



GÖTEBORGS UNIVERSITET

# Lärares erfarenheter av och förhållningssätt till det digitala verktyget GeoGebra

Fem positiva matematiklärares svar, sett i relation till styrdokumentet samt  
matematikdidaktisk forskning och lärandeteorier

Johan Vikmo och Mathias Börjesson

LAU395

Handledare: Thomas Lingefjärd

Examinator: Miranda Rocksén

Rapportnummer: VT15-2930-114



# GÖTEBORGS UNIVERSITET

## **Abstract**

### **Examensarbete inom Lärarprogrammet LP01**

**Titel:** Lärares erfarenheter av och förhållningssätt till det digitala verktyget GeoGebra. Fem positiva matematiklärares svar, sett i relation till styrdokumentet samt matematikdidaktisk forskning och lärandeteorier

**Författare:** Johan Vikmo och Mathias Börjesson

**Termin och år:** VT15

**Kursansvarig institution:** Institutionen för sociologi och arbetsvetenskap

**Handledare:** Thomas Lingefjärd

**Examinator:** Miranda Rocksén

**Rapportnummer:** VT15-2930-114

**Nyckelord:** Matematikundervisning, digitala verktyg, GeoGebra, representationer, visualisera, dynamiskt, förhållningssätt, användande, styrdokument, matematikdidaktisk forskning och lärandeteorier.

### **Sammanfattning:**

Denna uppsats handlar dels om när, hur och varför fem verksamma matematiklärare, som är positivt inställda till GeoGebra, använder sig av programmet i sin undervisning. Den handlar även om deras syn på GeoGebra i relation till styrdokumentet samt matematikdidaktisk forskning och lärandeteorier. Till sist diskuteras resultatet utifrån några didaktiska utmaningar som identifierats.

Genom intervju som metod har vi kunnat få kvalitativ information som vi sedan bearbetat tillsammans för att få ett så objektivt och icke-värderande resultat som möjligt. Utifrån de fem lärarnas svar, har vi analyserat och diskuterat likheter och skillnader samt kopplat det till styrdokument samt matematikdidaktisk forskning.

Huvudsakligen menar respondenterna att GeoGebra är ett effektivt, tekniskt och pedagogiskt hjälpmedel. Detta i termer av att programmet bland annat är snabbt, smidigt, dynamiskt, mångsidigt, och gestaltar flera matematiska representationer. Utöver detta kan programmet användas som redovisningsverktyg, vid färdighetsträning, för ökad begreppsförståelse samt för laborativt arbete. Vi bedömer att respondenterna grundar sina förhållningssätt och användande på väl argumenterande motiv i så väl styrdokument som matematikdidaktisk forskning och lärandeteorier. Dock kan det tilläggas att respondenterna i denna uppsats huvudsakligen har ett mycket stort och passionerat intresse för programmet, varvid resultatet inte kan räknas som representativt för den genomsnittliga matematikläraren.

Utöver detta visar resultatet att lärare är i behov av fortbildning gällande digitala hjälpmedel för matematikundervisning, vilket är upp till skolledningar och lärarutbildare att ta tag i. Vidare, en didaktisk utmaning som identifierades är möta alla elever på deras villkor oavsett deras matematikintresse, tekniska kunnande och matematikkunskaper. Här är bland annat lärarens roll att avgöra vilket digitalt verktyg som är bäst lämpat och anpassat för varje elev.



# GÖTEBORGS UNIVERSITET

## **Förord**

Vi som skrivit detta arbete är två studenter som läser till högstadie- och gymnasielärare i matematik. Intervjuerna med dess transkriberingar och vissa genomläsningar med gjorda korrektioner har gjorts individuellt. I princip allt annat arbete med uppsatsen, har genomförts enligt planerade tillfällen via Skype. Samtidigt har vi även använt Google docs med syfte att optimera tiden genom att i realtid kunna se exakt vad den andra skriver. Därmed har vi kunnat ge feedback direkt och kunnat diskutera saker utan fördröjning. Vi anser att uppsatsens resultat både är intressant och relevant för läraryrket samt har en bred och omfattande karaktär. Under arbetet med uppsatsen har vi återkopplat till vår handledare om hur det går samt rådfrågat honom vid behov gällande uppsatsens innehåll och dess relevans.

# Innehållsförteckning

|                                                                                          |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <u>1. Inledning</u> .....                                                                | 1  |
| <u>1.1. Bakgrund</u> .....                                                               | 1  |
| <u>1.2. Syfte och problemformulering</u> .....                                           | 1  |
| <u>1.3. Disposition</u> .....                                                            | 2  |
| <u>1.4. Relevanta begrepp</u> .....                                                      | 2  |
| <u>2. Metod</u> .....                                                                    | 3  |
| <u>2.1. Intervju som metod</u> .....                                                     | 3  |
| <u>2.2. Urval och avgränsning</u> .....                                                  | 3  |
| <u>2.3. Genomförande</u> .....                                                           | 4  |
| <u>2.4. Etiskt perspektiv</u> .....                                                      | 4  |
| <u>2.5. Reliabilitet och validitet</u> .....                                             | 5  |
| <u>2.6. Bearbetning av datamaterialet</u> .....                                          | 5  |
| <u>3. Teoretisk anknytning och tidigare forskning</u> .....                              | 6  |
| <u>3.1. Styrdokumentet</u> .....                                                         | 6  |
| <u>3.1.1. Grundskolans läroplan</u> .....                                                | 6  |
| <u>3.1.2. Grundskolans kursplan i matematik</u> .....                                    | 7  |
| <u>3.1.3. Skolverkets kommentar av kursplan i matematik för grundskolan</u> .....        | 7  |
| <u>3.1.4. Gymnasieskolans läroplan</u> .....                                             | 7  |
| <u>3.1.5. Gymnasieskolans ämnesplan i matematik</u> .....                                | 8  |
| <u>3.1.6. Skolverkets kommentarer gymnasieskolans ämnesplanen i matematik</u> .....      | 8  |
| <u>3.2. Matematik och lärande</u> .....                                                  | 9  |
| <u>3.2.1. Operationell och strukturell begreppsförståelse</u> .....                      | 9  |
| <u>3.2.2. Matematiska representationer och mentala modeller</u> .....                    | 9  |
| <u>3.2.3. Dynamisk matematik med modeller och dess utmaningar</u> .....                  | 10 |
| <u>3.2.4. Teorier om digitala hjälpmedel</u> .....                                       | 11 |
| <u>3.3. GeoGebra och integraler</u> .....                                                | 11 |
| <u>4. Resultat och analys</u> .....                                                      | 13 |
| <u>4.1. Olikheter kring första kontakten med programmet</u> .....                        | 13 |
| <u>4.1.1. Nyfikenhet och eget utprovande</u> .....                                       | 13 |
| <u>4.1.2. Brist på fortbildning</u> .....                                                | 13 |
| <u>4.2. Professionella och privata motiv</u> .....                                       | 14 |
| <u>4.3. GeoGebra's mångsidighet i undervisningen</u> .....                               | 15 |
| <u>4.4. Visualisering av matematik</u> .....                                             | 16 |
| <u>4.5. Att identifiera områden där programmet är mindre gynnsamt</u> .....              | 17 |
| <u>4.6. Att skapa sitt eget undervisningsmaterial</u> .....                              | 17 |
| <u>4.7. Elevers feedback</u> .....                                                       | 18 |
| <u>4.8. Andra digitala verktyg i undervisningen</u> .....                                | 18 |
| <u>4.9. Teoretisk bakgrund</u> .....                                                     | 19 |
| <u>4.9.1. Styrdokumentet som motiv</u> .....                                             | 19 |
| <u>4.9.2. GeoGebra som verktyg för att stimulera begreppsförståelse</u> .....            | 20 |
| <u>4.9.3. Relationen mellan procedur och begreppslärande i laborativ matematik</u> ..... | 21 |
| <u>4.10. Övrigt</u> .....                                                                | 22 |
| <u>4.10.1. Andra plattformar än datorer</u> .....                                        | 22 |
| <u>4.10.2. Övriga reflektioner</u> .....                                                 | 22 |
| <u>4.11. Sammanfattning</u> .....                                                        | 23 |
| <u>5. Slutdiskussion och vidare forskning</u> .....                                      | 24 |
| <u>Referenser</u> .....                                                                  | 26 |
| <u>Bilaga 1 – Intervjufrågorna</u> .....                                                 | 28 |
| <u>Bilaga 2 – Brev</u> .....                                                             | 29 |
| <u>Bilaga 3 – Omarbetade transkriberingar</u> .....                                      | 30 |

# 1. Inledning

## 1.1. Bakgrund

Att vi människor präglas av den tekniska utvecklingen i samhället är svårt att motsäga. Se på barn och ungdomar men även vuxna som ständigt använder sig av smartphones, surfplattor och datorer. Men hur är det i skolan? Är det frivilligt för eleverna att använda sig av dem eller är det ett krav? Först och främst så nämner styrdokumentet för grund och gymnasieskolan begrepp så som digitala och tekniska verktyg eller hjälpmedel. Det beskrivs också att eleverna ska tränas i strategier för att kunna hantera och använda dessa. Är det någon fördel med att använda dem i matematikämnet? Balke och Hutt (2009) visar att upp till 90 % av matematiklärarna, i deras studie, tycker att elevernas matematikkunskaper riskerar att försummas om tekniska hjälpmedel får allt för stort utrymme i undervisningen. För vidare forskning menar Balke och Hutt att det är viktigt att gå in djupare på motiven bakom lärares ställningstaganden. Det kan vara så att lärares ställningstaganden är väl grundade, men de kan också vara grundade på en tradition eller skepsis som lever kvar i skolan.

Samtidigt menar Thorvaldsson (2014) att resultatet i hennes studie pekar på att lärare är i behov av fortbildning, forskning och konkreta exempel på hur man kan använda digitala verktyg i undervisningen. Men vad menas med digitala och tekniska hjälpmedel eller verktyg? Ett av många tekniska eller digitala verktyg som används i bland annat matematikundervisningen är datorprogrammet GeoGebra. Ett program som har fått ökad uppmärksamhet i takt med ökad tillgänglighet och användarvänlighet. Klason (2011) skriver om att GeoGebra kan användas som ett verktyg för att eleverna ska utveckla sin begreppsuppfattning. Hon beskriver också GeoGebra som ett program som hjälper eleverna att uppleva matematiken visuellt, men också laborativt med hjälp av att man varierar olika värden och parametrar. Något som går hand i hand med styrdokumentet som säger att det samtidigt är viktigt att variera arbetssätten med digitala verktyg då detta stimulerar "flera sinnen och flera sätt att tänka" (Skolverket 2011e:9).

I vårt framtida yrke som matematiklärare måste vi kunna hantera och lära ut något digitalt verktyg. Vi tycker därför att det skulle vara intressant att fördjupa sig i när, hur och varför verksamma lärare använder sig av GeoGebra i matematikundervisningen.

## 1.2. Syfte och problemformulering

Huvudsyftet med denna uppsats är att synliggöra de fem positiva lärarnas förhållningssätt till GeoGebra. Detta i termer av när, hur och varför de använder sig av programmet i sin matematikundervisning. Ambitionen är att senare i uppsatsen analysera deras svar på intervjufrågorna i jämförelse med varandra, styrdokumentet samt matematikdidaktisk forskning och lärandeteorier. Slutligen reflekterar vi kring verktygets relevans i vårt framtida yrke. Frågeställningarna för denna uppsats är därmed:

- Hur förhåller sig de fem intervjuade matematiklärarna till det digitala verktyget GeoGebra?
- Hur relaterar deras svar till styrdokument samt matematikdidaktisk forskning och lärandeteorier?
- Vilka didaktiska utmaningar identifieras?

### 1.3. Disposition

I Kapitel 2 berörs våra ställningstaganden kring den valda metoden. Kapitel 3 anknyter till teorier och tidigare forskning. I kapitel 4 presenteras resultatet följt av vår analys. Kapitel 5 består av en slutdiskussion samt förslag på vidare forskning. Nedan följer en begreppsförteckning, i bokstavsordning, med syfte är att underlätta läsningen.

### 1.4. Relevanta begrepp

|                                                 |                                                                                                                                                             |
|-------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Begreppsförståelse:                             | förståelsen av ett begrepp.                                                                                                                                 |
| CAS:                                            | en funktion eller ett språk i GeoGebra som används för anteckningar samt för att räkna med siffror och matematiska symboler.                                |
| Dynamiskt:                                      | innebär att man lätt kan variera och ändra något. Motsats till statiskt.                                                                                    |
| Flipped classroom:                              | eleverna får tillgång till föreläsningar digitalt före lektionen. På så sätt kan mer fokus läggas på att diskutera föreläsningens innehåll under lektionen. |
| GeoGebra:                                       | är ett digitalt hjälpmedel som kan användas inom bland annat matematiken.                                                                                   |
| Glidare:                                        | en funktion eller ett verktyg i GeoGebra som används för att smidigt variera en konstants värde i realtid.                                                  |
| Laborativt arbetssätt:                          | experimentellt och utforskande.                                                                                                                             |
| Loopar:                                         | används inom programmering för att automatiskt upprepa en viss process.                                                                                     |
| Modell:                                         | man skapar utifrån en verklig situation en matematisk modell för att beskriva och simulera en situation eller ett förlopp.                                  |
| Operationell/procedurell begreppsförståelse:    | fokus på hur man gör något, inte varför.                                                                                                                    |
| Pedagogiska hjälpmedel eller verktyg:           | fokus på lärarens användande.                                                                                                                               |
| Representationer:                               | är begrepp som innebär att något matematiskt kan gestaltas på olika sätt så som verbalt, grafiskt, symboliskt eller numeriskt.                              |
| Screencasts:                                    | innebär att det man gör på dataskärmen kan spelas in, sedan väljer man om man vill lägga till talat språk eller inte.                                       |
| Simulering:                                     | innebär att man kan skapa en modell av något förlopp eller situation för att sedan visuellt eller symboliskt gestalta det.                                  |
| Spreadsheet:                                    | GeoGebras version av kalkylblad.                                                                                                                            |
| Strukturell begreppsförståelse:                 | fokus på varför man gör något, inte hur.                                                                                                                    |
| Tekniska och digitala hjälpmedel eller verktyg: | samma sak i denna uppsats, fokus på elevens användande.                                                                                                     |
| Visuellt:                                       | något som är synligt eller bildligt.                                                                                                                        |

## 2. Metod

Under denna rubrik presenteras metoden som användes för insamling av data. Först presenteras intervju som metod, vidare urval och avgränsningar följt av genomförandet steg för steg. Utöver detta beskrivs metoden utifrån ett etiskt perspektiv samt ur ett reliabilitets- och validitetsperspektiv. Slutligen förklaras hur datamaterialet bearbetats och strukturerats. Vidare diskussion gällande metodval ges i kap 5.

### 2.1. Intervju som metod

Kvalitativa metoder, så som intervju, ska främst inte användas för att generalisera resultatet, utan snarare för att tolka och förstå något mer på djupet, enligt Stukát (2005). Då målet med denna uppsats inte var av generaliserande karaktär användes därför intervju som metod för insamling av material. Huvudfrågorna och dess underfrågor, som användes under intervjun, formulerades med något av en sluten karaktär. Dock användes även spontana följdfrågor med syfte att nå en djupare förståelse, men också för att kunna följa upp intressanta idéer och resonemang som uppkommer i intervjusituationen. Ändamålet för följdfrågor är enligt Stukát “ [att de] används för att få frågorna mer utvecklade och fördjupade” (2005:39). Vidare är innehåll och form viktigt då:

Mycket tid måste läggas ned på att pröva ut intervjun och dess frågor innan man går ut med dem i full skala. Frågorna måste kunna förstås av alla, vara entydiga och ha tydliga svarsalternativ. Ledande frågor, förutsättande frågor och frågor med värdeladdade ord och uttryck måste självklart undvikas. Detta gäller även frekvensord: ibland, ofta, regelbundet, vanligen, brukar etc.[...] En annan svaghet är att metoden inte är flexibel. Den har svårt att fånga upp de oförutsedda eftersom man i förväg bestämt sig för vad man vill ha svar på menar. (Stukát 2005:38-39)

Grundat på ovannämnda text gjordes därför en noga genomgång av intervjufrågorna. Vissa frågor omformulerades, omstrukturerades, sammansattes eller togs bort, med syfte att utreda olika områden i relation till programmet GeoGebra. Följande ämnen användes: första kontakten, strategier vid inläring av programmet, personliga motiv bakom användandet i undervisningen, hur de använder det i undervisningen, gynnsamma områden, icke gynnsamma områden, andra digitala verktyg som används, elevernas feedback, styrdokumentet, didaktisk forskning och lärande teorier. Se bilaga 1 för fullständiga frågor.

### 2.2. Urval och avgränsning

De som ingick i studien var verksamma matematiklärare på högstadiet och gymnasiet. Utöver detta använder de sig utav GeoGebra som digitalt verktyg i matematikundervisningen. En inbjudan till att delta i studien gjordes via tre internetforum med fokus på matematikundervisning och GeoGebra. Det var fem matematiklärare som hörde av sig, vilka är de som ingår i studien. Alltså, ett strategiskt urval gjordes i termer av yrke, undervisningsämnet och användandet av GeoGebra som digitalt verktyg i undervisningen. Dessa var alltså de viktigaste faktorerna. Målet med detta urval var främst att se vilka mönster som framgår, dock inte i vilken utsträckning, då mönstren inte generaliserades (Stukát 2005).

Andra variabler kan vara sådant som kön, klass, ålder, arbetslivserfarenhet, utbildning och tjänstefördelning. Antalet lärare som intervjuades begränsades till fem stycken. Detta med grund i att transkriberingen var mycket tidskrävande. Respondenterna har sina arbetsorter i norra delarna av Sydsverige och i södra delarna av Mellansverige. Nedan presenteras respondenterna kortfattat med nuvarande tjänst, utbildning & arbetslivserfarenhet:

- Manne: Gymnasielärare Ma/Fy (samt förstelärare), 4 års fysikexamen + 1 års kompletterande pedagogik, 31 års yrkeserfarenhet
- Ulla: Högstadielärare i Ma, gymnasielärarexamen i Ma/Bio, 11 års yrkeserfarenhet (varav 11 år på högstadiet)
- Berit: Gymnasielärare i Ma, gymnasielärarexamen i Ma/språk, 15 års yrkeserfarenhet
- Bertil: Gymnasielärare i Ma, gymnasielärarexamen i Ma, 27 års yrkeserfarenhet
- Sven: Gymnasielärare i Ma, Gymnasielärarexamen i Ma/Fy samt pågående doktorsexamen i Ma, 17 års yrkeserfarenhet

## 2.3. Genomförande

Intervjuerna gjordes virtuellt via Skype. Fyra utav fem av intervjuerna gjordes via videosamtal och den femte intervjun gjordes utan video. Att ha intervjuerna virtuellt var lämpligt både för intervjuaren och respondenterna, detta då vi var lokaliserade på olika platser runt om i Sverige. Därav utfördes alla intervjuer på samma villkor i termer av att intervjuerna gjordes virtuellt. Det var också viktigt att respondenten var i en "[...] ohotad och lugn miljö" (Stukát 2005:40). Därför fick respondenterna själva lämna önskemål om när de ville bli uppringda. De valde därmed var de ville sitta när de blev intervjuade, så som i ett mindre rum på deras arbetsplats eller i deras bostad. Intervjuerna kunde ha gjorts som gruppintervjuer, dock var detta inte av hög prioritet då informanternas svar kan påverkas av bland annat grupptrycket (Stukát 2005).

Ett program på datorn användes för att spela in intervjuerna. Det var viktigt att datorn hade laddat batteri och att inspelningsfunktionen testats. Vi föredrog att spela in samtalen så att fokuset helt kunde läggas på det som sades. Detta för att kunna ställa följdfrågor då det anses vara lämpligt, enligt Stukát (2005). Intervjuerna transkriberades senare även fast det innebar ett mödosamt arbete. En tidsbegränsning sattes på 60 minuter vilket dels motiveras med att lärarna frivilligt ställde upp på intervjuerna samt att det skulle ta mycket lång tid att transkribera ett ännu större stoft av material. Då intervjuerna senare transkriberades gjordes detta efter noggrant lyssnande. Hela intervjun transkriberades då det i förhand var svårt att bedöma exakt vad som skulle synliggöras i intervjun. Dock transkriberades inte påbörjade meningar som sedan omformulerades. Dessa ansågs inte ha något större värde i sammanhanget, då de mestadels innehöll betydelselösa ord. Det kan tilläggas att även fast alla intervjuer transkriberades så tog vi medvetet inte med alla svar i resultatet. Vi ville inte använda de svar som givits då ledande frågor hade ställts, detta med målet att försöka öka resultatets reliabilitet och validitet (Stukát 2005).

