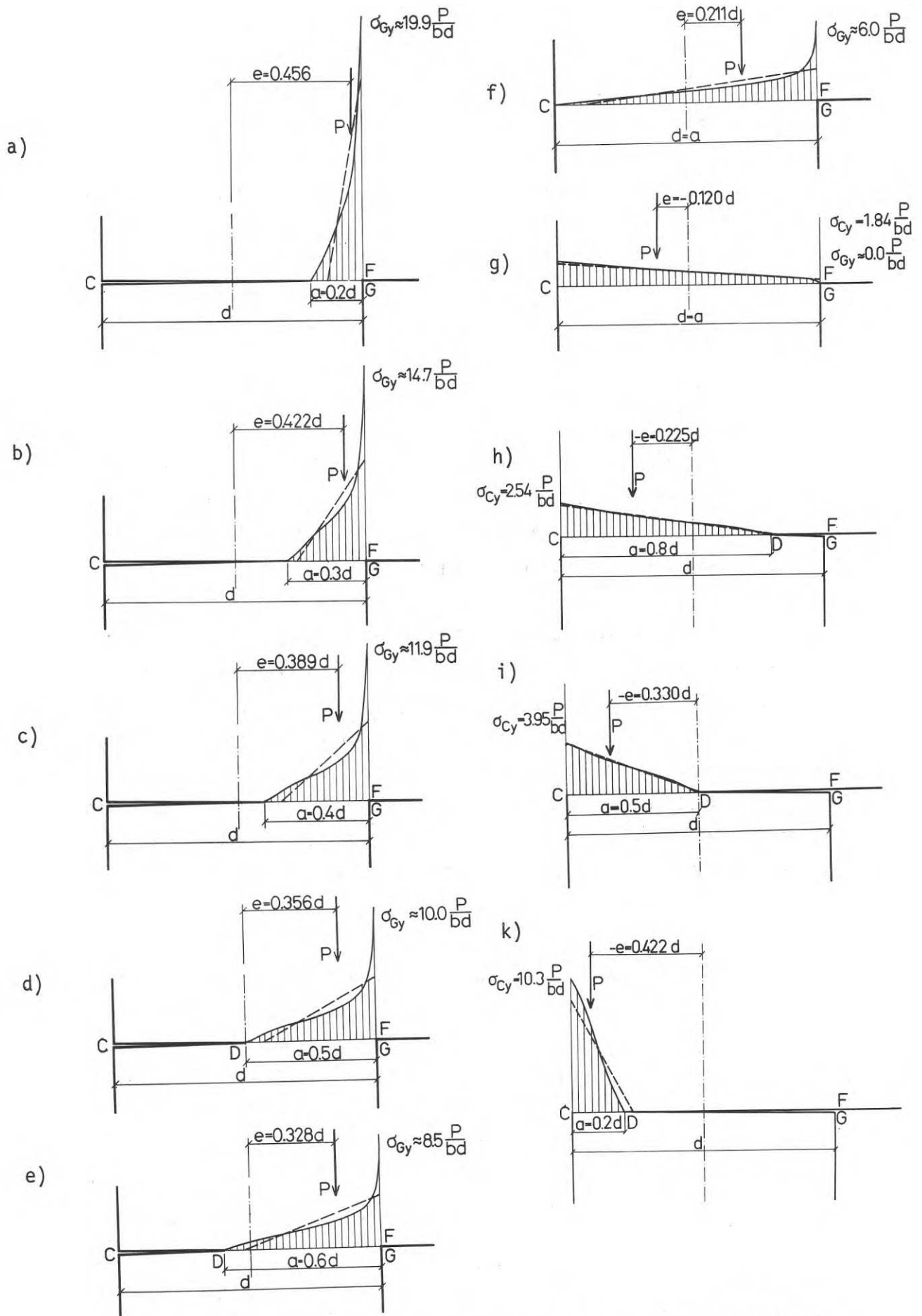


FIG. 6 a-k Beräknad kontaktrycksfördelning vid de olika belastningsfallen

Computed contact pressure at the different cases of loading

spänningar σ_{Gy} anger därför egentligen att man inom ett område mellan punkten G och punkten F har tryckspänningar som är större än σ_{Gy} . Punkten G:s läge kan inte anges exakt men dess avstånd från punkten F är säkert mindre än $1/80$ och sannolikt mindre än $1/160$ av vägg tjockleken.

I FIG. 7 visas kantspänningen σ_{Cy} och den på ovan angivet sätt definierade spänningen σ_{Gy} , som funktion av den relativa last-excentriciteten. Diagrammet är en sammanfattning av de i FIG. 6 angivna spänningsvärdena.

