



GÖTEBORGS UNIVERSITET
INST FÖR PEDAGOGIK OCH SPECIALPEDAGOGIK

Problemlösning och delaktighet

En fallstudie med fokus på framgångsfaktorer för att stödja delaktighet för elever i behov av extra anpassningar i matematikundervisning

Eva -Maria Stadler och Annalena Önnhed

Examensarbete:	15 hp
Program och/eller kurs:	Specialpedagogiska programmet, SPP600
Nivå:	Avancerad nivå
Termin/år:	Vt/2015
Handledare:	Jan-Åke Klasson
Examinator:	Rolf Lander
Rapport nr:	VT15 IPS26 SPP600

Abstract

Examensarbete:	15 hp
Program och/eller kurs:	Specialpedagogiska programmet, SPP600
Nivå:	Avancerad nivå
Termin/år:	Vt/2015
Handledare:	Jan-Åke Klasson
Examinator:	Rolf Lander
Rapport nr:	VT15 IPS26 SPP600
Nyckelord:	matematikundervisning, problemlösning, delaktighet, fallstudie elever i behov av extra anpassning, kommunikation, orkestrering

Syfte

Syftet med studien var att undersöka hur man kan få elever i behov av extra anpassningar delaktiga vid matematisk problemlösning i grupp. Sökarljuset har riktats mot att hitta framgångsfaktorer.

Teori

Studien tar avstamp i det sociokulturella perspektivet och begrepp som stöttning, artefakter, kommunikation och närmaste utvecklingszon används. Modern matematikdidaktik har sin utgångspunkt i socialkonstruktivismen och därmed blir denna också en del i den teoretiska inramningen för studien.

Metod

Valet av metod föll på kvalitativ fallstudie eftersom syftet är att studera en företeelse i ett avgränsat område under begränsad tid. Själva fallet eller företeelsen är hur delaktighet för samtliga elever i en klass sker under en lektion i matematisk problemlösning. I fallstudien ingår två matematiklärare som av praktiska skäl benämns "Johanna" och "Cecilia".

Resultat

Resultatet i studien visade att orkestreringen av lektionen är viktig. Läraren följer ett förutbestämt mönster och har noga tänkt igenom val av problem och målet med undervisningen. I mönstret ingår att varje elev ska få fem minuter att tänka själv för att skapa sig en egen ingång till problemet. Under den här tiden kan läraren vid behov stötta någon. Studien visade också att eleverna arbetar i par, inte tre- eller fyrgrupper, under problemlösningstiden. Par-konstellationerna hade bestämts av läraren på något olika grunder. Resultatet visar att båda matematiklärare har ett tydligt didaktiskt kontrakt som stödjer delaktighet i klassrummet på flera sätt. Eleverna fostras till att ta ett kollektivt ansvar för lärandet och förväntas hjälpa varandra genom att kunna förklara och ställa stöttande frågor. Båda lärarna i fallstudien anser att felaktiga lösningar är intressanta och betraktar dem som en naturlig del i utvecklingen. Eleverna får lära sig att resonera och reflektera matematiskt med varandra genom att träna i par och även i helklass. Varje elev förväntas skriva upp sin lösning. Elever som har svårt att redovisa kan utveckla sin förmåga genom att se exempel. Kommunikationen, dokumentkameran och redovisningen på slutet gör de matematiska resonemangen tydliga och elever i behov av extra anpassningar får fler lärtillfällen. Lärarna har organiserat platser och par på ett sätt så att de hinner lägga mer tid på elever som är i behov av extra anpassning. Båda lärare har förhållningssättet att alla elever kan lära sig högstadiets matematik.

Förord

Vi vill börja med att tacka Jan-Åke Klasson för hans tålamod och konstruktiva kritik. Det har varit många intressanta och långa diskussioner. Naturligtvis vill vi också tacka Cecilia Christiansen och "Johanna" för deras generösa inställning och mod att låta sig sättas under lupp. Ni är fantastiska!

Även våra arbetskamrater ska ha stort tack för att de under ett par veckor fått arbeta extra då vi fick ledigt för att slutföra denna studie och stort tack till vår chef som gjorde detta möjligt.

Vidare vill vi tacka NCM för att vi fått lov att använda deras råmaterial och deras öppna dörrar. Det har varit en trevlig och lärorik plats att vistas på under instuderingsfasen. Vi tackar Susy Forsmark för inspiration och kloka synpunkter när studien låg i sin linda. Ett speciellt tack även till Ulrika Dahlberg som varit ett ovärderligt bollplank.

Sist men inte minst, varmt tack till våra tålmodiga familjer (barn, makar, föräldrar och svärföräldrar) för all hjälp och stöttning och för att ni har stått ut med att vi båda varit frånvarande stora delar av den här tiden. Utan er hade det inte gått!

Studien har till största del genomförts gemensamt och vi har ofta korsat varandras områden, men vi har gjort följande uppdelning. Annalena har gjort *Litteraturgenomgång och tidigare forskning* och Eva-Maria har gjort *Teorianknytning* och *Metod*. Vi har båda stått för *Resultat* och *Diskussion*.

Innehållsförteckning

Inledning	1
Syfte och frågeställningar	2
Begreppsförklaringar	3
Teorianknytning	4
Socialkonstruktivism	4
Sociokulturellt perspektiv	5
Litteraturgenomgång och tidigare forskning	7
Proceduriell och konceptuell undervisning – japanska modellen	7
Didaktiskt kontrakt	8
Problemlösning i matematik	9
Orkestrering	11
Arbete i grupp vid problemlösning	12
Matematiksvårigheter	13
Metod	14
Pilotstudie	14
Metodval	15
Urval	15
Datainsamlingsmetod	15
Deltagande observationer	16
Filmstudie	16
Intervjuer.....	17
Genomförande	18
Etiska överväganden.....	18
Reliabilitet, validitet och generalisering.....	19
Resultat	20
Matematiklärare Johanna.....	20
Delaktighet.....	21
Stöttning.....	23
Matematiklärare Cecilia	27
Delaktighet.....	28
Stöttning.....	32
Sammanfattning av resultat	37
Delaktighet.....	37
Stöttning.....	38
Diskussion	39
Metoddiskussion	39
Resultatdiskussion	39
Slutdiskussion	43
Specialpedagogiska implikationer	44

Vidare forskning	44
Referenslista.....	46
Bilagor	1
Bilaga 1	1
Intervjufrågor Cecilia – utdrag från Matematiklyftets portal	1
Bilaga 2	2
Frågor vid personlig intervju med Cecilia.....	2
Bilaga 3	3
Två exempel på Cecilias ”hjälp-lappar” vid problemlösning.....	3
Bilaga 4.....	5

Inledning

I nationella jämförande undersökningar som tagits fram av Skolverket framkommer att svenska högstadielävers matematikkunskaper sedan 90-talet försämrats i jämförelse med elever i andra länder (Skolverket 2012). Enligt Skolinspektionen (2010) får flertalet elever inte den matematikundervisning de har rätt till och de får endast undervisning i begränsade delar av det centrala innehållet i Lgr11. Eftersom eleverna på grund av detta inte betygsätts utifrån samtliga kursplanemål får eleverna en falsk bild av sina kunskaper och för höga betyg. Enskilt arbete i matematikböckerna är den dominerande arbetsformen och gemensamma samtal får för lite utrymme i förhållande till enskilt räknande i läroboken (Skolinspektionen, 2010). Flertalet lärare har otillräckliga kunskaper om kursplanen och enligt rapporten är undervisningen mer inriktad mot de ämnesspecifika målen än att utveckla de centrala matematiska förmågorna.

För att råda bot på detta aviserade 2012 den svenska regeringen 649 miljoner kronor i ett treårigt projekt som syftar till att fortbilda hela Sveriges lärarkår i matematik, undantaget lärare i förskola och förskoleklass (Skolverket, 2012). Projektet som kallas Matematiklyftet har sin utgångspunkt i kollegialt lärande där lärare, med stöd av handledare utbildade i aktuell matematikdidaktisk forskning, tillsammans utvecklar undervisningen på sin skola. Som ett ytterligare komplement har Skolverket en webbplats, "Lärportalen för Matematik", med ytterligare forskning, konkreta uppgifter och exempel som alla kan ta del av. Syftet med Matematiklyftet är att öka elevers måluppfyllelse i matematik genom att stärka och utveckla undervisningens kvalitet (Skolverket, 2013).

Vad är då centralt idag i Lgr 11 för matematikundervisning i jämförelse med tidigare? På 60- och 70-talet tränade man matematik för att senare kunna lösa problem. Eleverna löste ett stort antal uppgifter i läroboken för att träna sig i procedurer att räkna. Därefter var det tänkt att eleverna tillämpade rätt procedur när de ställdes inför ett matematiskt problem (Wyndham, Riesbeck & Schoultz, 2000). Under 80-talet präglades matematikdidaktiken av lärande och undervisning *om* problemlösning. Det gick i stora drag ut på att ta reda på vilka strategier en god problemlösare använde sig av för att lösa matematiska problem, därefter tog man fram metoder som tränade de här strategierna. Här var den amerikanske forskaren Pólya en föregångare. Under 90-talet gick man över till att börja tala om att lära sig matematik *genom* problemlösning (a.a). Detta är något som är centralt även i dagens styrdokument. Problemlösning är en av de centrala förmågor som lyfts fram, en annan är kommunikationsförmågan.

Andreas Ryve, professor i matematikdidaktik, ger sin bild av detta i en av Matematiklyftets introduktionsvideor som handlar om problemlösning på Lärportalen för matematik. Ryve menar att problemlösning är det mest centrala begreppet i styrdokumentet till dagens matematikundervisning och han betonar vidare att matematikundervisning måste ske genom att kommunicera och arbeta i grupp under lärares ledning:

... dagens forskning visar att /.../ det är i stort sett omöjligt för de flesta elever att utveckla matematiska förmågor om de sitter själva och räknar i boken enbart. Det behövs gruppdiskussioner, helklassdiskussioner där läraren är aktiv och är med och styr och stöttar (Ryve, 2015).

I en rapport från Skolverket (2012) menar man att matematikundervisningen i dagens svenska skolor inte verkar tillräckligt utvecklande för elever som är i behov av extra anpassning eller särskilt stöd. Skolverket varnar för att fastna i den traditionella mekaniska räkningen i läroböcker:

Om lärare, till exempel i tron att man underlättar för lågpresterande elever, fokuserar hantering av procedurer och mekanisk räkning och avstår från undervisning som tränar problemlösning, att se samband och utveckling av matematisk kreativitet, förenklar man möjligen för eleverna på kort sikt. Men läraren gör dem troligen en björntjänst: Det ger eleverna sämre möjligheter att utveckla centrala förmågor, vilket leder till att de lär sig utantill och det riskerar att ytterligare försvåra deras lärande på lång sikt (s. 7).

Om för stor vikt läggs vid individuellt räknande i matematikläroböckerna finns risk för felinläring och missuppfattningar hos elever. Dessa kan vara svåra att åtgärda och hos en del elever kvarstår de under hela undervisningstiden (McIntosh 2008). Inom området tal och räkning finns, enligt McIntosh, ett antal kritiska punkter som eleverna måste förstå för att utveckla sitt kunnande. Författaren menar att dessa, ofta kända missuppfattningar, kan förebyggas genom att de diskuteras och åtgärdas.

I statens offentliga utredningar (SOU 2004:97) uppmärksammas en annan olycklig trend vad gäller matematikundervisningen i svensk skola under slutet av 90-talet och början av 2000-talet. I allt högre utsträckning ser man att elever lämnas ensamma att lösa uppgifter i boken. Det kallas individualiserad undervisning, men innebär egentligen att läraren i praktiken gett upp sin lärarroll. Eleverna, som alla arbetar med samma material, blir i sitt "egna arbete" utelämnade åt att förstå läroboken själv. Det förekommer ytterst få lärarledda diskussioner eller genomgångar och i många fall sitter eleverna utspridda på olika ställen, vilket försvårar en gemensam diskussion.

Sammanfattningsvis har skolans styrdokument genomgått omfattande reformer i och med Lgr11 och detta förväntas bidra till en ökad måluppfyllelse hos eleverna. I de nya kursplanerna framhålls de olika matematiska förmågorna och problemlösning är en förmåga som särskilt lyfts fram.

Detta sporrade oss att undersöka delaktigheten hos elever i behov av extra anpassningar när de löser problem tillsammans med andra. Hur sker delaktigheten? Görs eleverna delaktiga av någon annan? Vilka faktorer påverkar elevernas delaktighet? Många av tankarna i Matematiklyftet stämmer väl överens med ett inkluderande synsätt. Delaktighet är en förutsättning för att elever i behov av extra anpassningar skall vara inkluderade i matematikundervisningen.

Syfte och frågeställningar

Syftet med studien är att undersöka hur man kan få elever i behov av extra anpassningar delaktiga vid matematisk problemlösning i grupp. Ambitionen är att hitta framgångsfaktorer som verkar för att samtliga elever är delaktiga i klassrummet.

För att uppnå syftet kommer studien att besvara följande frågor:

1. I vilka situationer blir eleven i behov av extra anpassning delaktig och aktiv?
2. Hur kan läraren och kamraterna stötta eleven?
3. Vilka är framgångsfaktorerna för att stötta delaktigheten hos samtliga elever?

Begreppsförklaringar

Elev i behov av extra anpassning

I studien har vi valt att kalla de elever som är av intresse för en specialpedagogisk studie för elever i behov av extra anpassningar. Anledningen är att Skolverkets senaste allmänna råd (2014) gör skillnad på stödinsatser. Det finns numera stödinsatser som benämns *extra anpassningar*, som förenklat kan sägas sker genom en omorganisation inom ramen för klassrummet och inte har ett dokumentationskrav. Därtill finns *särskilt stöd*, vilket är av en karaktär som ligger utanför vad den ordinarie pedagogen kan förväntas klara i klassrummet: *insatser av mer ingripande karaktär som normalt inte är möjliga att genomföra för lärare och övrig skolpersonal inom ramen för den ordinarie undervisningen* (s. 11).

Eftersom den här studien handlar om elever som befinner sig i ett klassrum, inkluderade i den ordinarie undervisningen, har vi valt att kalla de som ligger i vårt specifika intresseområde elever som är i behov av extra anpassningar.

Matematiska förmågor i läroplanen

I läroplanen (Skolverket, 2011) står klart och tydligt att matematikundervisningen ska utveckla elevernas kunskaper i att formulera och lösa problem. Eleverna ska därutöver lära sig att värdera sina valda strategier, metoder, modeller och resultat. Där framgår också att eleverna ska ges förutsättningar att lära sig tolka vardagliga och matematiska situationer. De ska kunna beskriva och formulera de här situationerna med matematiskt språk. Att utveckla problemlösningsförmågan är en del av syftet med matematikämnet. Problemlösningsförmågan, förmågan att resonera i matematik, samt att kunna uttrycka sig, samtala och argumentera i matematiska spörsmål är sålunda något av det mest centrala i Lgr11.

I kursplanen går också att skönja en tydlig riktning mot att matematik ska betraktas som en kreativ, reflekterande och problemlösande aktivitet. Detta för att ge människor förutsättningar till att få tillträde till samhällets beslutsprocesser och till att fatta rätt beslut i vardagliga valsituationer. Problemlösning är utöver del av de eftersträvade förmågorna också en del av det centrala innehållet i matematik. Eleverna ska lära sig *strategier för problemlösning i vardagliga situationer* inom olika områden och de ska också kunna *värdera de strategier och metoder* som de använt sig av. De ska lära sig *uttrycka matematiska formuleringar* utifrån spörsmål i vardagliga situationer och olika ämnesområden. De ska även lära sig *enkla matematiska modeller och hur de används* (Skolverket, 2011).

Delaktighet

Begreppet delaktighet förekommer i sammanhang där man diskuterar utsatta människors lika rätt att delta. Begreppet är inte helt okomplicerat att förstå. Enligt Thomas (2007) förekommer begreppet mest inom två användningsområden, det ena är som deltagande i en aktivitet, det andra området vid deltagande i beslutsfattande. Delaktighet är också centralt begrepp i WHO's klassifikation för funktionstillstånd, funktionshinder och hälsa (Socialstyrelsen, 2010), men här har man valt att dela kategorierna i aktivitet och delaktighet. Aktivitet står för *en persons genomförande av*

en uppgift eller handling, medan delaktighet är engagemang i en livssituation (s. 177). Vår definition av delaktighet är densamma som gäller vid aktivitet.

Teorianknytning

Socialkonstruktivism

Konstruktivismens två grundläggande hypoteser är, för det första, att kunskap konstrueras av individen själv – det är inget som ”fylls på” av någon utomstående. För det andra, att kunskapen kommer till i en föränderlig process som baserar sig på de erfarenheter som en person med tiden upplever. Det finns ingen ”färdig kunskap” att upptäcka, utan kunskapen uppstår inom varje individ (Björkqvist, 1993). Synen på undervisning blir därmed något mer komplext jämfört med det behavioristiska synsättet. Här talas exempelvis om konfrontation av världsbilder – lärarens världsbild krockar med elevens och på så vis uppstår en utmaning som modifierar elevens världsbild. För att konfrontation ska uppstå behöver läraren bli väl insatt i varje elevs tankevärld. Vidare har konstruktivismen inom matematikundervisningen bidragit till att utvärdering av kunskap i mindre utsträckning fokuseras på prestation och mer mot lärandet. Kvaliteten på lärandet bedöms efter korrespondens med verkligheten, konvergens mot verkligheten samt koherens i världsbilden (a.a.).

Konstruktivismen kan delas in i ”svaga” eller enkla konstruktivister och radikala konstruktivister. En svag konstruktivist, exempelvis Piaget, betonar den första hypotesen i konstruktivismen och godtar alla tre ovanstående kriterier, medan en radikal konstruktivist endast kan acceptera den sista (a.a.).

Det finns radikala konstruktivister som menar att det sociokulturella perspektivet inte går att kombinera med konstruktivism, eftersom utgångspunkten består i att kunskap helt och hållet skapas av subjektet – fri från en reell värld. Det finns emellertid fler andra konstruktivister inom matematikdidaktiken, menar Björkqvist (1993), som betraktar matematiklärandet som en delvis social konstruktion: [...]”en individ bygger upp sin egen kunskap i växelverkan med andra individer” (s. 10). Det här är grunden till social konstruktivism och inom detta område studerar man samband mellan kollektiv och personlig kunskap. Kollektiv kunskap är den kunskap som hjälper ett samhälle eller en kultur att leva vidare (a.a.).

I studier upptäckte Cobb och hans kolleger att enbart det konstruktivistiska perspektivet på matematiklärandet i ett klassrum (i jämförelse med studier en-till-en) inte gav en komplett bild. Det finns, enligt Cobb och Yackel (1996), delar av komplexiteten som inte kan förklaras med enbart begrepp från konstruktivismen, utan det behövdes psykologiska och sociala perspektiv också. Andra faktorer, som vad eleven själv föreställer sig som matematikaktivitet och faktorer som berör hur eleven förväntas genomföra uppgiften - vilka sociala normer som föreligger, är också betydelsefulla för lärandet. Inom matematikdidaktiken benämns de senare sociomatematiska normer (a.a.).

Jaworski (1998) betonar den sociala interaktionens och intersubjektivitetens betydelse för lärandet. Hennes grundsatser bygger på att vi människor hela tiden konstruerar vår individuella kunskap i samre med andra. Vi får fysiska och sociala influenser som vi

bygger till erfarenheter: *Om det finns kunskap utanför individen kan vi människor aldrig få reda på det, eftersom vi inte har tillgång till annat än våra egna erfarenheter* (s. 108).

De här erfarenheterna kan omvärderas genom samröre med andra, genom interaktion och genom att vi hamnar i nya miljöer. Den miljö och den grupp vi omger oss med bildar en gemensam kunskap. Den samlade matematiska kunskap som vi har idag är ett resultat av gemensam kunskap som förmedlats genom sociala processer och medier. På det här sättet bygger en individ sin kunskap i växelverkan med andra (a.a.).

Sociokulturellt perspektiv

Inom specialpedagogisk forskning finns enligt Ahlberg (2001) inga "grand theories". Forskningen har genom tiderna istället blivit ett alltmer tvärvetenskapligt fält, eftersom många vetenskapsområden kan beröras i ett specialpedagogiskt problem (pedagogik, sociologi, psykologi och medicin/neurologi). Det finns flera förklaringsmodeller att inta, beroende på vilket perspektiv som väljs. (a.a.) Det är möjligt att hitta förklaringar hos individen (kategoriskt), men det är lika fullt möjligt att hitta förklaringar i omgivningen (relationellt). Inom specialpedagogiken idag finns en strävan att förebygga genom att hitta situationer där samspelet mellan individen och omgivningen fungerar och skapar möjligheter istället för hinder (Fischbein, 2007).