## 2.4. Etiskt perspektiv

På olika forum gjordes alltså en skriftlig inbjudan till studien. Det var sedan upp till medlemmarna på forumen att själva ta initiativet med att ta kontakt. Det nämndes att deltagandet var frivilligt och att deras namn skulle anonymiseras. Att det var frivilligt bidrog till att vi uppfyllde vetenskapsrådets informationskrav och anonymiseringen skyddade respondenternas identitet (Vetenskapsrådet 2002). Detta bidrog till att vi kunde skapa en trygg och öppen miljö vid intervjutillfället.

Det var också viktigt att nämna att intervjuerna skulle spelas in och att de kan vara trygga med att denna information hanteras med aktsamhet, dock missades detta vid en av intervjuerna. Någon minut in i intervjun nämndes det, och respondenten godkände detta. Hade det inte godkänts av respondenten hade intervjun raderats och om möjligt gjorts om med bifogat godkännande, detta i enlighet med vetenskapsrådets samtyckeskrav (Vetenskapsrådet 2002). Allt med fokus på att skydda respondentens identitet och integritet.



## 2.5. Reliabilitet och validitet

Reliabiliteten avgörs av hur processen genomförts, både insamling av information och sammanställningen av resultatet och analysen. Det var därför viktigt att intervjuerna transkriberades noggrant för att resultatet skulle förbli oförvanskad och så sanningsenligt som möjligt. Detta gjordes i linje med den reliabilitet som krävs vid uppsatsskrivande (Stukát 2005).

Validitet handlar om att de mätinstrument som använts i en studie verkligen mäter det som studien avser. Eftersom uppsatsen är av en icke-generaliserande karaktär valdes därför intervju som metod för insamling av material. Stukát menar att "[f]orskningsproblemet ska styra metodvalet" (2005:36). Våra frågeställningar fokuserade på lärare och deras förhållningssätt till GeoGebra i matematikundervisningen. Med hjälp av följdfrågorna kan detta om möjligt synliggöra ny och spännande information, då vi kan få ta del av respondenternas djupare tankegångar och resonemang. Detta bidrog till att intervju som metod både var lämplig och relevant.

Urvalet var av en begränsad karaktär samt att de respondenter som deltog var själva mycket intresserade och positivt inställda till GeoGebra. Detta kunde självklart ha nyanserats genom att använda sig av respondenter som är mer negativa till användandet av GeoGebra. Dock var huvudsyftet med denna uppsats att åskådliggöra motiv och förhållningssätt bland lärare som just använder sig av programmet.

Det kan också tilläggas att den första intervjun användes som en slags pilotstudie. Vid transkriberingen av denna framkom det att vissa frågor som ställts var lite otydliga och ofullständiga. Därför fick den som intervjuade respondenterna vara mer uppmärksam på dess egna formuleringar i termer av att försöka avsluta påbörjade meningar. Effekten av detta blev att inspelningarna blev lättare att transkribera.

## 2.6. Bearbetning av datamaterialet

Stukát (2005) menar att det inte finns ett rätt eller fel sätt att bearbeta och analysera materialet som framkommit vid en intervju. Det kan också tilläggas att några av respondenternas svar var svåra att placera i resultatet då de ibland angränsade till flera frågor. Efter noga genomläsningar placerades svaren där de bedömdes vara mest lämpade, sett utifrån dess kontext. Vissa citat används, men mestadels har deras svar omformulerats och kortats ned. Vidare, för att synliggöra det underliggande innehållet i resultatet av transkriberingarna krävdes flertalet genomläsningar. Detta med målet att gå på djupet förbi det bokstavligen innehållet. Resultatets struktur följer i huvudsak den kronologiska ordning som intervjufrågorna var ställda. Dock med vissa tillägg så som hur de använder sig av programmet i undervisningen samt rubriken övrigt med underliggande rubriker. Rubriken övrigt tillkom då följdfrågor ställdes under intervjuerna (Stukát 2005).

## 3. Teoretisk anknytning och tidigare forskning

I kapitel 3.1. presenteras skolans styrdokument med fokus på digitala verktyg, matematikundervisningen samt närliggande begrepp. I kapitel 3.2. behandlas teorier gällande matematik och lärande. I kapitel 3.3. presenteras ett exempel på tidigare forskning på området GeoGebra i matematikundervisningen.

### 3.1. Styrdokumentet

I skollagen (Skolverket 2010:800) kan man läsa att all verksamhet inom skolans ramar har som mål att eleverna ska införskaffa och utveckla sina kunskaper. Grundskolans och gymnasieskolans läroplan går självklart i linje med detta då elevens livslånga lärande ska främjas. Detta möjliggörs genom att undervisningen anpassas utifrån varje elevs unika behov och förutsättningar (Skolverket 2011a; Skolverket 2011c).

I detta kapitel presenteras styrdokumentet i relation till digitala verktyg och närliggande begrepp. Dessa är begrepp så som visuell matematik, hjälpmedel, variation, arbetsformer, arbetssätt, representationer, aktiviteter, uttrycksformer, metoder, strategier och procedurer. Först presenteras kort vad som står i grundskolans styrdokument så som läroplanen, kursplanen i matematik och kommentaren till kursplan i matematik. Därefter presenteras gymnasieskolans styrdokument så som läroplanen, ämnesplanen i matematik och kommentaren till ämnesplanen i matematik.

#### 3.1.1. Grundskolans läroplan

I grundskolans uppdrag ingår att främja elevers lärande så att de stimuleras i sitt införskaffande och utvecklande av kunskap. Det beskrivs som viktigt att elevers kreativitet och nyfikenhet utmanas. I läroplanen nämns det också vikten av att låta eleverna testa sina idéer och arbeta med problemlösning. I sammanhanget är det förstås viktigt att förstå att elever är olika, vilket i förlängningen innebär att elever lär sig på olika sätt. Här är det lärarens roll att förmedla kunskap om hur kunskapsutvecklingens process ser ut. Det sistnämnda med mål att ge eleverna verktyg för att förstå hur de lär sig på bästa sätt. En förutsättning för detta är att skolans innehåll och arbetsform inte är homogen och statisk, utan snarare allsidig och nyanserad (Skolverket 2011a).

Vikten av en varierad undervisning nämns då det står att "skolan ska främja elevernas harmoniska utveckling. Detta ska åstadkommas genom en varierad och balanserad sammansättning av innehåll och arbetsformer" (Skolverket 2011a:10). Detta kan stimuleras genom sinnliga eller praktiska uppgifter med mål att eleverna får erfa kunskap i många av dess former och uttryck. Här finner man att integrering av forskning och utveckling i verksamheten är förutsättningar för att möta, stötta och utmana eleverna. Därför ska verksamheten kontinuerligt pröva och revidera metoder och strategier. I detta sammanhang har alla anställda på skolan som uppdrag att skapa en bra miljö för lärande och utveckling. Lärarnas specifika roll blir här att strukturera undervisningen så att den är balanserad och innehåller kunskaper i många av dess former, men också att låta eleverna skapa och använda sig av olika uttrycksmedel. Vidare nämns även matematiskt tänkande, problemlösning, kreativitet, lärande i grupp, enskilt lärande och användandet av modern teknik. Dessa är några av de färdigheter som skolan ansvarar för att eleverna lärt sig efter att de gått färdigt grundskolan (Skolverket 2011a).

Det kan tilläggas att det är rektorn som har det yttersta ansvaret på skolan. Den personen eller personerna har det övergripande ansvaret för att "skolans arbetsmiljö utformas så att eleverna får tillgång till handledning, läromedel av god kvalitet och annat stöd för att själva kunna söka och utveckla kunskaper, t.ex. bibliotek, datorer och andra hjälpmedel" (Skolverket 2011a:18). Det är också rektorn eller rektorernas ansvar att "personalen får den kompetensutveckling som krävs för att de professionellt ska kunna utföra sina uppgifter" (Skolverket 2011a:19).

### 3.1.2. Grundskolans kursplan i matematik

Kreativitet, reflektion och problemlösning associeras starkt till matematikämnet i grundskolans kursplan för matematikämnet. Ämnet är också dynamiskt i och med att objekt och begrepp kan uttryckas på många olika sätt så som att “eleven kan redogöra för och samtala om tillvägagångssätt på ett i huvudsak fungerande sätt och använder då symboler, algebraiska uttryck, formler, grafer, funktioner och andra matematiska uttrycksformer med viss anpassning till syfte och sammanhang” (Skolverket 2011a:10).

Ovanstående text talar för att matematikämnet är dynamiskt och dess uttrycksformer är många. Vidare betonas vikten av att kunna formulera och lösa problem, samt att kritiskt reflektera och värdera tillvägagångssättet. Ett exempel på detta kan vara att använda sig av digitala hjälpmedel för att arbeta med bland annat problem och göra beräkningar (Skolverket 2011a).

### 3.1.3. Skolverkets kommentar av kursplan i matematik för grundskolan

Användandet av digital teknik konkretiseras och bör användas i bland annat “analys, hantering av data och beräkningar” (Skolverket 2011b:6). Eleverna förutsätts utveckla sina kunskaper gällande värdering och bedömning av matematiska metoder och strategier så som att:

kunna identifiera vilken metod som lämpar sig bäst i den enskilda situationen[...] att eleverna lär sig att behärska metoderna väl, blir det möjligt för dem att utföra avancerade matematiska operationer med begränsad tankemässig insats. Det innebär att de kan koncentrera sig på problemlösning i stället för att lägga ned sin kraft på att genomföra beräkningarna. Man kan uttrycka det som att goda kunskaper om metoder gör en del av det matematiska arbetet åt oss, så att vi bättre kan koncentrera oss på att hantera svårare problem. (Skolverket 2011b:11)

Vidare nämns att eleverna ska kunna:

utveckla kunskaper i att använda digital teknik för att kunna undersöka problemställningar, göra beräkningar och för att presentera och tolka data. Digital teknik i form av miniräknare, grafräknare och datorer med allt mer avancerad programvara erbjuder nya möjligheter att tillämpa matematik och att experimentera med matematik [...] Digital teknik kan underlätta lärandet i matematik genom att den hjälper till att visualisera och konkretisera abstrakta fenomen. Till exempel kan tekniken ge eleverna en möjlighet att möta ett geometriskt objekt visualiserat två- och tredimensionellt i en datorsimulering. Genom att eleverna möter användningen av digital teknik redan i grundskolan läggs en grund för deras vidare lärande. Mötet med tekniken kan också stärka deras tillit till sin förmåga att använda teknik i olika sammanhang. (Skolverket 2011b:11-12)

I sammanhanget är det också viktigt att eleverna tillämpar ett kritiskt förhållningssätt gällande digital teknik då “det är viktigt att vara medveten om att de digitala programmen är konstruktioner och modeller” (Skolverket 2011b:11-12). Autentiska och elevnära situationer bedöms också som viktiga element då eleverna får:

möjlighet att gradvis utveckla en alltmer abstrakt och generell förståelse för hur man med matematiska uttrycksformer kan beskriva förändringar och förändringstakt. Här kan matematisk programvara och annan digital teknik vara till hjälp för att konkretisera och tydliggöra samband och förändringar. (Skolverket 2011b:26)

Ovan nämns värdet av matematisk programvara och annan digital teknik med syfte att “konkretisera och tydliggöra samband och förändringar” (Skolverket 2011b:26).

### 3.1.4. Gymnasieskolans läroplan

Fem viktiga begrepp eller förmågor som nämns i gymnasieskolans läroplan är samband, överblick, sammanhang, reflektion och tillämpning av kunskaper. Dessa är grunden för att elevers kunskapsutveckling ska öka och fortsätta. Samtidigt som gymnasieskolans huvudsakliga uppgift är att “förmedla kunskaper och skapa förutsättningar för att eleverna ska tillägna sig och utveckla kunskaper” (Skolverket 2011c:6). Vidare nämns det livslånga lärandet som ett ideal och att

omvärlden förändras och utvecklas vilket förutsätter att vi i skolan också kan anpassa undervisningen. Detta med mål att ge eleverna en bra och relevant grund i fråga om arbetsform och kunskap. Skolan här därtill också som uppgift att stimulera elevers kreativitet och nyfikenhet samt att de får arbeta med problemlösning och realisera idéer (Skolverket 2011c). Vidare nämns vikten av att verksamheten ständigt utvecklas genom att:

den dagliga pedagogiska ledningen av skolan och lärarnas professionella ansvar skapar förutsättningar för att skolan ska utvecklas kvalitativt. Skolans verksamhet måste utvecklas så att den svarar mot de nationella målen. Detta kräver att verksamheten ständigt prövas och att resultaten följs upp och utvärderas samt att olika metoder prövas, utvecklas och utvärderas. (Skolverket 2011c:8)

Till skillnad från grundskolan så har gymnasieskolan som uppgift att förbereda eleverna på vidare studier på högskola och universitet alternativt arbetslivet. Här har skolan en avgörande roll i att skapa bra miljö där utveckling och lärande främjas. I relation till detta berörs lärarens roll i att följa med i didaktisk och pedagogisk forskning. Hypotesen är att elevers kunskapsutveckling delvis är ett resultat av lärarens planering och strukturering av undervisningen. Detta med förhoppningen att eleverna upplever skolans innehåll och former som meningsfull (Skolverket 2011c). Dessutom berörs rektorns roll i verksamheten i följande text ur gymnasieskolans läroplan:

Som pedagogisk ledare för skolan och som chef för lärarna och övrig personal i skolan har rektorn ansvar för skolans resultat och har, inom givna ramar, ett särskilt ansvar för att lärare och annan personal får möjligheter till den kompetensutveckling som krävs för att de professionellt ska kunna utföra sina uppgifter (Skolverket 2011c:15)

För att lärare ska kunna utföra ett professionellt arbete krävs därför att de ges förutsättningarna för detta genom kunskapsutveckling så som fortbildning.

### **3.1.5. Gymnasieskolans ämnesplan i matematik**

Det huvudsakliga syftet med matematikundervisningen på gymnasieskolan sammanfattas i följande text från Skolverket "undervisningen ska innehålla varierade arbetsformer och arbetssätt, där undersökande aktiviteter utgör en del. När så är lämpligt ska undervisningen ske i relevant praxisnära miljö. Undervisningen ska ge eleverna möjlighet att kommunicera med olika uttrycksformer" (2011d:1). Detta kan sammanfattas med att säga att undervisningen ska karaktäriseras av variation i termer av innehåll och form. Ett av dessa arbetssätt gäller digitala verktyg. Därför står det att eleverna "ges möjlighet att utveckla sin förmåga att använda digital teknik, digitala medier och även andra verktyg som kan förekomma inom karaktärsämnen" (Skolverket 2011d:1). Vidare att eleverna ska kunna hantera digitala verktyg samt "strategier för matematisk problemlösning inklusive användning av digitala medier och verktyg" (Skolverket 2011d:3). Detta nämns även i kunskapskraven för betyget E så som att "i arbetet hanterar eleven några enkla procedurer, upptäcker misstag och löser uppgifter av standardkaraktär med viss säkerhet, både utan och med digitala och andra praxisnära verktyg" (Skolverket 2011d:4).

En del av Innehållet i kurs 2a-c beskrivs som "konstruktion av grafer till funktioner samt bestämning av funktionsvärde och nollställen, med och utan digitala verktyg" (Skolverket 2011d:15). I kurs 5 ska eleven kunna använda och lösa "differentialekvationer med digitala verktyg inom olika områden som är relevanta för karaktärsämnen" (Skolverket 2011d:30).

### **3.1.6. Skolverkets kommentarer gymnasieskolans ämnesplanen i matematik**

Ämnesplanen i matematik uttrycker målen i termer av matematiska förmågor. Dessa förmågor berör begrepp, procedurer, problemlösning, modellering, resonemang, kommunikation och relevans. Svårigheten är att dessa förmågor inte relaterar direkt till något specifikt innehåll, samtidigt som det konstateras att eleven utvecklar sina förmågor genom att bearbeta kursinnehållet. Dock nämns olika metoder och begrepp som eleven ska bearbeta (Skolverket 2011e:1).

## 3.2. Matematik och lärande

Bu och Schoen (2011) konstaterar följande om matematiskt lärande: 1) lärande sker både i grupp och individuellt. 2) alla delar inom matematiken ingår i ett system där delar är beroende av varandra. 3) detta beroende bekräftas ständigt genom att matematiska samband synliggörs genom olika representationsformer så som verbalt, numeriskt, algebraiskt och grafiskt. Till detta inkluderas även kunskapen om relationen mellan dessa representationer i termer av likheter och skillnader. 4) de hjälpmedel vi använder inom matematiken är starkt kopplade till specifika samhällen och dess tekniska utveckling. Exempel på detta är allt ifrån räknestickor till dagens miniräknare. Detta får på sikt konsekvenser så som att tidigare operationer som gjorts för hand nu istället på ett kraftfullt och effektivt sätt kan bearbetas och beräknas snabbt och smidigt (Bu & Schoen 2011:13-14).

Nedan behandlas följande områden: operationell och strukturell begreppsförståelse, matematiska representationer och mentala modeller, dynamisk matematik med modeller och dess utmaningar, samt teorier om digitala hjälpmedel. Dessa kapitel bygger på följande verk: 1) Sfard (1997) som skriver om operationell och strukturell begreppsförståelse inom matematikämnet. 2) en matematikdidaktisk bok om algebra-undervisning (Bergsten, Häggström & Lindberg 1997). 3) grundläggande matematikdidaktik med matematiska modeller i GeoGebra (Bu & Schoen 2011). 4) en artikel om skillnader och likheter mellan begreppen uttrycksformer och representationer (Gustafsson, Jakobsson, Nilsson, Zippert, m.fl. 2011). 5) två artiklar som sammanfattar följande begrepp: artefakter, instrument, instrumentalisering, instrumentalisation och orkestrering (Drijvers & Gravemeijer 2004; Drijvers & Trouche 2008).

### 3.2.1. Operationell och strukturell begreppsförståelse

Matematisk förståelse och meningsfullt lärande är ofta förekommande slagord inom matematikundervisningen. Dessa är numera två mål eller medel inom matematikundervisningen. Dock menar Bu och Schoen (2011) att det inte finns en entydig definition på ordet matematisk förståelse. Nedan följer en kortare beskrivning av operationell och strukturell begreppsförståelse.

Matematiska begrepp, symboler eller uttryck kan oftast ses på två olika sätt. Det första synsättet berör operationer och processer, också kallat operationellt synsätt. I uttrycket  $12/4$  kan man tänka operationen 12 delat med 4. Att en elev kan genomföra denna operation är så kallad operationell förståelse. Eleven vet hur den ska göra, men inte varför. Det andra synsättet berör strukturen eller objektet, också kallat strukturellt synsätt. Uttrycket  $12/4$  kan då ses som ett rationellt uttryck eller bråk. Man behöver alltså inte tänka att det måste utföras en operation. Det första synsättet ser på uttrycket som ett ej färdigt eller öppet objekt, som man kan hantera på ett operationellt sätt. Det andra synsättet ser uttrycket som ett färdigt eller slutet objekt. Att se uttrycket som ett slutet objekt är nödvändigt då eleven senare ska arbeta med uttryck så som  $a/4$ . Det går bara att utföra en operation på detta om man först byter ut  $a$  mot något tal vi känner till (Bergsten et al. 1997).

Dessa två synsätt kompletterar varandra, dock är det en lång väg att gå från det operationella till det mer strukturella. Denna väg sammanfattas enligt Sfard (1991) i de tre stegen internalisering, kondensering och objektifiering. Med tiden kan eleven utföra operationen utan problem och när eleven kan reflektera, analysera och jämföra med hjälp av begreppen börjar dessa att bli en del av elevens interna modell eller förståelse, också kallad internalisering. Det första steget är alltså att eleven bekantar sig med en viss operation. Andra steget kallas för kondensering. Då börjar eleven att få allt lättare att växla mellan olika uttrycksformer eller representationer. Detaljerna blir mindre viktiga och det är helheten som spelar större roll. Vidare, när eleven gått igenom internalisering, kondenseringen och börjar att kunna betrakta strukturen eller objektet, först då har den nått strukturell förståelse (Sfard 1991).