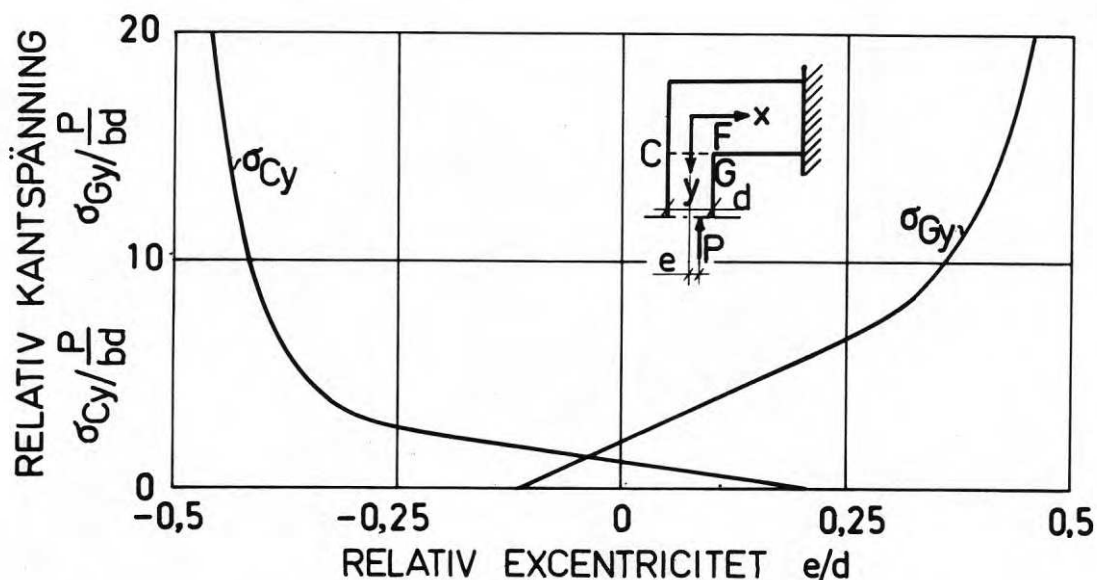


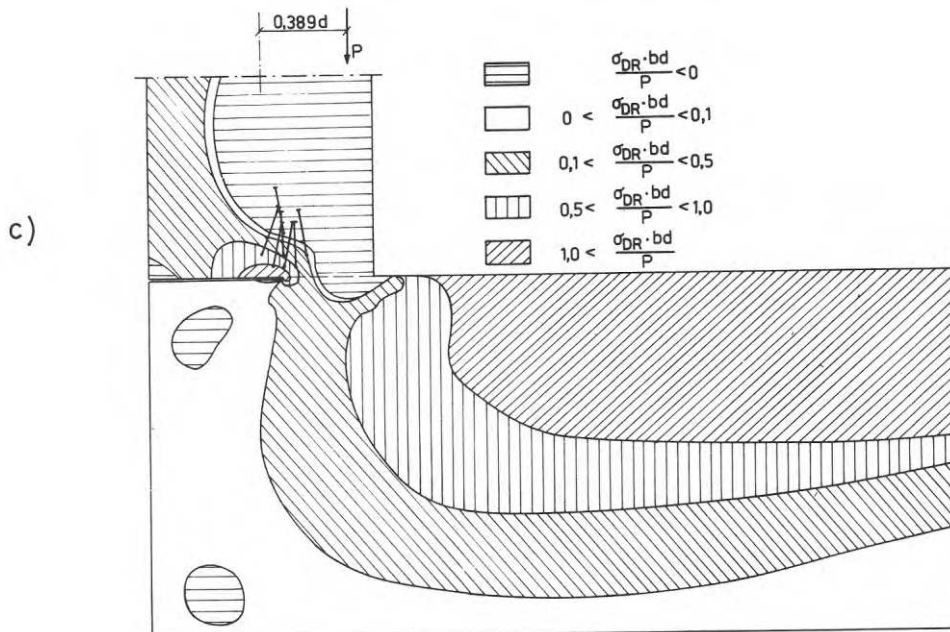
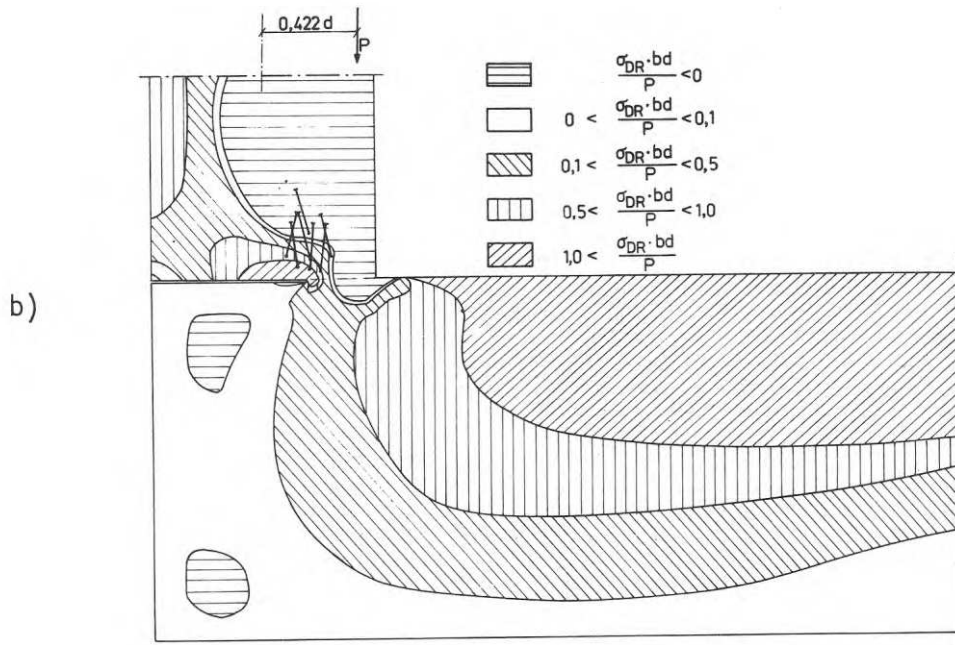
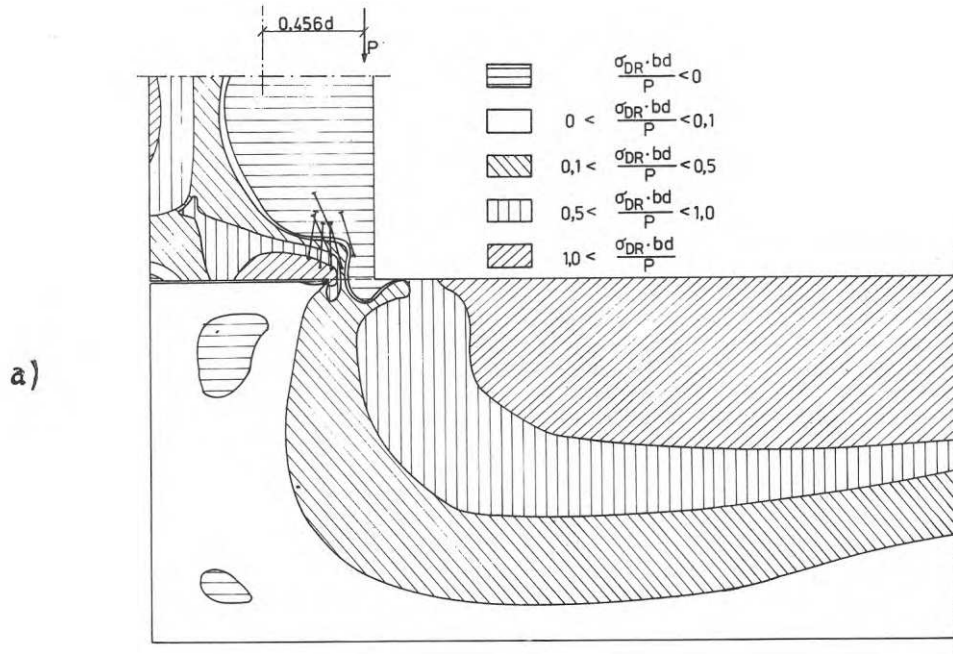
FIG. 7 Beräknade kontaktpänningar i punkterna C och G (enligt FIG. 6) som funktion av den relativa last-excentriciteten

Computed contact pressures in the points C and G (according to FIG. 6) as functions of the relative eccentricity of the load

DRAGSPÄNNINGAR I KNOTPUNKTEN

För att ge underlag för en bedömning av vid vilken lastnivå och var en sprickbildning kan väntas uppträda i en knutpunkt av betong har FIG. 8a - k upprättats. I dessa figurer har för de studerade belastningsfallen de områden inom vilka dragspänningarna har en viss storlek markerats. De olika områdena representerar följande dragspänningsnivåer $\sigma_{DR} < 0$, $0 < \frac{\sigma_{DR}}{\sigma_{med}} < 0.1$,

$$0.1 < \frac{\sigma_{DR}}{\sigma_{med}} < 0.5, \quad 0.5 < \frac{\sigma_{DR}}{\sigma_{med}} < 1.0 \quad \text{samt} \quad \frac{\sigma_{DR}}{\sigma_{med}} > 1.$$