Det sociokulturella perspektivet kan i detta sammanhang ses som relevant för föreliggande studie. Det utgår från att utveckling och lärande sker i interaktionen mellan människor i praktiska eller kulturella sammanhang. Människan utvecklas i samspel med sin sociala och fysiska omgivning – detta är en förutsättning för lärande (Säljö, 2000, s. 104). Inom sociokulturell teori tas hänsyn till att människor handlar på olika sätt i olika sammanhang, beroende på vad man uppfattar att situationen och omgivningen kräver. Det här kallas för situerat lärande. Det är viktigt att notera att våra handlingar och vår förståelse är delar av kontexter. Man kan alltså inte tala om att kontexten påverkar individen – men kontexten har betydelse för hur kommunikation ska förstås (a.a.).

Kommunikation som verktyg

Språket och hur vi uttrycker oss är intimt förknippat med hur vi handlar – i det sociokulturella perspektivet hänger praktisk verksamhet och kommunikation ihop. Ett centralt studieobjekt i perspektivet är därför det som benämns sociala och kommunikativa praktiker.

En av Vygotskijs grundläggande idéer, som senare utvecklats av bl.a. Säljö, kan förklaras som att kommunikationen mellan lärare och elev fungerar som mediering för att förstå omvärlden. Säljö (2000):

I samtal kan vi låna kompetens från mer erfarna personer och på det sättet få insikt i hur man ställer frågor och besvarar dem inom en viss verksamhet eller ett visst kunskapsområde (s. 230).

Vygotskij framhåller betydelsen av de sociala faktorerna för barnens utveckling (Hansson, 2011). Genom att kommunicera med andra som nått längre i sin kunskap leds individen fram till ny kunskap (Brandell & Backlund, 2011). Här betonas alltså språket i stor utsträckning. Det sociokulturella perspektivet har en social och kollektiv syn på hur kunskaper skapas och förs vidare (Säljö, 2000). I forskning med sociokulturellt

perspektiv spelar exempelvis barns uppväxtmiljöer stor roll, eftersom man i större utsträckning fokuserar på faktorer utanför individerna. ”Det är viktigt att betona att individen själv är aktör och är med och skapar sin egen utveckling inom ramen för de sociokulturella möjligheter som erbjuds” (a.a. s. 123).

Artefakter

Inom sociokulturellt perspektiv talar man om kulturella redskap, *artefakter*, som underlättar för oss att fungera på olika sätt. De här redskapen kan vara fysiska, psykologiska och språkliga och de kan således stödja både vår fysiska förmåga och mentala förmåga. Med hjälp av dessa artefakter flyttas gränsen för vad vi människor klarar att utföra både praktiskt och mentalt (Säljö, 2000). Som exempel från matematikens värld kan nämnas miniräknare, som gör det möjligt för människan att frigöra arbetsminne till att tänka på det matematiska i ett problem istället för att lägga en stor kraft på beräkningar.

Lärandet hos individer beror på hur de tar till sig dessa redskap och använder dem. Redskapen är kulturella i den mening att hur människor använder sig av dem beror på det sociala sammanhanget människorna är en del av. Våra erfarenheter görs med hjälp av artefakter eller s.k. medierande redskap. Det viktigaste medierande redskapet är de resurser som finns i vårt språk (a.a.).

Stöttning och lotsning

Vygotskij har myntat ett uttryck som benämns den närmaste utvecklingszonen eller den approximala utvecklingszonen. Den är den zon inom vilken den lärande är mottaglig för stöd och förklaringar från en mer kompetent person (Säljö, 2000). Detta stöd går ut på att den mer kompetente vägleder den mindre kompetente, vilket kan liknas vid ett samarbete mellan en lärling och en mästare. Detta görs på ett sätt så att den mer kompetenta hjälper till med mentala stöttor, men genom att försöka att inte avslöja det eleven har möjlighet att komma på själv. Ett annat namn för detta är *scaffolding*. När eleven har stöttats på ett sådant sätt att eleven till slut klarar uppgiften på egen hand sägs eleven ha *approprierat* kunskapen och gjort den till sin egen (a.a.).

Brandell och Backlund (2013) menar att det är skillnad mellan att stötta och lotsa. Om en lärare lotsar en elev, hjälper läraren eleven så mycket att det egentligen är läraren som har löst uppgiften åt eleven. Vid lotsning behöver eleven inte tänka själv. Vid scaffolding hjälps eleven istället av mentala stöttor, så att den kommer längre vid en problemlösningssituation än vad den skulle ha gjort på egen hand. Läraren vet vart man skall komma i uppgiften och kan på så sätt upprätta en ”mental byggställning”, dvs. hjälpa eleven med strukturen i uppgiften. Avsikten är att låta eleven i så stor utsträckning som möjligt försöka att komma på så mycket som möjligt på egen hand. ”En lärare eller en annan elev/student kan lyfta fram just det som saknas för att individen ska nå längre” (a.a. s.123). Med den här typen av stöttning kan eleven via den närmaste utvecklingszonen konstruera ny kunskap.

Litteraturgenomgång och tidigare forskning

Proceduriell och konceptuell undervisning – japanska modellen

Vikten av att kunna lösa matematiska problem betonas i de nationella styrdokument. Enligt Bentley (2012) har flertalet västländer haft en proceduriell undervisning till skillnad från de ostasiatiska länderna vilka har haft en mer konceptuell undervisning. I en proceduriell undervisning ligger tyngdpunkten på beräkningsförmågan och man ägnar mindre tid åt att begreppsförmågan och resonemangsförmågan. Förståelsen av beräkningsstrategier kan här vara bristfällig medan eleverna har lärt sig procedurerna. Problemet med den här typen av undervisning kan vara att eleverna har svårt att använda sina kunskaper utanför matematikämnet och i nya situationer. Elever som har fått en konceptuell undervisning har lättare att överföra sina matematiska kunskaper till nya sammanhang och till vardagliga situationer. Detta fenomen kallas för transfer (Björkqvist, 2001). I en konceptuell undervisning betonas både procedurer och förståelse av begrepp (Bentley, 2012).

Stigler och Hiebert (1999) har i en omfattande videostudie jämfört lektionsmönster i Tyskland, Japan och USA. De drar slutsatsen att variationen i lektionsmönster är större mellan länderna än inom länderna. Vad lärarna gör i klassrummet och vilka metoder de använder bestäms enligt författarna mer av den rådande undervisningskulturen än av lärarnas egna kvalifikationer. Lärare lär sig att undervisa genom att växa upp i en speciell kultur och genom att studera de metoder deras egna lärare använde sig av när de själva gick i skolan. De menar att undervisning är kulturellt betingat, samt att det inte räcker att rekrytera duktiga lärare ifall man inte ändrar på själva kulturen. Att undervisning är en kulturell aktivitet förklarar varför det är så svårt att förändra undervisningen trots ändringar i styrdokument (a.a.).

I videostudien kunde forskarna se att Japan har en mer konceptuell undervisning medan Tyskland och USA har mer proceduriell undervisning. Med det menas att japanska elever kontinuerligt får arbeta med utmanande matematiska problem, medan elever i USA får memorera och träna på procedurer. Tyska och amerikanska elever spenderar nästan all tid till att praktisera rutinprocedurer medan japanska elever spenderar lika mycket tid på att upptäcka nya samband som att praktisera rutinprocedurer. Japanska lärare introducerar problem utan att först visa hur man ska lösa dem medan de amerikanska lärarna nästan uteslutande demonstrerar en procedur som ska användas för att lösa ett problem innan det introduceras för eleverna (a.a.).

Elever som löser matematiska problem innan lektionsgenomgångar får djupare kunskap än elever som löser matematiska problem efter lärares genomgångar (Rittle-Johnson & Schneider, 2012). En typisk problemlösningslektion i Japan har enligt Stigler och Hiebert (1999) följande struktur:

- Läraren anknyter till föregående lektion. Eleverna får presentera lösningar de funnit och läraren summerar.
- Läraren presenterar dagens problem. Eleverna får sitta en stund och fundera över problemet enskilt. Det är sällan eleverna börjar arbeta tillsammans utan att först ha arbetat på egen hand.

- Eleverna börjar arbeta tillsammans i små grupper. Läraren går runt i klassrummet och identifierar olika lösningsförslag.
- Diskussion av olika lösningsmetoder. Lärare brukar välja ut vilka elevlösningar som ska redovisas istället för att be om frivilliga. Vilka lösningar som väljs ut beror på vad lärarna sett när de cirkulerar runt i klassrummet. Ibland presenterar lärarna själva lösningar som de sett elever använda som de vill att de andra eleverna ska lära sig. När elever själva presenterar metoder så brukar ofta läraren stötta genom att utveckla och summera.
- Sammanfattande diskussion och summering. Ofta har läraren ett kort föredrag där vederbörande sammanfattar lektionens viktigaste huvudpunkter. Tavlan spelar en viktig roll i att ge en överblick över olika lösningsförslag. Läraren skriver från vänster till höger och när lektionen är slut så finns det på tavlan en tydlig översikt över hur lektionen fortskridit. Tavlan sammanfattar på det här viset hela lektionen.

Japanska lärare lägger ner mycket tid på att träffas sinsemellan och diskutera hur de kan förbättra undervisningen. Detta kallas "Lesson Study". Lärarna lägger stor vikt vid att lektionernas olika delar är väl förbundna med varandra och att lektionen blir en komplett upplevelse för eleverna. Japanska lärare ser individuella skillnader hos elever som en naturlig egenskap hos en grupp. De ser skillnaderna i det matematiska klassrummet som en tillgång för både elever och lärare. De amerikanska lärarna anser däremot att individuella svårigheter hos eleverna utgör ett hinder för effektiv undervisning (a.a.).

Didaktiskt kontrakt

Begreppet didaktiskt kontrakt introducerades av fransmannen Guy Brousseau år 1984 (Blomhøj, 2014). Brousseau (1997) menar att i undervisningen finns det förväntningar mellan lärare och elever om hur en matematiklektion ska se ut. Det kan beskrivas som ett outtalat kontrakt mellan lärare och elever, en "social konvention" som skapas genom den outtalade förhandling som utgörs av de tidigare matematiklektionerna (Helenius, 2014). Kontraktet är till stor del implicit och blir synligt först när det bryts. Att bryta kontraktet kan vara svårt eftersom lärare och elever lätt agerar på samma sätt som de gjort vid tidigare situationer. Om det didaktiska kontraktet består av att läraren förväntas lära ut och eleven förväntas lära sig det läraren lär ut, kan det leda till att det önskade lärandet inte sker trots att det var avsikten (Brousseau, 1997). En förutsättning för att lära med förståelse är enligt Brousseau att eleverna själva tar ansvar för att konstruera sin kunskap samtidigt som läraren ansvarar för att stödja denna process (Hansson, 2011). Begreppet "det didaktiska kontraktet" ingår i Brousseaus teorier om didaktiska situationer (Brousseau, 1997) som handlar om att utforma och analysera undervisning så att viktiga villkor för lärande uppfylls. Dessa utgår från kognitiva teorier, där eleven konstruerar sin egen kunskap och bäst lär sig matematik genom att undersöka och lösa problem. För att elevernas kunskaper ska bli socialt och kulturellt accepterade, samt användbara utanför klassrummet, krävs dock en aktiv lärare i de didaktiska situationerna som ansvarar för att detta ska ske.

Lärarens verktyg för att stödja elevens kunskapsutveckling kallar Brousseau för "institutionalisering av kunskap" (Hansson, 2011). Elevernas aktivt konstruerade kunskap riskerar att bli individuell och oanvändbar utanför skolkontexten ifall den inte

relateras till kunskapsmål och matematiska begrepp. Läraren ansvarar för att institutionalisering sker och under denna didaktiska fas är både lärare och elever aktiva. För att lärande ska ske krävs dock att läraren lämnar över ansvaret för konstruerandet av kunskapen till eleverna. Hansson (2011) benämner detta överlämnande av ansvar till eleverna för "decentralisering".

De situationer då eleverna aktivt har tagit över ansvaret för konstruerandet av kunskapen kallar Brousseau (1997) "a-didaktiska situationer" (s.30), vilka inte ska förväxlas med icke-didaktiska situationer som betecknar situationer där lärande sker utanför skolkontexten.

Dessa a-didaktiska situationer är skapade av ett didaktiskt syfte. Det didaktiska syftet är att läraren ska lämna över ansvaret för problemlösningsprocessen till eleverna och att de förhoppningsvis ska ge sig hän i problemlösningsprocessen och lösa problemet för att de själva vill. Detta ger förutsättningar för att lära med förståelse. Brousseau (a.a.) definierar överlämnandet av problemet (delegeringen) till eleverna på följande sätt:

Devolution is the act by which the teacher makes the student accept the responsibility for an (adidactical) learning situation or for a problem, and accepts the consequences of this transfer of this responsibility (s. 230).

Ett grundantagande i Brousseaus teorier är, enligt Hansson (2011), att elever själva inte kan ta ett stort ansvar för lärprocessen även om de förväntas att ta ansvar för sitt eget lärande. Författaren menar att "läraren har ett stort ansvar för att elevens eget arbete präglas av konceptuellt och inte proceduriellt härmande lärande" (s. 38).

Ett naturligt steg i problemlösningen är, enligt Brousseau, att göra fel och detta skall inte ses som misslyckande. Det är dock viktigt att lyfta fram elevernas "tillfälligt felaktiga föreställningar" och göra eleven medveten om dem för att de inte ska utgöra fortsatta hinder för fortsatt utveckling av den matematiska förståelsen (Hansson, 2011).

Jablonka (2011) har undersökt outtalade eller osynliga regler eller normer i matematiska klassrum. Hon konstaterar att normer är socialt och kulturellt betingade och några av dessa är mer eller mindre dolda i de matematiska. Hur normerna bildas är beroende på hur kunskap skapas i undervisningen. Författaren menar att en ökad medvetenhet om normerna i klassrummet spelar en stor roll. Elever som inte är medvetna om dessa regler, både sociala och matematiska, blir inte framgångsrika i undervisningen.

Problemlösning i matematik

I många länder håller lärarrollen på att ändras från kunskapsförmedlare till en som skapar miljöer där eleverna aktivt ger sig i kast med matematiska problem och konstruerar sin egen kunskap (Stein et al, 2008; Stigler & Hiebert 1999). Syftet med att undervisa genom problemlösning i matematik är att elever ska utveckla en djupare förståelse för matematiska begrepp och metoder (Lester & Lambdin, 2007). Problemlösning ger eleverna motivation och möjligheter att bygga upp och utvidga sina kunskaper i matematik (Hagland, Hedrén & Taflin, 2005). Författarna menar att genom att låta elever lösa matematiska problem får lärarna en ökad möjlighet att sätta sig in i elevernas tankar och idéer och på så sätt ge eleverna stöd och uppmuntran inom de områden där de har största chansen att utveckla sina matematiska kunskaper. Via

undervisning i problemlösning ges eleverna möjligheter att samla på sig en mängd olika lösningsstrategier som de även kan ha användning för i olika situationer senare i livet.

Boaler (2011) redogör för en jämförelse mellan elever som fått en traditionell undervisning och elever som fått arbeta med problemlösning. Elever med traditionell undervisning uppgav att de använde sig av matematik i vardagslivet men inte den matematik de lärt sig i skolan. Elever som fått lära sig matematik med hjälp av problemlösning gjorde ingen åtskillnad mellan skolmatematiken och världen utanför skolan. Boaler menar att:

Barn behöver få lösa komplexa problem, ställa många olika slags frågor och använda, anpassa och tillämpa standardmetoderna liksom att göra kopplingar mellan dem och resonera matematiskt – och de kan syssla med sådana metoder hemma och (får man hoppas) i skolan. (s. 20)

En förgrundsfigur i problemlösningssammanhang är Pólya som redan 1945 utkom med arbetet *"How to solve it"*. Pólya intresserade sig för heuristik som behandlar problemlösningens olika faser. Heuristik är enligt Pólya läran om de metoder och regler som hjälper förmågan att upptäcka och komma på lösningar. Pólya fyra problemlösningsskeden är: (1) Förstå problemet, (2) Gör upp en plan, (3) Genomför planen, (4) Se tillbaka och kontrollera. Elever som är mindre framgångsrika är inte lika inriktade på att förstå problemet och lägger inte ner lika mycket tid på att göra upp en plan över hur problemet skall lösas som de mer framgångsrika eleverna (Ahlberg, 1992). Författaren refererar till Lester som talar om noviser och experter.

Forsmark (2009) kunde i sin studie se tydliga skillnader mellan elever som uppnår framgång och dem som inte gör det. Enligt Forsmark sökte framgångsrika elever efter en mening och vågade tänka kreativt på egen hand, vilket gjorde att deras erfarenheter av lärandet hade en djupinriktning. De betraktade misslyckanden som en naturlig del i processen och ett tillfälle att lära sig något nytt. Mindre framgångsrika elevers erfarenheter av lärandemiljön karakteriserades av görande och memorerande:

Om eleven konfronteras med en lärandemiljö som präglas av rätt- och feltänkande, där färdigheter som att memorera, kunna återge fakta och lösa uppgifter på ett angivet sätt uppmuntras och premieras kan han/hon utveckla mindre framgångsrika lärandestrategier. Å andra sidan, om förståelse och kreativitet får ett större utrymme kan eleven uppleva att han/hon förstår och ser sammanhang och meningsfullhet i sitt arbete. Det, i sin tur, är nödvändigt om skolan ska främja lärande samt bidra till att eleverna har tilltro till sig själva och till den egna förmågan att lära. (s. 224)

Ahlberg (2001) menar att vissa elever har ett *föregivettaget förhållningssätt* i matematik och andra har ett *öppet förhållningssätt*. Elever med ett föregivettaget förhållningssätt är mer fokuserade på produkten och det huvudsakliga målet är att *ge ett svar* på problemet. Elever med ett öppet förhållningssätt har däremot en inriktning mot processen och mot att *söka ett svar* på problemet:

När elever med ett föregivettaget förhållningssätt arbetar med problemlösning ritualiseras ofta lösningsprocessen och utvecklas efter ett givet mönster. För att dessa elever ska utveckla sin matematiska problemlösningsskick, räcker det inte med att de får lösa fler problem av samma typ. Istället bör undervisningens inriktning förändras genom att läraren organiserar situationer för lärande där eleverna får arbeta med olika typer av problem och dessutom se ett givet problem belyst i olika perspektiv. De bör få tillfälle att använda olika uttrycksformer och konfronteras med olika sätt att tänka. Då

mångfalden idéer och tankar på skilda sätt görs synlig i undervisningen, får eleverna tillfällen att reflektera över probleminnehållet och kan därigenom utveckla sin matematiska förståelse (s. 47).

I Matematiklyftet framhävs hur viktigt det är att lyfta fram flera lösningsförslag så att eleverna förstår att det går att lösa matematiska problem på olika sätt. Fördelar och nackdelar med de olika lösningsförslagen ska diskuteras och värderas. Detta för att eleverna skall förstå att vissa strategier är mer framgångsrika i vissa situationer och för att de skall få en djupare matematisk förståelse.

Enligt Ahlberg (2001) är det viktigt att eleverna får resonera och samtala om matematik i många olika situationer utan krav på att svara rätt, för att de skall få en ökad tilltro till sin förmåga och lust att lära. Genom att arbeta med matematiska problem tillsammans får de en möjlighet att öva på detta.

Orkestrering

En stor utmaning för lärare är att arrangera helklassdiskussioner på ett sådant sätt att en hel klass utvecklar ett matematiskt tänkande (Stein et al., 2013). Vid problemlösning är det viktigt att i förväg noga planerat undervisningen så att det tänkta syftet med undervisningen uppfylls och inte tar andra oväntade och oförutsedda vägar. Om inte läraren i förväg noggrant tänkt igenom och planerat lektionens olika delar, finns det en risk att den avslutande diskussionen urartar, antingen genom att läraren helt tar över och håller en föreläsning eller att eleverna själva får berätta om sina lösningar utan genomtänkt koppling och ordning så att de matematiska idéerna som var lektionens syfte inte belyses i den utsträckning som var tänkt (a.a.). Om den matematiska agendan på detta sätt helt lämnas över till eleverna hamnar man i något som författarna kallar för "show and tell" (s. 8), vilket motverkar syftet med helklassdiskussionen, som är avsedd att leda eleverna mot ett mer kraftfullt, effektivt och stringent matematiskt tänkande.