### 3.2.2. Matematiska representationer och mentala modeller

Många matematiska begrepp kan beskrivas med hjälp av olika representationer. En av många fördelar med dessa är att "den som har tillgång till flera olika representationer för att beskriva samma matematiska begrepp har en rikare och mera funktionell begreppskunskap. Att kunna växla

mellan olika representationer är också något som många menar starkt bidrar till problemlösningsförmågan” (Gustafsson et al. 2011:36).

Mentala modeller skapas genom det vi uppfattar eller erfar av omvärlden. På så sätt länkas vår fantasi med omvärlden. Utifrån detta kan människan sedan basera sina beslut eller göra förutsägelser. Problemet uppstår dock då skolan vill testa eller examinera dessa inre modeller. Därför är det viktigt att gå från det interna till det externa. Detta görs med hjälp av olika artefakter (Bu & Schoen 2011).

Utbildningsvetenskapens, filosofins och psykologins sammantagna bild, av förståelse relaterat till mentala modeller, är enligt följande: 1) en mental modell, som innehåller relevant information gällande olika samband eller förhållanden, är grunden för förståelse. 2) över tid utvecklas den mentala modellen och blir även dynamisk inte statisk. 3) mentala modeller används för att hantera och strukturera komplexa situationer. Samt att simulera situationer som i sin tur hjälper oss att se mening och dra slutsatser (Bu & Schoen 2011).

### **3.2.3. Dynamisk matematik med modeller och dess utmaningar**

Bu och Schoen (2011) ger en teoretisk och praktisk grund till hur man kan utforma och använda modeller och simulationer med syfte att ge lärare verktyg till att stödja elevernas lärande och kunskapsutveckling.

RME eller Realistic Mathematics Education är en teori om matematiklärande. Teorin handlar om att matematik är en mänsklig aktivitet i vilken lärande och utveckling sker i verklighetstroga situationer, också kallat situerat lärande. Detta med aktivt stöd och guidning av en kompetent instruktör eller lärare. Målet med att använda sig av verklighetstroga situationer är att detta skapar meningsfullhet. I teorin föreslås att stegvis skapa och bemötas av allt mer komplexa och abstrakta matematiska objekt. Modeller används därför som ett didaktiskt hjälpmedel för att visa på att modellen har sin grund i verkligheten (Bu & Schoen 2011).

Huvudmålet med MFL eller Model-Facilitated Learning är att nå djupare förståelse och mening. MFL grundar sig i användandet av modellskapande verktyg, flertalet representationer, och systemdynamiska metoder. Detta möjliggör att elever kan testa, modifiera och skapa egna modeller. Detta är viktigt då det egna görandet eller praktiska arbetet med till exempel modellskapande verktyg utgör grunden för den egna förståelsen. Utöver detta rekommenderas även att lärandet kan börjar i det konkreta och gradvis övergår till det mer abstrakta (Bu & Schoen 2011).

Bu och Schoen (2011) konstaterar några utmaningar som alla lärare ställs inför vid undervisandet av matematik. Detta i termer av elevens bakgrund och förkunskaper, matematikämnets komplexa karaktär och lärandemiljön i stort. Det sistnämnda så som tekniska hjälpmedel och lärandemål. Utöver detta har det redan konstaterats att det inte finns en entydig bild av vad matematisk förståelse helt innebär. Författarna beskriver matematiken som dynamisk och behovet av många representationer är stort, samt att interna modeller ska gestaltas. Författarna menar här att det finns många argument till varför tekniska verktyg så som GeoGebra ska integreras i undervisningen. Detta med målet att ge eleverna förutsättningar för att kunna skapa eller gestalta deras inre modeller, men även för att styrka deras begreppsförståelse och det egna reflekterandet. Därför kan man även använda sig av MFL och RME som didaktiska verktyg i skapandet och organiserandet av matematikens innehåll på ett meningsfullt sätt. Vidare uppstår utmaningar för skolan då tekniska verktyg så som GeoGebra blir en del av deras sätt att lösa och gestalta matematiskt innehåll. Detta då eleverna vill och behöver använda verktygen i undervisningen samt att de ska få använda dem vid examinering. Här måste därför skolan anpassa sig till elevers behov och ämnets utveckling (Bu & Schoen 2011).

Flertalet exempel på användningsområden för modeller tas även upp i boken av Bu and Schoen (2011). Om digitala hjälpmedel så som GeoGebra ska användas i undervisningen förutsätter det dels att läraren får tid för att lära sig hantera verktyget men också att den får tid till förberedelse. Utöver detta krävs det ett ämnesdidaktiskt perspektiv i termer av att läraren måste ha kunskap om hur elever skapar eller tillgodoser sig kunskaper. Alltså kunskaper om hur man skapar goda förutsättningar för lärande (Bu & Schoen 2011).

### 3.2.4. Teorier om digitala hjälpmedel

En artefakt kan, enligt Drijvers och Gravemeijer (2004), vara ett fysiskt objekt så som miniräknare och datorer. Samtidigt kan det också vara mentala objekt så som språk och algebraiska symboler. Om en artefakt eller delar av en artefakt används till att lösa en specifik uppgift i till exempel matematikundervisningen kallas artefakten snarare för ett instrument. Genom appropriering av en artefakt tillgodoser sig eller lär sig eleven förmågan att använda artefakten eller snarare att använda den uppsjö av möjligheter som artefakten omfattar. I en lärandesituation är det viktigt att förklara och synliggöra tillämpningen av en specifik artefakt annars kan eleven uppleva det som meningslöst. Det är först när eleven upplever artefakten som relevant i specifika situationer som artefakten till sist blir användbar och meningsfull. Det är även då som artefakten kan börja mediera eller förmedla kunskap. Med erfarenhet av att använda artefakten kommer även elevens förmågan att avgöra när och hur den ska användas artefakten beroende på situationen.

Elevens begreppsförståelse och dess strategier formas av de möjligheter och begränsningar som en artefakt omfattar. I vissa fall kan det vara gynnsamt att använda sig av en artefakt, men i andra situationer kan eleven begränsas vilket skulle vara ogynnsamt. Denna process och påverkan som artefakten har på eleven och dess tänkande kallas för instrumentalisering. Dock är det nödvändigtvis inte bara så att artefakten påverkar och formar eleven, utan att eleven kan forma artefakten. Till exempel genom att ladda upp nya program och uppdateringar. Denna process eller påverkan kallas för instrumentalisation. I undervisningen är det också viktigt att läraren har en strategi för hur den ska arbeta med såväl individens utveckling av instrument, men också med kollektivet. Lärandet av ett instrument sker både individuellt och i ett socialt samspel. Det är därför viktigt att läraren antar en aktiv roll som ledare av orkestern, alltså eleverna och deras instrument. Läraren måste ta i beaktning vilka artefakter som är tillgängliga samt välja ett lämpligt matematisk område. Dessa faktorer ska sedan med hjälp av lärarens didaktiska kunskaper integreras i undervisningen så att mål och mening med lektionen efterföljs, också kallat orkestrering (Drijvers & Trouche 2008).

### 3.3. GeoGebra och integraler

Mehanovics (2011) sammanfattar i sin studie flera utmaningar och möjligheter med att arbeta med matematisk programvara i matematikundervisningen på gymnasiet. Resultatet i studien kan även appliceras på annan dynamisk eller matematisk programvara som används i undervisningssyfte och lärandesituationer. Det resultatet visar är att dessa typer av programvaror möjliggör att eleverna kan arbeta med matematik på ett kreativt och interaktivt sätt (Mehanovics 2011). Nedan presenteras följande områden från Mehanovics studie: 1) elevers användande och förståelse av GeoGebra när momentet integraler introduceras. 2) lärare och deras användande av GeoGebra vid presentationen av integraler samt förhinder som hämmar lärare att använda programmet i dess fulla potential. 3) en kort sammanfattning av studien.

I den första delen formulerades det i hypotesen att det kan finnas olika sätt för elever att arbeta med matematik i GeoGebra. För att pröva denna hypotes genomfördes laborationer i klassrummet, samt intervjuer med elever. Denna data jämfördes sedan med Guin och Trouches (2002:206-207) modell som består av fem arbetsätt som eleverna använder sig av vid användandet av symboliska miniräknare. I korthet kan sägas att dessa arbetsmetoder berör både vilka kunskaper eleven har om instrument och om det matematiska innehållet, men också om hur och varför eleven använder sig av dessa kunskaper i arbetet med integraler. I deras analys konstateras det att de elever som var bäst på att använda GeoGebra och dess potential var de elever som kunde omsätta deras kunskaper om det matematiska innehållet i programmet GeoGebra. De elever som både saknade matematiska kunskaper om integraler samt tekniskt kunnande om GeoGebra hade stora problem med att utforska mer om integraler med hjälp av programmet. Utmaningen för dessa elever var att förstå fördelarna med att använda GeoGebra. Detta är kopplat till kunskapen kring hur och varför man ska använda programmet, vilket får sin följd i att dessa eleverna tar längre tid på sig att lära sig hantera verktyget samt att slutföra uppgifter med det. Det kan också sägas att alla elever, oavsett arbetsmetod, tyckte

det var viktigt att kunna lösa uppgifter med papper och penna. Detta då eleverna uttryckte att de förutsätts kunna bemästra detta på nationella proven, vilket fick till följd att de bedömde denna metod som viktigare än att kunna använda GeoGebra.

I den andra delen upptäcktes tre olika typer av förhinder som hämmar lärare att använda GeoGebra i sin fulla potential i arbetet med integraler. Dessa tre var kunskapsteoretiska, tekniska och didaktiska förhinder. Kunskapsteoretiska hinder är beroende av lärarens kunskaper om olika representationsformer och uttryckssätt. Studien visade även att vissa lärare ansåg att GeoGebra bara fungerar som ett visualiseringverktyg, vilket bidrar till att eleverna inte ges möjlighet att ytterligare experimentera och utforska begreppet integraler. Detta då lärarens bristande förståelse av programmets potential överförs på hur man arbetar i det. Tekniska hinder handlar bland annat om de svårigheter som lärare har och hur detta kunde få lärare att känna sig obekväma i konstruerandet och arbetet med programmet. Alla lärare kunde dock utan någon hjälp skapa en egen presentation av integraler i programmet. Det kan tilläggas att det var första gången som några av lärarna arbetade med just GeoGebra, men alla hade erfarenhet av att arbeta med någon typ av programvara. Didaktiska hinder handlar om svårigheterna med att integrera tekniska hjälpmedel i matematikundervisningen. Lärare måste förstå att eleverna använder programmet på olika sätt, vilket beskrevs i den första delen. Detta förutsätter att läraren organiserar och aktivt vägleder eleverna i klassrummet. Några av lärarna blev överraskade av de svårigheter som uppstod när man använde programmet i undervisningen, samtidigt som andra lärare var medvetna om elevernas olika arbetsmetoder. Dock uppstod det ändå svårigheter för dessa lärare då de själva inte var så trygga med att utföra processen på egen hand. Lärarna upplevde att det var svårt att integrera arbetet med matematiskt innehåll i GeoGebra. De uttryckte även ett behov av att få handledning i hur de ska kunna hjälpa eleverna på bästa sätt.

Avhandlingen, i sin helhet, kan sammanfattas med att säga att användandet av GeoGebra i arbetet med integraler var något som eleverna var positiva till. Variationen i undervisningen, samt det praktiska användandet av programmet, betonas av lärarna. Arbetet med GeoGebra medförde att matematiskt innehåll kunde presenteras och läras ut på ett nytt sätt, som till exempel genom visualisering och synliggörandet av olika representationsformer. Elever måste bli medvetna om programmets didaktiska poäng och de måste få stöd. Dessutom påverkas elevernas attityd till programmet beroende på hur de examineras. Arbetet med GeoGebra medförde utmaningar, svårigheter men också möjligheter. Detta var något som lärarna fick erfara då de skulle integrera programmet i sin undervisning. För att detta ska bli konstruktivt krävs det att lärare själva får stöd och handledning. Dock hade alla lärare, oberoende av tidigare erfarenhet av liknande programvara, svårigheter med att fullt ut använda GeoGebra och dess potential. Slutligen, för vidare studier, nämns ämnet om att integrera smartphones i undervisningen.



## 4. Resultat och analys

I detta avsnitt presenteras resultaten i form av ett antal rubriker. Under varje rubrik presenteras resultatet från intervjuerna först, följt av en analys. Under vissa rubriker presenteras resultatet från intervjuerna i form av en sammanfattning, följt av en eller två paragrafer med lite mer utförligt resultat från intervjuerna och till sist en eller två paragrafer med analys. Resultatdelarna skiljer sig alltid från analysdelarna i termer av att endast analyserna innehåller referenser till vår teoretiska anknytning och tidigare forskning. Det kan tilläggas att det ibland indirekt refereras till bilaga 3, i vilken de omarbetade transkriberingarna presenteras mer utförligt. Dessa är numrerade från 6.1. till 6.10. med tillhörande underrubriker. Numreringen är enligt strukturen i kapitel 4, där exempelvis 4.1. och 6.1. behandlar samma fråga.

### 4.1. Olikheter kring första kontakten med programmet

På denna punkt skiljer sig respondenternas svar i hög grad. När man var ute på nätet, under universitetsstudier, genom en kollega eller olika evenemang, var svaren som gavs.

Detta kan tyda på att utlärandet av GeoGebra eller andra digitala verktyg inte haft en given plats i lärarutbildningen då respondenterna genomfört sina lärarutbildningar. Dock menar flera av respondenterna, under andra rubriker, att även om styrdokumentet inte explicit nämner något digitalt hjälpmedel så måste ju verksamma och kommande lärare kunna hantera åtminstone ett sådant, då de ska lära ut dessa kunskaper till eleverna. Detta då eleverna ska "utveckla kunskaper i att använda digital teknik [...]" (Skolverket 2011b:11-12). Detta pekar på vikten av att hanterandet och användandet av digital teknik måste integreras redan i lärarutbildningen samt fortbildningen av verksamma matematiklärare.

#### 4.1.1. Nyfikenhet och eget utprovande

Här svarar majoriteten primärt att de lärt sig hantera programmet genom att testa sig fram på egen hand. Sekundärt har de använt sig av manualer, tutorials, GeoGebra-forum, en kollega, artiklar, wikis, Facebook-grupp, bok på ämnet, programmets inbyggda funktionshjälp eller googlat funktioner. Detta har inte bara gjorts på arbetstid utan även mycket på deras fritid. Resultatet visar att alla utom Ulla känner sig trygga med att hantera programmet. Orsaken till detta, enligt Ulla, kan vara bristen på att kontinuerligt ha någon kollega att bolla idéer med. Två ytterligare skäl nämns i 6.9.3. där hon säger att hon inte har tid och även känner sig osäker i själva programmet. Tidsaspekten är, enligt Bertil, ingen ursäkt vilket han kommenterar i 6.10.2. Han menar snarare att det är läraren som behöver komma över en tröskel, något i stil med att lägga undan något annat för att ge plats åt det nya.

Det är intressant att notera att alla respondenterna primärt lärt sig att hantera programmet genom att pröva sig fram. Detta samt att de måste spendera mycket tid utöver sin arbetstid är någonting som tyder på en hög motivation och inre drivkraft till att lära sig programmet. Resultatet indikerar också att respondenterna mestadels är självständiga, men att de vet vart de skall leta om de stöter på problem. Ulla uttrycker ett behov av att kunna bolla idéer med någon, vilket liknar det behov av handledning som lärare i Mehanovics (2011) studie uttryckte.

#### 4.1.2. Brist på fortbildning

På denna fråga svarar två av respondenterna att de har erbjudits fortbildning vid ett tillfälle vardera. De tre resterande har inte fått något erbjudande om detta. Det kan även tilläggas att flera av de själva håller i utbildning på området.

Att flera av dem själva håller i utbildning på området skulle kunna tolkas som att de själva inte har något behov av vidare fortbildning. Att endast två av fem har erbjudits fortbildning är

anmärkningsvärt då det står i både grundskolans och gymnasieskolans läroplan att lärare måste ges möjligheter till kompetensutveckling så att de på ett professionellt sätt kan utföra sina uppgifter (Skolverket 2011a; Skolverket 2011c). Något som rektorn/rektorererna på varje skola har till uppgift att genomföra. Detta nämner även Mehanovics (2011) i sin studie, då han menar att lärare måste ges stöd och handledning för att arbetet med GeoGebra ska bli konstruktivt. Han nämner även att alla lärare, oberoende av deras erfarenheter av liknande programvara, hade svårt att fullt ut använda GeoGebra och dess potential. I gymnasieskolans läroplan betonas vikten av att lärare aktivt följer med i didaktisk och pedagogisk forskning, ett ansvar som ligger hos läraren. Att läraren är insatt i detta påverkar i sin tur planering och strukturering av undervisningen. Detta är ytterligare ett skäl till varför det är viktigt att lärare får fortbildning på områden som är relevanta för undervisningen, enligt oss. I sammanhanget, är det intressant att notera Svens reflektioner under 6.10.2. Här menar han att det är två faktorer som påverkar lärarens möjligheter till att använda GeoGebra i matematikundervisningen. Det är både lärares osäkerhet kring hur man hanterar programmet samt osäkerheten gällande lärares matematikkunskaper. Samma problem beskrivs även i Mehanovics studie, där i termer av kunskapteoretiska hinder.

## 4.2. Professionella och privata motiv

På denna fråga svarar Manne, Berit och Sven att programmet med fördel kan användas för att visualisera matematiken. Dock nämner även Ulla och Bertil detta under andra frågor. Utöver detta så nämner Manne och Sven att programmet är dynamiskt i motsats till att vara statiskt. Andra motiv som nämns är att det är användbart för eleverna i så väl undervisningen som i framtiden, det är snabbt, laborativt, elever med nedsatt motorik kan använda programmet, det tillgodoser behovet av integrerad teknik i matematikundervisningen, samt att användandet av programmet har bidragit till vidgade sociala och professionella relationer.

Det går att kategorisera deras svar som professionella och privata motiv. De professionella motiven är på något sätt kopplade till läraryrket och undervisningen medan personliga motiv associerar till eget intresse och vänskapliga relationer. Manne säger till exempel att eleverna kan använda programmet som tekniskt eller digitalt hjälpmedel i skolan, framtida studier eller arbetslivet. Det kan tilläggas att Sven tycker att GeoGebra är det bästa pedagogiska hjälpmedel, för undervisningsändamål, som han stött på. Vidare menar Berit att GeoGebra möjliggör smidigare laborationer i jämförelse med att till exempel rita för hand. Dock framkom det att minst två av respondenterna värdesätter att eleverna även ska kunna öva procedurer och motoriska moment för hand med hjälp av papper och penna. Detta, likt att arbeta med GeoGebra, kan också bidra till att eleverna förbättrar sin procedurella eller operationella begreppsförståelse. De privata motiven summeras med att de personligen gillar programmet eller att samarbetet och interaktionen med andra användare på nätet öppnar upp för goda vänskaper där man utöver GeoGebra-relaterade problem även kan diskutera livet i största allmänhet. Vidare säger Manne, att ”matematiken är just nu i en guldålder som är fullt jämförbar med den i antiken eller renässansen. Mycket av det är på grund av den digitala tekniken och datorerna”. Bertil menar att den typiska svensken använder tekniska hjälpmedel hela tiden i vardagen och därför ställer sig Bertil frågande till varför skolan inte har följt med i utvecklingen.

Visualisering av matematiken, har stöd i så väl styrdokumentet som i matematikdidaktisk forskning (Bergsten et al. 1997; Bu & Schoen 2011; Gustavsson et al. 2011). I Mehanovics (2011) studie visar dess resultat att lärarna endast ansåg att GeoGebra fungerar som ett visualiseringsverktyg, detta på området integraler. I kontrast till detta enda svar, kan man konstatera att det framkom flertalet exempel i vår studie, på hur, vad och varför GeoGebra kan användas, exklusive visualisering. I grundskolans kursplan nämns det att matematikämnet är dynamiskt då objekt och begrepp kan gestaltas med olika uttrycksätt (Skolverket 2011a). Att GeoGebra och matematik är förenliga, är något som vi tycker detta implicerar. Vidare, att förbereda eleverna inför framtida studier eller arbetslivet nämns i gymnasieskolans uppgift i termer av att skapa en bra miljö

för lärande och utveckling (Skolverket 2011c). Något som bidrar till att eleven lär sig hur den ska göra något, men inte varför (Bergsten et al. 1997; Bu & Schoen 2011). Bu och Schoen (2011) nämner att de hjälpmedel som används inom matematiken är starkt kopplade till specifika samhällen och dess tekniska utveckling, något som även Bertil och Manne påpekar.