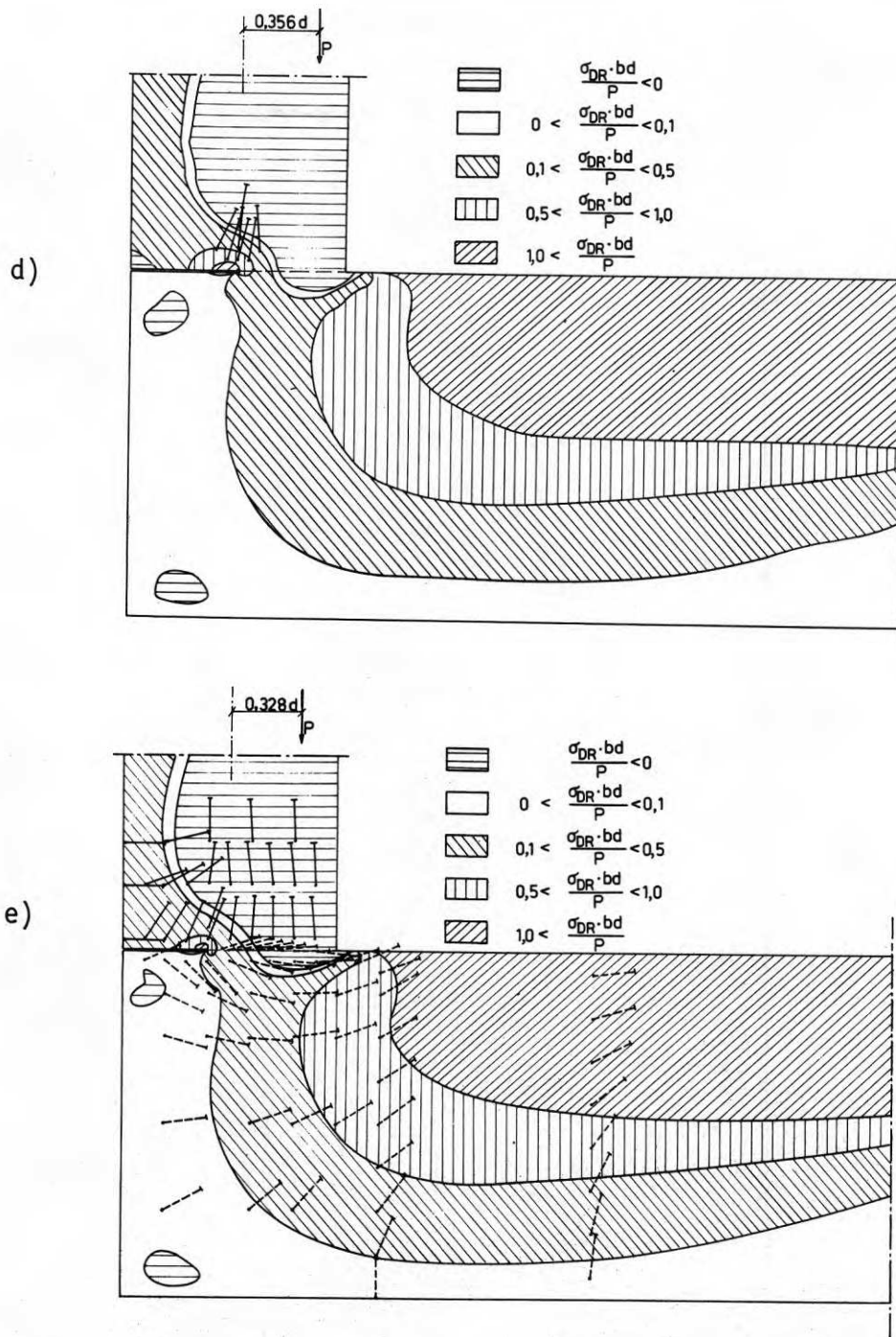
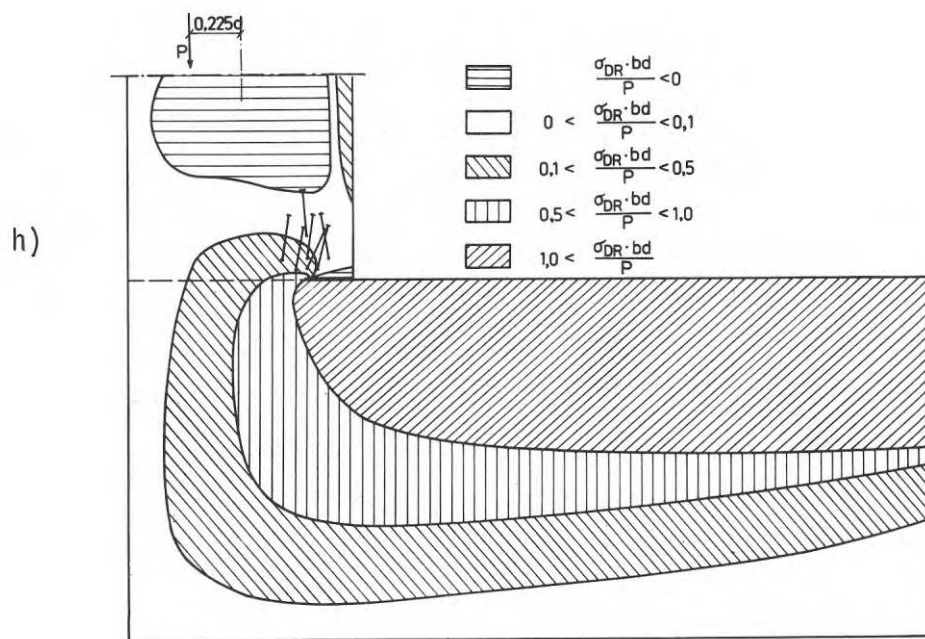
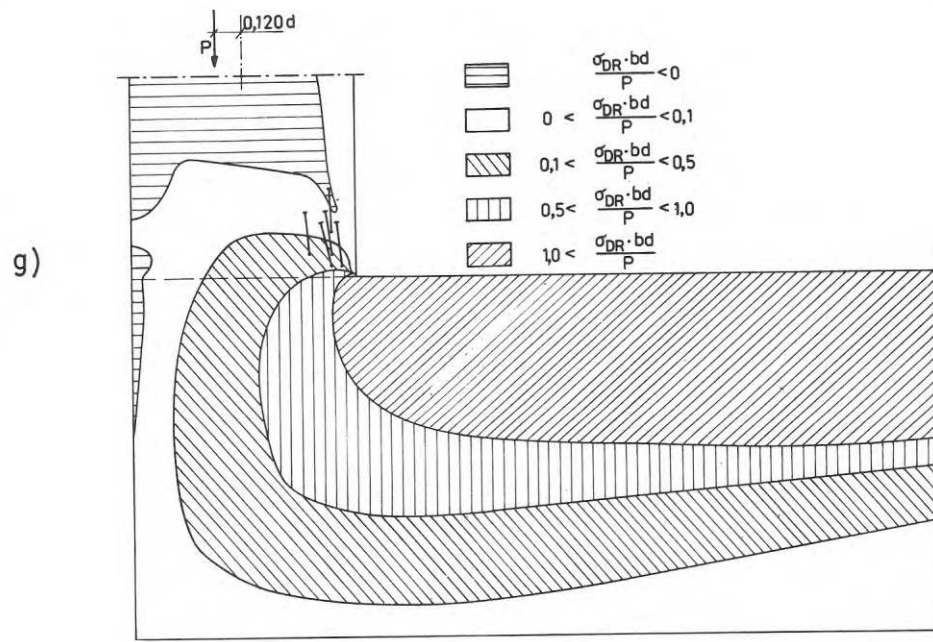
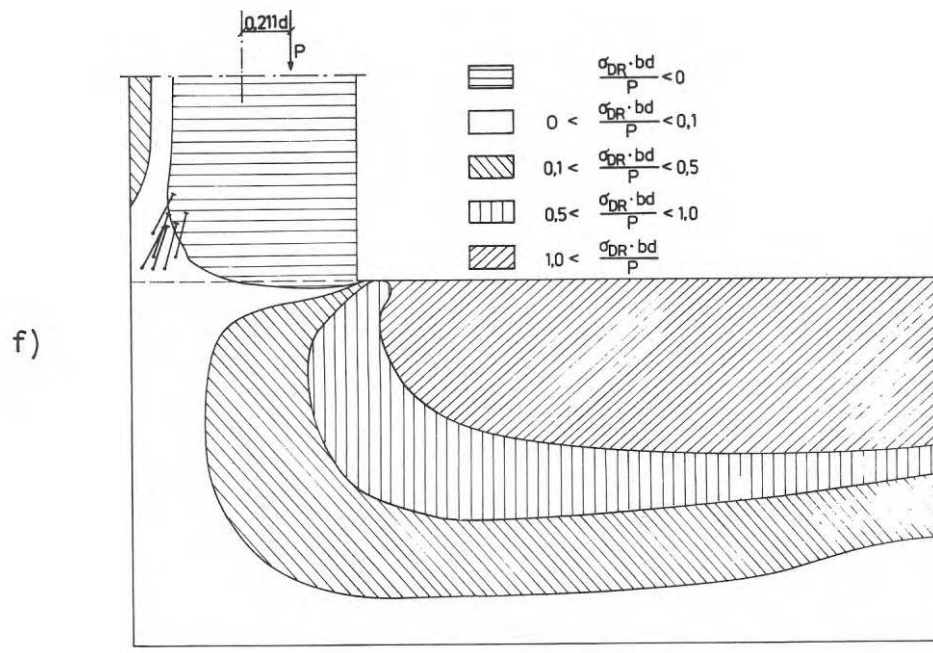


FIG. 8 Storleken av huvuddragspänningarna i knutpunkten vid de olika belastningsfallen

Magnitude of the main tension stresses in the joint in the different cases of loading