Stein et al. (2013) använder sig av begreppet orkestrering för att beskriva hur man kan genomföra produktiva klassrumsdiskussioner. De listar fem "praktiker" som man särskilt bör ta hänsyn till vid planeringen för att uppnå detta: (1) förutse vilka olika typer av elevlösningar som kan dyka upp, (2) överblicka elevernas lösningar under problemlösningsfasen, (3) välja ut vissa elever för att presentera sina lösningar under den sammanfattande genomgången, (4) medvetet ordna svaren som ska visas, (5) hjälpa klassen göra matematiska kopplingar mellan olika elevlösningar och mellan elevlösningarna och lektionens matematiska nyckelidéer (s. 12). Var och en av praktikerna bygger på utfallet av den förra. Det är exempelvis mycket lättare att överblicka elevlösningarna under problemlösningsfasen om man har förutsett vilka olika typer av lösningar som kan tänkas dyka upp. På samma sätt är det lättare att välja ut olika elevlösningar om man noga studerat elevernas arbete under problemlösningsfasen. Under fas två cirkulerar lärarna runt i klassrummet under tiden eleverna arbetar med problemet. Vilka lösningar som väljs ut beror på dess matematiska innehåll, hur väl de bidrar till att nå målet med lektionen, och vilken lärandepotential som vilar i dessa. Läraren måste på förhand veta vilka matematiska begrepp, representationer, procedurer och metoder de vill att eleverna skall lära sig. De lärare som på förhand lagt ner arbete på att förutse hur eleverna kommer att ta sig an uppgiften kommer att vara mer förberedda och ha lättare att överblicka elevernas lösningar. För att lyckas med de fem praktikerna krävs enligt författarna att läraren har en god kännedom

om elevernas matematiska tänkande samt att problemlösningssuppgiften uppfyller de för undervisningen väl definierade och uppsatta målen.

Begreppet orkestrering har även fått en central roll i forskningen om IKT-stödd matematikundervisning (Helenius, 2014). Trouche (2004) använder begreppet avseende planering och genomförande av undervisning stödd av tekniska hjälpmedel och begreppet orkestrering används ofta inom den kognitiva forskningen.

Arbete i grupp vid problemlösning

Forskare, exempelvis Webb (1989), hävdar att elever lär sig mer när de arbetar i grupp än vid enskilt arbete. Genom att lösa matematiska problem tillsammans och diskutera med varandra kan eleverna utveckla alla de olika matematiska förmågorna (Larsson, 2014). I vardagslivet löser vi oftast problem tillsammans med andra (Ahlberg, 1991). Enligt författaren har barn ofta flera strategier för problemlösning i sin vardag. Lester (2011) benämner detta etnomatematik. Ofta kommer dessa inte fram i den formella matematikundervisningen. Att låta eleverna arbeta i grupper kan vara ett sätt att ta tillvara på elevernas egna lösningsstrategier. Genom att jämföra sin egen lösning med kamraternas så tränar eleverna sig på att lösa problem på många olika sätt. För många elever gäller det att så fort som möjligt komma fram till det ”enda rätta svaret”. Detta kan motverkas av att eleverna får samtala kring olika matematiska problem i grupp, (Ahlberg, 2001).

Vid samtalen i gruppen konfronteras elevernas uppfattningar av ett problem och deras förståelse kan förändras då de ger uttryck för sina egna erfarenheter, möter andras sätt att tänka, ställer frågor, hypoteser, nya frågor, och relaterar olika lösningsförslag (s. 44).

Flera forskare hävdar att heterogena grupper ger bäst resultat (Brandell & Backlund, 2011). Larsson (2014) menar att heterogena grupper är bra så länge skillnaderna inte är allt för stora. Hon menar att man kan blanda de högpresterande med medelpresterande elever, men att man bör undvika att låta de mest högpresterande och de mest lågpresterande arbeta tillsammans.

Sjödin (1991) har undersökt hur grupparbete och individuell kunskapsbehållning påverkas av gruppstorlek, gruppsammansättning, gruppnorm och problemtyp. I sin studie kom han fram till att högpresterande elever kan utnyttja interaktionen i grupp bättre än medelpresterande och lågpresterande. Detta resultat är baserat på försök i homogena tre-grupper. Förklaringen är att de högpresterande eleverna vet att alla i gruppen har resurser att lösa problemet. Detta gör att de lyssnar till varandras förslag och diskuterar sig fram till en lösning. De lågpresterande vet att ingen i gruppen har de resurser som krävs för att lösa problemet. De anstränger sig därigenom inte för att förstå hur någon annan kommit fram till ett lösningsförslag.

Enligt Larsson (2014) bör eleverna inte vara mer än två eller tre i grupperna när de arbetar med matematiska problem. Sjödin (1991) jämför i sin studie individuellt arbete med just två-grupper och tre-grupper. Högpresterande elever gynnas av att vara två eller tre i gruppen. De lågpresterande eleverna har däremot bäst samarbete när de arbetar två och två. Att arbeta i par är bättre än både enskilt arbete och arbete i tre-grupper för lågpresterande elever. I ett annat försök jämför Sjödin två-grupper med sexgrupper. Resultatet visar även här att de högpresterande har mer framgångsrikt arbete när de arbetade i större grupp än de lågpresterande eleverna. Sjödin förklarar detta med att det

blir fler totala resurser i en större grupp, samtidigt som interaktionsmöjligheterna ökar (a.a.).

Sjödén (1991) undersökte också hur gruppnormen påverkade resultaten. Sjödén skiljer mellan gruppproduktivitet och individuell kunskapsinläring. Med gruppproduktivitet menas hur framgångsrik en grupp är när det gäller att lösa ett problem tillsammans. Med individuell kunskapsinläring menas hur mycket varje individ lärt sig av grupparbetet. För att undersöka detta fick samtliga elever som ingått i undersökningen skriva ett enskilt test en vecka efter grupparbetet. I undersökningen fanns tre gruppnormer: fri gruppnorm, tävling och samarbete. I de grupper där normen varit samarbete fanns också den största individuella kunskapsinläringen. De som samarbetar tar större ansvar för varandra, vilket ger alla i gruppen möjlighet att uppfatta lösningen. Flickorna presterade också bättre på de individuella testen, vilket kan förklaras av att de är mer benägna av att samarbeta. Det visade sig vidare att den individuella kunskapsinläringen var högre när problemen hade en låg tillgänglighet, d.v.s. att eleverna var tvungna att diskutera mer för att komma fram till en lösning. Det krävdes en högre gruppinteraktion, vilket ledde till en högre individuell kunskapsinläring. Sjödén menar att uppgifter som förekommer i arbetsböcker av olika slag ofta är problem med hög tillgänglighet.

Om dessa löses i grupp, så torde det innebära, att det uppstår en gruppinteraktion, där gruppmedlemmarna befäster den korrekta lösningen sämre, än om gruppen bearbetar ett problem med låg tillgänglighet som kräver en annan och mer omfattande gruppinteraktion (s. 71).

Matematiksvårigheter

Enligt Engström (2003) har man traditionellt sett skiljt mellan allmänna och specifika inläringssvårigheter. Engström ställer sig skeptisk till att denna distinktion är intressant ur ett pedagogiskt perspektiv. Det finns en uppenbar risk att alltför många elever identifieras med specifika matematiksvårigheter utan att de egentligen har det. Han menar att det inte finns någon internationell forskning som visar att elever med specifika svårigheter skulle behöva särskilda undervisningsmetoder. Engström använder sig av termerna matematiksvårigheter och elever i behov av extra stöd i matematik. Detta gäller elever som av olika skäl misslyckas med skolmatematiken och inte får godkänt betyg i grundskolan eller gymnasieskolan.

Engström (2003) kategoriserar tre former av matematiksvårigheter, psykologiska, sociologiska och didaktiska och menar att vi bör arbeta efter hypotesen att det finns många olika orsaker till att eleverna får svårt med matematiken i skolan. De olika faktorerna växelverkar med varandra och går in i varandra och ingen av förklaringsmodellerna kan ensamt förklara elevernas matematiksvårigheter. Man bör därför förstå matematiksvårigheter som komplext och mångdimensionellt. På grundval av detta vänder sig Engström emot att praktiskt använda sig av dyskalkylibegreppet i skolan, samt den starka inriktning mot enkla räknefärdigheter som den neurologiska forskningen har. Han menar att matematik huvudsakligen inte går ut på att memorera, följa regler samt träna enkla räknefärdigheter. Matematik handlar, enligt Engström, först och främst om tankeaktiviteter såsom utveckling, abstraktion, skapa mönster samt resonera. En dyskalkyli diagnos förändrar egentligen ingenting, utan det är undervisningen som behöver förändras. Engström anser vidare att lärares kompetens att utföra diagnostiska uppgifter i direkt anslutning till undervisningen behöver utvecklas. "Fokusera på didak-

tiska faktorer, det som har med undervisningens organisering, planering och utförande att göra (a.a. s. 33).

Sjöberg (2006) delar denna syn på matematiksvårigheter och anser att det finns alternativa förklaringar till att elever får svårt med skolmatematiken. Liksom Engström lyfter Sjöberg fram gruppen elever i matematiksvårigheter som en mycket heterogen grupp. Sjöberg påpekar att bl.a. oro och ångest för matematikämnet också kan vara en förklaring. Detta kan leda till undvikarbeteende och att de elever som behöver träna mest istället tränar minst på matematik.

Andra förklaringar är hemförhållanden och socioekonomisk status. Enligt Sjöberg (2006) är elever från socioekonomiskt försummade hem missgynnade och därigenom mer beroende av sina lärare. Han lyfter även fram strukturella orsaker som lärare och elever har svårt att påverka. Bristen på arbetsro framkom i Sjöbergs undersökning och den berodde till stor del på stora undervisningsgrupper. De som hårdast drabbades av denna brist på arbetsro var elever i matematiksvårigheter, då de upplevde stora problem med att kunna koncentrera sig på matematiklektionerna. En följd av de stora undervisningsgrupperna var att lärarens tid till att individuellt samtal med eleverna inskränktes drastiskt. Dessutom framkom att en stor del av undervisningstiden av flera olika orsaker försvann. Ytterligare orsaker till elevers matematiksvårigheter som utkristalliserade sig var inadekvat undervisning och föräldrars låga utbildningsnivå. De flesta elever som hade svårigheter i matematikämnet var mindre motiverade och la mindre tid på ämnet jämfört med sina klasskamrater. Sjöberg avvisar liksom Engström att dyskalkyli skulle kunna utgöra en huvudförklaring till att så många elever i har problem med matematikämnet.

Sammanfattningsvis är förklaringarna till matematiksvårigheter många och området är komplext. Olika typer av matematiksvårigheter kommer därför inte belysas i det här arbetet. Både Sjöberg (2006) och Engström (2003) hävdar bestämt att förklaringarna måste ses ur ett relationellt perspektiv. Det stämmer väl in på ansatsen att hitta goda exempel i en undervisning där samtliga elever är inkluderade och delaktiga.

Metod

Pilotstudie

Innan syftet bestämdes, genomfördes fyra observationer där elevers delaktighet vid arbete med problemlösning undersöktes. Metoden vid pilotstudierna var av mini-etnografisk karaktär och syftet var att se hur delaktiga elever i behov av extra anpassning blir i problemlösning i grupp. Observationerna ägde rum på två skolor, en högstadieskola och en gymnasieskola, med två olika pedagoger. Båda pedagoger hade matematiklärarexamen med behörighet att undervisa på gymnasiet, flera års erfarenhet och båda hade deltagit i fortbildningen Matematiklyftet. Det som tydligt kom fram vid observationerna var att elever i behov av extra anpassning riskerade att hamna utanför när eleverna arbetade med problemlösning. Det fanns tillfällen då eleverna inte var delaktiga i arbetet med lösningarna och där de satt till synes inaktiva, även sedan de blivit placerade i en grupp eller med en kamrat. Frågan väcktes, vad är det som får

elever i behov av extra anpassning delaktiga i problemlösning? Hur gör en lärare för att skapa förutsättningar för alla att delta?

Metodval

Studien inleddes med en mindre pilotstudie av matematisk problemlösning i grupp. Det som pilotstudien indikerade ligger till grund för urval, avgränsningar och metod. Valet av metod till föreliggande studie hade kanske kunnat vara fortsatt inspirerad av etnografi liksom pilotstudien varit, men efter diskussion föll valet på kvalitativ fallstudie. Etnografiska studier är longitudinella och tidskrävande och passar för att undersöka en kultur eller hur en grupp beter sig (Fangen, 2005). I denna studie är syftet att undersöka framgångsfaktorer. Det handlar om att hitta exempel på hur läraren kan agera och planera sin undervisning för att få samtliga elever aktiva vid problemlösning. Vi vill studera ett avgränsat område under begränsad tid. Fallet i sig är hur delaktighet vid problemlösning sker. Problemlösning är centralt inom den moderna matematikdidaktiska forskningen och bottnar i socialkonstruktivism. Den specialpedagogiskt inriktade frågeställningen utgår från sociokulturellt perspektiv och därmed hamnar begreppen delaktighet och stöttning i centrum för studien. Det avgränsade området ("fallet") utgörs av att betrakta en företeelse (vad som sker när samtliga elever i klassrummet är delaktiga) vilket, enligt Merriam (1994), benämns partikularistisk fallstudie. Fallstudiens inslag av både observation och intervju ger en inblick både i hur praktiken ser ut och tanken bakom.

Genom att sortera insamlade data efter mönster som syns återkomma i fallstudien har vi kunnat tolka informationen och analysera vårt material. Mönstren är delvis färgade av vår frågeställning och vad vi läst och redogjort för i litteraturgenomgången, men den är också delvis intuitiv process, vilket stämmer väl med Merriams beskrivning av hur en kategorisering av data kan ske (Merriam, 1994).

Urval

Matematiklyftet är ett mycket stort utbildningsprojekt och teorier/metoder som förespråkas där kan antas ha stor genomslagskraft på matematikundervisningen i den svenska skolan den närmaste framtiden. Problemlösning är en del i det centrala innehållet för matematik, där eleverna får möjlighet att träna sina förmågor. De personer som valts ut som fallstudieobjekt är två matematiklärare som kan antas vara skickliga på att arbeta med problemlösning enligt Matematiklyftets principer. Den ena är en matematiklärare som är engagerad i Matematiklyftet i en mellanstor kommun i Västsverige och den andra fungerar som ett exempel i filmer på Matematikportalen. Frågeställningen är hur man får elever i behov av extra anpassning delaktiga i problemlösning och därför föll valet på två personer som figurerar som goda exempel. Strålkastarljuset riktas mot att finna ett antal framgångsfaktorer som främjar delaktighet vid problemlösning i matematik.

Datainsamlingsmetod

I studien har vi valt att använda tre deltagande observationer i klassrum med tre olika klasser av läraren Johanna¹ samt en filmstudie av oklippt råfilm (Cecilia) från Nationellt

¹ Lärarnas namn i studien är fingerade.

Centrum för Matematik (NCM). Delar av råfilmen används i Matematiklyftets portal och är en filmad lektion i problemlösning av Cecilia. Den film som är offentlig har också studerats, för att studera enstaka situationer från fler håll.

Observationer och filmstudie kompletterades med personliga intervjuer. Cecilia blir dessutom intervjuad i Matematiklyftets portal, men fler frågor har ställts i en personlig telefonintervju, för att komplettera med mer specialpedagogiskt perspektiv i studien.

Deltagande observationer

De deltagande observationerna (pilotstudie och "Johanna") kan beskrivas som mindre strukturerade där observatören varit delvis deltagande (Merriam, 1994). Observatören har varit känd för gruppen men inte helt öppen med exakt vad som ämnas studera. Observationerna var styrda till att iaktta situationer där elever i behov av extra anpassning är delaktiga i problemlösning. Eftersom eleverna i hög grad varit delaktiga i lärandet vid observationstillfällena har observatören övergått till att iaktta helheten. Observationen kan jämföras med vad Merriam (1994) liknar "en videokamera som sveper över ett visst område" (s. 103). Eftersom det är omöjligt för en enskild person att iaktta allt, har observatören antecknat saker enligt ett observationsschema. Observationerna skrevs ner enligt stolpar under lektionerna och därefter renskrevs anteckningarna skyndsamt efter observationstillfället, eftersom allt inte hinner skrivas ner i stunden. Även sådant som drog till sig observatörens uppmärksamhet, som låg utanför observationsschemat, har noterats. Vid observationerna i närområdet valde observatören att inte filma utan valde att följa samma mönster som vid pilotstudierna.

Vid observationerna har läraren först gått igenom vilka elever som är i behov av extra anpassning. Lärarna har visat med hjälp av skolkatalog och på papper var eleverna brukar sitta i klassrummet. Definitionen "elev i behov av extra anpassning" har överlåtits till matematikläraren som har klassen, eftersom det är denna som känner elevernas kunskapsnivå i matematik och som vet vilka som brukar behöva extra hjälp. De elever vi studerat närmare har fått fingerade namn i materialet. Även läraren har valt att vara anonym och har därför fingerat namn.

Filmstudie

Det finns ett flertal filmer i Matematiklyftets lärportal, där tittaren kan följa en lektion och även höra läraren kommentera sin lektion efteråt. Idén att använda filmer från portalen kom av två orsaker. Dels för att filminspelning är ett sätt att få rik information, både icke-verbal och verbal, och dels för att här finns lärare som arbetar med problemlösning på det sätt som lärs ut enligt Matematiklyftets och Skolverkets principer. Den klippta versionen av problemlösningssuppgiften "Vattenmelon" i Matematiklyftets portal visar intressanta sekvenser och eftersom det här problemet användes vid ett av de tidigare observationstillfällena av "Johanna", föll valet på att detaljstudera just Cecilia.

Filmerna är gjorda ett professionellt team med erfarenhet av film och ljudupptagning som har anlåtats av NCM och filmen har god kvalitet, ljud- och bildmässigt. På råfilmen ser man att teamet som filmat varit mycket väl synligt för eleverna. Eleverna verkar vana vid att ha åskådare i rummet och det förekommer inga omtagningar eller avbrott i råmaterialet. Ändå bör man vara medveten om att filmningen kan ha känts konstlad och det kan ha påverkat eleverna (Björndahl & Cato, 2005). Det finns två råfilmer, varav den ena har Cecilia i fokus och den andra har elevgruppen. Vi har valt att detaljstudera

råfilmen med Cecilia i fokus. Den gav mest information kring hur läraren agerade och vad som sades i interaktion mellan elev och lärare. Därtill har delar av den ihopklippta versionen i Matematiklyftets portal använts för att kunna se vad som samtidigt händer runt omkring.

Information angående elevernas kunskapsnivå har inhämtats från Cecilia. Eftersom eleverna fortfarande finns med på filmen i Matematiklyftets portal har vi av etiska skäl valt att inte avslöja specifikt vilka elever det rör sig om.

Filmdatan har i valda delar transkriberats på ett liknande sätt som vid de deltagande observationerna. Urvalet av data valdes med utgångspunkt från studiens syfte och frågeställningar. Delar av råfilmen är också transkriberade. Fördelen med att transkribera filmmaterial är att man upptäcker aspekter på kommunikationen som man kanske annars hade missat (Björndahl & Cato, 2005). Att transkribera hela materialet var emellertid inte aktuellt – det hade tagit alltför lång tid och bedömdes inte ha betydelse för resultatet.

Intervjuer

Intervju är ett sätt att få fram information som belyser sådant som inte går att observera, d.v.s. känslor och de avsikter en person har som föranleder ett visst handlande (Merriam, 1994). I vår fallstudie fungerar intervjuer som ett komplement till observationerna. Författaren menar att kvaliteten på intervjun beror mycket på hur skicklig intervjuaren är på att ställa frågor, men också på hur samspelet mellan respondent och intervjuare fungerar. Det hjälper om intervjuaren kan vara neutral och icke-värderande och "[...] kan lyssna på ett reflekterande sätt". (sid. 88) Intervjuaren bör vara medveten om att den egna attityden kan påverka kvaliteten på svaren. (a.a.)

Intervjuerna i studien har haft ett spann mellan ostrukturerade samtal efter observationer (i det tidiga skedet), delvis strukturerade intervjufrågor vid själva intervjun, samt strukturerade (som utskick i mejl) vid frågor som berörde antal elever i klassen etc. I huvudsak har intervjuerna kretsat kring några huvudfrågor som utarbetats efter observation och filmstudie och som grundas på frågeställningarna i syftet. Samtidigt har det funnits en strävan efter att lyssna efter nya obekanta spår som kan dyka upp i samtal. Strävan har varit att ställa öppna frågor och att be om förklaringar om det sagda har kunnat tolkas på flera sätt. Intervjuerna har spelats in och har även transkriberats ordagrant vid båda fall. Enligt Merriam (1994) ger detta den bästa grunden för analys.

Johanna intervjuades på ett café i närheten av arbetsplatsen och intervjun spelades in med hjälp av diktafon. Frågorna kretsade kring ett antal punkter som intervjuaren hade med sig och intervjun var relativt ostrukturerad och föreföll mer som ett samtal. Därefter avlyssnades intervjun och filerna transkriberades ordagrant av den som genomfört intervjun. När transkriptionen var klar lyssnades filerna igenom en gång till för att säkerställa att allt blivit korrekt återgivet. (Kvale & Brinkmann, 2009) Därefter gick den andra av oss igenom transkriptionen noggrant och redigerade materialet något - onödiga upprepningar och utfyllnader togs bort för att skapa mer läsvänlig data. När redigeringen var klar, läste den som gjort intervjun igenom materialet igen för att kontrollera att allt stämde. Diskussioner kring innehållet uppstod med jämna mellanrum under bearbetningsfasen och lite längre fram kontaktades även respondenten för att bekräfta några utsagor.