### 4.3. GeoGebras mångsidighet i undervisningen

Här nämns återigen visualisering som ett exempel på hur man kan arbeta med programmet i undervisningen. Utöver detta så nämner både Ulla och Berit att det är viktigt att inte gå för fort fram när man undervisar med GeoGebra, något som de tycks ha lärt sig genom erfarenhet. Respondenterna ger många exempel på hur man kan undervisa med GeoGebra beroende på elevernas, lärarens och skolans förutsättningar.

I undervisningen använder Manne programmet vid begreppsintroducering, grafitning och skapandet av vackra bilder. Han använder det också som problemlösningsverktyg, skapandet av appar för träning på automatiserade moment, lösa komplexa och vardagsnära statistiska problem, programmera java-kod samt till att göra simuleringar. Övergripande menar han att GeoGebra är en matematikmiljö där eleverna uppmuntras till att experimentera, leka och reflektera kring matematik. Vidare nämner han också värdet av att kunna lösa svåra och komplexa problem med hjälp av GeoGebra, vilket han menar bidrar till ökad begreppsförståelse genom att arbeta med vardagsnära problem. Bertil använder främst programmet till att visualisera och konkretisera samband och begrepp, problemlösning samt vid introduktion av nya avsnitt. Vid introduktionen av nya avsnitt använder han gärna tillrättalagda problem som eleverna, med hjälp av GeoGebra, löser. Han kan till exempel säga till en elev att "först försöker du själv, sedan diskuterar du med kompiserna, och sist diskuterar vi i helklass". Det kan tilläggas att Bertil använder det visuella och konkreta material som GeoGebra möjliggör till att teoretisera och bygga begreppsförståelse tillsammans med eleverna. På ett liknande sätt arbetar även Ulla med programmet då hon genom visualiseringen av olika begrepp har en diskussion i klassen. Som lärare, enligt Ulla, är det viktigt att inte gå för fort fram när man jobbar med GeoGebra. Detta kan bidra till att eleverna förblir nyfikna, reflekterande och deras tankar ventileras i en diskussion, något som även Berit nämner under 6.10.2.

I undervisningen använder både Berit och hennes elever GeoGebra som ett redovisningsverktyg. Hon använder det även vid laborativt och utforskande arbete samt vid färdighetsträning. När hon själv använder det som ett redovisningsverktyg är det i termer av ett klassiskt flipped classroom. Utöver detta kan det tilläggas att Berit gärna skapar appar där eleverna kan arbeta med färdighetsträning i vilka de steg för steg kan se lösningen på ett problem. Detta möjliggör att eleverna kan fortsätta arbeta hemma även om de inte har en lärare närvarande. Berit poängterar också vikten av att undervisningen präglas av variation. Sven använder främst programmet för att skapa och visa filmer eller screencasts i form av tutorials. Han skapar även skraddarsydda program så att eleverna kan slumpa uppgifter som komplement till bokens uppgifter samt för att visa eleverna hur lättanvänt programmet är. Det sistnämnda är något som han menar kan bidra till att eleverna vill utforska GeoGebra själva. Läromedlens uppgifter inom området normalfördelning är ofta krystade och onaturliga vilket bidrar till att verklighetskänslan tappas, enligt Manne. Här tycker han att GeoGebra är användbart för att hantera uppgifter tagna från verkligheten, även mer omfattande uppgifter.

Det Manne nämner gällande miljö kan kopplas till att skolan har till uppgift att skapa en bra miljö där utveckling och lärande främjas (Skolverket 2011c). Det Bertil poängterar ovan, gällande visualisering och begreppsförståelse, kan kopplas till följande citat: "den som har tillgång till flera olika representationer för att beskriva samma matematiska begrepp har en rikare och mera funktionell begreppskunskap. Att kunna växla mellan olika representationer är också något som många menar starkt bidrar till problemlösningens förmågan" (Gustavsson et al. 2011:36). Ulla nämner elevdiskussioner, vilket kan kopplas till att lärande både sker individuellt och i socialt samspel vilket styrks av Drijvers och Trouche (2008).

Berit skapar appar, för färdighetsträning, som steg för steg visar hur man löser uppgifter. Bu och Schoen (2011) konstaterar att alla delar inom matematiken är beroende av varandra. Här tycker vi att de appar som Berit skapat kan användas för att synliggöra det Bu och Schoen säger. Berit menar att undervisningen ska varieras, vilket vi bedömer går i linje med styrdokumentet. Både grund- och gymnasieskolans styrdokument nämner att undervisningen ska varieras i termer av innehåll och arbetsform. Svens skapande av skraddarsydda uppgifter till eleverna är något som vi också bedömer följer styrdokumentet då läraren ska anpassa undervisningen utifrån varje elevs unika behov och förutsättningar (Skolverket 2011a; Skolverket 2011c). Arbetet med verklighetstroga uppgifter, som Manne talar om, nämns både i styrdokumentet och i matematikdidaktisk forskning så som RME (Bu & Schoen 2011).

#### 4.4. Visualisering av matematik

Sammanfattningsvis menar respondenterna att GeoGebra är gynnsamt då man vill visualisera matematiken, till exempel i form av samband och begrepp. Geometri och funktionslära är också något som de flesta nämner som gynnsamma områden. Utöver dessa nämns modellering, algebra, datainsamling, synliggörandet av samband, statistik, grafisk problemlösning, derivatans definition, enhetscirkeln och trigonometriska ekvationer.

Visualisering synliggör flera representationer samtidigt och om eleverna kan hantera flera representationer är det något som styrker elevernas matematiska kunskaper, enligt Manne. Detta menar han även styrks av mycket forskning. Relaterat till detta är att Ulla, Berit och Bertil explicit nämner att användandet av GeoGebra är gynnsamt då man vill visa på sambandet mellan olika matematiska representationer, exempelvis algebraiskt och grafiskt. När Sven använder GeoGebra inom geometrin så är målet att övertyga eleverna, inte bevisa saker. Detta då han menar att "eleven tror ju blint på det som en dator säger på gott och ont". Han menar här att eleverna måste tänka kritiskt och reflektera kring materialet vilket även Berit påpekar. Sven nämner även under 6.9.1. att "däremot kan man ju inte slå av datorn och slå av hjärnan! Utan själva processen måste ändå äga rum här inne [i huvudet] på något vis".

Modelleringsuppgifter använder ofta Manne i form av inlämningsuppgifter vilka också behandlar begrepp, rutinuppgifter och problemlösning. När Berit tänker på geometri är det i termer av laborativt arbete, och i statistiken syftar hon mer på visualisering. Manne och Bertil menar att man kan lära sig att se att matematiken hänger ihop och inte är separata delar, vilket kan bidra till att man ser matematiken som en helhet.

Det resonemang som respondenterna har gällande visualisering och matematiska representationer är att det bidrar till en utökad problemlösningförmåga samt en mer nyanserad begreppskunskap. Detta är något som även Gustavsson et al. (2011) nämner. Dessa kunskaper och förmågor bedöms som viktiga i matematikundervisningen, enligt grund- och gymnasieskolans styrdokument (Skolverket 2011a; Skolverket 2011d). Sven är inne på samma spår då han säger att många elever vet hur man räknar med funktioner, men att väldigt få har en djupare förståelse för dem. Vidare nämner han att "funktionslära med grafer är väldigt visuellt". Det impliceras ovan, genom det Sven och Berit säger om kritiskt tänkande, att läraren har en viktig uppgift i att hjälpa eleverna att förhålla sig till representationerna på ett kritiskt och reflekterande sätt. Detta då "det är viktigt att vara medveten om att de digitala programmen är konstruktioner och modeller" (Skolverket 2011b:11-12). Begreppen modellering och problemlösning, som bland annat nämns av Manne, är några saker som är centralt innehåll i matematikämnet på gymnasiet (Skolverket 2011d).

## 4.5. Att identifiera områden där programmet är mindre gynnsamt

På denna fråga nämns det ytterst få områden och programfunktioner där respondenterna tycker att det är mindre gynnsamt att använda GeoGebra. Generellt har respondenterna inga svårigheter att genomföra en gynnsam undervisning inom de områden de behärskar. Dock reserverar sig några då de inte kan uttala sig om områden eller programfunktioner som de ännu inte arbetat med så mycket. Ulla nämner glidare, Berit nämner CAS, Bertil nämner geometri, och Sven nämner ritandet av högregradspolynom och algebraiska polynomkurvor av högre grad. Berit gör även ett tillägg angående de begränsningar som programmet har i termer av kapacitet och programfunktioner. Hon nämner här loopar och att programmet hänger sig när man kör många saker samtidigt. Manne säger även att vissa delar av koden kan vara buggig, men nämner inte något specifikt exempel. Sven tycker att det är mindre gynnsamt att använda CAS och spreadsheet, detta då han tycker att dessa saker är bättre att göra för hand eller med Excel. Det kan även tilläggas att Manne och Sven föredrar att låta eleverna göra vissa saker för hand, med papper och penna, även om det är så att GeoGebra faktiskt kan användas till denna procedur.

De flesta respondenterna har god arbetsvana i programmet, trots detta så har de inte använt sig av alla områden som programmet har att erbjuda. Två möjliga förklaringar till detta, enligt oss, kan vara tidbrist eller att de känner att det inte finns ett behov för tillfället. Ett ytterligare alternativ kan vara att programmet är brett, vilket kan bidra till att det faktiskt tar lång tid att utforska allt. Detta då vi generellt uppfattat att respondenterna lagt ner mycket tid på de områden som de behärskar. Det är även intressant att Manne och Sven nämner att vissa saker bör göras för hand, något som även Berit och Bertil nämner under andra frågor. De nämner dock inte inom vilket eller vilka områden som det skulle vara mer gynnsamt att skriva för hand. Ämnesplanen i matematik nämner att eleverna skall kunna räkna “[...] med och utan digitala verktyg” (Skolverket 2011d:15). Detta kan sättas i motsats till att respondenterna generellt prioriterar GeoGebra högre än att lära sig saker för hand. Dock nämner de flesta att det är viktigt att göra vissa saker för hand.

## 4.6. Att skapa sitt eget undervisningsmaterial

Alla respondenter har här en gemensam nämnare - att de skapar i princip allt material på egen hand. Respondenterna nämner flera fördelar med detta. Manne säger att dessa kunskaper kan komma att gynna eleverna då de ska skapa egna saker medans Ulla menar att detta är någonting positivt då man kan anpassa materialet helt till gruppen man undervisar. Här får hon även stöd från Bertil som är inne på samma spår. Berit tycker att det bäst att skapa saker själv då det blir lättare att förklara vad man gjort för eleverna, något som Manne också nämner. Att skapa saker själv är också något som Sven gör, detta då han tycker att det går fortare, det blir precis som han vill samt att det är roligare. Det är också intressant att lägga märke till var de får sina idéer ifrån. Ulla och Berit använder sig mycket av spontana idéer och Sven får mycket idéer från konferenser. De andra nämner inget specifikt, detta då respondenterna inte förväntades svara med specifika exempel.

En allmän förutfattad mening gällande lärare, enligt oss, är att lärare ofta arbetar mycket självständigt i motsats till att samarbeta. I resultatet synliggörs detta dels i skapandet av materialet men också i distribuerandet av materialet till andra. I skapandet tycker vi oss se mindre tendenser till samarbete med kollegor. Vidare gällande delandet av eget material så säger Ulla och Bertil att det är svårt att dela med sig av det material de skapat då det är skapat för en så specifik grupp eller klass. Vi förstår detta då det grundar sig i styrdokumentet som säger att undervisningen måste anpassas efter varje elevs behov och förutsättningar (Skolverket 2011a; Skolverket 2011c). Det kan tilläggas att Berit och Sven nämner, under en annan rubrik, att vardera av dem delar med sig av sitt material till en kollega samt att deras material är tillgängligt via nätet.

## 4.7. Elevers feedback

Alla utom Bertil och Ulla upplever att vissa av deras elever inte gillar programmet. Bertil upplever att det inte finns någon tröskel för eleverna att ta sig över och Ulla menar att eleverna pratar om vad de lärt sig genom programmet, något som hon tror beror på att programmet är så bildligt. Den kritik som nämns är att det finns elever som inte riktigt är vän med datorn och därmed hellre jobbar med grafitande räknare. Ytterligare skäl som nämns är att eleverna inte vill släpa med sig en dator överallt, de upplever att det är jobbigt med ett extra moment, att de hellre räknar i boken då de är trygga med detta och att de tycker att läraren överanvänder GeoGebra. De elever som har ett stort intresse upplever programmet som positivt då de ser nyttan med det. De tycker även att programmet är lätt och snabbt, det är bra att de får ha det på provet och att de kan använda det vid fortsatta studier. Dessutom tillägger Berit att de duktigaste eleverna använder GeoGebra självmant och att de inte klarar sig utan det.

Motiven ovan tycks bidra till att eleverna känner sig motiverade att lära sig hantera och använda programmet. Mehanovics (2011) konstaterar att de eleverna som var bäst på att använda GeoGebra och dess potential var de elever som kunde omsätta sina matematiska kunskaper. De elever som både saknade matematiska kunskaper om integraler samt tekniskt kunnande om programmet hade stora problem med att utforska mer om integraler med hjälp av programmet. Utmaningen för dessa eleverna, enligt Mehanovics, var snarare att förstå fördelarna med att använda GeoGebra vilket är nära kopplat till kunskapen kring hur och varför man ska använda det. Detta resulterar i att dessa elever tar längre tid på sig att lära sig hantera verktyget samt att slutföra uppgifter med det. Det kan också sägas att alla elever, oavsett arbetsmetod, tyckte att det var viktigt att kunna lösa uppgifter med papper och penna. Detta då eleverna uttryckte att de förutsätts kunna bemästra detta på de nationella proven, vilket bidrar till att de anser detta vara viktigare än att lära sig hantera GeoGebra. Utifrån detta, menar vi att det är viktigt att fördelarna med programmet synliggörs i undervisningen.

## 4.8. Andra digitala verktyg i undervisningen

Manne nämner att Wolfram Alpha, som är ett professionellt verktyg, har en starkare motor än GeoGebra. I undervisningen använder han och hans elever sig av Wolfram Alpha till 5 % av tiden. Ett program som även Bertils elever får använda då han vill visa på programmets tillgänglighet, kraftfullhet samt att det klarar av oerhört många saker. Manne håller med om att Excel har bra funktioner, dock föredrar Manne att använda GeoGebras motsvarighet vilket är spreadsheet då det är integrerat med de andra delarna i programmet. Ulla använder sig av Numbers och Pages då hon visar diagram och tabeller, något hon tycker går mycket snabbare än att göra det för hand samt att dessa program är inkluderade på skolans iPads. Berit nämner inget specifikt, dock skulle hon vilja lära sig MatLAB av eget intresse då det är mer kraftfullt än GeoGebra. Hon nämnde under 6.6. att GeoGebra har en tendens att hänga sig då man gör för många saker samtidigt.

Det står i styrdokumentet att eleverna skall kunna använda något digitalt verktyg och eftersom att styrdokumentet inte explicit nämner något specifikt digitalt verktyg, så är det upp till varje elev att avgöra vilket verktyg de vill använda. Lärare kan självklart förespråka ett specifikt verktyg, men i slutändan är det upp till eleven att avgöra. Som vi nämnt ovan, vill Berit lära sig MatLAB, dock anser hon inte att programmet är lämpat att använda i undervisningen.

## 4.9. Teoretisk bakgrund

Under denna rubrik behandlas respondenternas svar gällande styrdokument samt matematikdidaktisk forskning och lärandeteorier.

### 4.9.1. Styrdokumenten som motiv

Alla respondenterna är eniga om att digitala verktyg har en självklar del i matematikundervisningen samt att undervisningen behöver anpassas beroende på vilka elever man har. Som ett svar på hur man kan anpassa undervisningen säger både Sven och Berit att man kan skapa appar som eleverna kan använda vid färdighetsträning. Alltså, att man skräddarsyr ett program eller en app i GeoGebra som till exempel genererar slumpade övningar på ett specifikt område, och på så sätt får eleverna antingen färre eller fler uppgifter att arbeta med, beroende på situationen. Vidare, menar Berit att de elever som framförallt gynnas av att arbeta med GeoGebra är de som har ett matematikintresse och som är duktiga i ämnet. För de elever som inte har ett lika stort intresse för ämnet "stjälper [det] mer än det hjälper", enligt Berit. Manne säger att dessa elever också ska lära sig att använda och hantera digitala verktyg då det nämns i styrdokumenten. Att styrdokumenten är otydliga på vissa områden bidrar till en viss förvirring, tycker han, Bertil och Sven. Manne menar att det är otydligt med vad som menas med att studera differentialekvationer samt vad som menas med digitala verktyg. Att det sistnämnda är otydligt påpekas även av Sven. Manne menar att detta är helt annorlunda i andra nordiska länder där de har specificerat GeoGebra i styrdokumenten, något som han menar får effekt på både lärare deras förhållningssätt till digitala hjälpmedel och dess plats i undervisningen. Samtidigt menar han att Skolverket håller på att förändra sin inställning samt att eleverna i allt större grad använder sig av datorer och digitala verktyg. I relation till detta nämner Ulla att om GeoGebra skulle bli ett kunskapskrav, så som det är i Norge, så behövs det avsättas tid och utrymme för fortbildning då många lärare inte kan hantera programmet. Annars menar Ulla att det inte blir någon förändring. Vidare, Bertil tycker att styrdokumenten är otydliga gällande vad som menas med att eleverna ska kommunicera matematik i handling samt en viss otydlighet gällande relationen mellan det som står under centralt innehåll och det som står i målen/kraven. En bidragande faktor till förvirring och otydlighet kan, enligt Bertil, bero på vilken skolledning man jobbar under. Han ställer sig frågan: "Är styrdokumenten levande dokument eller är dem det inte?". Han tillägger att många matematiklärare upplever de nuvarande styrdokumenten som otydliga.

Manne nämner en viss kritik mot att det kan vara för mycket fokus på procedurer istället för begreppsförståelse, då han menar att procedurer är "omständigt, det tar tid och det ger inte så mycket". Han ser hellre att man diskuterar ett begrepp utifrån en problemsituation, där GeoGebra fyller en viktig funktion i termer av att det blir mer intressant, man kan lösa uppgifter som inte skulle vara möjliga att lösa utan digitala verktyg och de får även utveckla sin modelleringsförmåga, något som nämns i ämnesplanerna. Förmågor nämns även av Bertil gällande hanterandet av procedurer, grafiska metoder samt problemlösning med och utan digitala verktyg. Vidare menar Sven att GeoGebra är ett av många lämpliga alternativ och att programmet kan användas för att eleverna ska förstärka eller träna på de flesta förmågorna. Först och främst, menar Ulla, måste lärare kunna använda IKT samt att de själva förstår fördelarna med att arbeta med GeoGebra. Till exempel att GeoGebra underlättar arbetet för elever med nedsatt motorik. Berit säger att styrdokumenten tydligt menar att digitala verktyg ska användas i undervisningen samt att det tydligt står i centralt innehåll såväl som i ämnesbeskrivningen.

Som sagt, respondenterna är tydliga med att styrdokumenten nämner digitala verktyg, vilket även framkommer under tidigare rubriker. Att man kan skapa appar som är anpassade för en specifik individ eller klass bedömer vi går i linje med styrdokumenten som nämner att varje elevs unika behov och förutsättningar ska tillgodoses (Skolverket 2011a; Skolverket 2011c). Detta kompliceras av det som Berit säger gällande att det bara är de matematikintresserade eleverna som gynnas av GeoGebra. Mehanovics (2011) är delvis inne på samma spår då han menar att det är de mest kunniga eleverna som gynnas, dock nämner han även elevers tekniska kunnande spelar in. Det

sistnämnda kommer även Manne in på under 4.7. då han nämner att vissa elever inte riktigt är vän med datorn.