Huvuddragspänningsriktning
Direction of main tension stress ----->

Huvudtryckspänningsriktning
Direction of main compressive stress —————>



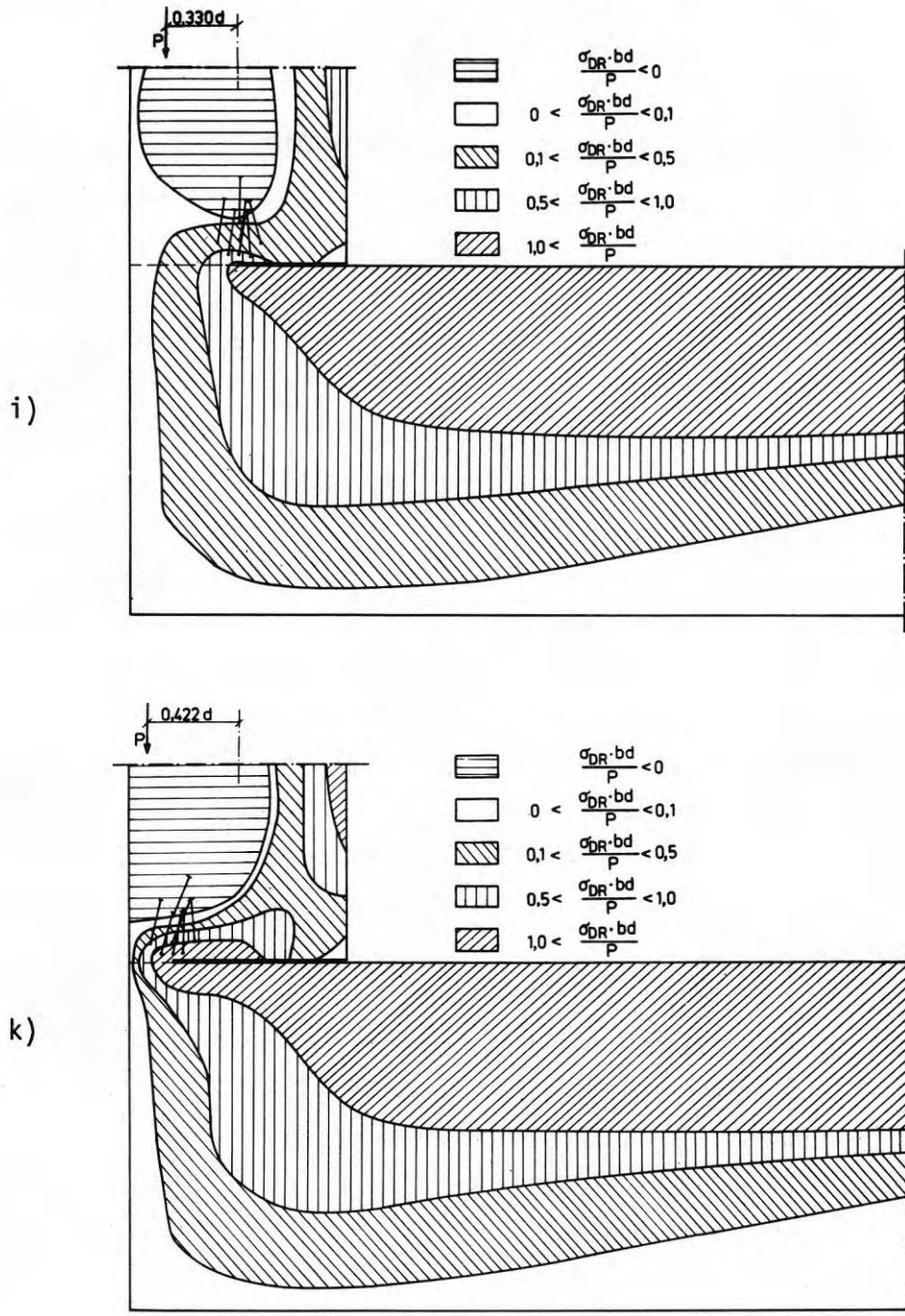


FIG. 8 Storleken av huvuddragspänningarna i knutpunkten vid de olika belastningsfallen

Magnitude of the main tension stresses in the joint in the different cases of loading

Huvuddragspänningsriktning

Direction of main tension stress



Huvudtryckspänningsriktning

Direction of main compressive stress



σ_{med} står här för medeltryckspänningen i väggdelen av knutpunkten
dvs. $\sigma_{med} = P / b \cdot d$.

I FIG. 8a har också riktningarna för huvudtryckspänningarna i väggen och huvuddragspänningarna i kontaktytan och bjälklagsdelen angivits med heldragna resp. streckade pilar. I övriga figurer b-k har endast huvudtryckspänningarnas riktning angivits i ett antal punkter på väggen nära kontaktytans ändpunkt (dragsprickans rot). Valet av punkter för vilka huvudtryckspänningsriktningen angivits i FIG. a-k har gjorts med hänsyn till de sprickbildningar som uppträtt vid av förf. utförda försök där knutpunkter av betong studerats.

Av FIG. 8a-k framgår att den största dragspänningen i väggdelen av knutpunkten uppkommer i anslutning till ändpunkten av dragstrickan mellan bjälklag och vägg. Storleken av dragspänningen överstiger normalt medeltryckspänningen i väggen i ett större eller mindre område. Områdets utbredning stort vid små kontaktytor (= stora excentriciteter). Beträffande riktningen av huvuddragspänningen i max-området i väggen framgår att den är nästan horisontell.

Vad som här sagts beträffande dragspänningarnas storlek och riktning gäller spänningar i väggdelen av knutpunkten. Dragspänningarna i bjälklagsdelen är visserligen större inom stora områden men de är inte lika intressanta eftersom bjälklagsändarna normalt är armerade vilket ofta inte är fallet med väggändarna.

VINKELÄNDRING I KNOTPUNKTEN PÅ GRUND AV ELASTISKA DEFORMATIONER

Ur deformationsberäkningarna för de olika belastningsfallen har på följande sätt en bestämning gjorts av vinkeländringen i knutpunkten som funktion av lastexcentriciteten. Väggens tyngdpunktslinjes lutning på ett avstånd av 0.8 gånger väggjockleken ifrån bjälklaget har bestämts med hjälp av beräknade utböjningsvärden. Likaså har lutningen hos bjälklagets tyngdpunktslinje i skärningspunkten med väggens bestämts. Skillnaden mellan dessa båda lutningar har beräknats. Därefter har den vinkelskillnad

mellan vägg och bjälklag i motsvarande punkter beräknats, som skulle ha uppkommit om man inte tagit hänsyn till knutpunktens deformation. Skillnaden mellan de på så sätt beräknade värdena har antagits vara lika med knutpunktens vinkeländring θ på grund av de lokala deformationerna i själva knutpunkten.

I FIG. 9 visas sambandet mellan vinkeländring och relativ last-excentricitet i knutpunkten. Av detta diagram framgår att, på grund av osymmetrin hos konstruktionen, nollvinkeländring uppträder när den relativa excentriciteten är lika med ca 0.06. Man finner att sambandet mellan vinkeländring och relativ excentricitet är förhållandevis rätlinjigt i området $-0.25 < e/d < 0.30$, medan man har en mycket kraftig stegring av vinkeländringen vid excentriciteter utanför detta område. När den relativa excentriciteten går mot ± 0.5 går vinkeländringen mot oändligheten. Självklart är kurvan som representerar sambandet mellan excentricitet och vinkeländring en rät linje för excentriciteter inom knutpunktens "kärnområde" dvs. för $-0.120 < e/d < 0.211$.

FIG. 10 är beräknad direkt ur FIG. 9. I diagrammet visas sambandet mellan moment och vinkeländring i en knutpunkt när lasten hålles konstant. Kurvor har beräknats för tre värden på den dimensionslösa "lasten" $P/(Ebd)$ nämligen 0.6, 1.0 och 1.4. Eftersom diagrammet i FIG. 10 är en följd av FIG. 9 gäller även här att osymmetrin i knutpunkten förorsakar att man inte har nollmoment i knutpunkten vid nollvinkeländring. I figuren har också de mot excentriciteten $e/d = 0.5$ svarande asymptotvärdena för momentet inlagts. Dessa svarar alltså mot en oändlig vinkeländring vid de aktuella belastningarna. Här skall understrykas att de i FIG. 10 visade kurvorna endast är avsedda att visa principförloppet för sambandet mellan moment och vinkeländring i en knutpunkt vid konstant last. De aktuella siffervärdena är där emot inte realistiska. Värdena på $P/(Ebd)$ förutsätter nämligen, att medelspänningen i väggen är resp. 0.6, 1.0 och 1.4 gånger elasticitetsmodulen.