Cecilias intervjuedata har hämtats både från Matematikportalen och från en personlig intervju. I Matematikportalen finns flera videoklipp där Cecilia får besvara frågor gällande sitt lektionspass och frågor som berör förhållningssätt och problemlösning i allmänhet (Bil.1). De avsnitt som är intressanta för den här undersökningen har transkriberats ordagrant. Cecilia intervjuades även personligen via telefon (med högtalarfunktion på) med båda närvarande. Den personliga intervjun spelades in efter att Cecilia gett muntligt tillstånd. Ett antal enkla demografiska frågor hade skickats i förväg via mail, tillsammans med en förfrågan om en personlig telefonintervju. Några dagar senare hölls en 50 minuter lång telefonintervju, där Cecilia både besvarade de frågor hon fått i förväg, samt besvarade nya relativt öppett formulerade frågor. (Bil.2) Intervjun var delvis strukturerad eftersom några frågor uppstod spontant, som följdfrågor. Också Cecilias intervju transkriberades ordagrant.

Genomförande

Datansamlingen startade med att Johanna observerades under tre olika lektioner, sammanlagt c:a 180 minuter, med efterföljande korta samtal. Lite längre fram genomfördes en längre personlig intervju. All datansamling så långt gjordes av en person i vår studie. Därefter studerades fältanteckningar och intervjutranskription från fallstudien Johanna översiktligt gemensamt. Efter diskussionen kring fältanteckningarna från Johanna, studerades filmen av Cecilias lektion en första gång gemensamt. Var och en studerade därefter filmen en gång till och antecknade. Därefter beslöts att samma person som genomfört de deltagande observationerna transkriberade de delar av råfilmen som var intressanta för vår studie. Detta för att få fältanteckningar som liknade Johannas. Det kan underlätta inför en avslutande analys om datan inte skiljer sig åt till formen. (Björndahl & Cato, 2005). Samtidigt studerades intervjumaterialet med Cecilia på portalen av den andra av oss och därefter skapades ett kompletterande frågebatteri för en kommande personlig intervju.

Cecilia intervjuades per telefon med båda närvarande, med inspelning och högtalarfunktion på, och intervjun transkriberades. Därefter sammanställdes samtliga fältanteckningar och intervjuer, så att materialet blivit enhetligt. Materialet delades in i två fall (Matematiklärare Johanna och Matematiklärare Cecilia), med likadana teman. För att materialet skulle bli överblickbart gjordes en korsanalys av de tre observationerna hos Matematiklärare Johanna. När datan från båda lärare sammanställts, gjordes avslutningsvis ytterligare en sammanfattande korsanalys mellan de två för att reducera materialet. På det här sättet blev analysen och den avslutande diskussionen förhoppningsvis mer överblickbar.

Etiska överväganden

Läraren Johanna har informerats om studien och samtyckt. Hon har valt att vara anonym och därmed röjs inga namn eller annan information som går att härleda direkt till läraren. Läraren har också granskat inledande bakgrundsbeskrivning för att säkerställa att hon känner sig trygg. Den andra läraren, Cecilia, har informerats och samtyckt via mail och via telefon att bli studerad och att vi får använda filmen med henne. Filmen som granskats har vi fått muntlig tillåtelse att använda av NCM, under förutsättning att Cecilia godkänt användandet, vilket hon har gjort.

Vid de deltagande observationerna informerades eleverna om att studien handlar om hur de arbetar med problemlösning tillsammans i grupp. Eleverna i klasserna fick även muntlig kännedom om de forskningsetiska principerna. Inget nämndes emellertid om att studera delaktighet och elever i behov av extra anpassningar i processen. Det skulle inte kännas etiskt korrekt, eftersom observatören uppehöll sig vid en specifik grupp under långa stunder. Det fanns risk för ett icke önskvärt utpekande av de elever som särskilt studerades. Att nämna "elever i behov av extra anpassning" riskerar att sätta i gång tankeprocesser hos eleverna, som inte kan kontrolleras. Eleverna skulle kunna känna sig stämplade. En gissning är vidare att det skulle vara hämmande för deras kreativitet och påverka deras agerande. Är det mig de undersöker? Faller jag under kategorin "elever i behov av extra anpassning"? Även om dessa elever redan från början vet om att de behöver stöd i undervisningen, ska de inte behöva känna sig kategoriserade av någon utomstående. Det medför en risk att utsätta någon elev för skada, om det rått till hundra procent transparens i informationen eleverna fick. På detta sätt har vi försökt att vara "resonable honest". Eleverna som citeras från de deltagande observationerna har fingerade namn och är sålunda anonyma.

Endast de som genomfört studien har tillgång till fältanteckningarna, eftersom ingen annan bör ha tillgång till eventuellt känslig information om elever eller lärare (Björndahl & Cato, 2005). Under arbetsprocessen förvarades de i hemmen där vi skrev. Fram till examensarbetet har godkänts förvaras anteckningarna i ett låst skåp på arbetsplatsen tills de inte behövs mer och därefter kommer de att förstöras.

Eleverna i filmen har inte kontaktats, eftersom de inte utgör det centrala fallet i studien. NCM har fått tillåtelse att filma dem och filmen är publik. Eleverna är i vår studie att betrakta som en grupp elever, vilken som helst. Några individer citeras då och då i dialog med läraren, men vi strävar efter att avpersonifiera utan att skapa förvirring. I möjligaste mån försöker vi hålla fokus från elevernas identitet.

I analysen av informationen är det enligt Merriam (1994) viktigt att inse att det är forskaren själv som är instrumentet i insamlingen av informationen. Det är lätt att forskaren utelämnar sådant som man inte vill ha med. Att vara två personer som tar fram och tolkar information kan vara en fördel, eftersom det ständigt uppstår diskussioner kring vad som egentligen sker och hur det kan tolkas. Förhoppningsvis har diskussionerna bidragit till att överföra en så riktig bild som möjligt.

Reliabilitet, validitet och generalisering

I en kvalitativ fallstudie liksom i alla annan forskning är det viktigt att bedöma reliabilitet och validitet. För att stärka trovärdigheten har flera metoder använts vid insamling av data: deltagande observation, intervju och filmstudie. Studiens trovärdighet stärks också genom att den innehåller två fall, vilket breddar undersökningen ytterligare. Validiteten i den här kvalitativa studien kan därmed bedömas som relativt hög.

Filmen som granskats är delvis publik, likaså delar av Cecilias intervju, och det är i skrivande stund möjligt för läsaren att gå in och studera delar av resultaten själv. Därmed kan läsaren själv se och tolka data i studien, vilket påverkar både reliabiliteten och validiteten positivt.

Det kan också vara en fördel att vara två om en studie. Vi har båda granskat och tolkat inhämtade data och flera diskussioner och frågor har uppstått längs vägen. Det har också inträffat att vi efter observation eller filmstudie återvänt till källan för att fråga ytterligare en gång om personen uppfattat en situation på likadant sätt som vi. Den här formen av triangulering har förhoppningsvis bidragit till att resultatet är tillförlitligt (Kvale & Brinkmann, 2009). I studien har vi också försökt beskriva vår definition av de begrepp som används samt hur mönster i resultaten successivt har framträtt. Den här formen av transparens i hur arbetet gått till kan förhoppningsvis stärka reliabiliteten (Merriam, 1994).

Den process som fallen beskriver ("hur delaktighet sker") har visat elever som varit aktiva och delaktiga i problemlösning och lärarna har var för sig kunnat berätta på vilket sätt de arbetar för att uppnå maximal delaktighet. Det föreligger emellertid en risk att eleverna varit påverkade av observatörens närvaro och likaså av filmteamet vid filmningen. Detta påverkar reliabiliteten. Cecilia menar i den personliga intervjun att eleverna var något påverkade, men samtidigt var inte samtalen särskilt annorlunda mot hur hon brukar ha det i klassrummet.

Påverkan som kan ha funnits är att de [eleverna] tycker det är jättespännande och så anstränger de sig ett litet extra snäpp ... men annars, samtalen brukar vara på det sättet. Det är mer att de blir lite spända – det påverkar lite på det sättet.

Eleverna vet om att de är filmade, vilket i sig kan medföra konsekvenser för reliabiliteten, men de vet inte om att de skulle komma att bli studerade i en fallstudie rörande hur elever i behov av extra anpassningar görs delaktiga i problemlösning.

Det går inte att generalisera en kvalitativ fallstudie så som en traditionell statistisk eller naturvetenskaplig studie. Det är inget slumpmässigt urval, utan fallen har valts ut ändamålsenligt för att skapa djupare förståelse kring en känd situation. Merriam (1994) menar att läsaren eller användaren själv kan besluta i vilken utsträckning det går att tillämpa resultatet från en viss fallstudieundersökning i andra liknande situationer.

Detta är ett vanligt tillvägagångssätt inom medicinen eller juridiken, där frågan huruvida ett fall går att applicera på en aktuell situation avgörs av den läkare eller jurist som är inblandad (s. 187).

I den här studien går det att urskilja några faktorer i resultatet, som eventuellt skulle kunna ha ett värde för en utomstående i en liknande situation, men det är upp till varje läsare att avgöra om så är fallet.

Resultat

Resultatet av undersökningen presenteras i två separata fall som vi av praktiska skäl döpt till Matematiklärare Johanna respektive Matematiklärare Cecilia. Varje fall inleds med att redovisa observation alt. filmstudie och därefter tillhörande intervju. Resultatet från varje fall har strukturerats enligt två teman, vilka baseras på frågorna som presenteras i syftet. De här temana benämns Delaktighet och Stöttning.

Matematiklärare Johanna

Bakgrund

Johanna arbetar på en högstadieskola i en medelstor stad i Västsverige. Hon är engagerad och påläst i Matematiklyftet och har ett gott rykte som matematiklärare i kommunen där hon verkar, med omvittnad skicklighet i att leda lektioner i problemlösning. Hon har arbetat som matematiklärare i mer än 15 år.

De tre matematiklektioner som observerats har varit i tre klasser med 17-20 elever i varje klass. Det har varit en klass i varje årskurs 6-8. I varje klass har det funnits två-fyra elever som är i behov av extra anpassning. Vid varje tillfälle har Johanna i förväg visat vilka elever det rör sig om och visat var de kommer att sitta.

I alla tre klasserna har eleverna bestämda platser under matematiklektionerna och bestämda "arbetskamrater" som Johanna gjort upp. Eleverna sitter i rader vända framåt tavlan. Johanna har placerat eleverna i behov av extra anpassning längst fram.

Delaktighet

Observationer Johanna

Lektionerna sker enligt en viss struktur. Samtliga tre lektioner inleds med att Johanna anknyter till vad klassen gjorde vid föregående matematiklektion. Hon ställer en fråga till hela klassen och de repeterar kort vad de lärde sig senast:

Johanna inleder med att fråga eleverna vad de gjorde förra lektionen.

"Vad gjorde ni i måndags?" frågar hon.

"Problemlösning!" svarar eleverna. "Men vad jobbade ni med?" fortsätter Johanna.

"Förändringsfaktor!" svarar någon av eleverna. (fältanteckningar Procentproblem)

Efter den korta inledande repetitionen introduceras dagens problem. Det sker både muntligt och visuellt på tavlan. Eleverna får därefter c:a 4-5 minuter enskild tid att fundera över och sätta sig in i problemställningen. Under den tiden går Johanna runt och tittar på elevernas lösningar frågar hon några elever om de har förstått problemet. Hon vänder sig i första hand till elever som är i behov av extra anpassning.

Johanna går fram till två elever [...] och frågar om de förstått. Jag står en bit ifrån och hör henne säga: Förstår du vad som menas med $\frac{1}{2}$. Jag hör inte vad eleven svarar [jag står på en bits avstånd och eleven pratar väldigt tyst]. Jag hör läraren säga "Kan du rita upp det?". (fältanteckningar Pärlhalsbandet)

Därefter uppmanas eleverna att arbeta tillsammans, två och två. Eleverna börjar direkt att prata och diskutera problemet med varandra. Johanna fortsätter att cirkulera i klassrummet och vänder sig i större utsträckning till de elever som är i behov av extra anpassning. Den här sekvensen tar c:a 20-30 minuter.

Jag hör att Johanna ställer en fråga till gruppen bredvid som består av två flickor som båda har svårt för matematik (Anna och Ebba). Ebba har ritat 24 pärlor som hon har grupperat efter färg. Läraren frågar: "Kan ni göra en fjärdedel röda?" (fältanteckningar Pärlhalsbandet)

Johanna går runt och identifierar lösningar. Hon frågar eleverna om de vill redovisa sin lösning eller en del av en lösning. Ibland ger hon direktiv vilken del av lösningen som hon vill ska presenteras.

Några elever har blivit ombuds att gå fram till tavlan och skriva upp sina lösningar. Johanna går runt bland grupperna och jag hör henne säga: "Kan du skriva upp det här? säger läraren och måttar med händerna på elevens papper. Kan du skriva av det sista?" (fältanteckningar Vattenmelon)

De elever som valts ut ombuds gå fram i tur och ordning och skriva sin lösning på tavlan. Tavlan är indelad i kolumner för att de olika lösningarna ska synas samtidigt. Eleverna skriver, ritar och berättar hur de har tänkt. Därefter diskuteras lösningarna i helklass. Det kan vara läraren som ställer frågor till klassen, eller eleverna själva som frågar.

När alla har redovisat framme vid tavlan, frågar en elev efter vilken lösning som är den mest effektiva. Det uppstår en kort värderingsdiskussion. (fältanteckningar Procentproblem)

Johanna avslutar (under två av tre observationer) med att fråga: Vad har vi lärt oss idag? Eleverna får skriva ner i sin skrivbok och reflektera en kort stund enskilt.

Intervju Delaktighet Johanna

Johanna menar att en viktig faktor för att få samtliga elever delaktiga i problemlösning är att samtliga elever måste få en stund till att tänka själva. Vid motsatsen, att enbart låta dem arbeta i grupp, föreligger en överhängande risk att en person tar över lösningen helt. Hon kan under den här egna tiden stötta elever i behov av extra anpassning, för att de ska kunna bidra med något när de senare övergår till att lösa i par. Johanna benämner den inledande tiden "egen tid".

Jag tror att den här grejen att tänka själv en stund först, så att alla har satt sig in på sitt sätt i problemet, är en nyckelfaktor. /.../ Om man hjälper dem på banan tankemässigt innan de ska börja prata med sina kompisar är det lättare att få dem inkluderade eller få dem deltagande i arbetet. /.../ När de försöker själva går man runt och stöttar upp, för om de inte kan något alls själva så är de ju ändå exkluderade när de kommer in i gruppen.

En annan viktig faktor för att lyckas är att samtliga elever för egna anteckningar. Varje individ måste få tid att tänka själv *och* föra egna anteckningar. Johanna anser att det är viktigt att läraren förklarar meningen med att egna anteckningar ska föras.

Det är individen som löser problemet på sitt sätt. Så man löser sitt eget problem och dokumenterar sin lösning.

Johanna menar också att det är viktigt vilken typ av problem läraren väljer. För att öka chansen till att alla blir delaktiga är det viktigt att läraren redan i planeringen vid val av problem har eleverna i behov av extra anpassning i sitt sinne. Vid introduktionen till problemet gäller det att läraren vet vad målet med lektionen är - vad som specifikt behöver tränas:

Det måste finnas något att resonera om, annars är det ju svårt för eleven. Det måste vara en utmaning i uppgiften på olika nivåer.[...] Det [Hur jag introducerar problemet] beror lite på vad mitt mål är. Det kan ju vara sådär att jag vill att de ska träna på att rita upp en bild av en text, att problemet de får bara är text, och jag vill att de ska försöka att visualisera problemet på något sätt. Då ritar ju inte jag bilden åt dem, utan då kanske jag går igenom orden med dem i texten, stryker under ord, och diskuterar egenskaperna. Vad är en kvadrat? Hur känner vi igen den? Vad vet vi om den?

Johanna tar upp begreppet ”didaktiskt kontrakt” under intervjun. Hon menar att läraren måste förbereda sina elever på arbetssättet genom att noggrant förklara varför de ska arbeta på ett visst sätt. Vidare behöver läraren etablera en god relation så att eleverna litar på henne.

Sen krävs det ett förtroende, en relation med eleverna, så att de följer med i den här vändningen eller det didaktiska kontraktet som jag tänker. När man kommer som ny lärare kan man inte bara byta kontraktet i klassen och säga ”nu ska vi göra på det här sättet” - det går inte, för att först måste eleverna lita på att de kan följa mig.

Längre fram i intervjun när vi talar om hur man får elever att samarbeta i grupp kommer Johanna tillbaka till att det är ett kontinuerligt arbete. Hon anser att läraren behöver fortsätta förklara varför eleverna ska göra på ett visst sätt – ända tills alla förstått.

När Johanna ska avsluta sin lektion vill hon lyfta fram vad målet med lektionen varit. Det är målet avgör vilken typ av avslutande frågor läraren ställer och vilka lösningar eller delar av lösningar som redovisas och diskuteras. Målet med lektionen ska, enligt Johanna, framträda när läraren knyter ihop säcken.

Är det något begrepp som ska sättas så är det ju det jag försöker få fram i slutet. Är det en procedur, så är det ju det jag tar fram.

Stöttning

Observationer Johanna

Vid samtliga lektioner inleder Johanna med ett repetitionsmoment. Ofta har repetitionsmomentet ett samband med det problem som sedan kommer att presenteras. Vid observationerna ”Vattenmelonerna” repeterar de exempelvis inledningsvis hur man adderar bråk. Hon lägger också vikt vid att alla elever förstått problemet, när det väl har presenterats. Det kan ske på lite olika sätt.

Johanna går runt till några elever och kontrollerar om de har förstått frågan. Därefter säger hon högt i klassen: ”Vad kan man göra om man kör fast? Har ni några förslag?” [inget svar] ”Försök att rita en bild. Försök att rita upp melonerna så att ni har dem framför er.” (fältanteckningar Vattenmelonerna)

Johanna går vid samtliga tillfällen fram till eleverna som vi har i fokus när det blir tid för ”egen tid”. Hon ställer exempelvis stöttande frågor och ser till att de har uppfattat problemet de ska lösa:

Johanna [vänder sig till Rosita]: ”Vilken fin bild! Hur tänkte du här?”
Rosita: ”Här är de gröna.” Hon visar en tårta indelad i bitar. De gröna pärlorna utgör hälften av alla pärlor. (fältanteckningar Pärlhalsbandet)

Vid par-momentet råder stor aktivitet i samtliga par vid observationer. När eleverna övergår till att arbeta i par går Johanna återigen fram först till eleverna vi har i fokus och lyssnar. När/om eleverna kört fast ställer Johanna stöttande frågor.

Jag [observatören] hör att Johanna ställer en fråga till två flickor, Anna och Ebba. Ebba har ritat 24 pärlor som hon har grupperat efter färg. Läraren frågar: ”Kan ni göra en fjärdedel röda?”
Ebba: ”En fjärdedel...”

Johanna: "Hur ska ni ta reda på hur mycket en fjärdedel är? Vad betyder en fjärdedel?"
[pekar på hela raden med pärlor som flickorna gjort].
Anna: "Hallå, jag tror att jag har kommit på det!" Anna kommer på att det blir 6 röda pärlor.

I ett fall, där en elev har motoriska svårigheter, hjälper Johanna till att rita en cirkel. Hon passar samtidigt på att ställa frågor. Johanna är noga med att ord och begrepp är klara.

Johanna: "Hur tänker du? [vänd mot Linus] Kan du rita upp en bild?" Linus har svårt att rita en cirkel.
Johanna: "Låt bilden vara så här." [ritar upp cirkeln]
Linus får därefter själv göra tårtbitarna.
Johanna: "Hur mycket äter Ellen?"
Linus: "En halv tredjedel."
Johanna: "Bra Linus! Hur mycket är det? Om ni delar alla de här tredjedelarna i halvor, hur många delar får ni då? Eleverna funderar."
Johanna: "Hur stor är en halv tredjedel? Hur stor del av melonen äter Ellen?" [pekar på figuren]
Linus: "En sjättedel."
Johanna: Bra!

När Johanna går runt bland paren lägger hon stort fokus på att få eleverna att kommunicera. Hon uppmanar dem att skriva upp sina tankar och att läsa uppgiften högt. Om paret har kört fast behöver Johanna stå kvar och ställa fler frågor. Johanna kommenterar själv i samtalet efter lektionen att hon i något fall övergått från stöttning till lotsning och verkar inte helt nöjd med detta.