Det är intressant att Bertil säger att han och många andra lärare upplever styrdokumentet som otydliga. Några exempel lyder: vad som menas med digitala verktyg, hur man skall tolka kraven och målen i relation till det centrala innehållet samt vad som menas med att kommunicera matematik i handling. Det första han nämner är något som även Sven och Manne håller med om. Digitala verktyg kan bland annat tolkas som miniräknare, datorer, surfplattor och olika dataprogram. Som vi förstår det är det viktigaste att eleven kan hantera något digitalt verktyg, inte vilket. Dock menar ju respondenterna, under andra rubriker, att GeoGebra har många fördelar exempelvis att det är gratis, dynamiskt, mångsidigt, anpassningsbart och tillgängligt. Vi menar därför att det är upp till varje enskild elev att välja ett digitalt verktyg som de vill använda, och samma sak gäller även lärarna. Dock måste det ju göras en avvägning om vilket digitalt verktyg som man tycker fungerar bäst i den givna situationen. Det andra han nämner berör kopplingen mellan kraven, målen och det centrala innehållet. Det står till exempel att eleven skall kunna beskriva innebörden av centrala begrepp, men det specificeras inte vilka som är de centrala begreppen. Därmed förstår vi det som att läraren har möjlighet att tolka vad som menas med dessa begrepp, dock måste allt det centrala innehållet i en kurs behandlas i undervisningen. Det tredje som Bertil nämner berör tolkningen av vad som menas med att kommunicera matematiken i handling. Själv tolkar han det som att eleverna kan rita en graf på datorn för att sedan skriva ut den på papper, dock är nog detta inte den enda tolkningen. Sedan nämner han även att det spelar stor roll vilken attityd eller inställning som skolans ledning har gällande styrdokumentet. Lärare och rektorer förutsätts att jobba utefter styrdokumentet, men vi menar att det inte alltid är så enkelt när det finns möjlighet till att tolka dess innehåll. Vi anser att innehållet övervägande är tydligt, och att det bara få delar som är otydliga.

#### **4.9.2. GeoGebra som verktyg för att stimulera begreppsförståelse**

Manne menar att om elever själva får konstruera modeller så når de en djupare förståelse, vilket han säger styrks av forskning. Ett exempel som han nämner är att eleverna får arbeta med längre modelleringsprojekt. Att eleverna får göra saker själva är, enligt Berit, något som gör att eleverna kommer ihåg det längre, vilket hon säger är evidensbaserat. Viktigast av allt, enligt henne, är att undervisningen varierar i termer av att ibland börja med procedurer och i andra fall börja med förståelse. Dock menar hon att det finns forskning som talar för att det är sämre att börja med procedurer då detta gör att eleverna kommer ihåg innehållet sämre. Detta står i kontrast till det Bertil säger, då han alltid tycker att förståelse ska prioriteras först. Detta är något som han säger hjälper eleverna vid problemlösning, generaliseringar och begreppsbyggnad. Han tillägger att begreppsförståelse ska gå före arbetet med procedurer. Vidare menar han att det visuella har med begreppsbyggnad att göra så som visualiseringen av samband och representationer. Enligt honom kan eleverna undvika att fastna i procedurer genom att först börja med begreppsbyggnad och enklare procedurer för att till sist lösa problem med hjälp av tekniska hjälpmedel. Därtill vill han även lägga fokus på formella definitioner.

Berit nämner att undervisningen måste varieras, vilket är något som också omnämns i styrdokumentet i termer av form och innehåll (Skolverket 2011d). Bertil nämner, som sagt, att det med begreppsförståelse är något viktigt, vilket innefattar både den operationella och den strukturella begreppsförståelsen vilket beskrivs av Bergsten et al. (1997). Ett potentiellt problem kan därför uppstå, enligt Bu och Schoen (2011), då läraren vill testa elevernas inre modeller eller förståelse, alltså att gå från det interna till det externa. Här menar Bu och Schoen att artefakter kan användas för att testa elevens procedurella och begreppsmässiga kunskaper, liksom den operationella och strukturella. Det procedurella kan smidigt visas både med eller utan digitala verktyg. Dock är det begreppsmässiga mer komplext, vilket gör det nödvändigt att eleven börjar reflektera och analysera kring procedurerna med hjälp av begrepp. Detta med målet att elevens inre modell av begreppet byggs upp, enligt Sfard (1991). Sfard menar att eleven ska kunna växla mellan flera uttrycksätt eller representationer. Gustavsson et al. menar att "den som har tillgång till flera olika



representationer för att beskriva samma matematiska begrepp har en rikare och mera funktionell begreppskunskap. Att kunna växla mellan olika representationer är också något som många menar starkt bidrar till problemlösningsförmågan” (2011:36). Intressant är också att skribenterna ovan talar om förmågan att kunna använda flera olika representationer för matematiska objekt som i sin tur resulterar i en mer nyanserad och förbättrad begreppskunskap. Dessutom är växlandet mellan representationer gynnsamt vid problemlösning. Bertil talar som sagt mycket om begreppsförståelse och problemlösning, något som även Manne nämner under 6.4. då han säger att när eleverna gör modelleringsuppgifter så får de “begrepp och rutinuppgifter och problemlösning på köpet”. Vår slutsats är att matematiska begrepp, representationsformer, modelleringsuppgifter samt problemlösning, alla är viktiga områden eller moment som kompletterar varandra. Om alla dessa skulle behandlas i undervisningen skulle detta kunna bidra till en mer nyanserad helhetssyn av matematiken.

#### **4.9.3. Relationen mellan procedur och begreppslärande i laborativ matematik**

Att arbeta med grupparbete är något som Ulla känner att hon inte riktigt hunnit testa än. Hon känner att det är hon själv som begränsar sitt arbete, detta på grund av att hon inte känner sig tillräckligt trygg med att arbeta i programmet på iPad och hon känner att hon inte har den tiden att sätta sig in i det mer heller. Man kan konstatera utifrån resultatet att ingen av respondenterna utförligt har arbetat med grupparbete i undervisningen. Däremot har Ulla, Berit och Sven vardera en kollega de kan bolla idéer med och de “triggar varandra”. Sven menar att detta i någon mån är kollegialt lärande. Vi kan konstatera att lärande även sker mellan lärare vilket också måste nämnas. Detta beroende är något som i princip alla respondenterna pratar om då de menar att matematiken kan uttryckas eller representeras på många olika sätt, som i sin tur är möjliga att laborerar och synliggöra med hjälp av GeoGebra. Visualisering av matematiken är något som Berit nämner samt att “ju fler intryck samtidigt desto bättre, antar jag, för att man ska komma ihåg det”.

Teorier nämns både explicit och implicit av de olika respondenterna. Manne och Sven nämner till exempel John Deweys teori “learning by doing”. Detta relaterar till laborativt arbetssätt, som också Berit nämner. Hon berör även området visualisering samt att procedurer gärna kan få föregå förståelse. Detta då eleverna med tiden kommer att få förståelsen, de får bara ha lite tålmod. Här pratar Berit om att det är viktigt att eleverna kan acceptera ett visst kaos ett tag då hon menar att förståelsen kommer med tiden. Detta står i kontrast till det Bertil säger, då han menar att procedurer har haft för hög prioritet historiskt sett. Bertil poängterar att begrepp måste föregå symboler och algoritmer, gärna genom tillrättalagda specialfall. Han menar vidare att tekniska hjälpmedel kan underlätta att lägga fokus på begrepp och inte procedurer. Det kan tilläggas att Berit, under en tidigare rubrik, nämner att hon är medveten om att det även finns forskning som säger att överdrivet fokus på procedurer inte nödvändigtvis resulterar i bättre inläring. I motsats till detta, säger Bertil att tekniska hjälpmedel kan användas för att lägga mer fokus på förståelse snarare än procedurer, “för att representera begreppet”. Utöver detta betonar Berit vikten av variation i termer av undervisningssätt, något som även Bertil nämner då han säger att variationsteorin och GeoGebra är “våldigt förenligt”. Sven nämner att “som man bäddar får man ligga”, som Rousseau sa, samt att Skinner sa att arbetet med datorer antingen ger en omedelbar belöning eller en omedelbar bestraffning.

Bu och Schoen (2011) sammanfattar matematiskt lärande i några specifika områden. För det första nämns att matematiskt lärande både sker i grupp och individuellt. Det med grupparbete nämns även i ämnesplanen för matematik där de står att eleverna ska kunna resonera enskilt men också i grupp (Skolverket 2011e). För det andra så konstaterar Bu och Schoen att matematiken ingår i ett system där delar är beroende av varandra. Detta är något som synliggörs i Berits svar då hon talar om att “ju fler intryck samtidigt desto bättre, antar jag, för att man ska komma ihåg det”. Vidare, menar Sfärd (1991) att procedurer kommer först och senare kommer förståelsen. Vi kan därför konstatera att det både finns teorier som menar på att procedurerna ska komma först och det finns andra teorier som menar att man ska börja med begreppsförståelse. Därmed drar vi slutsatsen att matematiklärare bör känna till de två angreppssätten, men också göra en avvägning om när vilket

angreppssätt är mest lämpligt. De Sven nämner ovan, förstår vi som att arbetet med datorer är mindre förlåtande då den gör exakt det du säger till den. Detta tänker vi är en tröskel som man behöver komma över för att man ska känna att det är värt ansträngningen, vilket gäller både lärare och elever.

## 4.10. Övrigt

Under denna rubrik berörs området gällande plattformar samt övriga reflektioner som uppkom under intervjuerna.

### 4.10.1. Andra plattformar än datorer

Det finns som sagt olika plattformar som GeoGebra kan användas till så som på surfplattor och datorer. Dock finns det inte som en app till mobilen än, enligt Ulla och Bertil. Att GeoGebra är mindre kraftfullt till iPad, jämfört med GeoGebra på datorn, är något som både Ulla och Berit poängterar. Dock är det bara Ulla som använder det på iPad då hennes elever har iPads. Berit ser inget direkt behov av att kunna hantera det på surfplattor då hennes elever använder bärbara datorer. Det är intressant att tillägga att Sven har en egen platta, men han menar att han är mycket förtjust i sitt tangentbord. Till sist, Bertil nämner att hans elever får använda andra program på sina smartphones, detta då GeoGebra inte finns för smartphones än.

Orkestrering är enligt Drijvers och Trouche (2008) viktigt i undervisningen då digitala verktyg används. Detta är intressant att se i relation till de nämnda plattformarna ovan. Ullas elever har inte tillgång till datorer, kanske kan detta begränsa deras möjligheter till att upptäcka programmet eller så har det motsatt effekt då en iPad är mycket tillgänglig och användarvänlig. Det är vanligt att svenska skolor satsar på ett-till-ett, och därför är det viktigt som lärare att orkestrera i undervisningen så instrumenten görs tillgängliga för eleverna.

### 4.10.2. Övriga reflektioner

Tröskeln är lite för hög för att de flesta lärare ska använda GeoGebra enskilt utan vägledning, enligt Berit. Detta då hon menar att läraren själv måste vilja lära sig, att det handlar om lärarens attityd och inställning. Något som Sven även kommer in på då han säger att "jag tror, och det gäller nog både lärare och elever, att är man intresserad så lär man sig det och är man inte intresserad så lär man sig inte", återigen talas det om inställning. Vidare menar Berit, Sven och Bertil under 6.6. att de upplever ett visst motstånd med att arbeta med det digitala verktyget GeoGebra. De menar att en viss konservatism kan vara orsaken. Dock menar Berit att det alternativt finns väl motiverade anledningar. Sven nämner att det finns två viktiga faktorer gällande hur trygg man känner sig med att undervisa med GeoGebra i matematikundervisningen. Han menar att det både har att göra med kunskaperna gällande programmet samt matematikämnet. Följande är, enligt Berit, viktigt när man undervisar med GeoGebra: att inte gå för fort fram, att vara så precis som möjligt gällande orden man använder i undervisningen samt att hon varierar grupperna i klasserna homogent och heterogent, beroende på ändamålet. Det förstnämnda poängterar även Ulla under rubriken 6.3..

Vi menar att det är viktigt att vara exakt med orden annars riskerar man att eleverna blir förvirrade och missförstår olika begrepp, något som även nämns av Bergsten et al. (1997). Slutligen kommer Berit in på detta med att organisera klassen i olika grupper, något som är intressant då det även kan relateras till orkestrering. Detta i termer av att eleverna med deras instrument kan organiseras på olika sätt beroende på vilka mål man vill uppnå med lektionen (Drijvers & Trouche 2008).

## 4.11. Sammanfattning

Alla respondenter menar tydligt att det krävs mycket arbetstid, fritid, intresse, vilja och rätt inställning för att kunna hantera och använda programmet på ett gynnsamt sätt i matematikundervisningen. Många av respondenterna nämner även att programmet är användbart då man vill visualisera matematiken, förbereda eleverna för framtida yrke och studier, utveckla och förbättra elevernas ämneskunskap både procedurellt och teoretiskt, begreppsförståelse inkluderat. Vidare kommer många av respondenterna in på att programmet kan användas som redovisningsverktyg, för färdighetsträning och vid laborativt arbete. Här poängteras, av ett par respondenter, att man inte ska gå för fort fram när man jobbar med GeoGebra. Eleverna måste ges tid att reflektera och ta in det som till exempel visualiseras. Att eleverna måste kunna kritiskt granska det som visas med GeoGebra, är också något som nämns av många. Gynnsamma områden, enligt många av respondenterna, är återigen visualisering av till exempel samband och begrepp, geometri och funktioner. Ytterst få fall nämns gällande ogynnsamma områden, dock menar någon enstaka att vissa matematiska områden är mer lämpliga att använda sig av andra programvaror. Vidare att programmet kan hänga upp sig om man gör för mycket samtidigt och att det saknas någon enstaka funktion i programmet. Det kan tilläggas att de flesta har god arbetsvana på området och det flesta områden de reserverar sig till är de områden som de ännu inte hunnit utforska så mycket. Att de flesta skapar sitt eget material är ett faktum, men också att elevers intresse, matematikkunskaper och tekniska kunnande skapar en bra grund till arbetet med programmet. Alla exempel ovan tycker vi huvudsakligen är väl genomtänkta och tydliga exempel på när, hur och varför de använder sig av GeoGebra i matematikundervisningen.

Otydlighet kring digitala hjälpmedel i styrdokumentet verkar bidra till att det är svårt för ett program som GeoGebra att slå igenom ordentligt hos matematiklärarna. Utebliven fortbildning påverkar även programmets framfart, trots att alla respondenter använt sig av programmet under en förhållandevis lång tid så har väldigt få möjligheter till detta funnits. De menar att detta kunde ha ändrats om styrdokumentet var utformade på ett annat sätt, som till exempel i Norge där de nämner specifika digitala verktyg, däribland GeoGebra. Vidare nämner respondenterna att arbetet med GeoGebra möjliggör att eleverna kan skapa egna saker, visualisering av olika representationer och träning i både operationell och strukturell begreppsförståelse. Dessa användningsområden är, enligt oss skribenter, tydligt kopplade till matematikdidaktisk forskning. Lärandeteorier, nämns explicit och implicit av respondenterna, så som att lärande både sker individuellt och i grupp, genom kollegialt arbete, learning by doing samt variationsteorin.

## 5. Slutdiskussion och vidare forskning

I vår studie var det huvudsakligen kunniga och intresserade lärare som hörde av sig efter att vi skrivit inlägg på olika forum. Det blev därmed ett positivt urval, även om detta inte var syftet från början. Respondenterna i uppsatsen har huvudsakligen lagt ned mycket tid och möda på att lära sig hantera programmet, därför menar vi att denna studie inte kan ses som representativ för hur lärare generellt använder och förhåller sig till GeoGebra. Vi skulle kunna ha nyanserat urvalet genom att strategiskt välja lärare med olika kunskaps- och intressnivå inom området. En av svårigheterna med detta är, enligt oss, att få respondenter att ställa upp frivilligt på intervjuer. Dels att det kräver tid samt att det finns en risk att lärare med lägre kunskapsnivå inom området inte vill ställa upp, då detta kan vara känsligt. Vidare anser vi att det både finns för- och nackdelar med att genomföra intervjuer med hjälp av videosamtal och vanliga samtal via Skype. Tillvägagångssättet är relativt nytt och obeprövat, vilket resulterar i ett begränsat teoretiskt stöd. Vår upplevelse är dock att metoden inte hindrat oss från ta del av respondenternas erfarenheter av och förhållningssätt till GeoGebra. Den har snarare bidragit till en god miljö för samtal, samtidigt som det också var smidigt för båda parter.

För att ytterligare nyansera resultatet skulle vi ha kunnat använda oss av andra metoder så som observationer eller enkäter. En potentiell fördel med observationer skulle kunna vara att vi själva får sätta ord på det vi ser istället för att helt förlita oss på det som respondenterna säger. Detta eftersom respondenterna skulle kunna överdriva eller försköna sina svar. Att använda sig av observationer förutsätter att man kan verbalisera det man observerar, vilket inte är en självklarhet. Detta då vi, som studenter, antagligen inte har en lika bred och varierad terminologi som lärare med många års erfarenhet. Ett förslag skulle kunna vara att man filmar observationen för att i efterhand kunna gå tillbaka och analysera materialet. I vår studie skulle observationer kunna ha använts som komplement till intervjufrågorna, med syfte att nå en djupare och mer nyanserad kunskap. Detta skulle dock vara svårt att genomföra i praktiken då avstånden mellan oss och respondenterna var av betydande storlek. En annan metod som vi skulle kunna ha använt oss av är enkäter, vilket skulle bidra till en bredare och mer generell bild av lärares förhållningssätt till GeoGebra. Dock var inte detta vårt mål, men ett sådant resultat skulle kunna användas för att se om det överensstämmer med resultatet från våra intervjuer. Ett sådant angreppssätt skulle också kunna användas för vidare forskning inom ämnet. Vidare vill vi ändå poängtera att vi i vår studie synliggör några lärares förhållningssätt och användande av GeoGebra i matematikundervisningen. Detta med flertalet exempel på användningsområden i termer av innehåll och arbetssätt. Vi ser också en tydlig koppling till styrdokumentet samt didaktisk forskning och lärandeteorier i deras användande av programmet. Vi anser att deras åsikter väger tungt eftersom de är så insatta inom området samt har mycket erfarenhet. Därför tycker vi att respondenterna ger en bred bild av vilka potentiella möjligheter GeoGebra medför.

Vi inser, i efterhand, att resultatet blev större än vad vi förutspått i termer av bredd och omfattning, detta då frågeställningarna var av för bred karaktär. Genom att gå in på något specifikt område i termer av matematiskt område, didaktisk frågeställning, programfunktion eller teoretisk angreppspunkt, hade vi kunnat begränsa resultatets omfattning.

I uppsatsen har respondenterna gett åtskilliga exempel på när, hur och varför de använder sig av programmet i matematikundervisningen. De har nämnt flertalet fördelar och endast fåtalet nackdelar. Detta i kontrast till att upp till 90 % av matematiklärarna, i Balke och Hutts (2009) studie är negativt inställda till att tekniska hjälpmedel integreras i för stor utsträckning i undervisningen. Det skulle därför vara intressant, för vidare forskning, att intervjua lärare som är negativt inställda till användandet av GeoGebra i matematikundervisningen. En fråga man måste ställa sig är vad som gör att så pass få lärare är insatta i ett program som GeoGebra. De saker som respondenterna nämner är bland annat konservatism och tidsbrist. Är detta den generella uppfattningen eller vilka är de bakomliggande faktorerna? Då fortbildningsmöjligheterna är få, kanske det bidrar till en

minskad allmän vetskap om den här typen av program bland lärare. Det kan också bero på att styrdokumentet upplevs som otydliga då det inte nämns några specifika digitala verktyg där. Det blir därför upp till varje lärare och skolläda att själva tolka detta, och då det inte verkar finnas något större intresse uppifrån kan det lätt påverka resten av arbetsplatsen. I vår studie är respondenterna överlag i mindre behov av fortbildning, dock antar vi att den generella matematikläraren i Sverige är i behov av fortbildning. Detta behov styrks även Thorvaldssons (2014) studie.