BERÄKNINGSEXEMPEL

Sahlin (1964) har angivit hur man beräknar lastexcentriciteten

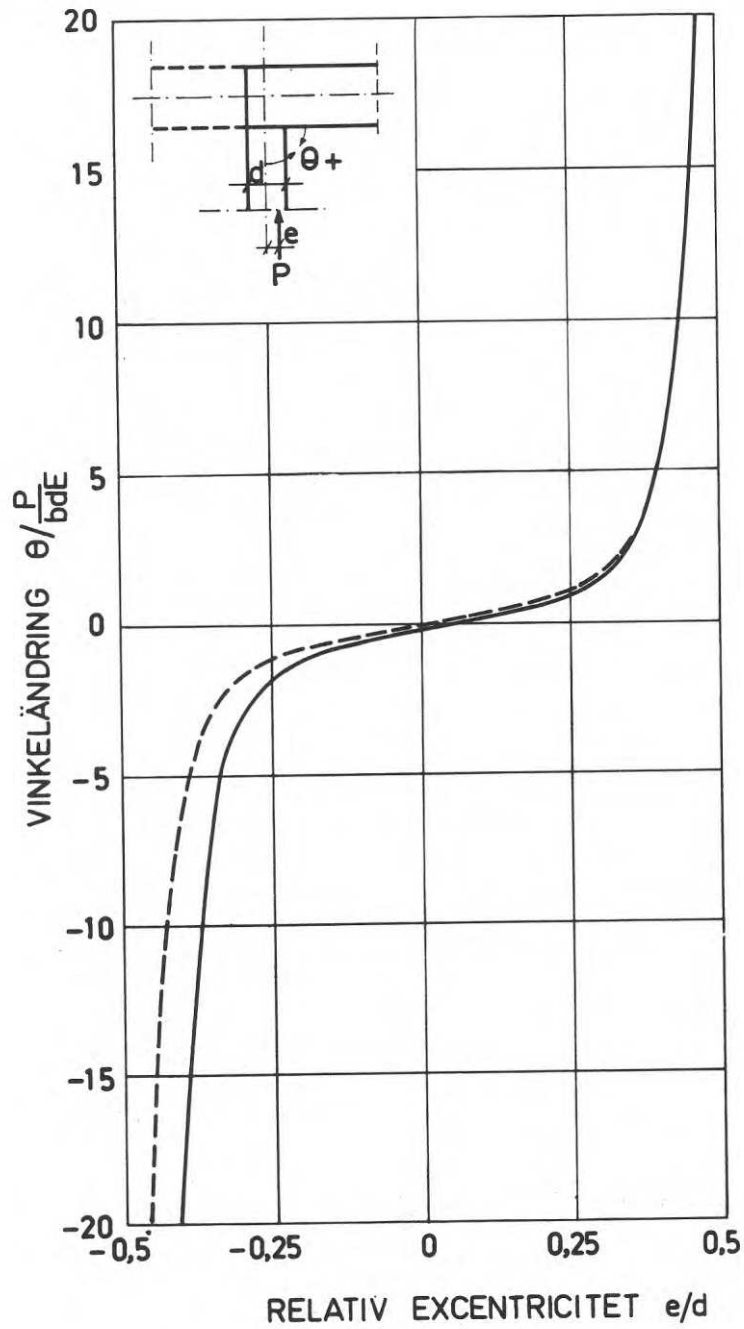


FIG. 9 Samband mellan vinkeländringen θ mellan horisontal och vertikal och den relativa lastexcentriciteten e/d
Relationship between the angle of rotation θ , between horizontal and vertical member of the joint and the relative eccentricity e/d of the load

- { Osymmetrisk knutpunkt
 { Asymmetrical joint
- - - - - { Symmetrisk knutpunkt
 { Symmetrical joint

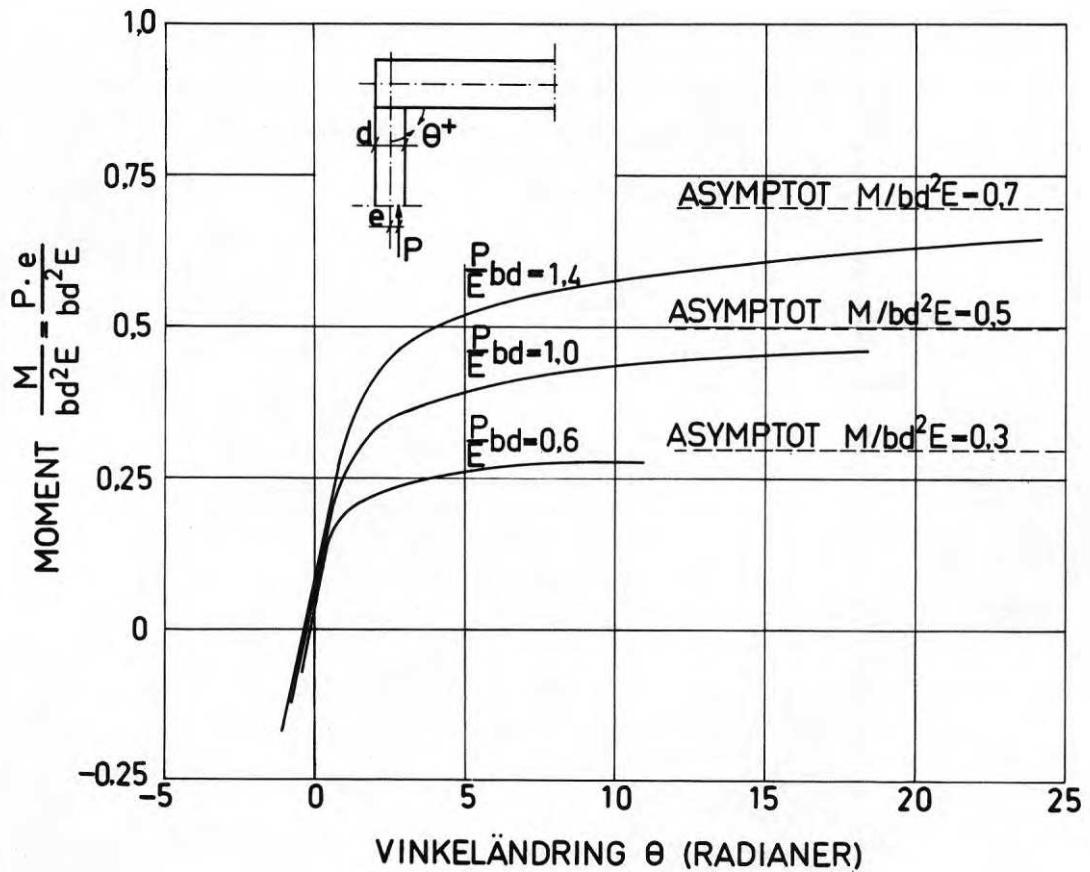


FIG. 10 Samband mellan momentet M och vinkeländringen θ i knutpunkten vid tre lastnivåer

Relationship between the moment M and the angle of rotation θ of the joint at three levels of the load

på en elastisk vägg inspänd mellan elastiska bjälklag som funktion av last, styvhetsförhållande mellan vägg och bjälklag samt förhållande mellan lastexcentriciteterna på övre och undre bjälklaget. Ingen hänsyn tas dock till knutpunktsdeformationen.

För elementväggar där knutpunkterna inte kan uppta dragspänningar vinkelrätt mot bjälklaget och där excentriciteterna vid väggänden är stora t.ex. vid vindsbjälklag kan felen bli stora om ovan angivna metod användes och man inte tar hänsyn till knutpunktsdeformationerna.

Som demonstration har följande exempel valts. En konstruktion enligt FIG. 11 med dimensioner enligt följande beräknas. $h = 250$ cm, $d = 10$ cm, $L = 400$ cm, $t = 16$ cm. Elasticitetsmodulen E har satts = 150000 kp/cm². Konstruktionens bredd $b = 1$ cm med beteckningar enligt *Sahlin (1964)* eller *Falk (1969)* erhålles

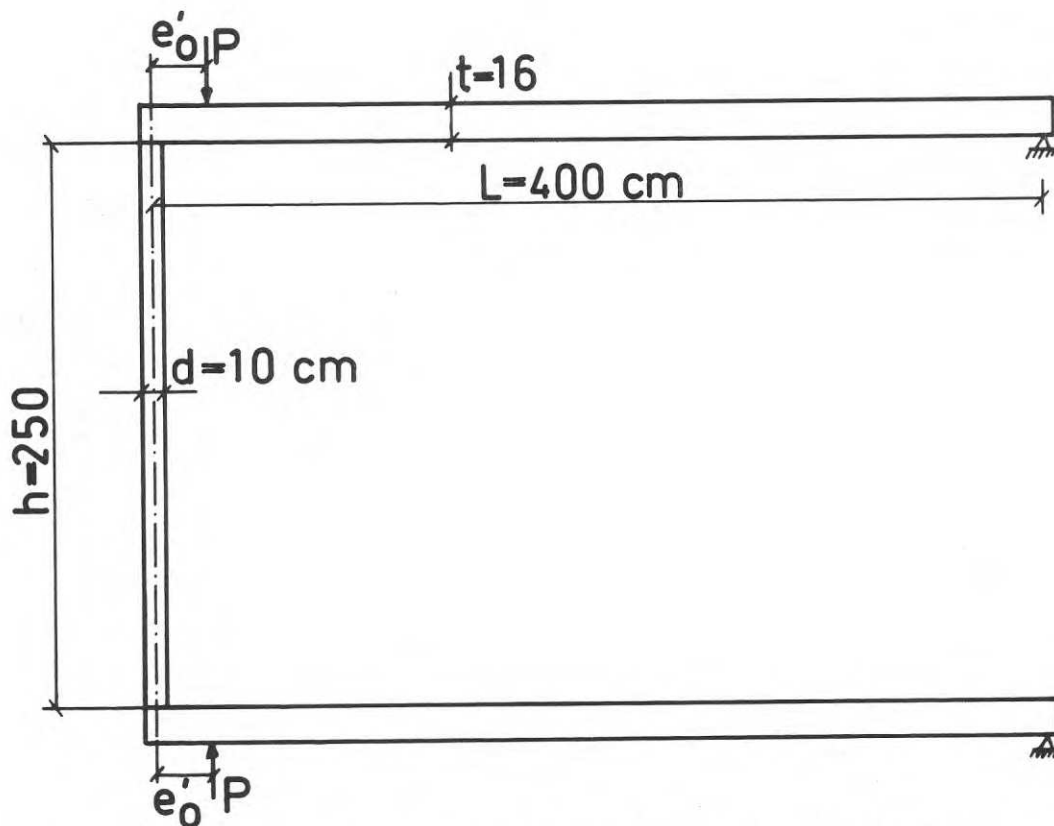


FIG. 11 Beteckningar och mått för det i texten genomräknade exemplet (Jfr FIG. 12)