Johanna går fram till Gabriella och Emma som sitter längst fram i klassrummet.
Johanna: "Hur tänker ni?" [vänder sig till båda]
En av flickorna: "Plus 10 procent"
Eleverna har antagit att de har ett pris på 245 kr från början. De har skrivit $245 * 10\%$ på sitt papper.
Johanna: "Hur kan ni få reda på hur mycket 10 % är? 245? Vad ska ni göra med det?"
En av flickorna: "0,10 gånger ..."
Johanna: "Okej, vad ska du göra nu? Du har 245, det ska höjas med 10 %. Hur gör du nu? Gabriella knappar in $0,10 * 245$ på miniräknaren."
Johanna: "Skriver du samtidigt Emma? [vänder sig till Gabriella] Vad har du räknat ut nu?"
Gabriella: "Jag har lagt på 10 % på 245 kronor"
Johanna: "Nu läser vi uppgiften högt igen: Först höjs det med 10 procent och sedan sänks det med 10 %. Vad ska vi göra nu?"
En av eleverna svarar [jag hinner inte anteckna svaret].
Johanna: "Vad bra du är på att skriva ner allt du säger!"
[...] Nu har eleverna kommit så långt i uppgiften att de räknat ut priset efter en höjning och en sänkning. Nu har de kvar att räkna ut med hur många procent priset ändrats genom dessa två på varandra följande förändringar.
Johanna: "Kom ni ihåg vilket räknesätt ni använde när ni skulle räkna ut andelen i tidningsprojektet? När ni skulle ta reda på hur många procent det var?"
En av eleverna säger: "Delen/det hela."
Johanna: "Hur gör ni nu då?" (fältanteckningar Procentproblemet)

Eleverna hjälper även varandra att komma framåt med problemet på olika sätt, genom att kommunicera. En elev som har svårt att upprätthålla koncentrationen får hjälp av sin kamrat:

Klara repeterar det han [Linus] sagt för att klargöra för sig själv. Sedan säger hon till Linus: "Ska vi plussa ihop det här sen?"
Linus: "Va?"
Klara: "Plussa ihop det här och se hur mycket de äter på en halvtimme"
Linus låter som att han tänker.
Klara: "Skriv upp det här Linus: [och skriver] $1/6+1/12+1/10$. Hur ska vi räkna ut det här?" (fältanteckningar Vattenmelonen)

Det förekommer att Johanna tar upp både delar av lösningar eller hela lösningar på vid den avslutande presentationen. Vid en presentation av en del av en lösning visar exempelvis ett par en inledning och därefter får ett annat par ta vid och avsluta.

En grupp hade börjat och kommit fram till att addera bråk, men inte kommit vidare därefter. När Johanna måttade med händerna i en annan grupp så ville hon bara ha med fortsättningen med adderingen av bråk. En grupp fick alltså ta vid och fortsätta där en annan grupp kört fast.

Det finns tillfällen då Johanna tar upp en lösning eller en del av en lösning som är felaktig. Hon förklarar inför alla att det beror på att flera andra elever tänkt likadant.

[En elev redovisar och Johanna korrigerar en lösning]
Eleven: Det var därför jag frågade dig innan.
Johanna: Ja och det är därför vi har din lösning här. Det är säkert många som tänker som du och undrar.

Intervju Stöttning Johanna

När Johanna cirkulerar i klassrummet under det enskilda arbetet är hon noggrann med att se så att alla elever förstått orden i uppgiften. Eleverna ska känna till poängen med uppgiften. En viktig faktor för att förstå problemet är elevens ord- och begrepps-förståelse i problemet. Johanna använder sig av olika strategier för att kontrollera att eleven uppfattat ord rätt:

[...] om man tänker bara på elever som har svårt generellt, så måste man ju se till att de har förstått själva poängen. Är det så att det är själva bilden jag är ute efter, så måste jag säga: "Jag vill att du ritar en bild som beskriver det här problemet!" eller "Jag vill att du sätter dig ner och försöker förstå alla orden innan du börjar lösa!"

Klimatet i klassrummet är en oundgänglig stöttande faktor och det behöver råda en gemenskap där det är självklart att man hjälper varandra för att alla ska framåt, anser Johanna. Hon menar att lärarens förhållningssätt är något som påverkar klimatet starkt och att läraren bör vara mer fokuserad på hur eleven tänker, än om det eleven säger är rätt eller fel.

Som lärare tycker jag att du hela tiden måste vara lite "WOW, vad intressant! Det här tar vi upp på tavlan!". Man får göra det intressant ibland. Det gör att det som sägs är viktigt, så att man inte säger, som motsatsen, "Nej! Det här var fel! Vad tycker du?" Då är ju inte det något viktigt som den säger, fast det kan ju vara ett jätteviktigt missförstånd, eller det kanske sitter 10 st. till och tycker så. Då är det viktigt ändå fast det är fel. [...] Allt som sägs är bra! Alla tankar är bra tankar. Sedan måste man jobba med dem lite.

Johanna menar att läraren bör försöka förklara vinsten i att lyssna på varandra och att lära av varandra. En atmosfär där det råder ett kollektivt ansvar för att alla ska utvecklas i sitt lärande gynnar hela gruppen.

Att man delar med sig av tankar till varandra och att man inser att alla är olika. ”Jag lär mig jättemycket av att lyssna på dig! Jag lär mig av det du säger!” Att det inte bara är en belastning: ”Ah, nu måste jag lyssna på dig och jag kunde ha räknat tre tal i boken”, utan ”Att ha lyssnat på dig ger mig någonting”. Att vi är en grupp och att vi lär oss tillsammans. Vi har en – vi är vi, och vi känner en gemenskap, tror jag. Det är ju det yttersta målet i alla grupper att få till en sådan känsla.

Det bör inte vara för många i en grupp när eleverna diskuterar, om läraren strävar efter att alla ska vara aktiva och delaktiga. Johanna menar två elever, maximalt tre, i första läget när eleverna ska diskutera. Efter ett tag kan paret få vända sig till ett annat par och på så vis expandera gruppen.

Max tre, ska jag säga, två och tre stycken skulle vara optimalt. [...] sitt själv en stund, tänk själv en stund, prata ihop dig med grannen och när ni känner att ni har bra koll på era tankar vänd er om och prata med nästa. Då blir de fyra.

Par-sammansättningen är ytterligare en faktor som är viktig för delaktigheten. Elever är olika och Johanna anser att läraren bör försöka hitta dem som passar ihop kunskapsmässigt, men detta är bara en aspekt. Eleverna behöver komplettera varandra i begreppsförståelse, men också i förmågan att kommunicera och resonera. Det gäller att hitta par och grupper som gynnar kommunikation. Könet har däremot ingen betydelse.

När jag tänker nu, är det nog mycket förmågorna i matematik - mer de faktorerna i ett paket som spelar roll än om det är flickor och pojkar. /.../ Om jag sätter en massa som har svårt att uttrycka sig matematiskt i en konversation – då blir det inget samtal i den gruppen.

I en klass har emellertid Johanna tänkt på det sociala när hon parat ihop två elever. Det är två flickor som hon märkt mådde bra av den trygghet de kunde känna med varandra. Johanna tänker ur flera aspekter när hon bestämmer vilka som ska arbeta i par. Det hade fått gå före i det här fallet.

[...] de kan inte riktigt lyfta varandra, så de behöver mycket lärarstöd. De i sjuan hade istället olika kompetenser som kunde användas mot varandra. De i åttan kunde inte riktigt lyfta varandra egentligen, men det var effektivt i klassrummet för jag kunde gå till båda.

Johanna menar att det finns en risk att elever i behov av extra anpassning exkluderas om läraren inte är vaksam på sig själv. När läraren går fram bör man vända sig till den som är tyst i gruppen och inte fastna för mycket vid dem som pratar. Det kan hända att läraren måste be den som talar mycket att lyssna istället och få den som är tyst till att tala. För att göra detta behöver relationen mellan lärare och elev vara god.

[...] att läraren vänder sig till de två i gruppen som börjar prata och då stänger läraren också egentligen ute den här tredje eleven för att den inte är lika ”på”. Det här är ett läraransvar tänker jag. Jag kan säga till en som pratar mycket ”Nu vill jag att du är tyst! Nu vill jag höra vad Kalle har att säga!”, men då har jag jobbat mer med relationen så att jag kan göra det utan att någon blir stött. Det är därför jag tycker att man ska sätta relationen först, för jag vill kunna vara lite hård när jag kommer fram och säga ”Nu är du tyst!” [visar hur hon vänder på huvudet mot en annan elev] ”Nu får jag höra! Vad intressant! Har du sett där? Förstod du vad han sa nu?”

Om en elev tycker det är svårt att redovisa, kan Johanna stötta genom att be eleven skriva upp vad någon annan sagt. På det sättet tränar sig eleven på att förklara. En annan

variant är att hon ber eleven att bara skriva en del av sin lösning – bara en liten rad, för att få fram något som andra kan bygga vidare på. Då öppnas ett tillfälle att lyfta fram eleven vid exempelvis redovisningen:

Sen så gäller det ju att träna dem på att vara trygga i att gå fram och redovisa. Istället för att säga: ”Kan du skriva ner hela din lösning” och så vet man att det inte är riktigt rätt, då blir det ju så pinsamt. Då kan jag säga ”Just det där - kan du skriva det?”. Då blir det som att man tränar liksom. Så kan man sedan säga: ”Bra jobbat! De skrev det där idag!”

När Johanna går runt i grupperna mot slutet och väljer ut vilka moment hon vill belysa vid redovisningen är det många saker att tänka på. Det kan vara att välja ett visst steg eller en bit av en lösning och inte alltid hela lösningen. Vid redovisningen belyser hon olika sätt att lösa problem och hitta olika ingångar eller vanliga fällor som syns i klassrummet för att stimulera till diskussion. Hon kan också tänka på person – att en elev som inte har så lätt för att redovisa får gå fram och bara visa en del som eleven just denna gång lyckats med. Hon har bestämt att man inte behöver avslöja om man inte löst hela problemet. Hon strävar efter att alla ska känna sig trygga i att redovisa/presentera.

[...] då behöver de inte säga att de inte kunde lösa problemet, utan de visar det jag bett dem att visa. Så det är jag som bestämt vad de ska visa på tavlan.

Eleverna förefaller duktiga på att kommunicera matematik och detta kan bero på att Johanna tränat dem medvetet i kommunikation. Sjuorna och åttorna har fått träna vad hon benämner ”lyssna, tala och uppförande”. De har diskuterat vad man ska tänka på och hur man uppför sig vid samtal och när någon förklarar. Hon har också använt konkreta medel, skyltar i papper med c:a tre punkter på varje. De som går i sjuan har också fått prova på att ge varandra kamratrespons i kommunikation.

Jag hade talarskyltar i papper: ”Att tänka på när man talar” och ”Att tänka på när man lyssnar”. [...] I sjuan testade jag det här med att en grupp fick sitta och jobba med problemlösning och så stod de andra i ring runt om och så skulle de bedöma hur bra de här eleverna, som satt där, lyssnade på varandra och ge feedback till gruppen.

Matematiklärare Cecilia

Bakgrund

Cecilia är högstadielärare i matematik på en skola i Stockholms innerstad. Hon är en av en av lärarna som figurerar flitigt som exempel i Matematiklyftets lärportal. I studien har vi valt att studera filmer av Cecilia både i klassrummet (vid lektion i problemlösning) och anslutande filmer där hon intervjuas. Vi har haft tillgång till både de klippta och oklippta versionerna av materialet. Därtill har vi ställt följdfrågor till Cecilia för att ytterligare kunna belysa det vi vill studera i vår undersökning.

Klassen som filmats går i åk 6 i en skola i Stockholm och lektionen är i realtid 57 minuter lång. Lektionen har filmats med två kameror och ljudet är relativt bra. En kamera har följt Cecilia och den andra har följt eleverna. Transkriberingen har den råfilm där Cecilia är i fokus som grund, men som komplement har även den officiella filmen använts. Den officiella, ihopklippta, versionen av lektionen är 14,46 minuter lång och i den växlar perspektiven mellan Cecilia och klassen. Klassen består av 26 elever, men några elever är borta vid inspelningstillfället. Cecilia berättar att det finns 2-3

elever som är i behov av extra anpassning i matematik. Alla elever har bestämda platser och sitter i en stor hästskoform och med en mindre hästsko (sex platser) i mitten.

I Lärportalen för Matematik finns förutom filmen flera klipp ur en intervju med Cecilia gjord av NCM. Nedan följer utvalda klipp där Cecilia besvarar frågor som kan anses intressanta för den här studien, men eftersom Matematiklyftet inte har elever i behov av extra anpassning som särskilt fokus, har vi också kompletterat med en personlig intervju.

Delaktighet

Filmstudien Cecilia Vattenmelon

Lektionsmönstret är en del av hur delaktigheten i klassrummet sker. Nedan följer ett sammandrag av lektionsmönstret från filmen:

Cecilia inleder med att fråga vad de gjorde förra lektionen. De repeterar högt på duken delbarhetsreglerna. Därefter går hon över till att repetera de matematiska förmågorna. Hon tar det muntligt till hela klassen. Ordet FÖRMÅGOR står på duken.

Nästa moment är ett kort ”uppvärmningsproblem”. Hon visar problemet på duken och läser högt. En av eleverna verkar inte se vad som står och då repeterar Cecilia långsamt muntligt. Eleverna uppmanas lösa enskilt på en gång och de får skriva i ”lilla boken”. Även om Cecilia uppmanat dem att lösa själva pratar flera elever med sin kamrat. Samtalen ser ut att enbart kretsa kring problemet och Cecilia låter dem prata. Hon går runt och tittar på hur de löser problemet och hon ställer frågor till dem.

Efter några minuter påkallar Cecilia uppmärksamheten och säger att hon sett fem olika lösningar när hon gått runt. Hon låter två elever presentera sina lösningar. Deras häften läggs under en dokumentkamera så att alla kan se.

När den korta genomgången är klar, säger Cecilia att det är dags för dagens ”proffsproblem”. Som förberedelse till problemet får eleverna ett ”problemlösningshäfte” och tre olika stödlappar att klistra in i häftet. Alla är aktiva. Det har gått 18 minuter på filmen när Cecilia presenterar dagens riktiga problem. Cecilia är noggrann med att alla lyssnar och inte göra annat när hon ger en instruktion:

Hon märker att några ännu inte klistrat klart och pausar lite och säger:

Ni som klistrat färdigt kan börja läsa så att ni vet vad ni klistrat in. Vi kan inte börja med problemet förrän alla klistrat klart.

Det första som händer är att eleverna ber att få problemet på en lapp som de också klistrar in i problemlösningshäftet. Cecilia går igenom vad STA står för. De får fem minuter till att tänka på problemet enskilt. Det är tyst i flera minuter och eleverna läser, skriver och ritar i sina häften.

Cecilia går runt och tittar på ingångar till problemen. Två olika elever frågar om det hur mycket de äter tillsammans på samma melon på en halvtimme. En annan fråga rör ett kommatecken i texten. Cecilia svarar med låg röst tillbaka och det är svårt att uppfatta svaret.

Cecilia signalerar att eleverna får arbeta i par. Eleverna börjar direkt att "surra". Cecilia går runt och ställer frågor till de olika paren. Eleverna är aktiva och pratar med varandra. Cecilia uppmanar eleverna att inte säga sitt svar högt. Hon lägger fokus på att eleverna förklarar tydligt för varandra och hon vänder sig flera gånger till den som är tyst i ett par när de ska förklara för varandra.

Cecilia [till den som är tyst]: Förstår du vad han säger? Förstod du verkligen?

När 40 minuter av lektionen har gått är det dags för redovisning. Under tiden som eleverna arbetat i par har Cecilia valt ut vilka lösningar hon vill ska komma upp. Hon har under par-tiden frågat elever vars lösningar hon önskar om de kan tänka sig redovisa.

Det blir fyra lösningar som presenteras i tur och ordning. Cecilia pratar om att hon sett olika familjer av lösningar och att de som inte presenterar sin lösning, kommer att känna igen sig någon av familjerna. Därefter presenteras fyra delar av eller hela lösningar av olika slag.

När eleverna är framme och redovisar är Cecilia noga med hur eleverna kommunicerar. En elev, som löste problemet på fem minuter och har lätt för matematik, har just redovisat en del av sitt problem.

Cecilia: Har du kollat om någon fattar?

Elev: Är det någon som inte förstår?

Cecilia: Nej, fråga inte så. Det är lite pinsamt. Fråga "Är det någon som förstår?", så ser du snabbt att...

Elev: Är det någon som förstår?

Klass: Jaaa...

Cecilia: Många förstår, men några har inte sagt...

Elev i klassen avbryter: Jag har en fråga!

Under redovisningen tar Cecilia upp att om man kommunicerar och kan förklara hur man tänker, kan det leda till att man hittar en väg till lösningen. Om eleverna inte försöker att förmedla någonting, eller börjar skissa, då kommer de inte vidare. Genom kommunikationen bygger eleverna en väg in på rätta spåret.

Cecilia [till klassen]: Titta här!

Hon lägger häftet under dokumentkameran. Hon visar hur de [eleverna] försökt rita bilder av vattenmeloner som är uppdelade.

Cecilia: Det finns en tanke här. Tanken utvecklades och sen blev det ett problem, och då ledde det fram till att ni började prata med varandra om att ni måste hitta en gemensam nämnare.

Cecilia avrundar lektionen genom att sammanfatta och repetera vilka olika utmaningar som eleverna ställts inför med de olika lösningarna. Därefter frågar hon tre olika par vad de lärt sig idag. Eleverna säger lite olika – minsta gemensamma nämnare kommer upp, men en elev har dragit slutsatsen att man kommer ihåg olika saker från terminen och därför använder sig av olika lösningar. Cecilia repeterar vad eleverna säger högt till hela klassen.

Eleverna lämnar in sina problemlösningshäften innan de går på rast.

Intervju Delaktighet Cecilia

Cecilias lektioner har en tydlig gång: Enskilt-Par-Alla. Strukturen ger en förutsägbarhet för eleverna och ett lugn, hävdar Cecilia. Det som hon benämner STA² (enskild tid) är viktigt eftersom samtliga elever måste få tid att tänka själv först. Cecilia har gått kursen ”Rika Matematiska Problem”, där de tre faserna framhävs och att alla tre är viktiga för att *alla* elever ska vara med.

De behöver veta att de får tänka ut sin ingång. Därefter får de välja om de vill jobba vidare själv eller ihop med någon. De flesta vill jobba ihop med någon för de har märkt att de berikas av den andres ingång. De måste avgöra: din väg eller min väg? [...] De gillar att ha en gång. Det ger ett lugn. För mig är det också bra. Jag får större bredd på lösningar. (Matematikportalen)

Delaktigheten och aktiviteten är hög bland eleverna på Cecilias lektion. I Matematikportalen berättar Cecilia att eleverna i klassen är på olika nivåer. Alla kommer igång med problemlösningen, men det är inte så att alla löser hela problemet.

Alla började i alla fall med att samla de data de behövde och de ritade. Men det fanns två par som hade svårt att komma vidare sedan. De två paren hade bestämt sig för att rita. Det blev för svårt med bilden – 24 bitar – det blev så svårt. Elever är ju så olika i gruppen. En kille han löste hela problemet på 5 minuter. För andra tog det hela ”problemtiden”, bara att komma fram till hur de skulle göra. De som är snabba ber jag ofta komma på ett eget problem. De brukar vilja forma ett som är svårare än mitt och det håller dem sysselsatta. (Matematikportalen)

Samtliga elever brukar komma igång under STA-tiden – ingen vägrar sätta igång eller säger att det är för svårt. Läraren måste förebygga så att det inte händer genom att bygga upp ett klassrumsklimat, eller en kultur. Läraren behöver dels vänja eleverna vid vad STA är och träna lite successivt, men läraren måste också förklara de olika känslolägena som infinner sig när man löser problem.

Läraren måste förklara de olika stegen som blir när man löser problem: att man blir glad, man blir frustrerad, man blir ledsen, man blir uppgiven och tänker att man aldrig kommer att klara av det och sedan klarar man det. Att eleven VET att man upplever alla dessa faser. Att de inte slutar bara för att de tänker ”jag klarar inte av det”. (personlig intervju)

I portalen berättar Cecilia vad hon letar efter när hon går runt och iakttar paren. Hon upptäcker hon var ”stötstenen” ligger, men samtidigt är det intressant att se hur eleverna kommunicerar med varandra. Det är det här ögonblicket Cecilia tycker är allra mest intressant.

Jag ser hur de får klarhet medan de förklarar för den andra. Hur ett enda litet ord från en annan elev plötsligt gör att man kommer vidare. Man får klarhet i det ögonblicket. Det är häftigt! Idag såg jag när en elev sa: *Johan äter 1/6 av melonen. Den andre fyllde i med: Ja, men den andra är hälften så snabb. Det är 1/12.* De hjälpte varandra att lösa problemet. (Matematikportalen)

² Cecilia avslöjar i den personliga intervjun varifrån begreppet STA (Självständigt Tyst Arbete) kommer. Själva namnet STA togs från en tysk skola som hon besökte för mer än 20 år sedan. Hon har dock inte kopierat deras arbetssätt, bara ordet. I Tyskland arbetade de emellertid en hel dag STA, men det tror inte Cecilia på. Hon antar att STA-tiden är något som hon dels har läst om och dels sett fungera i undervisningen.

