GÖTEBORGS UNIVERSITET

Gyllene snittet och geometriförståelse på gymnasiet

Simon Larsson

Examensarbete i matematik för lärare: 15 hp
Kurs: MMGL99
Termin/år: VT 2015
Handledare: Jonny Lindström
Examinator: Laura Fainsilber
Kod: VT15-3001-001-MMGL99

Abstrakt

Examensarbete i matematik för lärare,
Titel: Gyllene snittet och geometriförståelse på gymnasiet.
Författare: Simon Larsson
Termin och år: VT 2015
Kursansvarig institution: Matematiska Vetenskaper
Handledare: Jonny Lindström
Examinator: Laura Fainsilber
Rapportnummer:
Nyckelord: Matematik, geometri, gyllene snittet, matematiska begrepp, Van Hiele-nivåer, förståelse, inlärning.

Syftet med mitt arbete är att utreda vad det gyllene snittet innebär, samtidigt som detta förhoppningsvis ger mig en grund för att senare i arbetslivet kunna använda mig av denna kunskap för att konstruera matematikuppgifter som dels innefattar den mystik som finns kring gyllene snittet, men även ta ut eleverna mer i verkligheten och genom gyllene snittet visa hur matematik dyker upp på oväntade platser omkring oss där deras förmåga att analysera geometri blir bättre. Speciellt som både matematik- och naturkunskapslärare är det av intresse för mig, då naturen är en vanlig plats där detta snitt dyker upp.

Den andra delen av uppgiften går dels ut på att undersöka hur elever i gymnasiet, årskurs två tolkar och utför geometri men även hur lärare utför och förhåller sig till geometriundervisningen. Uppgiften som eleverna löste var i grupper av tre, där jag spelade in elevernas samtal för att sedan kunna analysera dem. Jag kommer med hjälp av Van Hiele-nivåer försöka kategorisera var deras förståelse ligger samtidigt som jag isolerar vilken nivå som det möjligtvis finns kunskapsbrister på och föreslå vad som kan göras för att åtgärda dessa brister.

Det framkom tydligt hur elevernas förmåga att ta fram tidigare inhämtad kunskap i en situation utan instruktioner var svårt för dem, där brist i deras analytiska förmåga var mest framträdande.

Innehållsförteckning

1. Inledning

1.1 Om författaren

Jag heter Simon Larsson och detta är mitt examensarbete vilket kommer markera slutet på min utbildning till matematik- och naturkunskapslärare riktat mot gymnasiet. Under dels min egen utbildning till lärare men även egna undervisning av elever i gymnasiet har jag märkt att elevers syn och inställning till matematik är att det är något som endast finns just i skolan. Väldigt få jag pratat med ser matematiken som en form av verklighetsbeskrivning och har svårt att översätta det man gör i undervisningen till verkliga konkreta verklighetskoncept.

Framförallt i geometrin tycker jag detta är beklagligt då allt omkring oss är uppgjort av geometriska former och därför är lätta att konkretisera och överföra från boken till verkligheten. Naturen gömmer en mängd spännande geometri vilket ledde in mig på det gyllene snittet. Jag var nyfiken på om det som sades om det var sant eller inte, samt om jag kunde använda denna kunskap i min undervisning för att ta ut eleven från sitt tankesätt att matematik, det görs i matematikboken.

Det gyllene snittet har länge varit spännande för mig, åtminstone själva idén om att det skulle kunna finnas något som gör att vi människor uppfattar något som vackrare. Huruvida detta är sant eller inte är väldigt viktigt att studera, speciellt om man som jag planerar att eventuellt använda det i undervisningen. Då måste jag kunna avgöra vad som stämmer, vad som är falskt och vilket som inte går att avgöra.

Av denna anledning har jag valt att fokusera på just det är i mitt examensarbete där jag ska försöka skilja myt från verklighet och samtidigt få en inblick i hur geometriundervisningen ser ut i en gymnasieskola.