I likhet med Klason (2011) har lärarna i vår studie bekräftat och betonat att GeoGebra med fördel kan användas för begreppsuppfattning, visualisering, laborativt arbete samt för att variera parametrar i realtid. Utöver detta har vi identifierat en didaktisk utmaning som lärare då respondenterna har olika åsikter och synsätt gällande om procedur skall föregå begreppsförståelse eller ej. Därmed har lärarens perspektiv huvudsakligen varit i fokus i denna studie. Det skulle därför vara intressant för vidare forskning att sätta sig in i elevers användande och förhållningssätt till programmet. Vad ser eleverna för för- och nackdelar med programmet? Detta då vi inte får glömma att det är eleverna som är i centrum av allt skolan gör och ska göra. Vårt resultat ger vissa indikationer på att elevens intresse, matematiska kunskaper och tekniska kunnande är faktorer som kan ha en betydande roll i deras lärandeprocess. Här identifierar vi en didaktisk utmaning för lärare, i att anpassa och variera undervisningen så att elever oberoende av omständigheterna ges möjligheten, tiden och vägledning till att utvecklas. Detta förutsätter dock att läraren känner sig bekväm med programmet och att de tekniska möjligheterna finns på skolan i fråga.

## Referenser

- Balke, H., & Hutt, M. (2009). *Gymnasielärares attityder till tekniska hjälpmedel i matematikundervisningen* (Kandidatuppsats). Göteborg: Sociologiska Institutionen, Göteborgs Universitet. Tillgänglig: <http://hdl.handle.net/2077/19996>
- Bu, L., & Schoen, R. (Ed.) (2011). *Model-centered learning: pathways to mathematical understanding using GeoGebra*. Rotterdam: Sense.
- Bergsten, C., Häggström, J., & Lindberg, L. (2001). *Algebra för alla*. (1. uppl.) Göteborg: Nämnaren.
- Drijvers, P., & Gravemeijer, K. (2005). Computer Algebra as an Instrument: Examples of Algebraic Schemes. *The Didactical Challenge of Symbolic Calculators*, 36, 163-196. doi: 10.1007/0-387-23435-7\_8
- Drijvers, P., & Trouche, L. (2008). From artifacts to instruments: A theoretical framework behind the orchestra metaphor. In Blume, G.W. & Heid, M.K. (Eds.), *Research on technology and the teaching and learning of mathematics: Vol. 2. Cases and perspectives* (pp. 363-392). Charlotte, NC: Information Age Pub.
- Guin, D., & Trouche, L. (2002). Mastering by the teacher of the instrumental genesis in CAS environments: Necessity of instrumental orchestrations. *Zentralblatt Für Didaktik Der Mathematik*, 34(5), 204-211. doi:10.1007/BF02655823
- Gustafsson, I-M., Jakobsson, M., Nilsson, I., & Zippert, M. m.fl.. (2011). Matematiska uttryckssätt och representationer. *Nämnaren*, (3), 36-45.
- Vetenskapsrådet. (2002). *Forskningsetiska principer inom humanistisk-samhällsvetenskaplig forskning*. Stockholm: Vetenskapsrådet.
- Klason, M. (2011).  *$y = x + 5$  - En studie om GeoGebra som begreppsutvecklande verktyg* (Kandidatuppsats). Göteborg: Sociologiska Institutionen, Göteborgs Universitet. Tillgänglig: <http://hdl.handle.net/2077/26092>
- Mehanovic, S. (2011). *The Potential and Challenges of the Use of Dynamic Software in Upper Secondary Mathematics: Students' and Teachers' Work with Integrals in GeoGebra Based Environments*. (Licentiate thesis, Linköping Studies in Science and Technology, 1499). Linköping: Linköping University Electronic Press.
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22(1), 1-36. doi:10.1007/BF00302715
- Skolverket. (2011a). *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet 2011*. Stockholm: Skolverket. Hämtad från <http://www.skolverket.se/publikationer?id=2575>
- Skolverket. (2011b). *Kommentarmaterial till kursplanen i matematik*. Stockholm: Skolverket. Hämtad från <http://www.skolverket.se/publikationer?id=2608>
- Skolverket. (2011c). *Läroplan, examensmål och gymnasiegemensamma ämnen för gymnasieskola 2011*. Stockholm: Skolverket. Hämtad från <http://www.skolverket.se/publikationer?id=2705>

- Skolverket. (2011d). *Gymnasieskolans ämnesplan i matematik*. Stockholm: Skolverket. Hämtad från <http://www.skolverket.se/laroplaner-amnen-ochkurser/gymnasieutbildning/gymnasieskola/mat>
- Skolverket. (2011e). *Alla kommentarer till ämnesplanen i matematik*. Stockholm: Skolverket. Hämtad från <http://www.skolverket.se/laroplaner-amnenochkurser/gymnasieutbildning/gymnasieskola/mat>
- Stukát, S. (2005). *Att skriva examensarbete inom utbildningsvetenskap*. Lund: Studentlitteratur AB.
- Thorvaldsson, A. (2014). *Jag har inte ens den med mig till matematiklektionerna: En studie om några lärare och elevers beskrivningar över hur de arbetar med digitala verktyg i matematikundervisningen*. (Kandidatuppsats). Mälardalens högskola. Tillgänglig: <http://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:729442/Fulltext01.pdf>

## Bilaga 1 – Intervjufrågorna

Kön:           Ålder:           Utbildning:  
Yrkeserfarenhet:           Nuvarande tjänst:

1. a) Hur kom du först i kontakt med det digitala verktyget GeoGebra?  
(vän, kollega, fortbildning, utbildning, lärarprogrammet etc.)
  - Hur har du lärt hantera GeoGebra?
  - Har du erbjudits någon fortbildning inom området?
2. Varför använder du dig av GeoGebra i undervisningen?  
(motiv, argument, forskning, teori, styrdokument, personliga, professionella)
  - Utöver lärandeteorier, tidigare forskning och styrdokument, varför använder du GeoGebra.
3. Inom vilka områden anser du det vara gynnsamt att använda sig av GeoGebra?
  - a) Vad är det som gör att du tycker att det gynnsamt inom dessa områden?
  - b) Var hittar du materialet du använder i din undervisning?  
(egenskap, nedladdat, modifierat)
4. Inom vilka områden anser du det inte vara gynnsamt att använda sig av GeoGebra?
  - a) Vad är det som gör att du inte tycker att det är gynnsamt inom dessa områden?
    - Saknas det något i GeoGebra som gör att det inte är gynnsamt?
5. Hur kopplar du GeoGebra till (a) styrdokument, (b) matematikdidaktisk forskning och (c) lärandeteorier?
6. Vilken positiv/negativ kritik har du fått från eleverna?  
(Förstår dom poängen med det)
7. Använder du andra digitala verktyg i matematikundervisningen (om ja, vilka och varför)?  
(maple, matlab, etc)

Tack för din medverkan



## **Bilaga 2 – Brev**

Hej!

Våra namn är Mathias Börjesson och Johan Vikmo och vi läser till matematiklärare för högstadie/gymnasie. Just nu skriver vi på vår C-uppsats. Uppsatsen kommer att handla om lärare och deras förhållningssätt till det digitala verktyget GeoGebra, detta med fokus på matematikundervisning.

Vi söker ca 6-8 lärare som på något sätt använder sig utav GeoGebra i sin matematikundervisning, högstadie och/eller gymnasienivå. Om du passar in på detta så önskar någon av oss att få intervju just dig. En intervju tar ca 45min och kan göras på plats eller via tex Skype. Allt kommer självklart att anonymiseras.

Är just du villig att ställa upp, alternativt att du har någon fråga - tveka inte att höra av dig.

tack på förhand

Mathias Börjesson och Johan Vikmo, Göteborg 2014-12-11

## Bilaga 3 – Omarbetade transkriberingar

Transkriberingen är i följande ordning: första kontakten med GeoGebra, hur man lärt sig hantera programmet, fortbildning på området, varför man använder programmet i matematikundervisningen, hur man använder programmet i undervisningen, inom vilka områden är GeoGebra gynnsamt i undervisningen och varför, inom vilka områden är GeoGebra mindre gynnsamt i undervisningen och varför, vilket undervisningsmaterial man använder sig av, elevers feedback, andra digitala verktyg i undervisningen, hur man kopplar GeoGebra till styrdokumentet, hur man kopplar GeoGebra till matematikdidaktisk forskning, hur man kopplar GeoGebra till lärandeteorier, plattformar och övriga reflektioner. De olika respondenternas svar ges i ordningen: Manne, Ulla, Berit, Bertil och Sven.

### 6.1. Första kontakten med GeoGebra

**Manne:** Manne förklarar att han rätt ofta var ute på nätet och letade efter nya grejer. Han hittade GeoGebra som till en början användes för undervisning i geometri. Programmet utvecklades vidare och han säger att "till slut så växlade jag över dit och sedan har jag aldrig behövt något annat".

**Ulla:** Ulla kom först i kontakt med GeoGebra under sina universitetsstudier i matematik. Hon tyckte det verkade bra så hon ville prova det.

**Berit:** Berit fick höra om programmet genom en kollega under början av år 2011.

**Bertil:** Bertil kom först i kontakt med GeoGebra då han 2010 gick på en matematikbiennal, och på denna så bestämde han sig för att gå på programpunkterna som handlade om IKT.

**Sven:** Sven kom i kontakt med GeoGebra under en studiedag som arrangerades tillsammans med andra skolor i länet.

#### 6.1.1. Hur man lärt sig hantera programmet

**Manne:** Dels har han testat sig fram genom att klicka på knappar och valt mellan menykommandon, men han har också lärt sig genom att läsa manualer. Han menar att trots programmet är användarvänligt så stöter man problem ibland och att man kan "klicka lite extra eller försöka arbeta runt det". Vissa funktioner eller kommandon är inte uppenbara vilket innebär att man måste läsa sig till lösningen på problemet. Han säger att "delar av koden kan ibland vara lite buggig", men menar det inte som ett klagomål utan snarare att det är oundvikligt då programmet är ett frivillighetsprojekt. Ibland "kan man uppleva [det] frustrerande första gångerna innan man knäcker den grejen liksom", tillägger han.

**Ulla:** Ulla känner att hon inte lärt sig hantera programmet så bra som hon vill, utan upplever att man behöver någon att bolla med hela tiden.

**Berit:** Berit var övertygad efter att en kollega på 20 minuter kort introducerat programmet. Då lärde hon sig grunderna och har därefter suttit mycket med det själv, därefter har hon mestadels lärt sig att hantera programmet genom tutorials på nätet och när hon kör fast använder hon sig utav ett GeoGebra-forum på nätet. Enligt Berit så finns det jättemycket hjälp att få på forumet där du kan ställa frågor, lägga upp videor med saker som strular och oftast får man svar snabbt. Hon tillägger att dessa forum är öppna för alla, dock är det inte då många elever som använder sig av forumet. Något hon tror kan bero på att det inte finns tillräckligt med lärare som engagerar sina elever på området.

**Bertil:** GeoGebra lärde han sig att hantera genom att läsa tidiga artiklar på ämnet i Nämnaren, användarforum, wiki och via en Facebook-grupp. De sistnämnda genom att ställa frågor och få hjälp av andra användare. Utöver detta har även köpt en bok om modellering med GeoGebra som man kan använda för att utveckla sitt användande av programmet.

**Sven:** Huvudsakligen lärde sig Sven att hantera GeoGebra på egen hand, så som att han spenderat mycket tid utanför jobbet på det. Han säger även att "det är ju mångt och mycket självinstruerande", och tillägger att han använt sig av programmets inbyggda funktionshjälp samt Googlat på begreppet funktioner.

#### 6.1.2. Fortbildning på området

**Manne:** På denna fråga svarar han nej. Dock håller han själv i fortbildning på området. Vidare menar han att det skulle nog inte finnas så mycket att erbjuda honom, då han själv är så insatt.

**Ulla:** Hon svarar nej på denna fråga och menar att hon varit tvungen att lära sig allt på egen hand efter universitetet. Hon känner att det var länge sedan hon fick undervisning om det samt brist på fortbildning.

**Berit:** Hon har vid ett tillfälle erbjudits fortbildning, men kunde ej närvara på grund av att hon deltog i annan aktivitet. Hon och en kollega håller själva i fortbildning på området.

**Bertil:** Den enda fortbildning han fått var under ett seminarium vid Karlstads GeoGebra-institut och dess invigning. Bertil har även varit med och ordnat en länsstudiedag på ämnet under 2011.

**Sven:** Han har närvarat på två nordiska GeoGebra-konferenser, men utöver detta har han inte erbjudits någon ytterligare fortbildning. Han och en kollega håller själva i fortbildning på området.

## 6.2. Varför man använder programmet i matematikundervisningen

**Manne:** "Datorer är ett fullt naturligt verktyg för matematiklärare idag", enligt Manne. Vilket bidrar till varför han tycker det är relevant för eleverna att lära sig. Detta grundar han på att "matematiken är just nu i en guldålder som är fullt jämförbar med den i antiken eller renässansen. Mycket av det är på grund av den digitala tekniken och datorerna". Han säger även att "jag vill att eleverna ska gå ut gymnasiet och känna att de har ett digitalt verktyg som fungerar. Som funkar på deras dator och inte behöver en separat burk som man inte kan kopiera grafer ifrån. Så det är ett stort skäl". Dessutom tycker Manne personligen om programmet, han tycker det funkar för honom och detta vill han förmedla till eleverna. Han tillägger att "Ja, det finns en ofantlig bredd. Alltså, den innehåller ju väldigt många olika samverkande moduler. Jag har slutat säga att det är ett program, jag brukar säga att det är en matematikmiljö". Han säger att man kan arbeta med kalkylblad, algebra, symboliska algebra, geometri, grafitning och att "du har liksom alla delar som behövs när du ska hålla på med matematik. Och de samverkar väldigt bra". Att man både får den geometriska beskrivningen samt den geometriskt visuella bilden. Läraren kan använda GeoGebra för att åskådliggöra och demonstrera saker för klassen.

Instället för att lägga ner mycket tid på att rita flertalet grafer på tavlan, vilka är statiska, så kan man snabbt och smidigt manipulera en och samma graf i GeoGebra till exempel genom att använda så kallade glidare, enligt Manne. Båda tillvägagångssätt ger samma resultat, men GeoGebra är mer dynamiskt. Man kan dessutom få en visuell bild av det som händer. Manne menar därför att GeoGebra "är ett ohyggligt kraftfullt visualiseringsverktyg" samt att genom kunnandet av en programvara får man en bra grund, en förberedelse inför det professionella arbetslivet. Därefter bekräftar han att GeoGebra även kan användas vid fortsatta studier samt inom fler ämnen än matematik och att "GeoGebra är ett väldigt bra sådant verktyg, just för att det är gratis för skolor att använda, det är multiplattform, det innehåller de flesta komponenter man behöver".

**Ulla:** Tidigare har Ulla inte kunnat arbeta med GeoGebra i den utsträckning hon velat. Detta då hon var tvungen att "gå till datorsalen och det blir för krångligt att organisera det så då använde jag inte det. Därför sökte jag till den skolan jag nu är på för dem har en-till-en, för att använda bland annat Geogebra". Hon ser därför inga hinder, utan snarare möjligheter i termer av att det blir smidigare. Vidare upplever hon att undervisningen blir mer spännande samt att eleverna ser fördelarna med den iPad de fått av skolan. Dock menar Ulla att användandet av iPaden i matematikundervisningen blir väldigt begränsad om man inte använder något annat än miniräknarfunktionen.

För Ullas del, samt för många av hennes elever, så är det snabbheten som gör att man använder programmet. Hon menar att man snabbt kan rita grafer och diagram med hjälp av datorn, "på några sekunder kan datorn göra det" i jämförelse med att göra det med papper och penna, dock menar hon att denna kunskap kanske inte sitter i lika länge.

**Berit:** Berit ser sig själv som en laborativ person vilket passar bra ihop med att arbeta laborativt i GeoGebra så hon säger att "Man kan pröva sina hypoteser på riktigt. Då känns det som att matten finns för eleverna. Det är ju laborativt material i första hand för elevernas räkning". Hon tycker även att det visuella i GeoGebra kan hjälpa eleverna att lägga saker på minnet och abstrahera tankar. Vidare säger hon att många elever har även en bristande motorik, att rita till exempel grafer med papper och penna, men menar att tröskeln för att kunna rita i GeoGebra är mycket lägre vilket gör att även de med nedsatt motorik kan använda sig av visuella intryck.

**Bertil:** Han upplevde specifikt att det i kurs MaB fanns ett behov av att lära sig något annat än att rita grafer för hand, men kände också ett behov av att komma vidare med lite ny teknik. Enligt Bertil så är GeoGebra det bästa pedagogiska hjälpmedel han stött på. Bertil menar att den typiska svensken använder tekniska hjälpmedel hela tiden i vardagen. Han lyfter då frågan varför skolan inte ha följt med på denna utveckling, genom att säga "varför har vi haft så svårt att få genomslag? Det tror jag är den stora frågan. Vad är det för konservatism som biter sig fast?". Självt tycker han att det är mycket enklare och mindre stressande att undervisa med GeoGebra med hjälp av till exempel en projektor. Detta i jämförelse med att undervisa med grafitande miniräknare vilket är svårare för eleverna följa steg för steg vad han gör. Därtill skulle han vilja av demokratiskäl att alla elever fick var sin laptop som de kan använda i alla ämnen då den är mer mångsidig, snarare än att alla elever ur egen ficka ska betala 1500 kronor för en miniräknare som inte alls har lika många användningsområden.

Det sociala utbytet har betytt mycket då Bertil på forum, wikis och Facebook har kunnat få kontakt med matematiklärare från hela världen. Genom detta har han fått hjälp med att hantera programmet GeoGebra, men kanske framför allt mött behovet att få socialisera och få nya vänner som man kunde diskutera livet i största allmänhet med. Det var även värdefullt att få tillhöra ett sammanhang med många andra lärare som jobbar med GeoGebra, speciellt

eftersom att han jobbar på en mindre ort. Han förtydligar med att säga att “digitalt samarbete har varit värdefullt på flera olika sätt”.

**Sven:** Jämförelsen mellan programmet GeoGebra och grafitande räknare sammanfattar Sven med att säga att GeoGebra är mer mångsidigt, intuitivt och visuellt, men framför allt mer dynamiskt. Med dynamiskt menar han att man kan “följa förlopp i tiden [...] sätta glidare och ändra vissa variabler och så ändras grafen eller vad det nu är i realtid”. Något som han än så länge inte har sett vara möjligt med en grafräknare eller om man ritat på tavlan. Han tillägger att begreppet dynamisk står i motsats till begreppet statisk. Han liknar GeoGebra med en film - något dynamiskt, och en grafitande räknare/skriva på tavlan med ett foto - något statiskt.

Programmet är intuitivt, någonting som Sven tycker är viktigt. Vid hanteringen av programmet menar han “att om man tror att ett kommando ser ut på ett visst sätt och att man helt enkelt gissar så blir det väldigt ofta rätt. Så att det inte är en massa underliga syntaxer”. Han jämför GeoGebra med programmet Latex och enligt honom är detta “inte särskilt intuitivt”. Samma problematik stöter han även på i bland annat MatLAB. Här tillägger han att om man inte är insatt i dessa program så finns det ingen möjlighet att man kan gissa sig fram till vad man ska skriva i inmatningsfältet, utan man måste vara påläst inom alla program. Vidare menar han ordet “intuitiv” kanske är dåligt sammanhanget och säger att “lättnämnt är väl ett bättre ord egentligen”.

Det viktigaste med att låta eleverna arbeta med GeoGebra, enligt Sven, “är att de ska lära sig matte” och inte att lära sig syntaxer. Detta då han säger att “jag tror inte att kunskap om syntaxen i sig stärker mattekunskaperna” och tillägger att man kan låta eleverna göra egna filer i GeoGebra “men [de elever] som klarar det är oftast de som redan har fattat”. Att programmet dessutom är gratis är något han menar spelar roll och tillägger att han inte vet om det finns liknande eller bättre program, men han skulle inte bli förvånad om det fanns. Dock tror han att det i så fall skulle kosta mycket pengar, något som han inte är “så sugen på” förutsatt att programmet inte är mycket bättre än GeoGebra.