Cecilia lyssnar så att det råder någorlunda jämvikt i taltid emellan personerna i paren. Det gäller att läraren uppmärksammar om så inte är fallet. Vid pararbetet händer det ofta att den starkare eleven tar över ordet och att den som har svårigheter blir passiv. Där finns ett tillfälle för läraren att lyfta en elev.

Då måste läraren gå fram och be den som är tyst att förklara hur de har tänkt. Ofta finns inte tålmodet hos den som pratar att lyssna på den svagare eleven – de kör över, även när den svagare kanske har en bra ingång. Läraren måste ha tålmod och vänta så att den snabbare eleven får lyssna på hur den andre tänkt. Ibland händer det att den snabbare eleven säger ”Å, vad smart. Vi gör så!” Då växer ju den som är långsam. (personlig intervju)

Vid filmen ser man hur Cecilia ständigt går runt och lyssnar och bryter in i elevernas konversationer. Hon lyssnar och reflekterar aktivt hela tiden och verkar samtidigt lugn. I den personliga intervjun framgår att hon är erfaren och välplanerad, men att hon samtidigt anser att det är ett mycket intensivt arbete som kräver 100 % närvaro.

Att titta på helheten hos varje elev. Det är ett intensivt jobb. Jag brukar jämföra det med en orkesterdirektör, nu ska flöjtisten in, nu ska gitarristen in, nu ska oboe in... Alltså att man just då lämnar plats åt rätt person i rätt ögonblick. (personlig intervju)

I den personliga intervjun framgår ett tydligt inkluderande förhållningssätt hos Cecilia. Förhållningssättet signaleras också till de klasser hon har. Eleverna har ett gemensamt ansvar för lärandet. Hon hävdar att

Alla elever kan lära sig så att man blir godkänd i högstadiets matematik. Vi har mottot: Alla framåt. Det ska vara så. Klassen måste vara förberedd innan man börjar med problemlösning. De ska veta att ALLA ska framåt. (personlig intervju)

I Matematikportalen ger hon ett mer konkret exempel på hur hon får eleverna aktiva och delaktiga på sin lektion. Cecilia antar att det beror på att hon lär dem att hjälpa varandra.

Det kan bero på att jag ofta säger, när jag får en fråga, ”Kan du fråga kompisens bredvid?” (Matematikportalen)

I den personliga intervjun utvecklas detta sätt mer. Cecilia har ett begrepp som hon kallar ”skicka-vidare”. Om hon har förklarat något för en elev (elev 1), så frågar hon nästa gång hon får samma fråga ”Vill du ha en konsult?”. Därefter ber hon att elev 1 förklara för elev 2. Därefter får elev 2 vara ”konsult” till nästa elev (elev 3) som ställer samma fråga.

Det är underbart när man kan få höra hur en elev som har svårt med matematik kan få vara konsult åt någon annan. De växer enormt när de får förklara. Eleverna kan få höra: Å vad smart du är! (personlig intervju)

Cecilia har även haft ”styrketräningsbänk” under en period i en klass. Om någon hade varit borta eller inte riktigt förstod, då kunde den eleven gå till ”styrketräningen” och där hittade Cecilia en ”tränare” till den här eleven.

Alla ska ha förstått innan vi går vidare, annars blir det snart kaos i ett klassrum. (personlig intervju)

Stöttning

Filmstudien Cecilia Vattenmelonen

Cecilia börjar med en repetition av delbarhetsreglerna. Hon går också snabbt igenom de olika förmågorna i starten av lektionen.

Cecilia stöttar visuellt med text på smartboarden och hon konkretiserar något:

Efter att ha läst första meningen [av problemet] sakta och högt frågar hon:
Har ni hållit en vattenmelon? Vet ni ungefär vad en vattenmelon väger?
Hon fortsätter att läsa högt. Hon läser tydligt och ändrar röstläge för att förstärka och förtydliga. Avslutar med: Några frågor?

Det förekommer flera verktyg i undervisningen. Innan dagens huvudproblem presenteras delar Cecilia ut stora häften ("problemlösningshäften") och hon ber eleverna klistra in tre olika lappar som hon delar ut. På första lappen finns text i punktform och illustrationer (smileys) som beskriver dels vad ett problem är och dels hur processen när man löser ett problem kan vara. De övriga lapparna är "tipslapp" och en så kallad KLAG-lapp. (Bil.3) Eleverna klistrar in lapparna i häftet. Cecilia använder sig också flitigt av dokumentkameran för att visa elevernas lösningar. Någon elev frågar om de får lov att använda miniräknare och Cecilia svarar att de får om de vill.

Även om kommunikationen är central, finns det tillfällen då Cecilia undviker att svara på frågor. Hon vill inte hjälpa eleverna för mycket.

Elev: När du säger att hon äter hälften så fort...
Cecilia: Då gör hon det!
Elev: Äter hon på en och en halv timme eller sex timmar då?
Cecilia: Det kan jag inte svara på men hon äter hälften så fort.
Elev mumlar: Men vi måste ju ... [till synes inte riktigt nöjd med Cecilias svar]
Cecilia tar ingen notis av detta utan säger högt: Då är det dags för 5 minuter STA. 5 minuter!

Cecilia uppmanar elever att skriva upp vad de tänker. Hon står och lyssnar på ett par i början av par-tiden.

Cecilia [efter en stund]: Kommer ni ihåg att skriva samtidigt som ni tänker, för nu har du satt ihop din tanke med hennes tanke som blev en supersmart tanke, men ingen har skrivit upp det. Och sedan kommer ni att glömma det, så skriv upp hur ni har tänkt.

Det förekommer att Cecilia stöttar och hjälper eleverna lite mer framåt när de kör fast. Hon uppehåller sig i lite högre utsträckning hos dem som vi har i fokus. Under par-tiden går hon fram till ett par som har ritat en bild av en melon och delat upp melonen i flera rutor. De har ställt upp bråken $1/6$, $1/12$ samt $1/10$.

Cecilia: Vad är det du vill göra egentligen?
Eleven: Vill hitta minsta gemensamma nämnare.
Cecilia: Minsta gemensamma nämnare är 60. Detta är minsta gemensamma nämnare.
[hon pekar]
Elev: Ska jag gångra det och det med sextio? [osäker]
Cecilia [visar på vad som händer ifall de förlänger samtliga bråk med 60]: Är det vad du vill? Få 600 där och 360 där?
Elev: Jag vill plussa ihop deras del.
Cecilia: Om du vill addera måste du ha samma nämnare.

Elev: Ja, och då måste jag väl hitta minsta gemensamma nämnare.

Cecilia: Det har du hittat här. [pekar på elevens papper]

Elev: Så jag ska alltså dela 60 med de där talen först?

Cecilia är tyst och man hör att eleven räknar.

Cecilia lämnar dem i några minuter och går till två andra par och ställer frågor. Efter tre minuter är hon tillbaka och ställer frågor till paret igen. Lämnar dem åter för att besöka två andra par. Några minuter senare återvänder Cecilia till eleverna som fastnat med minsta gemensamma nämnaren.

De [eleverna] frågar ifall de kan rita figurer för att få ut det. Cecilia svarar att det blir svårt.

Cecilia: Vad heter den? [pekar på ett bråk]

Tystnad.

Cecilia: Den heter nämnare. Ni måste hitta gemensam nämnare.

Elev: Vänta, vänta, vänta... 60!

Cecilia: Ni är nästan framme.

Eleverna verkar ha kommit på nu hur de ska göra. Man hör att de förlänger ett bråk med 5.

Vid redovisningen tar Cecilia ofta upp delar av lösningar, inte enbart hela. Först ut vid redovisningen av huvudproblemet är det par som hade svårt med minsta gemensamma nämnaren. De får redovisa hur de började med att rita. De presenterar detta och får berätta vad stötestenen blev, nämligen minsta gemensamma nämnare. Nästa par har löst med procent och får berätta om den delen som blev deras problem – nämligen att omvandla procent till bråk. Sedan följer en kort redovisning av hela lösningen till problemet och sist tar Cecilia upp ett slut av en lösning, som skiljer sig lite från den förra.

Cecilia väljer inte heller enbart korrekta lösningar till redovisning, utan man hör henne säga några gånger:

Den lösningen är intressant! Får jag ta den?

Vid uppvärmningsproblemet i början av lektionen blir en lösning felaktig, men elevens lösning är ändå uppe för redovisning. Det visar sig att Cecilia ser det logiska i elevens lösning och kan lyfta fram vad som var bra i resonemanget.

Cecilia: Vi är alla överens om att det slutar på 475? Viktor får fortsätta att förklara!

Viktor inser plötsligt att han inte använt nollan.

Cecilia: Och därför tog du en trea där? Då är det alldeles lysande! Om vi levt på den tid då nollan inte fanns. [ler]

Cecilia: I matematikhistorien har det inte funnits någon nolla under en längre tid.

Eleven får möjlighet att förklara hur den tänkt. Eleven för ett matematiskt resonemang och får prata klart utan att läraren kommer in.

Kommunikationen är ständigt närvarande under lektionen. Cecilia är noggrann med att eleverna presenterar på rätt sätt, ibland kan det förefalla viktigare än själva matematiken.

Eleverna som räknat i procentform kommer fram till tavlan och börjar förklara sin lösning.

Cecilia säger: Är det någon som lyssnar på vad ni säger? Eleverna vänder sig till klassen och frågar om de förstår. Eleverna svarar ja.

Cecilia [förvånad]: Förstår ni verkligen?

Flera svarar ja och en hörs svara nej.

En av flickorna undrar i fall Cecilia förstår. Hon svarar att hon inte vet, därför att hon var distraherad av att pratade mot tavlan och inte mot resten av klassen.

Cecilia: ”Jag tänkte hela tiden när ska de vända sig om?”

I slutet och början ramar Cecilia in lektionen med sammanhangsmarkeringar. Det som börjat med en repetition av föregående lektion, avslutas med reflektionsfrågor av typen ”Vad har du lärt dig idag?”. I filmen vänder sig Cecilia bl.a. till paret som har haft svårt med minsta gemensamma nämnaren.

Flickan svarar: ”Hur man får ut minsta gemensamma nämnare.”

Intervju Stötting Cecilia

Cecilia brukar starta sina lektioner med att repetera vad de gjorde förra gången. Varje gång man repeterar något, bekräftar man det, menar Cecilia i intervjun på Matematikportalen. Det är därför lektionen inleds med repetition och med en genomgång av de matematiska förmågorna. När det gäller förmågorna avslöjar Cecilia vidare att hon hade som mål [med denna grupp] att repetera förmågorna så ofta hon kunde den första veckan den här terminen, så att förmågorna fastnar:

Sedan kan de dem. Då behöver jag inte ta upp dem mer – de sitter. (Matematikportalen)

Under STA-tiden går Cecilia runt och tittar efter vilka lösningar som kommer upp eller ser åt vilket håll det går. Hon upptäcker elevernas olika ingångar till problemet. Det förekommer att hon klargör vissa språkliga saker i uppgiften. I den personliga intervjun utvecklar hon på vilket sätt hon stöttar under STA-tiden.

Sedan händer det att jag går fram och hjälper eleverna med texten, själva formuleringen under STA-tiden. Det svarar jag på. Men om det gäller hur ska jag göra – det brukar jag inte svara på. Jag kan hjälpa dem med ord och begrepp. De vet också om att ett riktigt problem – det kan man inte lösa själv under STA-tiden. Då är det bara en uppgift. (personlig intervju)

Cecilia har i förberedelsen inför lektionen tänkt i förväg vilka ingångar hon tror ska komma upp. När eleverna sedan arbetar i par kräver det otroligt mycket uppmärksamhet från läraren. Läraren behöver skaffa sig en överblick på kort tid, se så att alla har en ingång till problemet och samtidigt vara noga med att avhålla sig från att bekräfta rätt svar.

Jag ser snabbt om någon inte kommer igång. Då går jag fram och frågar exempelvis: Vad är problemet? Jag får aldrig svara på om det är rätt eller fel. Då förlorar jag tyngd i slutdiskussionen. Då lyssnar de inte vid redovisningen i slutet. (Matematikportalen)

Klassrumsklimat och normer är viktiga för att alla elever ska lyckas – i en miljö där man får lov att göra fel och rätta till, utvecklas man. Cecilia försöker signalera att felaktiga lösningar är en normalitet i mänsklig utveckling. Den som gjort ett fel måste emellertid få en chans att förklara – eleven kommer ofta på själv vad som var fel och varför. Det ska råda en atmosfär där man inte känner sig kränkt om man gör fel.

Vi pratar ofta om att alla kan göra fel. Vi vinner väldigt mycket på att titta på vad som var fel. Det finns en vinst i misstag. Sedan frågar jag dem alltid. Idag var det t.ex. en elev som inte ville att jag skulle visa fel-lösningen och då gör jag ju inte det. Men det

fanns andra som gjort fel istället – och då ser eleven. Men det är viktigt att den som gjort fel får första chansen att ångra sig. Ofta kommer de på när de redovisar att de gjort fel. Då måste de få första chansen att rätta sig. (Matematikportalen)

Cecilia försöker visa i helklass att det ofta är flera som gör samma typ av fel. Eleverna ska förstå att man gör fel många gånger på vägen när man löser problem. Felen är viktiga i helklassdiskussionen för då får flera veta vad som gick fel.

Det framgår att Cecilia arbetar medvetet på olika sätt med att få eleverna att acceptera att de kan göra fel. För att få eleverna avslappnade till misstag avslöjar hon små knep som hon tar till ibland. Hon har exempelvis berättat för eleverna om något som kallas ”Mindset”.

[...]att neurologer har kommit fram till att varje gång man gör fel och rättar till det, växer kopplingen mellan neuronerna i hjärnan. Så om man gör fel kan man säga att hjärna växer. När eleverna gör fel nu säger de: Å, min hjärna växer! (personlig intervju)

Cecilias sociala klassrumsnormer benämner hon ”elementära” i Matematikportalen: material ska vara med, man är tyst och lyssnar när någon annan har ordet, man är öppen för att lyssna på hur andra tänker, man kan redovisa sina egna tankar så att andra förstår, man vågar tänka även om det tar tid. Lite mer implicit är normen att eleverna förväntas hjälpa varandra.

Vi har också ett begrepp här – vi säger konsult. Om någon gör ett fel, kan jag fråga – vill du ha en konsult? De ställer upp och hjälper varandra. Man måste hjälpa dem att hjälpa varandra. (Matematikportalen)

Cecilia menar att läraren ska lära eleverna att hjälpa varandra. I den här stöttningen är det kommunikationen och språket som är centralt. Det gäller att få eleverna att ställa bra frågor när de ska hjälpa. Hon tränar sina elever på olika sätt att förklara både genom muntliga instruktioner och skriftliga påminnelserappar.

[...] jag står ofta bredvid först. ”Förklara fast utan att säga svaret”, ber jag. Så står jag och lyssnar hur den förklarande eleven ställer frågor till den som kört fast. [...] Jag har gjort några tal-kort till eleverna. Vad man ska tänka på när man lyssnar och vad man ska tänka på när man förklarar. (personlig intervju)

Cecilia menar att det även ur den aspekten kan vara bra att inleda med ta upp en felaktig lösning vid en redovisning. Dels för att exemplifiera hur man kan börja med ett problem och vad konsekvenserna då blir. Det ger eleverna en viss säkerhet att veta vad som är fel och varför det gick fel. Dels för att som det samtidigt skapar en känsla av att lära tillsammans.

Det ska vara en atmosfär där vi *tillsammans* lär oss och vi hjälps åt med problemet - alla kan göra fel. (Matematikportalen)

Cecilia resonerar vid redovisning lite annorlunda kring elever som är i behov av extra anpassningar och fel. Ser hon något som är på rätt väg hos en elev, då vill hon absolut visa upp det. Felaktigheter däremot tar hon upp från en elev som har lättare för sig.

Sedan till redovisningen, om en långsam elev har en bra lösning eller en bra ingång – om den har gjort något bra – då SKA det visas. Det måste upp! Då växer de otroligt. Däremot om en lösning är sämre, då visar jag inte från en svag elev. Då tar jag alltid en

elev som är snabb och duktig i matte. En elev som tål det - som har status i klassen.
(personlig intervju)

Det är viktigt att eleverna får träna på kommunikation för att kunna förklara så att de själva och andra förstår hur de tänker. Cecilia börjar träna när hon får eleverna i sexan och det första vitala är att lära eleverna att inte tala förrän alla lyssnar. Detta är en förutsättning för att de sedan ska kunna värdera olika lösningar. Elever kan till att börja med ha svårt att formulera hur de tänker.

Jag tränar dem också på att skriva ner hur de har tänkt. Det kan vara svårt i början, men de lär sig snabbt. När de ser andras lösningar så får de input till hur man gör när man förklarar. Man lär sig alltså genom att träna på att redovisa själv och genom att titta på hur andra gör. (Matematikportalen)

Cecilia är mycket nöjd med dokumentkameran. Inte bara för att den sparar tid och att allt blir visuellt, utan också för det finns en kommunikativ vinst som även stöttar dem som kan ha svårt att formulera förklaringar. Här ser eleverna exempel på hur man kan förklara.

Dokumentkamera är suveränt. Eleverna får se hur man kan skriva och förklara. De vill skriva fint och kunna förklara så att andra förstår. (personlig intervju)

Eleverna har bestämda platser. Cecilia menar att eleverna bör sitta med någon som har samma nivå kunskapsmässigt, för annars jäktar den snabbare eleven den som är långsam. Den snabbare eleven blir frustrerad då den långsamma eleven inte håller samma tempo, eller hänger med i resonemanget. Den frustrationen går ut över eleven som behöver extra anpassning och det är förödande. Dessutom kan Cecilia ägna mer tid åt de par som behöver extra hjälp om hon kan placera dem ihop och nära henne själv.

Även om jag läst att det är bra med heterogena grupper och att blanda grupperna, så säger min erfarenhet något annat. Eleverna trivs bäst om de sitter i så homogena par som möjligt så att de kan sporra varandra, där de kan fastna för samma saker och ställa frågor till varandra på lagom nivå. För annars stressar den som är snabb upp den som behöver tid. Jag sätter dem som behöver tid tillsammans och de sitter närmast mig i klassrummet. De som sitter längst fram brukar ha svårast. Jag kan gå till dem ofta och lägga lite mer tid på dem. (personlig intervju)

Eleverna vet nog om att det är så här, men de är nöjda ändå när Cecilia talar om det på t.ex. utvecklingssamtal. Hon har provat att blanda paren, en snabb med en långsam.

[...] det blev ramaskri – ingen blev riktigt nöjd. De snabba tjtade på de långsamma och stämningen blev inte bra. Det fungerar inte alls för mig att blanda paren. Noll.
(personlig intervju)

Långa stunder är Cecilia hos eleverna utan att säga något och hon återkommer ofta till de elever som inte själva klarar av att gå vidare i uppgiften. Hon försöker lyssna mer än hon pratar, eftersom det ska vara eleverna själva som kommer fram till lösningen. Det kan vara frestande som lärare att ge eleverna ”svaret på gåtan” och berätta hur de ska tänka. Cecilia anser emellertid att läraren bör hejda sig - att det största ögonblicket är när eleverna kommer på lösningen själva.

Jag tror att vi lärare ofta pratar för mycket. Vi rövar bort möjligheten att lära sig. [...] Det skulle naturligtvis vara mycket lättare att berätta och det känns också mycket roligare att berätta ”Tänk så här”. Men om man orkar vänta några minuter till, kommer

ett ögonblick som är mycket, mycket större. Den glädjen - när elev har upptäckt det som jag ville berätta tidigare. Jag tror också att de kommer ihåg det mycket bättre än om jag skulle sagt "Tänk så här". Man kan ge ett litet tips, men det är de som ska ta steget framåt. (personlig intervju)

Sammanfattning av resultat

I fallstudien förekommer mönster som återkommer. Nedan följer en sammanfattning av de mönster och eventuella skillnader som upptäckts. De är uppdelade i de tre temana: delaktighet, stöttning och kommunikation.

Delaktighet

Lektionerna i fallstudien följer i huvudsak ett mönster (Repetition – Presentation av problem – Självständigt tyst arbete (5 min) – Pararbete – Redovisning och diskussion i stor grupp – Reflektion: vad har vi lärt oss idag?). I fallstudien Cecilia förekommer inledningsvis även en repetition av förmågorna från det centrala innehållet i matematik, samt ett "uppvärmningsproblem".

Under självständigt tyst arbete (STA) formar varje elev en ingång till problemet. Läraren cirkulerar och kontrollerar att alla uppfattat problemet och iakttar vilka ingångar som kommer upp. Under pararbetet lyssnar läraren mycket efter hur eleverna förklarar för varandra. Läraren ställer också stöttande frågor vid behov.

Båda lärarna poängterar att eleverna måste förstå *varför* läraren vill att de ska arbeta på ett visst sätt. Läraren måste förklara detta flera gånger – det räcker inte med att bara säga "nu gör vi så här" någon gång i början när man sätter igång med problemlösning. De tar båda upp att de förklarar och att de *tränar* eleverna i arbetssättet. Johanna nämner begreppet *didaktiskt kontrakt* flera gånger under intervjun.