1.2 Syfte och frågeställningar

Syftet med mitt arbete är att framförallt utveckla min egna matematiska kompetens samt söka efter områden jag kan integrera i min undervisning. Området jag valt att lägga fokus på handlar om det gyllene snittet och min förhoppning är att genom detta få idéer till min undervisning som erbjuder eleverna en mer levande och analytisk undervisning i geometri som även stämmer överens med vad kursplanerna i matematik faktiskt kräver. Jag vill även utforska vad en undervisning som är mer lagd åt detta hållet kan ha för konsekvenser för elevers förståelse. För att lyckas med detta behöver jag studera hur elever ser på geometriundervisning och hur de omsätter detta i praktiken. Geometri är något som är genomgående för alla kursplaner genom skoltiden, vilket gör det till ett viktigt område att studera och utveckla. Vad som vidare är intressant är att det även nämns i kursplanerna är hur man ska relatera geometri till verkligheten. Detta inslag är något jag aldrig själv sett eller upplevt i undervisningen vilket vidare förstärker min tro till att det är ett viktigt område att studera närmare.

Mina frågeställningar lyder:

- Hur kan geometriundervisningen se ut i en gymnasieskola?
- Vad är det gyllene snittet och var uppkommer det genom historien?
- Hur ser elevers geometriförståelse ut på gymnasiet?

1.3 Disposition

Till att börja med ska jag studera matematiken som innefattas i detta arbete för att dels kunna konstruera en bra uppgift för eleverna jag ska prata med, men även för att ge en bra grund för mig som skriver arbetet. Detta kommer jag göra genom olika vetenskapliga artiklar, kursplaner i matematik både på grundskolenivå och gymnasienivå. Jag kommer även ta fram underlag för att kunna utföra intervjuer och undersökningar på ett adekvat vis.

Därefter kommer jag att dels utföra intervjuer med lärare och elever samt att analysera elever som löser en geometriuppgift. När eleverna löser uppgiften spelas deras röster in. Elevernas kommunikation och prestation kommer sedan att utvärderas med hjälp av Van Hiele-nivåer vilka kommer att presenteras under teoretisk bakgrund.

2. Litteraturgenomgång

Samhällsvetenskapliga metoder (2008) är en bok skriven av Alan Bryman där han går igenom både kvalitativa och kvantitativa metoder för informationsinsamling. Han skriver ut konkreta tips som är bra att tänka på både innan och efter en intervju vilket jag tagit till mig när jag skapade mina intervjumallar samt utförde själva intervjuerna.

I artikeln *An In-depth Investigation of the Divine Ratio (2006)*, publicerad av Birch Fett i Montana Mathematics Enthusiast, Montana University om hur gyllene snittet uppkommer genom historier inom områden som fornegyptisk matematik, fibonaccisekvenser och en rad andra historiska kulturer. Fokus ligger på det gyllene snittet där han utreder vad och hur man kan finna det i en rad konstverk samt i naturen. Han är skeptisk till flera av de påstående som finns kring begreppet och han redogör tydligt vad det finns för belägg för de olika områdena. Från denna artikel kommer jag hämta information om det gyllene snittet och hur historien kring begreppet ser ut.

I sin bok *The golden ratio - The story of phi, the world most astonishing number (2001) skriver* Mario Livio om det gyllene snittet och om dess historiska influenser. Den redogör för en mängd påstående där konkreta exempel vävs in med matematiska resonemang för hur gyllene snittet integrerar med olika områden som natur, konstverk och geoetriska former. Boken skrevs av honom då han själv var väldigt intresserad av den mystik som det gyllene snittet håller. Även i denna bok hämtar jag inspiration och information kring det gyllene snittet.

Analysera mer i geometri publicerad (2011) i NCM – Nämnaren skriver Britt Holmgren en kort artikel som behandlar inlärningssvårigheter hos elever. Holmgren går igenom ett antal uppgifter som elever fått lösa som följs av en studie av den nya kursplanen Lgr11 samt om Van Hiele-nivåer och hur dessa kan kontribuera till en bättre förståelse för elevers eventuella svårigheter i geometriundervisningen. Artikeln använde jag som hjälp när jag själv skulle analysera lösningarna som eleverna i min undersökning gjorde.

The Van Hiele levels of geometric understanding, Professional handbook for teachers, geometry: Explorations and applications (1998) skriven av Mason Marguerite skriver i korthet om Van Hiele-nivåer och hur dessa ser ut. Hon beskriver även hur man som lärare kan använda sig av det och svarar på vanliga frågor angående ämnet. Jag har använt mig av hennes tips och insikt för att själv forma en grund för min analys.