### 6.3. Hur man använder programmet i undervisningen

**Manne:** Karlstads GeoGebra-institut har forskat på området och kommit fram till 7-8 stycken olika sätt att använda GeoGebra i undervisningen, enligt Manne. Dock menar han att listan inte är fullständig då sätt som Manne använder sig av inte fanns representerade. Ett sätt som provats internationellt är att göra en skärminspelning utan talat språk som senare kan användas som introduktionsvideo till ett nytt område eller begrepp för diskutera fram vad man ser. Därtill används det i undervisningen som grafitare, vid demonstrationer, för att skapa vackra bilder som kan klistras in i dokument eller att eleverna kan använda det som problemlösningssverktyg. Med andra ord, han menar är att det finns många sätt att använda programmet på. Vidare säger han att programmet är mer av en miljö än endast ett program, detta då det uppmuntrar eleverna till experimentellt användande. Så som att de kan leka matematiken i programmet, testa sina hypoteser och variera en konstants värde för att se vad som händer.

Vissa procedurer är viktiga att eleverna klarar av för hand, menar Manne. Detta för att få en god uppbyggnad av både begrepp men också rutinmoment som bara ska gå snabbt och ska kunna funka utan digitala verktyg, säger Manne. Dock menar han att man i GeoGebra kan skapa en app som kan användas för att träna automatiserade moment så som multiplikationstabellen eller algebraiska förenklingar. Dock tillägger han att man behöver göra vissa saker för hand. Ett område där detta gäller är polynomdivision. Han säger att det är “ohyggligt” mycket enklare att utföra med GeoGebra i jämförelse med att göra det för hand. Vilket han beskriver som “fullständigt meningslös i dagsläget därför att den bygger på långdivision, som man inte lär sig”.

Uppgifter på normalfördelning i läromedlen ofta är förkonstruerade på ett onaturligt och krystat sätt, säger Manne. Detta för att kunna lösas för hand vilket kan bidra till att man tappar en viss verklighetsförankring. Därför menar han att GeoGebra är ett bra och användbart verktyg eftersom det kan hantera många fler komplexa problem baserade på verklighetstroga situationer. Han säger till eleverna att “med de metoder som ni lär er i boken, så kan ni inte lösa vilket problem som helst. Ni måste ha ett verktyg [exempelvis GeoGebra]”.

“Geogebra tycker jag är ett av de få program som jag inte bottnar i” samt “Det är ett program som man kan växa i, skulle jag vilja säga” menar Manne. Programmet kan användas till allt från att rita och skriva ut grafer till att programmera java-kod och göra simuleringar, säger han.

**Ulla:** Användningen av GeoGebra underlättar visualiseringen av olika begrepp och objekt menar Ulla. Eleverna får se något exempel och utifrån exemplet får de med egna ord formulera vad de ser. Till exempel vid arbetet med vinklar eller punkter.

Att man måste vara lite försiktig när det går fort, att man måste stanna upp och reflektera över vad man gjort så man inte missar vad som egentligen representeras i programmet, är viktigt enligt Ulla. Vidare menar hon att om eleverna börjar reflektera mer kring vad som händer så kan det bli bidra till livligare diskussioner, att eleverna blir nyfikna och vågar testa saker i programmet. Eller som Ulla säger “dom vågar upptäcka!”.

**Berit:** I matematikundervisningen använder Berit främst GeoGebra som redovisningsverktyg, vid laborativt och utforskande arbete, samt vid färdighetsträning. Redovisningsverktyg då eleverna får spela in både sin röst och skärmbilden på datorn då de löser en uppgift eller ett problem i programmet, en så kallad screencast. Också som ett eget redovisningsverktyg då hon presenterar ett nytt område vilket enligt henne är ett exempel på “klassisk[a] flipped

classroom, då man spelar in skärmen med GeoGebra på och så pratar man och förklarar saker”. Hon bryter även det traditionella sättet att undervisa kring linjära funktioner. Där vill hon snarare att eleverna i GeoGebra laborerar och utforskar sambandet mellan  $x$ - och  $y$ -koordinaterna med hjälp av flera punkter på samma linje snarare än att förklara det i termer av lutning ( $k$ ) och där linjen skär  $y$ -axeln ( $m$ ). Därefter testar eleverna sina hypoteser och detta är något som eleverna uppskattar, enligt Berit. Färdighetsträning i termer av interaktiva övningar så som att hon programmerar en app eller ett program så att eleverna själva med ett knapptryck kan slumpa uppgifter eller steg för steg se hur man löser en uppgift. Det sistnämnda säger hon är likt hur tjänsten Kikora fungerar.

**Bertil:** Målsättningen med lektionen styr hur mycket han förbereder åt eleverna och hur mycket arbete eleverna måste göra själva. Självt föredrar han att börja med något visuellt och konkret, med ganska mycket begreppsförståelse, för att sedan komma in på mer teoretiska delar så som algebraiska metoder. Till exempel kan Bertil och eleverna studera en graf och sedan ställer han frågan "Hur kan vi då bestämma denna maxpunkt utan att rita en graf?". Ett ytterligare sätt att arbeta med programmet som Bertil hört talas om är att eleverna får bygga upp saker själva. Dock tillägger han detta kräver mycket avsatt tid till att arbeta med programmet.

Att undervisa genom problemlösning innebär eleverna får lösa ett problem med tekniska hjälpmedel följt av att eleverna tillsammans med läraren teoretiserar och tar in ytterligare begrepp. Något som han använder för att belysa begreppen samt för att eleverna ska få upptäcka samband. Han använder också programmet för att arbeta med grafisk problemlösning av funktioner. Vid introduktionen av nya avsnitt föredrar Bertil att ge eleverna ett problem som gärna har en grafisk lösning och utifrån detta teoretiserar dem tillsammans. Dessa problem är tillrättalagda och eleverna får lösa det med hjälp av tekniska hjälpmedel. Det kan tilläggas att Bertils elever ibland fått tillgång till GeoGebra under vissa delar av prov.

Glidare är något som Bertil använder vid arbete med derivatans definition och enhetscirkeln. Han nämner att han använder glidaren på olika sätt i de två fallen, enhetscirkeln så använder han sig av en glidare som rör sig via cirkelns rand medan han använder sig av en fast och en rörlig punkt för att kunna bestämma avståndet mellan de två punkterna med målet att närma sig punktens tangent. Vidare använder han sig inte utav typiska gruppövningar i arbetet med GeoGebra, dock sitter ofta eleverna och samarbetar. Typ att "först försöker du själv, sedan diskuterar du med kompiserna, och sist diskuterar vi i helklass".

**Sven:** En screencast är när man gör en film eller ett bildspel av skärmen och man kan prata in en berättarröst till det, något som Sven använder sig av undervisningen. Han använder även sig av konstruktionsprotokollet, vilket är en lista över de steg/kommandon du använt i din konstruktion. Vidare menar han att man också kan använda screencasts för att göra tutorials om hur man använder GeoGebra. Det begränsade antal uppgifter som finns i boken både kan hjälpa och stjälp elever, säger Manne. Å ena sidan kan det begränsade antalet uppgifter vara otillräckligt för de elever som behöver träna på ytterligare uppgifter och å andra sidan vara stressande för de elever som redan halvvägs genom uppgifterna förstått poängen. Därför kan man skraddarsy ett program i GeoGebra som till exempel genererar slumpade övningar på ett specifikt område och på så sätt får eleverna antingen färre eller fler uppgifter.

Som lärare kan man visa eleverna "hur lättanvänt det [GeoGebra] är genom att i realtid smäcka ihop en fil och det tar ju inte mer än en minut och sedan gör den massa med saker som man inte kan göra annars", enligt Sven. Detta kan bidra till att eleverna vill utforska programmet själva, dock tvingar han inte någon att använda just GeoGebra så länge de kan hantera något slags av digitalt verktyg.

#### **6.4. Inom vilka områden är GeoGebra gynnsamt i undervisningen och varför**

**Manne:** Områden som modellering, funktionslära, algebra och geometri nämns här. Han menar att man får en bredare undervisning om man jobbar med inlämningsuppgifter av modelleringstyp för då får man även "begrepp och rutinuppgifter och problemlösning på köpet". Detta för att både träna resonemang och modelleringsförmågorna.

Man kan bygga upp en uppgift som kan lösas med hjälp av olika matematiska representationer så som med en geometrisk modell eller med en funktionsgraf. Manne säger att det finns rätt mycket forskning som visar att "matematikkunskaperna stärks ju fler olika representationsformer man kan liksom hantera. Man har ju någon slags bild av vad som händer i huvudet och man kan ha en bild av både algebraisk beskrivningar och geometriska beskrivningar, men de behöver få sitt i externa beskrivningar liksom när man ser formlerna och man ser vad som händer och man ser hur det ena påverkar det andra. Och Geogebra är ursprungligen byggt för just det". Han nämner även att GeoGebra möjliggör att man smidigt kan modifiera och ändra saker.

**Ulla:** GeoGebra använder hon mest inom geometrin men också vid datainsamling samt vid synliggörandet av samband.

**Berit:** De områden hon framförallt nämner är funktionslära och geometri, men också området statistik. Inom geometrin tänker hon främst på laborationer och vid statistik tänker hon till exempel på regressionsanalys, normalfördelning och standardavvikelse. Berit menar att GeoGebra kan användas för visa sambandet mellan algebra och en visuell representation. Hon tillägger att det som visas med hjälp datorn kan ses som sant, med viss reservation för våra konceptioner.

**Bertil:** Följande områden nämner Bertil: alla sorters funktioner, grafisk problemlösning, derivatans definition, enhetscirkeln, maxpunkter, terasspunkter och trigonometriska ekvationer med hjälp av enhetscirkeln. Specifikt vid arbetet med trigonometriska ekvationer så använder han sig av en enhetscirkeln som har en rörlig punkt framför sig. Detta är något han säger visat sig vara otroligt bra samt att lösningarna blir väldigt konkreta.

**Sven:** Funktionslära så som ekvationssystem, polynomfunktioner, icke-linjära ekvationssystem, derivator och integraler är de områden Sven nämner. Funktionslära är något som han menar är väldigt svårt för eleverna och säger att “dom flesta kan derivera automatiskt och lösa uppgifter, men det är inte mer än en elev på tio på sin höjd som vet att funktionens namn är  $f$  och värdet av det är  $f(x)$  av funktionen., till exempel. Ju mer tid man lägger på att rita fina kurvor med en sylvass penna, desto mindre tid blir det kvar till att resonera om sådana grejer. Funktionslära med grafer är väldigt visuell, det är en grej”. Geometri är ytterligare ett område som Sven föredrar att använda GeoGebra till. Ett exempel han nämner är skapandet av parallella linjer och transversaler med syfte att övertyga, inte bevisa för, eleverna om att den matematiska teorin fungerar. Vidare pratar han om att det finns ett verktyg i GeoGebra som automatiskt beräknar arean av en yta, men tillägger att “det är fortfarande frågan om att övertyga inte bevisa, då. För att eleven tror ju blint på det som en dator säger på gott och ont”.

### **6.5. Inom vilka områden är GeoGebra mindre gynnsamt i undervisningen och varför**

**Manne:** Inget område nämns explicit mer än att vissa saker helt enkelt måste göras för hand, utan digitala hjälpmedel, för att få en rutin för vissa procedurer så som algebraiska förenklingar.

**Ulla:** Hon svarar bara med att säga att det finns vissa saker som hon inte använder i GeoGebra så som glidare.

**Berit:** På frågan om det finns några områden där GeoGebra är mindre gynnsamt svarar hon efter lång betänketid “nej, tror jag inte”. Ju mer hon använt programmet desto mer möjligheter ser hon, dock saknar hon möjligheten att kunna loopa, något hon tidigare använt i bland annat MatLAB. Hon tillägger att då programmet används för att göra mycket saker samtidigt så har programmet en tendens att hänga upp sig, detta trots att hon har en kraftfull dator. Denna kommentar avslutar hon med att säga att GeoGebra har allt det som hon känner att hon behöver. Det enda som hon inte känner att hon behärskar så bra är CAS, en funktion i programmet som används för algebraiska uträkningar. Dock jobbar hon på att bli bättre på detta område, hon säger att om hon har ett problem som hon vill lösa, så får det ta den tid det tar även om det innebär att sitta en hel helg.

**Bertil:** Bertil säger att han aldrig stött på några svårigheter inom de områden han använt GeoGebra. Dock menar han att han inte testat programmet på alla områden än, och därmed kan han inte säga så om allt än. Ett område som han inte har testat det så mycket på är geometri, där menar han att det kanske beror på är han själv behöver komma över en tröskel.

**Sven:** I GeoGebra är det svårt att “rita högregradspolynom, algebraiska polynomkurvor av högre grad”, säger han, och menar att det beror på att programmet inte är tillräckligt utvecklat än. Samtidigt visar han förståelse för detta då programmet är gratis. “Jag kan inte komma ihåg att jag varken använt CAS eller kalkylbladet i GeoGebra. För tycker jag att det finns bättre verktyg, nämligen papper och penna respektive Excel till exempel. Utan jag använder det i stort sett enbart, för visualisering då”.

### **6.6. Vilket undervisningsmaterial man använder sig av**

**Manne:** De flesta grejerna skapar han själv, även mer komplicerade saker eftersom att han känner att han kan programmet så pass bra. Han menar även att dessa kunskaper kan hjälpa eleverna att utvecklas inom användandet av programmet så som att bygga och utveckla egna grejer. Detta summerar hur han använder programmet i undervisningen, att han hjälper eleverna på vägen till att bygga egna saker. Han nämner också att eleverna kan få arbeta med större uppgifter under hela terminen, skriva rapporter och presentera uppgifter muntligt. Dessutom kan eleverna bygga saker med assistans av läraren. Han tillägger att “många av de där sakerna, om jag vet hur man gör så kan jag också förklara för eleverna hur de ska göra”.

**Ulla:** Oftast skapar Ulla sitt eget material från grunden, något som hon känner hon sig trygg med. Detta är även gynnsamt då hon anser att materialet behöver anpassas för varje specifik grupp och klass. I kontrast till detta är att hon känner sig osäker med att använda någon annans material och tillägger att det jämförelsevis tar mycket längre tid att titta igenom, förstå och använda någon annans arbete.

När Ulla använder GeoGebra så händer det att hon helt spontant får nya idéer på hur man kan använda programmet. Hon förenar gamla idéer med nya, helt enkelt. Om Ulla skapat något material som hon tycker har fungerat bra så delar hon med sig av det till en av sina kollegor. Detta är ett ömsesidigt utbyte då hon säger att “vi delar ju med oss av våra

kunskaper”. Ett initiativ som de själva tagit utan direktiv från vare sig förstelärare eller rektorer. Ulla upplever att det inte är många andra lärare på skolan som använder sig av GeoGebra. Det är viktigt att hon kan visa eleverna hur man använder programmet, menar hon. Till exempel vad olika knappar betyder samt hur man får resultatet med en eller flera decimaler. Vidare säger hon att ”Om jag använder någon annans, då kan jag nog inte försvara mig för mina val, tycker inte jag. Därför tar det ganska lång tid”.

**Berit:** Nästan allt sitt material skapar hon själv då hon tycker att det oftast blir bäst då. Hon skapar sitt eget material både vid planeringstillfällen och vid demonstration. Vid demonstration skapar hon väldigt mycket spontant på plats och får eleverna följa steg för steg hur hon bygger upp något. Detta upplever hon mindre rörigt än om man ska använda och förklara hur någon annan byggt upp något.

**Bertil:** Huvudsakligen har han skapat sitt egna material så som appar. Ibland har han även laddat hem appar för användning vid demonstrationer så som vid normalfördelning. Vid frågan om han delat med sig av sitt eget skapade material säger han att det inte nått utanför stadsgränsen, detta då han menar att dessa appar varit mer anpassade för just hans elever samt att han menar att inte många andra matematiklärare använder sig av programmet i Sverige. Han uttrycker att han inte känner sig som en innovatör inom området, då det finns andra som kan göra mycket snyggare och mer genomarbetade appar. Nuförtiden använder han det mer som ett naturligt hjälpmedel i matematikundervisningen.

**Sven:** På konferenser har Sven fått en hel del idéer på saker man kan göra i GeoGebra. Idéer som han senare omsatt till färdigt material. Han skapar i princip allt sitt material själv och tillägger att ”det är väl tyvärr enda sättet att få det precis som man vill” samt att ”det går fortare [att skapa sitt eget material] än att leta upp någonting som nästan är det som man vill ha och bygga vidare på det”. Samtidigt menar han att det är lite roligt också.

## 6.7. Elevers feedback

**Manne:** Då Manne introducerar GeoGebra för en ny klass som tidigare inte använt sig av programmet menar han att ”det alltid en grupp elever som inte riktigt är kompis med datorn och aldrig riktigt varit det, tycker det är jättebra att räkna i boken för det är man trygg med. De tycker att Geogebra bara verkar vara någon sån där extragrej, det kan jag säkert skita i”. Dock menar han att efter någon termin så säger eleverna att ””mja, detta verkar faktiskt vara så att man kan ha viss nytta av det och vissa saker kan jag faktiskt bara göra med Geogebra. Dessutom får man ha det på proven!”. Det är då det vänder och då har eleverna en tendens att anstränga sig och lära sig trots att de ”inte riktigt blir stjärnor på det [dock] lär de sig det nödvändiga”.

**Ulla:** Hennes elever pratar i viss utsträckning om det som de jobbat med i GeoGebra. Hon menar att detta är någonting som tyder på att det fastnar, troligen tack vare programmets bildliga representationer. Vidare menar hon att elever som inte är så intresserade kanske föredrar det lätta och snabba alternativet. Ulla tycker att det skulle vara roligt om eleverna fick mer tid att upptäcka programmet då det är få av eleverna som gör detta. Det händer att någon elev kommer och säger ”jag gjorde det här hemma med GeoGebra och då blir det såhär”, dock sker detta ganska sällan.

**Berit:** Eleverna som inte är så intresserade kan ibland säga ”varför ska vi göra det jobbigt”? Då menar Berit att ”det stjälpmer mer än det hjälper”. Hon upplever att eleverna tröttnar om hon som lärare vill att de ska överanvända programmet och säger att under de åren hon använt programmet så har hon upptäckt att ”de duktiga och intresserade eleverna använder det självmant hela tiden själva”. Återigen menar hon på att eleverna tycker det är bättre om undervisningen är varierande samt att det uppmuntrar elever till att använda programmet som ett kompletterande hjälpmedel. Vidare tillägger hon att elever som inte har matematik som sitt största intresse, tenderar att inte vara så engagerade när de ska lära sig GeoGebra. Intresset kan vara kopplat till om man ska läsa vidare efter gymnasiet eller inte. Själv tror hon att till exempel en naturklass har större potential då dem inser att programmet kan användas även på högskolan. Hon tillägger att ”de duktigaste eleverna lever inte utan Geogebra framåt årskurs två längre. För de använder det som ett roligt verktyg att skapa sig en uppfattning om uppgifterna och sedan lösa det algebraiskt, till exempel”.

**Bertil:** Eftersom att programmet utvecklats över tid så upplever inte Bertil att hans elever har någon tröskel att ta sig över, i jämförelse med andra program som har högre tröskel så som excel. Överlag menar han att eleverna verkar vara positiva till programmet, till exempel så kan eleverna tidigt lösa problem och arbeta självständigt med det. Bertil bekräftar att han inte hört sina elever klaga på att det känns onödigt eller att det är ett jobbigt extramoment.

**Sven:** I en av hans årskurs teorier har han endast använt GeoGebra för att visa saker på lektionen. Detta då han upplever att de är ”så inkörda på sina Texas-räknare, så de vill inte lära sig något nytt”. Han har också precis börjat med en etta och där har de inte kommit längre än att de har laddat ned programmet. Ambitionen är att ”låta dem arbeta med det i större utsträckning”. Han tror att de kommer att föredra GeoGebra framför Texas-räknaren, och tillägger att ”däremot är de nog inte så jättepigga på att släpa med sig datorn överallt”. Personligen tycker Sven att det viktigaste är att eleverna själva väljer ett digitalt verktyg de är vana och bekväma med, så länge de kan hantera det. Detta då eleverna får använda

det vid ordinarie samt nationella prov.