Ingen av lärarna avslöjar om lösningen eleverna håller på med är rätt eller fel. De förklarar att i så fall tappar eleverna intresset för den gemensamma redovisningen i slutet. De vill behålla spänningen ända till slutet. Istället för att bekräfta ställer läraren frågor i stil med: Hur kan du vara säker? Hur kan du kolla att det stämmer?

I resultaten framkommer lärarens elevsyn och förhållningssätt. Cecilia hävdar att "Alla kan lära sig högstadiets matematik" och Johanna säger "Alla tankar är bra tankar. Sedan måste man jobba lite med dem". Båda har den bestämda uppfattningen att fel är intressanta och goda lärtillfällen och det här signalerar de till eleverna på lite olika sätt. Det går också att se spår av detta i observationer och filmstudie: "Den lösningen är intressant! Får jag ta den?"

Båda lärare talar om klimatet som en viktig faktor för delaktighet. Johanna nämner lärarens entusiasm som en väg för att få gott klimat, att verkligen visa att man tycker alla svar är intressanta. Cecilia nämner några knep – att hon försöker förklara att misstag är en naturlig del i mänsklig utveckling. Båda visar ibland felaktiga lösningar för att eleverna ska se vanliga fällor och förstå att de inte är ensamma om att göra fel.

Båda lärarna har stort fokus på den som är den "tysta" halvan i paret. De försöker skapa mer balans genom att hålla tillbaka dem som pratar mycket och ofta tar över lösningen,

för att de långsammare ska få en möjlighet att förklara sin tanke. När den som varit tyst fått förklara kan det ibland hända att deras tanke får bättre status och eleven växer genom detta.

Om en elev i behov av extra anpassning tagit ett steg framåt och fått klarhet, vill båda lärarna ta upp det vid redovisningen. Då förekommer det att lärarna visar en del av en lösning, eftersom det kan vara just den biten som är intressant, även om eleven inte nått ända fram.

Lektionerna avslutas med att lösningarna jämförs och diskuteras. Därefter frågar läraren vad eleverna lärt sig idag. Cecilia riktar sig till en person i taget med frågan och sammanfattar vad hon får höra. På Johannas lektioner skriver vanligtvis eleverna enskilt någon rad om vilken lösning de föredragit och vad de lärt sig idag.

Stöttning

Anledningen till att lärarna inleder med repetition är för att repetition befäster kunskaper och för att momentet de repeterar kan vara en hjälp för att lösa problemet som kommer. Det måste finnas en tydlig plan och ett mål med lektionen, påpekar båda lärare.

Båda är noga med att val av problem. Det ska vara ett problem som går att lösa på flera nivåer. Johanna berättar också att hon kan välja ett visst problem enbart för att komma åt en viss aspekt, som t.ex. hur olika eleverna kan uppfatta begrepp.

Under STA-tiden går båda lärare runt och hjälper elever som behöver få klarhet i problemets kärna. Cecilia anser att hon enbart kan tänka sig att hjälpa språkligt. Johanna ”hjälper dem på banan” för att alla ska ha något att bidra med innan de sätter sig i par.

Under partiden lägger båda lärarna mest tid hos par med elever som behöver extra anpassning. De ställer stöttande frågor till paren och det förekommer lösning om paren inte på något annat sätt kan komma vidare i processen. Båda lärarna poängterar dock att det *inte* är viktigast att nå fram till en hel lösning. Det kan räcka att eleverna kommer en bit, att de hittar en väg till att lösa problemet. Eleverna får sedan ta del av en hel lösning vid genomgången.

Eleverna arbetar under stor del av lektionen i par. De har bestämda platser och en av läraren bestämd arbetspartner som ligger ungefär på samma nivå kunskapsmässigt. Här skiljer sig lärarna i fallstudien något åt i hur de resonerar när man parar ihop eleverna. Johanna tar upp att eleverna kan komplettera varandra med styrkor i olika förmågor och i studien framkommer att hon tar hänsyn till sociala faktorer medan Cecilia menar att det är behoven som avgör. Cecilia vill ha så homogena par som möjligt. Hon talar om långsamma och snabba elever. Om en snabb elev sitter med en långsam elev blir den långsamma stressad och den snabba frustrerad, menar Cecilia.

Lärarna använder sig av lite olika verktyg i undervisningen. Cecilia använder dokumentkameran flitigt, vilket Johanna också gör om den finns till hands. Cecilia har ”problemlösningshäftet” med olika hjälplappar (Bil.3). Viktigaste verktyget är emellertid språket och kommunikationen. Båda lärarna har skapat ett klassrumsklimat där eleverna hjälper varandra genom att förklara och ställa frågor till varandra. Cecilia avslöjar i intervjun begrepp som ”skicka vidare”, ”konsult” och ”styrketräningsbänk”.

Båda lärare ägnar tid åt att träna på hur man kommunicerar. Eleverna har tidigare talat om hur god kommunikation fungerar och de har fått lappar med punkter som beskriver god kommunikation. Cecilia ställer i filmstudien flera gånger frågor i stil med: ”Har du kollat så att någon förstår?” Johanna belyser i intervjun hur hon har haft övningar där eleverna meta-kommunicerat om kommunikation. Eleverna har fått lyssna på hur ett par förklarar för varandra och sedan har paret fått feedback.

Alla elever förväntas skriva/skissa och kunna förklara hur de har tänkt. Om en elev har svårt att förklara får den möjlighet att se exempel vid genomgången i slutet. Vid genomgången presenteras alla lösningar både visuellt och muntligt och eleverna tränas då i att förklara och får dessutom ytterligare ett lärtillfälle.

Diskussion

Metoddiskussion

Vid pilotstudien framkom att det förekom undervisning där elever i behov av extra anpassningar inte var delaktiga vid arbete med problemlösning – de hamnade utanför. Vårt intresse i den här studien kom att riktas mot att studera vad som sker i ett klassrum där samtliga elever är delaktiga i problemlösning. Valet av metod föll på fallstudien eftersom vi ville fördjupa oss i processen och hitta framgångsfaktorer; i vad som gjorde eleverna delaktiga. Enligt Merriam (1994) lämpar sig fallstudie när man vill studera varför eller hur något sker och fördjupa sig i hur det man studerar kan förstås. För fallstudien vände vi oss till två erfarna matematiklärare med god erfarenhet i hur problemlösning bör genomföras och som är pålästa i socialkonstruktivismen i vilken Matematiklyftet tar avstamp. Den ena läraren fungerar dessutom som framgångsrikt exempel i portalen för Matematiklyftet.

Data samlades in på flera sätt: deltagande observation, filmstudie och intervju. Datan granskades av oss båda och resultatet har stötts och blötts mellan oss och vid oklarheter i har lärarna kontaktats för att ge en klarare bild. Datan har gällrats utifrån frågeställningarna och det mönster som framträder underbyggs med hjälp av citerade exempel från fältstudier, filmstudie och intervjuer. Att ha tillgång till flera olika typer av data, samt inspelat material har förhöjt tillförlitligheten och trovärdigheten i studien (Merriam, 1994).

Resultatdiskussion

Orkestrering

Utifrån den fallstudie vi genomfört framstår det Stein et al. (2008) benämner ”orkestrering” av lektionen som en nyckelfaktor, eftersom det första som framträder i resultatet är den tydliga lektionsstrukturen. Båda fall präglas av att lärarna bäddar för att delaktighet ska ske genom att ha en bestämd gång i sin lektion. Lektionerna inleds med repetition av föregående lektion, därefter problemlösning (enskilt-par-alla) och avslutas med sammanfattning och reflektion – vad har vi lärt oss idag? Stigler och Hiebert (1999) hävdar att ett välplanerat och tydligt lektionsupplägg är en avgörande faktor för god undervisning: *“Teaching and not teachers is the critical factor”* (sid. 10). De menar därför att lärare behöver få tid att studera varandra och tid att reflektera över hur de

undervisar, för att kvaliteten på undervisningen och de goda resultaten ska komma. Matematiklyftet bygger på de här tankarna och fortbildningen består delvis av kollegialt lärande.

En fördel vid orkestrering kan vara lärarens vana att arbeta med problemlösning. Lärarna i studien har delvis förutsett genom sina erfarenheter vilka typer av ingångar och lösningar som kan komma och båda verkar relativt förberedda. Att förutspå vilka lösningar som kan komma i fråga är en viktig del i planeringen av lektionen – det är en viktig del i orkestreringen, för att läraren ska kunna bedriva kvalitativ undervisning hävdar Stein, Engle, Smith och Hughes (2008). Eftersom lärarna förutsett i förväg vilka lösningar som kan tänkas dyka upp, har de också lättare att överblicka lösningarna under problemlösningsfasen och kan vara mer observanta på vad som händer i klassrummet (Stein et al.) På filmen med Cecilia syns hur hon har fokus på flera grupper samtidigt och hur hon återkommer till några elever med jämna mellanrum.

Till den avslutande redovisningen plockar läraren ut delar eller hela lösningar som läraren vill ska komma upp till slutdiskussion. Här väljer läraren ut lösningar som är lämpliga att jämföra och som kan åskådliggöra olika lösningsmodeller. Det är viktigt för kvalitén i undervisningen att det är just läraren som väljer och att det inte råkar bli frivilliga elever (Stein et al., 2008).

En elev i behov av extra anpassning får sålunda ytterligare ett tillfälle att lära, i fall eleven inte hunnit fram till lösningen själv. Ett exempel på detta är när eleverna hos ”Cecilia” slutligen kommer fram till att de behöver minsta gemensamma nämnare för att lösa ett problem. Att få eleverna att inse vilka lösningar som är hållbara över tid, är också ett sätt att arbeta förebyggande mot att eleverna hamnar i svårigheter när abstraktionsgraden ökar längre fram. Enligt Ahlberg (1992) krävs ett successivt ökande av abstraktionsgraden i undervisningen, för att eleverna ska lära sig generalisera sina matematiska kunskaper och kunna använda dem i andra problemsituationer.

STA-tiden

Att lärarna förstår vikten av den enskilda tiden innan eleverna ska diskutera i par gynnar delaktigheten. Båda lärare är mycket noggranna med att varje elev verkligen får tänka efter själv först. Eleven måste få möjlighet att sätta sig in i vad problemet går ut på och forma en egen ingång till problemet i lugn och ro. För att bli delaktig i hela kommande problemlösningsprocessen krävs att eleven har skapat sig en egen tanke. Det här är i enlighet med den socialkonstruktivistiska tanken där man studerar hur en individ bygger sin egen kunskap i växelverkan med andra individer (Björkqvist, 1993; Jaworski, 1998).

Val av problem

Hos båda lärarna anknyter problemen till något som eleverna har hållit på med tidigare. Problemet kan inte väljas ut av en slump, eller för att läraren plötsligt hittar något inspirerande som man vill eleverna ska få ta del av. (Stein et al, 2008) Val av problem är ett moment i orkestreringen av lektionen och en viktig del i att förbereda på bästa sätt. Enligt båda lärare är det viktigt att problemet är en utmaning och att det går att lösa på olika nivåer. Enligt Sjödin (1991) sker den bästa kunskapsinhämtningen då problemet gör att eleverna behöver någon att diskutera med för att hitta en lösning. Det krävs en ansträngning av eleverna att komma fram till en lösning. Detta resulterar i en högre gruppinteraktion och att eleverna resonerar mer med varandra.

Det är samtidigt viktigt att läraren tar hänsyn till de elever som är i behov av extra anpassningar, annars riskerar problemet att bli för svårt och eleverna kommer därmed inte att bli delaktiga. Taflin (2007) menar att samtliga elever ska kunna ”ta tag” i problemet och lösa en bit av det – alla ska känna att de kommer någonstans, även om de inte kan lösa hela problemet. Hagland, Hedrén & Taflin (2005) använder begreppet *rika* matematiska problem.

[...] ett riktigt rikt problem är ett problem ska helst passa från förskolan till högskolan, och det ska kunna behandlas många gånger utan att man kramat ur all matematik ur det (s. 28).

Att ett matematiskt problem väcker behov att resonera och diskutera är något som är i linje med det sociokulturella perspektivets syn på hur lärande sker.

Par-grupper

Antalet elever och hur eleverna delas in i grupper/par kan vidare påverka delaktigheten. I fallstudien har båda lärarna god överblick hela tiden och kan verka som att de gör flera saker samtidigt, men de verkar inte stressade. En förklaring till att läraren klarar av att ha alla 20 elever under sin vinge, kan vara den homogena par-sammansättningen. Det blir tio ”enheter” istället för 20, vilket kan kännas mer rimligt att överblicka. Ur ett sociokulturellt perspektiv, där läraren fungerar som den mer kompetente som vägleder den mindre kompetente genom mentala stöttor, blir uppgiften något mer hanterbar. I pilotstudierna var eleverna runt 30 och det förekom tregrupper. I Sjöbergs undersökning (2006) framkommer att stora undervisningsgrupper, brist på arbetsro och lärarens brist på tid för individuella samtal drabbar elever som hade svårt med matematik och kan även vara en orsak till att elever slutligen hamnar i matematiksvårigheter.

Sjödin (1991) fann att de lågpresterande eleverna hade bäst samarbete när de arbetade i två-grupper. Båda lärarna i fallstudien sätter eleverna i par, inte i tre- eller fyrggrupper. Resonemangen skiljer sig något åt i de två fallen. Cecilia säger att eleverna ska jobba i par, Johanna kan tänka sig tregrupper om eleverna är duktiga på att samarbeta och om de har kommit en bit på vägen i problemlösningen. Vid observationerna syns uteslutande par-konstellationer. De här paren sätts ihop av läraren på något olika grunder. Enligt Larsson (2014) bör eleverna inte vara fler än två eller tre vid problemlösning. Grupperna kan vara heterogena, så länge skillnaderna inte är alltför stora, anser Larsson (a.a.).

Klimat och normer

Forsmark (2009) menar att framgångsrika elever vågar tänka på egen hand och betraktar misslyckanden som en naturlig del i lärandet. Båda lärare i studien betonar att en ingång till en lösning kan vara lika intressant, även om den inte är lika effektiv. Att visa en del av en lösning kan vara ett sätt att få alla elever delaktiga, eftersom det ökar motivationen att lyssna om eleven har fått sätta sig in i problemet och kan bidra med en tanke själv. Det här kan också bli ett tillfälle för läraren att lyfta en elev i behov av extra anpassning. Här kan läraren konkret framhäva något positivt och eleven kan få ta plats och förklara, vilket förbättrar elevens självkänsla. Enligt Ahlberg (2001) är det viktigt att eleverna får en chans att samtala om matematik utan krav på att ge ett korrekt svar, för att öka elevernas självkänsla och motivation.

Vid fallstudien syns att lärarna har väletablerade didaktiska kontrakt. Lärarna ger inte svar på frågor som kan hjälpa eleverna att lösa själva problemet och de avslöjar inte om eleverna gör rätt eller fel. Läraren överlämnar ansvaret till eleverna att konstruera sin egen kunskap i det Brousseau kallar a-didaktiska situationer (1997). Enligt Brousseau är det ett naturligt steg i utvecklingen att göra fel och det ska inte ses som ett misslyckande. Båda lärarna i studien visar också tydligt att felaktiga lösningar är intressanta och tar upp fel till diskussion och belyser dem som ett naturligt led i en människas utveckling. Det är viktigt att som lärare veta vilka vanliga missförstånd och felinlärningar som existerar hos eleverna och att förebygga dessa. Annars finns en risk att vissa felinlärningar kvarstår hos eleverna. Att ta upp felaktiga lösningar till diskussion är ett sätt att förebygga att eleverna hamnar i matematiksvårigheter längre fram (Hansson, 2011; McIntosh, 2008). Genom att se till att redovisningen blir tydlig och strukturerad och på så sätt undvika att hamna i vad Stein et al. (2008) kallar för "show and tell" verkar Johanna och Cecilia för att eleverna aktivt lyssnar på varandra och tar del av varandras exempel. På detta sätt verkar lärarna för att institutionalisering av kunskap sker som är viktig för att elevernas kunskaper skall bli kulturellt accepterade och användbara utanför klassrummet.

Ur aspekten lärande kan det didaktiska kontraktet gynna eleverna så till vida att de får konstruera sin egen kunskap (Brousseau, 1997). I kontraktet mellan läraren och eleverna i fallstudien är normen att eleverna förväntas muntligt och skriftligt förklara hur de för sina matematiska resonemang. Den viktigaste medierande artefakten i det här sammanhanget är språket. Eleverna behöver det för att i synnerhet för att kunna kommunicera med varandra. I arbetet med problemlösning ansvarar eleven för att konstruera sin egen kunskap, men läraren ansvarar för att kunskapen ska bli konceptuell och kulturellt accepterad (Hansson, 2011). Detta stämmer väl överens med Brousseaus (1997) teorier om didaktiska situationer. Riktigt lärande uppstår när eleven själv får konstruera sin kunskap. Cecilia understryker detta när hon intervjun säger att lärare pratar för mycket och då berövar eleverna möjligheten att lära sig. Båda lärarna i studien menar att etableringen av kontraktet måste få ta tid. Eleverna behöver upprepade gånger höra varför de ska arbeta på ett visst sätt. Därtill behöver eleverna lära vad och hur de ska göra.

En framträdande faktor för att skapa ett gynnsamt klimat för delaktighet är lärarens förhållningssätt gentemot eleverna. Båda lärare har som motto att *alla* elever ska utveckla sitt lärande och att alla elevers svar är intressanta. Lärarnas förhållningssätt till rätt och fel skulle kunna inverka på delaktigheten – att det är mer intressant hur eleven har tänkt, än hur resultatet blir. Om man får lov att göra fel och sedan rätta till det, ökar chansen att man vågar prova. Det centrala är inte att komma fram till rätt svar – det är vad som händer under lärprocessen när de löser problem. I fallstudien Cecilia kommer det fram att hon beskriver den jobbiga fasen genom att visuellt visa eleverna i text och illustrationer hur en sådan process kan kännas. Hon menar att alla elever ska känna till att problemlösning innehåller en fas där alla kan känna hopplöshet och otillräcklighet, men med tålmod kommer så småningom en vändning. Hon signalerar att man inte ska ge upp även om det känns tungt och hopplöst.

Båda lärare förväntar sig att eleverna tar ett kollektivt ansvar för varandra, genom att eleverna uppmanas att förklara för varandra. Det har exempelvis skapats begrepp som "konsult" och "styrketräningsbänk" i fallet "Cecilia". Enligt Sjödin (1991) gynnas den individuella kunskapsinlärningen av samarbete jämfört med fri gruppnorm och tävling. I

båda klassrummen ingår i det didaktiska kontraktet att man hjälps åt och lär matematik tillsammans.

Kommunikation som stöttning

I studien kan man se olika typer av stöttning av elever i behov av extra anpassning. Läraren går runt under egna tiden och ser så att samtliga har uppfattat problemet. För att bli delaktig i problemet behöver varje elev ha uppfattat vad problemet är – rent språkliga frågetecken behöver rätas ut. När eleverna övergår i par fortsätter läraren att lyssna till paren och ställer stöttande frågor när det behövs. Det förekommer att stöttningen övergår i lotsning, när paret efter en tid fortfarande inte kommit vidare.

Läraren stöttar också genom att skapa talutrymme för tysta elever. Inom sociokulturell teori är det viktigaste medierande redskapet språket (Säljö, 2000) och genom att läraren hjälper till att skapa talutrymme, blir en passiv elev mer aktiv och delaktig i den lärande processen.

Johanna och Cecilia har tydliga strategier för att fostra eleverna till att stötta varandra. Johanna har tränat sina grupper i kommunikation, hur man lyssnar och talar med varandra. Cecilia använder sig exempelvis av metoden ”skicka-vidare” och genom att ha ”konsulter”. Eleverna lär sig hur man ställer stöttande frågor och de uppmanas att inte tala om svaret. Hon lyssnar inledningsvis för att försäkra sig om att eleverna stöttar på rätt sätt. Brandell och Backlund (2013) menar att en kamrat eller lärare genom rätt sorts frågor kan upprätta en mental byggställning så att eleven kommer vidare och kan konstruera ny kunskap och nå en ny nivå i sin utvecklingszon.

Ahlberg (2001) menar också att kommunikation är essentiell för delaktigheten och lärandet. En artefakt för att stötta kommunikationen i klassrummet är dokumentkameran. Eleverna blir tränade i sin skriftliga förmåga och behöver lära sig att redovisa sina lösningar för resten av gruppen. Användandet av dokumentkameran gör att eleverna blir medvetna om att deras lösning kan komma att visas upp för resten av gruppen. En elev som har svårt att redovisa sina tankar i skrift får möjlighet att träna och se flera exempel, eftersom dokumentkameran skapar tillfälle att se olika lösningar på en gång.