I *Klassiska fraktaler* (2009) av Per Alexandersson skriver författaren om ett antal klassiska fraktaler och algoritmerna som ligger bakom dessa. Han har även med en introduktion till fraktalbegreppet och en kort historia kring det. Han själv beskriver sitt verk som en form av receptbok där han skriver ut parametrar till olika fraktaler då han själv varit frustrerad över att det varit svårt att hitta dessa. Jag har använt mig av hans förklaringar och algoritmer för fraktaler för att studera begreppet.

Metodpraktikan (2012), är skriven av Peter Esaiasson, Mikael Gilljam, Henrik Oscarsson och Lena Wängnerud. Boken tar upp samhällsvetenskapliga och utbildningsvetenskapliga metodfrågor och har en mängd tips att ta till sig inför en undersökning. Jag använde mig av deras avsnitt om reliabilitet och validitet för att underbygga mina intervjuer och undersökningar.

Thompson, J. (1991). *Historiens Matematik* (1991) skriver Jan Thompson om historiens matematik och hur den uppkommer i kulturer som den forngrekiska, fornegyptiska och en mängd andra. Han beskriver den ofta primitiva matematik som vissa av dessa kulturer använt sig av och spårar dess rötter.

3. Metod
I detta avsnitt kommer jag presentera vilka metoder jag använt mig av för att besvara mina frågeställningar.

3.1 Val av metod
Jag valde att använda mig av en kvalitativ metod då mitt mål är att utreda vilken nivå elevers förståelse kring geometri ligger. Van Hiele-nivåer kräver att jag får insikt i hur eleverna tänker och resonerar när de löser en uppgift, vilket vidare stärker valet om att göra en kvalitativ undersökning.

3.2 Avgränsningar

Då mitt arbete handlar om geometri och framförallt det gyllene snittet har jag valt att fokusera på några av de område där detta dyker upp för analys. Jag kommer kort beskriva lite om historian bakom de olika områden jag väljer för att sedan studera matematiken bakom det. Då ett av mina mål med arbetet är att utöka min egen förståelse av begreppet och att kunna använda mig av det i min egen undervisning valde jag flera områden istället för att fokusera på enbart ett.

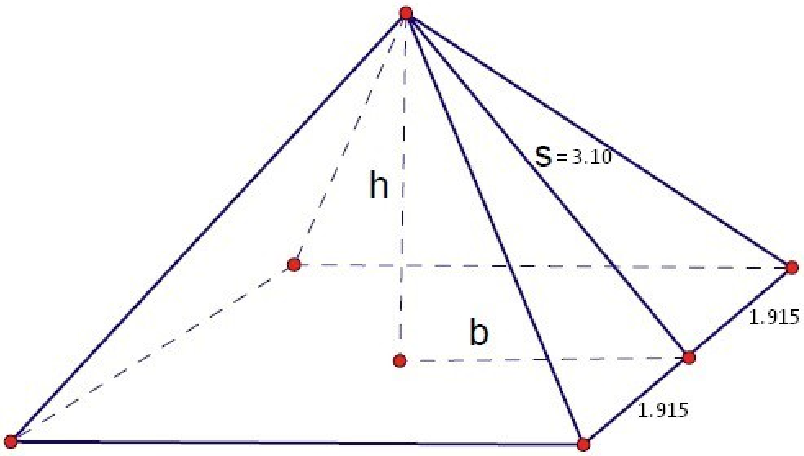
3.3 Datainsamling

För att kunna besvara mina frågeställningar har jag bestämt mig för att dels intervjua elever angående geometri, men även låta ett antal grupper lösa en uppgift som jag själv konstruerat. Jag ska även intervjua lärare angående deras syn på geometriundervisningen.

För att göra detta tog kontakt med rektorn för den skola som jag tidigare haft praktik på för att utföra min undersökning. Jag besökte skolan och informerade eleverna om hur och varför jag genomförde undersökningen och att allt var helt anonymt och frivillig. Jag berättade även att jag skulle spela in deras röster under tiden de löste uppgiften och att ljudupptagningen sedan skulle tas bort, vilket det nu är. Uppgiften testade jag på elever innan själva undersökningen påbörjades och eleverna tyckte den var knepig, men bra. Samtliga elever går samhällsvetenskapliga programmet i årskurs 2.