## 6.8. Andra digitala verktyg i undervisningen

**Manne:** Till 95 % använder sig han av GeoGebra och 5 % av WolframAlpha. Han nämner att WolframAlpha är ett professionellt verktyg som har en starkare motor i jämförelse med GeoGebra som är anpassat för skolans verksamhet. Därefter tillägger han även att Excel har en del bra funktioner, att någon enstaka skola använder Mathematica och Octave i kombination med vanliga grafitare. I vilken kombination och hur det används är enligt honom "en liten smaksak". Något han också säger är att "Excel är bättre på number crunching och diagram än vad kalkylbladet i Geogebra är, men det faktum att det finns ett kalkylblad i Geogebra som är integrerat med de andra delarna, gör att jag hellre använder det för det mesta".

**Ulla:** Numbers och pages använder hon sig av då hon visar diagram och tabeller. Något som hon även tycker eleverna är duktiga på att använda och tydligt presentera. Eleverna kan även argumentera för sina val och de ser fördelarna med att använda sig av dessa programvaror. Ulla använder också pages för att skapa listor av tal som hon och eleverna senare kan använda för att synliggöra primtal. Detta genom att färglägga delare och få eleverna att själva dra slutsatsen att primtal är de tal utan andra delare än sig själv och ett. I samband med detta tillägger hon att denna process är enkel och snabb i jämförelse med att göra allt med papper och penna.

**Berit:** Google Docs, kan även användas för att slumpa uppgifter, enligt Berit. Berit skulle vilja lära sig mer om MatLAB, av eget intresse, detta då hon menar att programmet är kraftigare än GeoGebra.

**Bertil:** I princip använder sig Bertil bara av GeoGebra, men om han skulle använt något annat program skulle det i så fall enligt honom vara Wolfram Alpha. Detta då han också visar för eleverna hur lättillgängligt och kraftfullt programmet är, samt att det klarar av oerhört mycket. Än en gång nämner Bertil att GeoGebra är ett bättre hjälpmedel sett ur ett pedagogiskt perspektiv. Målsättningen styr vilken programvara som är att föredra. Dock finns inte GeoGebra till smartphones än så får eleverna får därför använda Wolfram Alpha på denna plattform. Vidare menar han att grafitande räknare kan vara fördelaktiga på matematikintensiva program där eleverna använder programmet i många ämnen. Dock menar Bertil att det räcker att använda gratisprogram på skolans datorer och på de flesta andra program på gymnasiet.

**Sven:** "Ibland inser man nog inte behovet [av undervisningsmaterial och undervisningsprogram] förrän man ser att produkten finns" menar Sven. Ett exempel på detta var när Sven fick höra om radianskivan som är ett hjälpmedel med syfte att utveckla förståelsen kring radianbegreppet.

## 6.9. Teoretisk bakgrund

### 6.9.1. Hur man kopplar GeoGebra till styrdokumentet

**Manne:** "Men det är fortfarande så att man behöver göra vissa saker för hand. Ibland så får man helt enkelt plocka bort datorn och koncentrera sig på de sakerna, kan jag tycka. För det står ju också i kursplanen att man ska kunna göra saker både med och utan digitala hjälpmedel." Manne nämner en viss kritik emot ämnesplanen där det står att man ska "hålla på och studera differentialekvationer, men det står inte exakt vilka, vilket innebär att mer hjälp av verktyg så kan vi göra mycket svårare saker än vad vi kunde göra förut". Detta i kontrast med att det formulerades tydligare i tidigare kursplan, vilket innebär att utföra en hel del procedurer men kanske inte lika mycket fokus på begreppsförståelse. Procedurer som beskrivs "omständligt, det tar tid och det ger inte så mycket. Då är det bättre att diskutera vad en differentialekvation är och hur man ställer upp den utifrån en given problemsituation. Och så kanske man kan sätta upp system av differentialekvationer istället, som ger mycket intressantare lösningar och kan användas på mycket mer intressanta problem. Som till exempel influensa-epidemier osv. Föreningar av radioaktivt sönderfall i steg osv. Så det finns massor av saker där som man kan undersöka nu som man inte kunde undersöka utan Geogebra eller motsvarande digitala verktyg förut". Utöver detta nämner han att "just det här med att skapa sin egen modell är ju liksom en central del av modelleringsförmåga[n]" som också omnämns i ämnesplanerna.

Lärare i Sverige, enligt Manne, kan helt fritt tolka vad som menas med digitala hjälpmedel då detta inte specificeras i ämnesplanerna. Manne säger att "vi i Sverige lite mesiga" understryker att både Norge och Danmark omnämner GeoGebra i styrdokumentet. Följden av detta kan påverka lärares förhållningssätt till digitala hjälpmedel och dess plats i undervisningen. Manne nämner att om GeoGebra nämns i styrdokumentet som till exempel i Norge får det "en viss effekt för läroboksförfattarna, kan jag säga. Vilket i sin tur får effekt på lärarna sedan". Dock säger han att "i Sverige så börjar Skolverket vakna lite grann" dock tillägger han senare att "det börjar röra på sig lite grann och det börjar ju dyka upp idéer om digitala nationella prov och sådant också. Så att, vi får väl se. Men ja, absolut, styrdokument tycker jag liksom pekar mot att man ska använda verktyg på datorer". Manne menar att vi är inne i lite av ett skifte där eleverna går från att ha använt räknare till att helt använda sig av mobiler och datorer.



**Ulla:** Som lärare ska man först och främst kunna använda IKT menar hon. Här tänker hon att GeoGebra ingår då programmet gör det lättare att kommunicera. Hon nämner till exempel de elever som har svårigheter med sin motorik. Dessa elever kan uttrycka sig bättre med bilder då de använder GeoGebra istället för att göra det med papper och penna.

Om hanteringen av GeoGebra skulle bli ett kunskapskrav, så som det är i Norge, då tycker hon lärare ska få fortbildning innan det implementeras i styrdokumentet. Detta då hon menar att alla lärare i dagsläget inte kan använda programmet. Dock säger hon att hon hört att lärarlyftet i matematik kommer att inkludera GeoGebra i IKT-delen. Vidare menar hon att det måste finnas en kontinuitet i termer av att alla på skolan använder det, det diskuteras och följs upp på varje skola. Här menar hon att det måste avsättas tid annars "kommer vi ingen vart med förändringen". Enligt henne förväntas lärarna att vara experter "och kan vi inte leverera de förväntningarna så blir vi dåliga lärare och ingen vill bli en dålig lärare".

**Berit:** Det står tydligt i styrdokumentet att digitala hjälpmedel ska användas i undervisningen menar Berit. Detta nämner hon är något som både finns i det centrala innehållet samt i själva beskrivningen av ämnet.

**Bertil:** Bertil bad att få gå och hämta ett styrdokument under intervjun. Han börjar med att nämna målen och därtill förmågorna med citatet "hantera procedurer och lösa uppgifter av standardkaraktär utan och med verktyg". Verktyg kan enligt honom till exempel vara miniräknare eller datorer. Han refererar till några fler ytterligare utdrag så som "lösning av exponentialekvationer genom prövning och grafiska metoder", "konstruktion av grafer till funktioner, samt bestämning av funktionsvärde och nollställe utan och med digitala verktyg" och "problemlösning - strategier för matematisk problemlösning inklusive användning av digitala medier och verktyg". Han kommenterar inte så mycket.

Utifrån egen erfarenhet nämner Bertil att synsättet på styrdokumentet varierar beroende på vilken skolläring han jobbar under. Han ställer sig frågan: "Är styrdokumentet levande dokument eller är det inte?". Han nämner även att många mattelärare upplever de nuvarande styrdokumentet som otydliga. Att kommunicera i tal och skrift är tydligt, dock menar han att kommunicera i handling är mer otydligt. Enligt Bertil är den bästa presentationsformen, att kommunicera något i handling, genom att använda datorn för att till exempel göra en utskrift av någon funktion eller dylikt. Han antyder att det även finns en viss otydlighet gällande relationen mellan det som står under centralt innehåll och det som står i målen/kraven.

**Sven:** Att styrdokumentet inte nämner något digitalt verktyg explicit är något som Sven poängterar. Detta han menar kan bidra till en viss förvirring, dock tänker han att GeoGebra är ett av många lämpliga alternativ. Vidare menar Sven att GeoGebra kan användas "till att förstärka dem flesta utav de här förmågorna [som nämns i styrdokumentet]". Vidare säger han att man kan använda det till att förstärka eller träna på de flesta av förmågorna. Han tillägger att "däremot kan man ju inte slå av datorn och slå av hjärnan! Utan själva processen måste ändå äga rum här inne [i huvudet] på något vis".

### **6.9.2. Hur man kopplar GeoGebra till matematikdidaktisk forskning**

**Manne:** Det finns forskning, menar Manne, om både arbetet med färdiga modeller samt konstruerandet av egna. Ett exempel på det förstnämnda kan vara att eleverna får leka, laborera och tolka färdiga modeller på någon simuleringssida på nätet. Om det sistnämnda säger han att "jag tycker det finns stöd i forskningen där att man förstår mer på djupet då, vad man håller på med, när man bygger modellerna själv". Till exempel kan eleverna arbeta med ett längre modelleringsprojekt. Han tillägger att "det är lättare att tolka andra modeller om man byggt någonting själv också".

**Ulla:** På denna fråga svarar hon att det är snabbheten som gör att hon använder det, vilket inte utvecklas mer.

**Berit:** Om eleverna får göra saker själva så kommer de ihåg det en längre tid, menar Berit. Detta är något som menar är evidensbaserat. Hon upplever i huvudsak att de duktigaste och mest matematikintresserade eleverna kommer längre med programmet än utan det. Viktigast av allt i undervisningen menar hon är att undervisningen varierar. Ibland tycker hon att det är bra med förståelse först (till exempel funktionsbegreppet) och andra gånger proceduren först (till exempel vid arbete med ekvationer). Beslut som är baserade på egen erfarenhet. Detta trots att forskning visar på att fokus på ren mekanisk räkning eller procedurmässig räkning bidrar till att man inte kommer ihåg det som man har lärt sig. Hon menar att "variation är svaret".

**Bertil:** Det första som Bertil nämner är att "det är ju bra med begreppsbyggnad innan man har lärt sig algoritmer. Det är bra att veta vad ett ekvationssystem är och vad det går ut på, innan man fastnar i additionsmetoden". Han får frågan om han tycker att det är viktigt med förståelse före proceduren. Han säger att förståelsen är viktig vid problemlösning och för att kunna generalisera. För att eleverna ska undvika att fastna i procedurer menar Bertil att eleverna bör börja med begreppsbyggnad och enklare procedurer för att sedan kunna lösa dessa med hjälp av tekniska hjälpmedel. Han tillägger att det visuella har med begreppsbyggnad att göra. I sammanhanget vill han poängtera att den formella definitionen också är viktig. Utöver detta menar han att olika representationsformer och dess inbördes samband är viktigt.

**Sven:** De senaste åren har han inte haft möjlighet att sätta sig in i ny matematikdidaktisk forskning på grund av egen matematisk forskning.

### 6.9.3. Hur man kopplar GeoGebra till lärande teorier

**Manne:** Arbetet med modellering är det "ju lite learning by doing" säger Manne.

**Ulla:** Det är hennes andra år som hon jobbar med GeoGebra på iPaden så hon menar att hon inte hunnit prova allt som till exempel att arbeta med grupparbete. Detta då hon säger att "jag tror att det som begränsar mig är bara jag själv. Jag har känt att jag är så osäker i själva programmet med att använda det på paddan och jag har inte den tiden att forska kring det". Hon tillägger att det skulle vara bra om det fanns en kurs i hur man kan använda GeoGebra på iPaden, då de flesta kurser som är tillgängliga fokuseras på datoranvändande.

**Berit:** Visualisering och laborativt arbete är två områden som Berit nämner. Sedan säger hon att det är ett begränsat utbyte av kunskaper och färdigheter gällande GeoGebra, på hennes arbetsplats. Hon säger vidare att man kan använda programmet för att visualisera matematiken. Detta då hon menar att "ju fler intryck samtidigt desto bättre, antar jag, för att man ska komma ihåg det". Utöver detta säger hon att det säkert finns någon fin forskning som kan kopplas till laborativt arbete. Vidare får hon frågan om hon anpassar arbetssättet utifrån vilken lärostil eleverna har. Hon säger att detta med lärostilar är något som hon inte tror på, då hon är övertygad om att man varierar undervisningssättet tillräckligt mycket så lär eleverna sig. Hon tillägger att "Vet inte det där mer lärostil, sätta sig på en stol och plugga är en lärostil som fungerar. Och gör man inte det, så lär man sig ingenting". Vidare menar hon att "jag vet inte så mycket med det där med lärostil, jag tror att man skulle kunna vinna rätt mycket på att släppa kravet på att förstå vad man gör". Detta då hon menar att en del av hennes elever är rädda för kaos, men hon menar på att om de kan acceptera kaoset ett tag så kommer förståelsen att komma.

**Bertil:** Här återkommer Bertil till det här med begrepp och att dessa måste komma före symboler och algoritmer, gärna då med tillrättalagda specialfall. När Bertil själv gick i skolan var det mycket fokus på procedurer, dock kom detta att ändra sig när han gick på universitetet. Då blev det mycket mer matematisk teori så som bevis och formella definitioner något som han tycker gymnasiet borde haft mer av. Han tillägger att tekniska hjälpmedel kan användas för att lägga mer fokus på förståelse snarare än procedurer detta "för att representera begreppet". (Nu är det väldigt annorlunda. Nu tror man att förr var de bättre på matematik, dock skulle nog detta bara sägas vara just procedurer. Nu förtiden är det kanske mer fokus på förståelse och mindre på procedurer. Vidare menar Bertil att variationsteorin och GeoGebra är "väldigt förenligt". Ett exempel på detta är när man jobbar med linjära funktioner, då kan man enkelt variera ett värde och samtidigt låta ett annat värde vara konstant.

**Sven:** Tre teorier kommer Sven att tänka på. Den första är John Deweys teori om learning by doing, den andra är Rousseau som säger att som man bäddar får man ligga och till sist Skinner som talar om antingen omedelbar belöning eller omedelbart straff när man jobbar med datorer. Sven tillägger att Rousseaus teori säger "att barnets egen insats leder till belöning eller straff. Helt automatiskt, krossar du rutan i sovrummet då regnar det in och då får du sova i en blöt säng sedan. Det där gäller ju när man jobbar med datorer, väldigt mycket. För att den gör exakt det man säger åt den, och gör den fel då har man sagt fel".

Fortbildning är något som Sven själv håller i tillsammans med en kollega på distans. Han säger att de "triggar varandra", lär varandra saker då de är bra på olika områden. Detta kallar han för "något slags kollegialt lärande".

## 6.10. Övrigt

Frågan angående användandet av olika plattformar uppstod efter intervjun med Ulla. Intressant då detta var någonting vi tänkt på innan detta.

### 6.10.1. Plattformar

**Ulla:** Ulla säger att de använder iPads på skolan, dock har hon inte fått någon utbildning i hur hon ska använda GeoGebra på denna plattform. Hon vet dock hur man hanterar det på datorn, vidare menar hon att man kan göra mer saker med GeoGebra på datorn, i jämförelse med iPaden. Hon säger att hon aktivt väljer att inte använda GeoGebra på datorn då hon menar att eleverna kanske klagar och säger att "det inte är någon idé att använda detta program eftersom det inte är lika bra att använda det på paddan". Ulla menar att programmet successivt har blivit bättre och bättre med tiden. Dock tycker hon att det är viktigt att poängtera att användandet av GeoGebra på iPaden är begränsad, i jämförelse med att arbeta med det på datorn. Hon menar att det till exempel inte går att programmera saker på samma sätt med en iPad. Detta i den kontext då många skolor i Sverige jobbar med iPads istället för datorer.

**Berit:** Hon använder nästan uteslutande GeoGebra på datorn, precis som hennes elever. Därför har hon inte känt något behov av att behärska appen till iPad. Dock har hon testat appen men hon är så förtjust i då den inte är lika kraftfull som datorvarianten. Om situationen skulle förändras och eleverna skulle börja använda iPads då skulle hon självklart behöva sätta sig in i det, anser hon.

**Bertil:** Under 6.8. nämner han att eftersom inte GeoGebra finns smartphones än så får eleverna därför använda Wolfram Alpha på denna plattform.

**Sven:** Vad Sven vet om så använder sig inte hans elever inte sig av GeoGebra på vare sig smartphones eller på paddor, detta då varje elev får varsin dator. Personligen har han både en smartphone och en padda men att han inte använt GeoGebra på dem. Han tillägger att ”det är väl för att jag tycker om mitt tangentbord, helt enkelt”.

### 6.10.2. Övriga reflektioner

**Manne:** Manne nämner att normalfördelningsuppgifterna i läromedlen ofta är onaturliga och krystade, vilket bidrar till att det tappar verklighetsförankringen. Han menar att GeoGebra är ett bra program för att arbeta med mer verklighetstroga uppgifter.

**Berit:** Berit och en kollega håller kurser i GeoGebra för lärare och hon menar att man till viss del kan få undervisning om hur man kan använda programmet men att det också är viktigt att läraren själv har ett eget intresse att vilja lära sig mer. Hon säger att “det är jätteroligt när man får fler folk att börja, för det är första pushen som man behöver”. Berit nämner att det finns mycket motstånd mot programmet GeoGebra. Hon säger att många lärare vet om att programmet finns men ändå vägrar att använda det. Hon nämner att vissa argumenterar för att användandet av GeoGebra eller miniräknare resulterar i att eleverna inte kan räkna. Samtidigt säger hon att vissa bara är konservativa och att andra kritiker faktiskt har en hel del goda idéer.

Berit säger att när man undervisar med GeoGebra är det viktigt att inte går för fort fram. Hon menar att detta skiljer sig mycket från att använda tavlan för att rita grafer för hand, detta då eleverna automatiskt ges tid att tänka och reflektera under själva ritandet. Men då man använder GeoGebra går allt så fort i jämförelse med att rita för hand, därför tycker Berit att det är viktigt att läraren tar “konstnärliga tankepauser” vilket ger eleverna tid att reflektera och tänka själva. Något som hon lärt sig av erfarenhet. Vidare säger hon att man som lärare ska “kunna förklara något, med så få ord som möjligt, så precist som möjligt” och att “alltså fundera i förväg på vad man ska säga. Och man kan sitta i timmar och tänka ut i vilken ordning man ska formulera sig”. Detta då hon menar “ att man verkligen säger det man menar. Och i det läget väldigt precist. För att ett ord kan sätta stopp för förståelse om man placerar det på fel ställe”. Hon nämner även att beroende på vad det är man vill komma åt så kan det ibland vara bra att ha homogena alternativt heterogena grupper.

**Bertil:** “En vanlig sak, ett vanligt argument är ju att - men det här tar ju tid. oavsett vad man kommer ut med, det tar ju så mycket tid. Ja men du ska ju inte det här utöver allt som man har gjort tidigare. Då ska du hitta någonting som du gjort tidigare som du kan lägga ned, och göra det här istället. Det är så man måste tänka.” Han tillägger att det kanske är läraren som måste komma över en tröskel. En sak som han nämner är att lärarens handledning kan vara en faktor, att det är ett annat sätt att undervisa på i en datorsal etc.

**Sven:** På frågan om han känner sig trygg med programmet svarar Sven att “ja, det är jag och framförallt är jag trygg med matten bakom”. Vidare menar han att ”de matematikkunskaperna han har är minst lika viktiga som kunskaper om programmet”. Han säger att hans matematikkunskaper hjälper honom att felsöka och identifiera fel i program som han gjort. Sven tror tyvärr att det kan vara så att det finns många matematiklärare som är osäkra på det matematiska innehållet. En annan aspekt som Sven lyfter upp är att en del lärare inte är vana att arbeta med datorer samt att ” det finns nog ofta en osäkerhet när det gäller själva programmet också, [även] hos folk som inte har problem med matten”. Sven menar att en del lärare har upplevt ett visst mönster i termer av att trender kommer och går, och att de blir less på det. Han liknar denna inställning med att säga ”att det inte är någon ide att lära sig för att det kommer ändå, alltså, det ingen ide att fixa kompisar för vi flyttar ändå om ett år, ungefär”. En ytterligare aspekt som han nämner är att vissa lärare som känner sig osäkra på det matematiska kan undvika att använda sig av GeoGebra då det kan uppkomma frågor som de inte kan svara på. “Jag tror, och det gäller nog både lärare och elever att är man intresserad så lär man sig det och är man inte intresserad så lär man sig inte.”