Notations and measures used in the example of calculation in the text (Comp FIG 12)

följande.

$$\alpha = \frac{3 E_H I_H}{L} = 3.84 \cdot 10^5 \text{ kpcm} \quad (\text{a})$$

$$B = B_0 = B_1 = \frac{\alpha h}{E_V I_V} = 7.68 \quad (\text{b})$$

Om e_0 betecknar lastexcentriciteten vid väggänden och om initialutböjningen är 0 fås efter någon förenkling av de av *Falk (1969)* givna ekv.(2.24 a-b).

$$\frac{e_0}{d} = \frac{\frac{e'_0}{d} - \frac{\theta \alpha}{P d}}{1 + \frac{B}{3} \psi(u) + \frac{B}{3} \phi(u)} \quad (\text{c})$$

θ är här en funktion av "lasten" $P/(E b d)$ och den relativa lastexcentriciteten e/d och representeras av diagrammet FIG. 9.

Beräkningen blir en passningsberäkning som belyses av följande

$e_0^-/d = 2.178$ motsvarande $e_0/d = 0.45$ om lastens storlek = 0.
 För $P/P_e = 0.1$ finner man $\psi(u) = 1.073$, $\phi(u) = 1.128$,
 $N = 1 + B/3 \psi(u) + B/6 \phi(u) = 5.191$

Om vinkeländringen till en början försummas erhålles

$$\frac{e_0}{d} = \frac{2.178}{5.191} = 0.420$$

För $e/d = 0.420$ finner man enligt diagram FIG. 9

$$\theta / \frac{P}{E bd} = 8.00 \rightarrow \theta = 8.00 \cdot \frac{P}{E bd}$$

Om detta värde insättes i (c) får man

$$\frac{e_0}{d} = \frac{\frac{e_0^-}{d} - \frac{8.00 \cdot \alpha}{E bd^2}}{1 + \frac{B}{3} \psi(u) + \frac{B}{6} \phi(u)} = 0.420 - 0.030 = 0,390$$

Om detta värde användes som ingångsvärde för c/d i diagram FIG. 9 fås $\theta = 4.15 \cdot P/(E bd)$ vilket i sin tur insatt i ekv. (c) ger

$$\frac{e_0}{d} = 0.420 - 0.020 = 0.400$$

Efter ytterligare fyra försök finner man värdet

$$\frac{e_0}{d} = 0.394$$

Detta värde ger om det användes som ingångsvärde i diagram FIG: 9 ett oförändrat värde på excentriciteten, vilket innevar att vid denna excentricitet är skillnaden mellan bjälklagets och väggens vinkeländring lika med knutpunktens vinkeländring, vilket också innebär att $e_0/d = 0.394$ och lösningen till ekv. (c) för $P/P_e = 0.1$.

I FIG. 12 har e_0/d , dvs. lösningen till ekv. (c) för den i FIG. 11

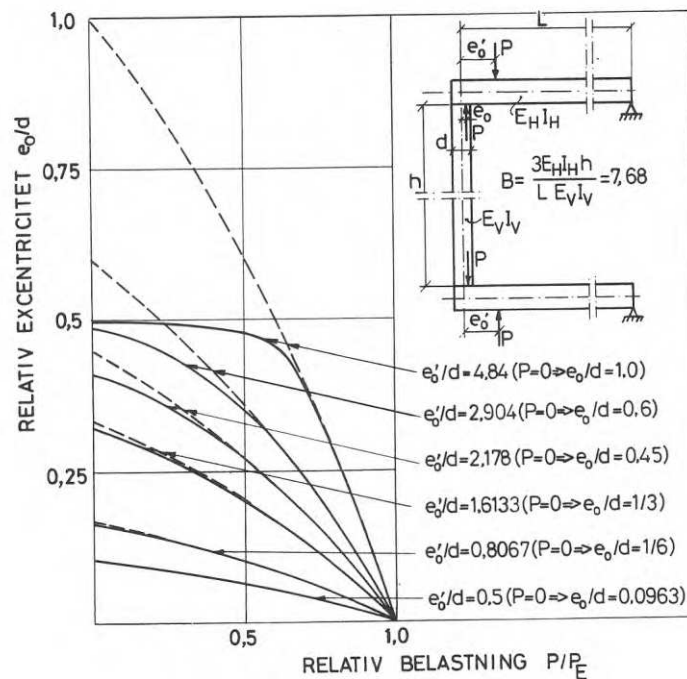


FIG. 12 Samband mellan relativ lastexcentricitet e_0/d på väggen och relativ belastning P/P_E med (—) och utan (-----) hänsyn till den elastiska knutpunktsdeformationen och för den i FIG. 11 visade konstruktionen, vid olika storlek på den yttre excentriciteten e_0^-

Relationship between the relative eccentricity e_0/d of the force at the ends of the wall and the relative load P/P_E with (—) and without (-----) regard to the elastic deformations of the joint for the structure in FIG. 11, at different magnitudes of the external eccentricity e_0^-

visade konstruktionen angivits i diagramform för ett antal värden på e_0^-/d och för varierande värden på lasten. Som jämförelse har kurvor (streckade) över e_0/d beräknade utan hänsyn till knutpunktsdeformationen inlagts.

Av diagrammet FIG. 12 framgår att effekten av knutpunktsdeformationen blir liten eller obetydlig för utgångsvärden på e_0/d mindre är 0.30 å 0.35. För större excentriciteter är däremot inverkan avsevärd speciellt naturligtvis för belastningsfall, där lasten utan hänsyn till knutpunktsdeformationen skulle falla utanför väggändytorna.

Det givna exemplet visar principerna för beräkningen. Några principiella skillnader uppkommer inte, om man har olika excentriciteter vid de båda ändarna men passningsförfarandet blir mera kom-

plicerat. Det kan vid beräkningen inträffa att lösningen till ekv.(c) inte konvergerar på det sätt som visats i exemplet. Detta gäller speciellt vid stora värden på e/d . Man blir då tvungen att gissa ett värde på den korrektion, som knutpunktsdeformationen ger och upprepa gissningsförfarandet tills man når önskad noggrannhet dvs. måttlig avvikelse mellan det gissade och det ur gissningen beräknade värdet.

DISSKUSSION AV BERÄKNINGSRESULTATEN

Den använda beräkningsmetoden är en approximativt elasticitetsteoretisk metod. Graden av approximation är för det studerade problemet svår att uppskatta eftersom inga beräkningsresultat publicerats tidigare. Som nämnts under rubriken "Allmänna synpunkter" i avsnittet "Beräkningsresultat" tenderar metoden att ge konstruktionen för stor styvhet. Denna tendens minskar genom att antalet element i konstruktionen ökar.

I det aktuella fallet är elementindelningen mycket tät i området närmast kontaktytan mellan bjälklag och vägg. Beräkningsresultaten visar också att de deformationer som ger upphov till vinkeländringen mellan bjälklag och vägg är lokaliserade till området närmast kontaktytan, dvs. till områden med jämförelsevis tät elementindelning. Detta innebär att felen i de beräknade vinkeländringarna mellan bjälklag och vägg bör vara måttligt stora.

Beträffande spänningsberäkningen gäller att felen i de redovisade kontaktryckspänningarna torde vara små, bortsett naturligtvis från områdena allra närmast inre hörnpunkten mellan bjälklag och vägg. (punkt F i FIG. 3).

Med hänsyn till svårigheten att bedöma noggrannheten i resultaten vore det önskvärt att genomföra motsvarande beräkningar med tätare elementindelning eller med annan typ av element. Kostnaderna för beräkning med en tätare elementindelning torde dock i dagens läge vare mycket stora.