Slutdiskussion

Lärarna i de två fallen är skickliga på att hjälpa elever i behov av extra anpassning genom stöttande frågor. Samtidigt är det intressant att det i fallstudien framkommer att lärarna vid enstaka tillfällen bryter mot sitt didaktiska kontrakt, t.ex. i situationer när elever som är i behov av extra anpassning har stora svårigheter att komma framåt. Då kan det som börjar som stöttning övergå i lotsning. Det är emellertid något som kan vara nödvändigt eftersom lärarna har begränsad tid att vänta - eleverna klara sina kurser inom en viss tid. Om vi blickar framåt, till tiden i gymnasieskolan, kan detta vara en förklaring till att problemlösning kan kännas svårt att genomföra. I ett kursutformat system, har eleverna ännu kortare tid på sig att lära och läraren har kort tid på sig att etablera ett didaktiskt kontrakt.

Stigler och Hiebert (1999) menar att japanska lärare ser olikheter hos elever som en tillgång medan amerikanska lärare betraktar olikheterna som ett hinder i undervisningen. I Japan har lärarna under flera års tid ägnat sig åt Lesson Study för att förbättra

undervisningen och en relativt stor del av japanska lärares arbetstid går till kollegialt samarbete. Om svenska lärare ska kunna bedriva liknande systematiskt kvalitetsarbete kommer det att behövas en organisation som viker tid för detta ändamål. Det vore önskvärt att inställningen till elevernas olikheter kunde ses som en tillgång och att lärare gemensamt hittar vägar där vi tillvaratar dessa olikheter.

Ett annat exempel som kan kopplas till tidsfaktorn är att båda matematiklärarna i studien tränar eleverna i att kommunicera på ett framgångsrikt sätt. Kommunikation är ett viktigt redskap vid stöttning. Eleverna i studien har genom lärarledd träning fått vässa sitt verktyg och det har lagts tid på hur man kommunicerar väl. Detta kan vi föreställa oss kan upplevas som ett dilemma för en del lärare. Om en lärare har ett digert matematiskt stoff i det centrala innehållet som ska hinnas med på kort tid, kanske endast en termin, kan det kännas irrelevant att metakommunicera om kommunikation under matematiklektionen.

En annan konkretare artefakt är Cecilias dokumentkamera. Det vore intressant att ta reda på hur andra lärare och elever upplevde det att arbeta med dokumentkamera. Vet alla om att det här hjälpmedlet finns? Vidare hade vi velat veta lite mer om hur elever i behov av extra anpassning upplever användandet av dokumentkameran.

Att som Stigler och Hiebert (1999) hävda, att det är endast undervisningen och inte läraren som person som är viktig, håller vi oss skeptiska till. Vi ser i vår fallstudie att båda lärarna har höga förväntningar på *alla* sina elever. Det här är något vi varken kan bortse från eller placera i en gångbar metod – det är ett förhållningssätt.

Specialpedagogiska implikationer

Det avgränsade ämnet i den här studien är delaktighet för samtliga elever vid arbete med problemlösning i matematik. Det är inte att säga att vår studie har betydelse för samtliga lärare som arbetar med matematisk problemlösning, men ur ett specialpedagogiskt perspektiv kan det finnas aspekter värda att uppmärksamma. Läroplanen för grundskolan förespråkar problemlösning i matematik och den svenska skolan i stort strävar efter att arbeta utifrån ett inkluderande perspektiv. I skollagen (kap 3, 5§) framgår att undervisningen ska anpassas så långt det är möjligt inom ramen för den ordinarie undervisningen, vilket är en tydlig signal att första åtgärd då problem uppstår *inte* är att ta ut eleven ur klassrummet och bilda särskild grupp. Ett dilemma för läraren och specialpedagogen/specialläraren kan vara att fundera ut vilka anpassningar som är möjliga. Vår studie kan vara ett bidrag i diskussionen mellan matematiklärare och specialpedagog i frågan hur man kan få samtliga elever i klassen, trots olika förkunskaper och förutsättningar, delaktiga i lärandet. Varje individ och situation är unik och en fallstudie kan inte ge några generella råd, men om någon kan känna igen sig i studien och ta med sig något ur resultatet att applicera i sin undervisning, då kan resultatet i studien ha specialpedagogisk betydelse.

Vidare forskning

Det är intressant att lärarna i båda fallen anser att par är den rätta gruppstorleken för att uppnå delaktighet. Vi hade gärna sett vidare forskning som undersökte vilken par-konstellation som gynnar elever i behov av extra anpassning och vilka effekter det i så fall kan ha på hela gruppen. Kan det också vara olika beroende på vilket ämne?

Det vore också intressant att göra en mer omfattande studie beträffande delaktighet, elever i behov av extra anpassningar och problemlösning. Vi har valt att fokusera på två lärare och hitta framgångsfaktorer i deras klassrum. Det skulle vara intressant att gå in i flera slumpmässigt utvalda klassrum där man arbetar med problemlösning för att undersöka när elever i behov av extra anpassningar blir delaktiga och vice versa.

Vad säger eleverna själva? Hur upplever elever i behov av extra anpassning matematikundervisning som bedrivs enligt Matematiklyftets intentioner? Upplever de högre motivation och att de lär sig mer? En studie som fokuserar på elevernas upplevelse av problemlösning i grupp vore en annan intressant ansats.

Referenslista

- Ahlberg, A. (1991). Att lösa problem i grupp. I G. Emanuelsson, B. Johansson och R. Ryding (Red.), *Problemlösning* s. (85-99). Lund: Studentlitteratur.
- Ahlberg, A. (1992). *Att möta matematiska problem: En belysning av barns lärande*. Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.
- Ahlberg, A. (2001). *Lärande och delaktighet*. Lund: Studentlitteratur
- Bentley, P-O. (2012). *Framgångsrik undervisning med fokus på det matematiska innehållet*. I Skolverket, Rapport nr. 378. (2012). *Utökad undervisningstid i matematik*. Stockholm: Skolverket.
- Björkqvist, O. (2001). Matematisk problemlösning. I Grevholm, B. (Red.), *Matematikdidaktik – ett nordiskt perspektiv*, s. (115-130). Lund: Studentlitteratur.
- Björkqvist O. (1993). Social konstruktivism som grund för matematikundervisning. *Nordisk matematikdidaktik* 1(1), 8-16.
- Björndahl, P, & Cato, R. (2005). *Det värderande ögat*. Stockholm: Liber
- Blomhøj, (2014). *Ett osynligt kontrakt mellan elever och lärare*. Hämtad 2015-03-03 från <https://matematiklyftet.skolverket.se/>
- Boaler, J. (2011). *Elefanten i klassrummet*. Stockholm: Liber
- Brandell, G. & Backlund, L. (2011). Samarbetslärande i matematik. I Brandell, G & Pettersson, A. (Red.), *Matematikundervisning – vetenskapliga perspektiv*, s. 115-148. Stockholm: Stockholms universitets förlag (tidigare HLS Förlag)
- Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics 1970-1990/by Brousseau; edited and translated by N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland & V. Warfeld*. Dordrecht; London: KLUWER Academic Publishers.
- Cobb, P & Yackel, E. (1996). *Constructivist, Emergent, and Sociocultural Perspectives in the Context of Developmental Research*. Hämtad 2015-04-02 från <https://www.tlu.ee>
- Engström, A. (2003). *Specialpedagogiska frågeställningar i matematik – en introduktion*. Örebro Universitet: Pedagogiska institutionen
- Fangen, K. (2005). *Deltagande observation*. Stockholm: Liber
- Fischbein, S. (2007). Specialpedagogik i ett historiskt perspektiv. I C. Nilholm och

- E. Björck-Åkesson (Red.), *Reflektioner kring specialpedagogik – sex professorer om forskningsområdet och forskningsfronterna* (17-35). Stockholm: Vetenskapsrådet
- Forsmark, S. (2009). Att lära matematik – främjande och hindrande faktorer. I A. Ahlberg (red.), *Specialpedagogisk forskning. En mångfasetterad utmaning* (s. 213-230). Lund: Studentlitteratur
- Hagland, K. Hedrén, R & Taflin, E. (2005). *Rika matematiska problem – inspiration till variation*. Stockholm: Liber
- Hansson, Å. (2011). *Ansvar för matematiklärande: effekter av undervisningsansvar i det flerspråkiga klassrummet*. Diss. Göteborg: Göteborgs universitet
- Helenius, O. (2014). *Det didaktiska kontraktet*. Hämtad 2015-05-02 från <https://matematiklyftet.skolverket.se>
- Jablonka, E. (2011). The (hidden) rules in a mathematical classroom. I Brandell, G & Pettersson, A. (Red.), *Matematikundervisning – vetenskapliga perspektiv*, s. (65-89), Stockholm: Stockholms universitets förlag (tidigare HLS Förlag)
- Jaworski, B. (1998). Att undervisa i matematik: ett socialkonstruktivistiskt perspektiv. I A. Engström (Red), *Matematik och reflektion* (s. 97-123). Lund: Studentlitteratur
- Kvale, S. & Brinkmann, S. (2009). *Den kvalitativa forskningsintervjun*. Lund: Studentlitteratur
- Larsson, M. (2013). *Undervisa i matematik genom problemlösning*. Hämtat 11 mars 2014 från, <https://matematiklyftet.skolverket.se>
- Larsson, M. (2014). *Undervisa i matematik genom problemlösning*. Hämtad 2015-05-02 från <https://matematiklyftet.skolverket.se>
- Lester, F. K. & Lambdin, D. (2007). Undervisa genom problemlösning. I J. Boesen (Red.), *Lära och undervisa matematik – internationella perspektiv*, s. (95-108), Göteborg: Nationellt Centrum för Matematikutbildning
- Lester, F. K. (2011) Problemlösningens natur. I G. Emanuelsson, K. Wallby, B. Johansson, R. Ryding och A. Wallby (Red.), *Matematik – ett kommunikationsämne*, s. (85-91), Göteborg: NCM/Nämnamnaren
- McIntosh, A. (2008). *Förstå och använda tal – en handbok*. NCM Göteborgs universitet
- Merriam, S. (1994). *Fallstudien som forskningsmetod*. Lund: Studentlitteratur.
- Persson, P-E. (2010) Räkna med bokstäver! En longitudinell studie av vägar till en förbättrad algebraundervisning på gymnasienivå. Luleå: Universitetstryckeriet Luleå

- Pólya, G. (2003). *Problemlösning: En handbok I rationellt tänkande*. Lund: Studentlitteratur
- Rittle-Johnson, B. & Schneider, M. (2012). *Developing Conceptual and Procedural Knowledge of Mathematics*. Hämtad 2015-05-02 från <https://www.uni-trier.de>
- Ryve, A. Lärportalen för Matematik, Skolverket. Problemlösning i matematikundervisningen (del 1), Hämtad 2015-05-02 från <https://youtu.be/m8ZolP8w6ZM>
- Sjöberg, G. (2006). *Om det inte är dyskalkyli – vad är det då?*. Diss. Umeå: Umeå universitet.
- Sjödin, S. (1991). *Problemlösning i grupp – betydelsen av gruppstorlek, grupp-sammansättning, gruppnorm och problemtyp för gruppprodukt och individuell kunskapsbehållning*. Pedagogiska institutionen: Umeå universitet
- Skolinspektionen, Rapport nr. 13. (2010) *Undervisningen i matematik i gymnasieskolan*. Hämtad 20 december 2013 från: <http://www.skolinspektionen.se>
- Skolverket, Rapport nr. 380. (2012). *TIMSS 2011- Svenska grundskoleelevers kunskaper i matematik och naturvetenskap i ett internationellt perspektiv*. Hämtad 10 december 2013, från <http://www.skolverket.se/publikationer?id=2942>
- Skolverket (2011). *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet 2011*. Hämtad 14 april 2015 från: <http://www.skolverket.se>
- Skolverket (2014). Allmänna råd. Arbete med extra anpassningar, särskilt stöd och åtgärdsprogram. Stockholm.
- Skolverket (2015) Lärportalen för matematik. *Modulfilmer för grundskolans årskurs 7-9*. Hämtad 2 maj 2015 från: <https://matematiklyftet.skolverket.se>
- Skolverket (2015) Lärportalen för Matematik. *En lektion i problemlösning med bråk*. Hämtad 4 maj 2015 från: <https://youtu.be/iFVBQRqsF0>
- Socialstyrelsen (2010) *Internationell klassifikation av funktionstillstånd, funktionsnedsättsättning och hälsa. Barn- och ungdomsversion*. Hämtad från <http://www.socialstyrelsen.se>
- SOU 2004:97. *Att lyfta matematiken – intresse, lärande, kompetens*. Stockholm: Utbildningsdepartementet.
- Stein, M.K., Engle R.K., Smith, M.S & Hughes, E.K. (2008) *Orchestrating Productive Mathematical Discussions: Five practices for Helping Teachers Move Beyond Show and Tell*, hämtad 2015-04-13 från: <http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/10986060802229675>

- Stigler, J. & Hiebert, J. (1999). *The teaching gap: Best ideas from the world's teacher for improving education in the classroom*. New York: The Free Press.
- Säljö, R. (2000). *Lärande i praktiken – Ett sociokulturellt perspektiv*. Stockholm: Prisma
- Taflin, E. (2007). *Matematikproblem i skolan – för att skapa tillfällen till lärande*. Doktorsavhandling, Umeå: Umeå universitet.
- Thomas, N. (2007). Towards a theory of children's participation. *International Journal of Children's Rights*, 15, 199-218
- Trouche, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: Guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, Vol.9.
- Vetenskapsrådet (2013). *Forskningsetiska principer*. Hämtat den 10 december 2013, från www.codex.vr.se/texts/HSFR.pdf
- Webb, N. (1989). Peer interaction and learning in small groups. I Webb, N.(Ed). *International Journal of Educational Research*. Vol 13, nr 1, s 89-98.
- Wyndhamn, J., Riesbeck, E. & Schoultz, J. (2000). *Problemlösning som metafor och praktik*. Institutionen för tillämpad lärarkunskap. Linköpings universitet, Linköping.

Bilagor

Bilaga 1

Intervjufrågor Cecilia – utdrag från Matematiklyftets portal

Varför så tydlig gång: STA - pararbete - redovisning?

Vem kom inte igång?

Vad tittar du efter när du går runt?

Hur får du eleverna så aktiva på lektionerna?

Varför börjar du som du gjorde [repetition och förmågor]?

Vad gör du under STA-tiden?

Hur kan läraren och kamraterna stötta eleven?

Hur skapar du ett klimat där eleverna resonerar och pratar matematik?

Hur avdramatiserar du rätt och fel?

Miniräknare – får de ha det?

Varför viktigt med tydliga förklaringar?

Varför använder du dokumentkamera?

Vilken är vinsten med att redovisa för andra?

Länkar till intervjumaterialet:

Intervju med Cecilia Christiansen (13.15 min)

<https://youtu.be/OmtLH1CBWZs>

Om förhållningssätt under elevernas arbete (från 2.30-5.00 min.)

<https://youtu.be/IsGjDxjFk9Q>

Om klassrumsklimat och normer (0.10-4.12 min.)

<https://youtu.be/K8ongv5YHJA>

Bilaga 2

Frågor vid personlig intervju med Cecilia

Hur många elever går i klassen och vilken årskurs?

Hur påverkades klassen av filmningen?

Vilka elever har matematiksvårigheter i gruppen?

Vad kommer ditt lektionsmönster ifrån? Vad kommer STA-tiden ifrån?

Vad gör du om eleverna inte kommer igång under STA-tiden?

Vad har du för tanke när du delar in eleverna i grupper? (Och hur de sitter i klassrummet)

Vilken prioritering gör du när du går runt?

Vid problemlösning – vad är viktigast att tänka på för elever som är i behov av extra anpassning?

Vad beror det på [att de vågar göra fel] i ditt klassrum?

Du återvände ofta till eleverna som hade kört fast, men du säger ändå inte så mycket. Berätta!

Hur jobbar du med normer i klassrummet?

Vilka verktyg använder du?

Hur gör du för att få eleverna att redovisa?

Hur får du med alla elever?

Bilaga 3

Två exempel på Cecilias ”hjälp-lappar” vid problemlösning

Problemlösning
är det man gör när
man inte vet vad
man ska göra.



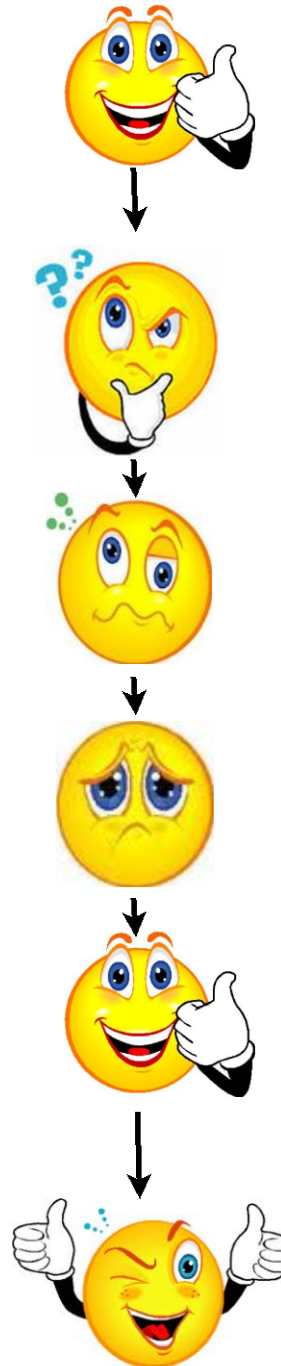
Uppgift är något
man stött på
tidigare och som
man kan lösa med
vanliga
standardmetoder.

Problem är något
man inte stött på
tidigare och som
man inte kan lösa
med vanliga
standardmetoder.

Ett **problem** är en
utmaning som kan
lösas på flera olika
sätt.

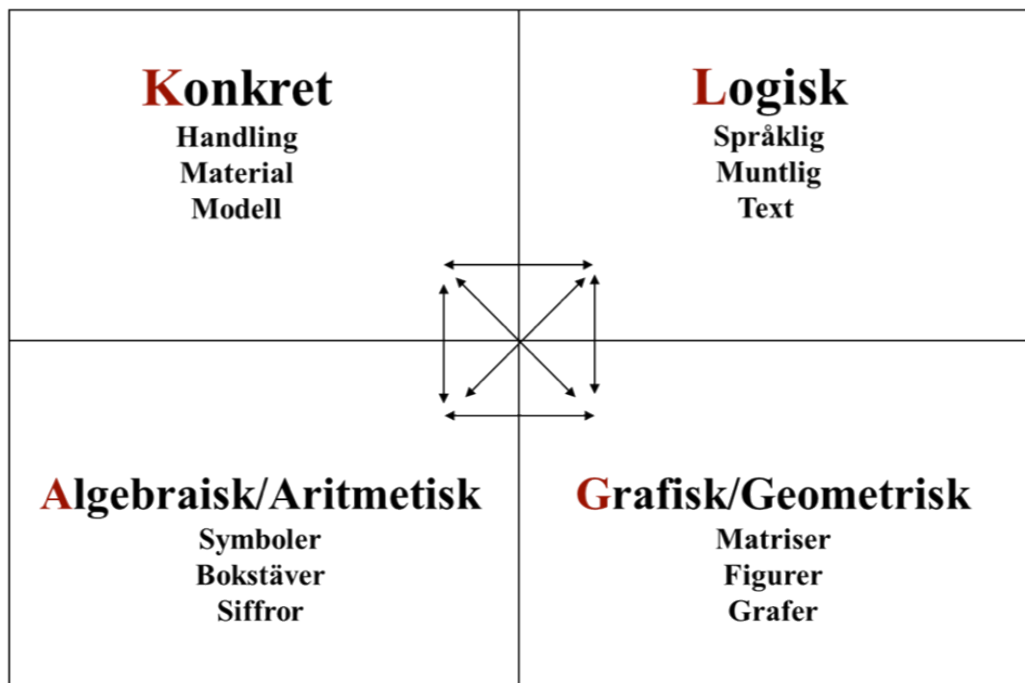
Problem kräver
ansträngning och
måste få ta tid.

© C.Ch.



Forts. Bil. 3

Representationsformer/Uttrycksformer **KLAG**



Rika matematiska problem, sid. 36

Bilaga 4

Matematiska problem i studien

Pärilhalsbandet

Hur många pärlor skulle det kunna finnas i ditt pärlhalsband om det bestod av
 $\frac{1}{2}$ gröna pärlor
 $\frac{1}{4}$ röda pärlor
 $\frac{1}{6}$ blå pärlor
 $\frac{1}{12}$ gula pärlor

Procentproblem

Med hur många procent har ett pris ändrats om det först höjs med 10 % och sedan sänks med 10 %?

Vattenmelon

Ellen äter upp en vattenmelon på 3 timmar. Henrik äter upp en vattenmelon hälften så fort som Ellen och Michael äter upp en vattenmelon på 5 timmar. Hur stor del av vattenmelonerna äter de på en halvtimme tillsammans?