För det aktuella fallet där huvudsyftet var att bestämma sambandet mellan moment och vinkeländring i knutpunkten torde under

alla omständigheter vara tillräckligt noggranna. Detta belyses av det visade beräkningsexemplet och FIG. 12. Där framgår att effekten av knutpunktens vinkeländring på lastexcentriciteten är relativt liten för måttliga lastexcentriciteter. Detta innebär att inverkan av även ett relativt stort fel i sambandet mellan vinkeländring och moment blir begränsat.

RESULTATENS GILTIGHETSOMRÅDE

Som framgått gäller de genomförda beräkningarna och diagrammen en speciell knutpunktskonstruktion där förhållandet mellan bjälklagstjocklek och väggstjocklek är 1.6:1.

Vinkeländringen mellan bjälklag och vägg uppkommer i huvudsak genom deformationer i området närmast kontaktytan. Detta gör att diagram 9 torde kunna användas för beräkningar även vid knutpunkter där förhållandet mellan bjälklagstjocklek och väggstjocklek avviker från ovan angivet värde. Gissningsvis torde konstruktioner med tjockleksförhållanden mellan 1.2:1 och 2.0:1 kunna behandlas utan att alltför stora fel uppkommer. Även här torde dock kompletterande beräkningar behöva göras.

BERÄKNINGSMETOD

Den studerade knutpunktstypen (FIG. 1) förekommer vid monteringsbygge huvudsakligen som knutpunkt mellan bjälklag och yttervägg i övre våningen av normala husbyggnader eller som knutpunkt mellan pelare och balk i ytterfack vid hallbyggnader.

Den i det föregående refererade beräkningsmetoden torde med vissa modifikationer kunna tillämpas även på andra knutpunktstyper.

I fig. 13, 14 och 15 visas tre knutpunktstyper som här skall diskuteras närmare.

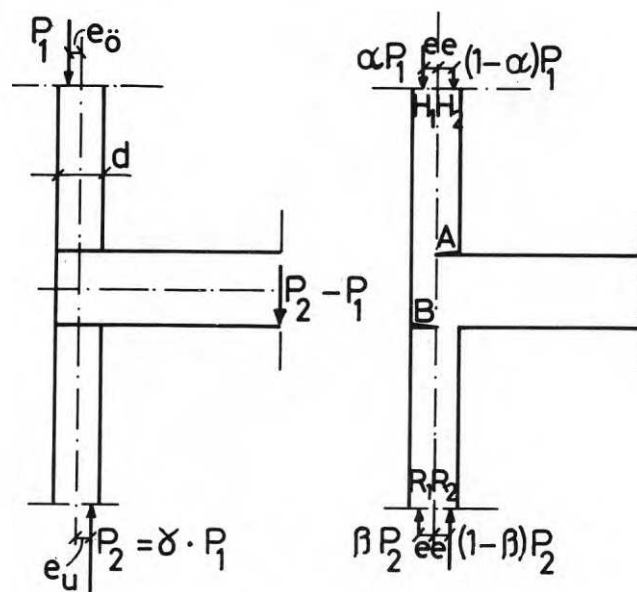


FIG. 13 Knutpunkt med väggar på båda sidor om bjälklaget.
Beteckningar

*Joint with walls above and below the floor slab.
Notations*

Knutpunkten i FIG. 13a består av en bjälklagsdel och två väggdelar belastade med lasterna P_1 resp. P_2 . Beräkningen kan ske helt i analogi med den som använts för den enklare knutpunkten enligt FIG. 1. Man antar alltså en viss utsträckning på kontaktytorna mellan bjälklag och väggar motsvarande punkterna A och B

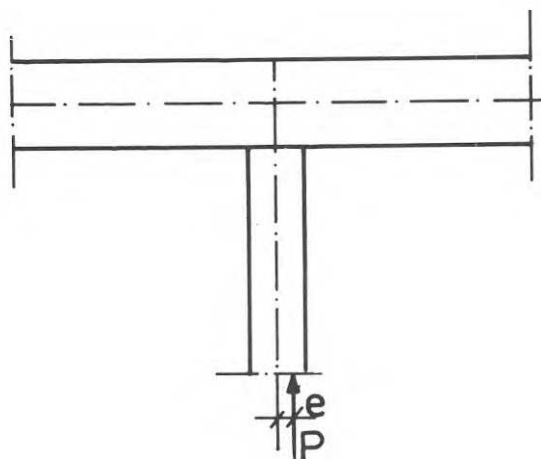


FIG. 14 Symmetrisk knutpunkt med vägg på endast ena sidan av bjälklaget

Symmetrical joint with a wall on one side of the floor slab only

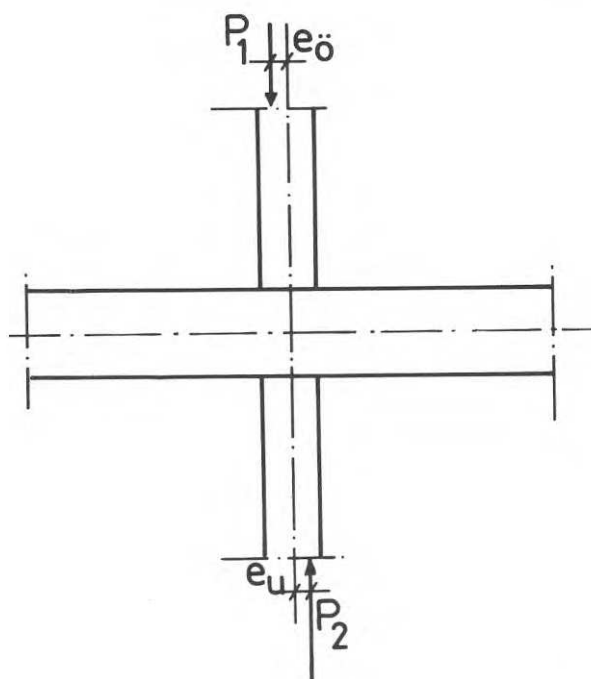


FIG. 15 Symmetrisk knutpunkt med väggar på båda sidor om bjälklaget

Symmetrical joint with walls above and below the floor slab

i FIG. 13b. Därefter beräknas vertikalspänningarna i punkterna A och B av enhetslaster (P_1) i punkterna H_1 , H_2 , R_1 och R_2 . Spänningarna betecknas

$$\sigma_{AH1}, \sigma_{AH2}, \sigma_{AR1}, \sigma_{AR2}, \sigma_{BH1}, \sigma_{BH2}, \sigma_{BR1}, \sigma_{BR2}$$

Om $P_2/P_1 = \gamma$ blir motsvarande spänningar

$$\sigma_{AH1}, \sigma_{AH2}, \gamma\sigma_{AR1}, \gamma\sigma_{AR2}, \sigma_{BH1}, \sigma_{BH2}, \gamma\sigma_{BR1}, \gamma\sigma_{BR2}$$

Den kombination av belastningar i H_1 , H_2 , R_1 och R_2 som ger vertikalspänningen 0 i punkterna A och B kan med beteckningar enligt FIG. 13b beräknas ur uttrycken

$$\sigma_{Ay} = \alpha\sigma_{AH1} + (1-\alpha)\sigma_{AH2} + \gamma \left[\beta\sigma_{AR1} + (1-\beta)\sigma_{AR2} \right] = 0 \quad (5a)$$

$$\sigma_{By} = \alpha\sigma_{BH1} + (1-\alpha)\sigma_{BH2} + \gamma \left[\beta\sigma_{BR1} + (1-\beta)\sigma_{BR2} \right] = 0 \quad (5b)$$

Ur detta ekvationssystem utlöses α och β . Med beteckningar enligt FIG. 13a och b fås excentriciteterna e_o och e_u ur uttrycken

$$\frac{e_{\ddot{o}}}{d} = (2\alpha - 1) \frac{e}{d} \quad (6a)$$

$$\frac{e_u}{d} = (1 - 2\beta) \frac{e}{d} \quad (6b)$$

Genom superposition kan spänningar och deformationer i hela konstruktionen av belastningarna P_1 och P_2 med excentriciteterna e_1 resp. e_2 beräknas

Samma metodik kan naturligtvis användas på knutpunkten enligt FIG. 15 medan knutpunkten enligt FIG. 14 beräknas på samma sätt som den tidigare behandlade knutpunkten enligt FIG. 1.

Det kan konstateras att den skisserade metoden skulle kräva mycket stora kostnader för datorbearbetning även om noggrannhetskraven inte ökas jämfört med de tidigare redovisade beräkningarna. Principiellt erbjuder det dock inga som helst svårigheter att genomföra beräkningen.

ALTERNATIV BERÄKNING

Den i föregående avsnitt skisserade beräkningen blir som nämnts sannolikt kostsam att utföra. De beräkningsresultat som erhållits vid beräkningarna för de enkla knutpunkterna enligt FIG. 1 innehåller dock material som under vissa förutsättningar kan användas för beräkning av vinkeländringen i knutpunkter av annan typ.

Knutpunkten enligt FIG. 13 studeras. Vinkeländringen mellan den övre väggen och bjälklagets tyngdpunktlinje kan tänkas bestå av en del orsakad av lasten P_1 och en del av lasten P_2 d v s

$$\theta = \theta_{P_1} + \theta_{P_2} \quad (7)$$

vilket uttrycker superpositionslagens giltighet.

Om man förutsätter att den undre väggen inte påverkar vinkeländringen mellan den övre väggen och bjälklaget, om endast be-

Lastningen P_1 verkar på konstruktionen kan vinkeländringen θ_{P_1} beräknas ur diagrammet i FIG. 9.

Om man vidare förutsätter att den övre väggen vid belastning av konstruktionen med enbart belastningen $P_2 = \gamma \cdot P_1$ inte vinkeländras i förhållande till bjälklagets överyta så skulle vinkeländringen θ_{P_2} vara lika med vinkeländringen mellan bjälklagets tyngdpunktlinje och dess överyta.

För att beräkningsresultaten för konstruktionen i FIG. 1 skall kunna användas behövs ytterligare en förutsättning nämligen att vinkeländringen mellan bjälklagets tyngdpunktlinje och dess överyta inte påverkas av "närvaron" av den övre obelastade väggen om konstruktionen belastas av enbart P_2 .

I diagram FIG: 16 visas samband mellan den relativa lastexcentriciteten för belastningen på den ena av väggarna i knutpunkten enligt FIG. 13 och vinkeländringen mellan bjälklagets tyngdpunktlinje och den andra väggen. Diagrammet är giltigt om de två sista förutsättningarna ovan är giltiga.

Det bör observeras att skalan i diagrammet i FIG. 16 är mycket större än skalan i FIG. 9. Detta innebär, vilket är helt naturligt, att vinkeländringen mellan bjälklaget och en vägg i knutpunkter av den typ som visas i FIG. 13 i huvudsak bestämmas av belastningen på den aktuella väggen medan belastningen på motsatta väggen endast i mindre utsträckning inverkar. Detta förutsätter naturligtvis att belastningen på den motsatta väggen inte är flera gånger större än belastningen på den aktuella.

Beträffande de för beräkningens giltighet angivna förutsättningarna gäller att de torde vara relativt väl uppfyllda eftersom såväl den del av bjälklaget som ligger närmast den obelastade väggen som själva väggen påverkas av relativt små eller mycket små spänningar. Sannolikt är dock den verkliga vinkeländringen mellan den obelastade väggen och bjälklagets tyngdpunktlinje något mindre än den i diagram FIG. 16 visade.

Vinkeländringarna i knutpunkterna enligt FIG. 14 och 15 torde

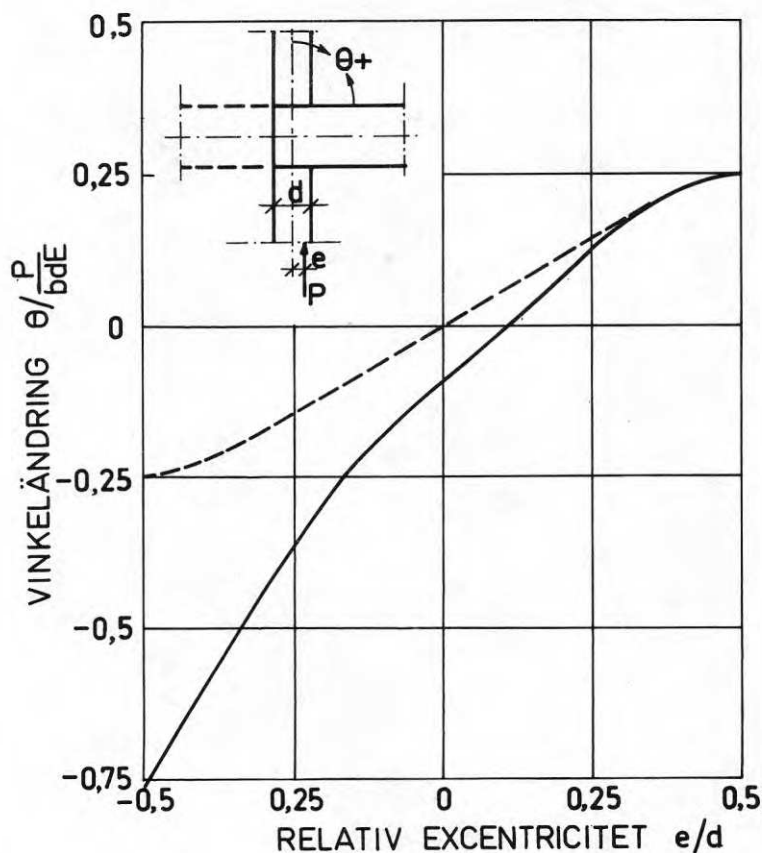


FIG. 16 Samband mellan relativ lastexcentricitet e/d hos lasten P på den undre väggen och vinkeländringen θ mellan bjälklaget och den övre väggen (eller vice versa)

Relationship between the relative eccentricity e/d of the load P on the lower wall and the angle of rotation θ between the floor slab and the upper wall (or vice versa)

————— { Symmetrisk knutpunkt
Symmetrical joint
- - - - - { Osymmetrisk knutpunkt
Asymmetrical joint

också med tillräcklig noggrannhet kunna beräknas med hjälp av diagrammen i FIG. 9 och FIG. 16 om vissa modifikationer av dessa diagram göres. Dessa modifikationer skall ta hänsyn till att knutpunkterna är symmetriska, vilket t.ex. innebär att excentriciteten $e/d = 0$ svarar mot vinkeländringen $\theta = 0$. Vidare måste beaktas att vinkeländringen för laster med negativa excentriciteter p.g.a. den uppstyvande effekt, som bjälklaget har, blir mindre än motsvarande vinkeländringar för de osymmetriska knutpunkterna enligt FIG. 1 och FIG. 13. I stort sett bör den del av diagrammen i FIG. 9 och FIG. 16, som svarar mot positiva excentriciteter, beskriva förhållandena vid de symmetriska knutpunkterna.

Vissa skillnader bör uppträda för excentriciteter som motsvarar en kontaktlängd a , mindre än halva väggbredden d . Enligt diagram FIG. 5 innebär detta att avvikelser uppträder för excentriciteter mindre än ca $e/d = 0,35$. I diagrammen har för beräkning av vinkeländringen i symmetriska knutpunkter inlagts streckade kurvor som beaktar ovan diskuterade fenomen.

Eftersom diagrammet i FIG. 16 och kompletteringarna för beräkning av symmetriska knutpunkter av detta diagram och diagrammet i FIG. 9 bygger på antaganden som inte helt kan överblickas utan kontrollberäkningar är det önskvärt att var och en av knutpunkterna i FIG. 13, 14 och 15 för åtminstone något belastningsfall kontrollberäknas med den under föregående rubrik anvisade metoden.

LITTERATURFÖRTECKNING

Falk, Hans: Elementväggars bärförmåga, en teoretisk och experimentell undersökning. Rapport 26/1969 från Byggforskningen, Stockholm.

Wilson, Edward L: Finite element analysis of two dimensional structures. Structural engineering laboratory, University of California Berkeley, California, Juni 1963.

Fox, L: Numerical solution of ordinary and partial differential equations. Pergamon press, Oxford 1962.

Carré, B A: The determination of optimum accelerating factor for successive over-relaxation. Computer Journal 4, 1961.

Sahlin, Sven: Elementväggar inbyggda mellan bjälklag, - spänningar, deformationer, kraftexcentriciteter och bärförmåga. Rapport 107 från Byggforskningen, Stockholm 1964.

R25: 1972

Denna rapport avser anslag C 336 från Statens råd för byggnadsforskning till Institutionen för byggnadsstatik, KTH.

**Distribution: Svensk Byggtjänst, Box 1403, 111 84 Stockholm
Grupp: konstruktion**

Pris: 14 kronor