Intervjun kommer användas som underlag i min analys, precis som elevernas förmåga att lösa en uppgiften i geometri.

Uppgiften eleverna löste ser ut enligt följande:



Konstruera samma geometriska figur, med samma kvadratiska bas fast med en tredjedel så stor volym.

Figuren i uppgiften är tagen från (Fett, 2006, s. 9) och editerad i efterhand.

Uppgiften löstes i ett separat grupprum där tiden eleverna spenderade med uppgiften varierade mellan 10 till 20 minuter.

3.4 Konstruktion av intervju

För att jag skulle kunna skapa en intervju använde jag mig av boken *Samhällsvetenskapliga metoder* (2008) av Alan Bryman där det talas om hur man måste tänka på ”Vad måste jag veta för att kunna besvara mina olika frågställningar?”(Bryman, 2008, s. 419). Han beskriver vidare ett antal tips vilka jag använt som grund när jag formulerade min intervjumall. Några av de tips som han nämnde var enligt följande:

- Skapa ett viss mått av ordning, men var beredd på att ändra ordningen under intervjun.
- Formulera frågor som underlättar svar på våra frågeställningar.
- Ställ inte ledande frågor.
- Notera bakgrundsfakta som ålder, kön, namn, antal år som lärare och hur långa de arbetat på skolan (Bryman, 2008, s.419f).

Intervjumallarna jag skapade finns med som bilaga 1 respektive bilaga 2.

3.5 Genomförande av intervjuerna

Själva genomförandet av intervjun måste även den vara strukturerad och även här vände jag mig till Bryman och tog del av hans tankar kring genomförandet. Bryman delar med sig av vad han kallar ”tips för en framgångsrik intervjuare”(Bryman, 2008, s. 240), där han tar upp ett antal punkter som t.ex:

- Jag måste vara insatt och veta vilka detaljer som ska fokuseras på.

- Ha en strukturerad ordning genom där jag beskriver syftet med intervjun och innan intervjun startar frågar om intervjupersonen har eventuella frågor.
- Jag måste alltid visa hänsyn där jag ska låta den intervjuade få tala till punkt samt även ge dem tid att tänka efter en ställd fråga.
- Jag måste även alltid var öppen och flexibel inför eventuella förändringar.

3.6 Validitet och Reliabilitet

För att undersökningen ska ha god resultatsvaliditet krävs det att man dels har begreppsvaliditet samt reliabilitet i sin undersökning (Esaiasson, et al, 2012, s. 63).

För att adressera begreppsvaliditet så krävs det ett avsaknande av systematiska fel vilket enklast uppnås genom att ha operationaliseringar som stämmer bäst överens med det jag försöker utreda samt att på ett bra sätt faktiskt testa dessa rent empiriskt (Esaiasson, et al, 2012, s. 60). Vidare beskrivs det hur reliabilitet innebär en frånvaro av slumpmässiga och osystematiska fel. Reliabiliteten handlar främst om slarvfel under datainsamlingen samt den efterföljande databearbetningen (Esaiasson, et al, 2012, s. 63).

Eleverna som jag lät utföra min uppgift kände mig väl då jag haft egen undervisning med dem under en längre period. Då detta förmodligen minskade deras nervösitet inför uppgiften anser jag detta som något gott. Uppgiften utfördes i ett separat rum vilket gjorde att ljudupptagningens kvalitet var god. Detta förhindrade eventuella problem med transkriberingen och ökar därmed reliabiliten på undersökningen och då undersökningen främst handlar om hur eleverna kommunicerar och löser uppgiften var detta av stor vikt.

Jag valde att analysera den grupp som lyckades bäst med uppgiften och därmed gav mig mest underlag för analys. Deras kommunikation har jag postat som en del av resultats
Jag blundar dock inte för möjligheten att elevernas prestation påverkats av dels min närvaro, men även att uppgiften utfördes i en isolerad lokal. Att det skedde ljudupptagning kan också ha påverkat deras kommunikation negativt.

Jag anser att min resultatsvaliditet är god och att analysen av uppgiften kommer ge mig ett bra verktyg inför min kommande karriär inom läraryrket.

3.7 Etik

Innan jag utförde någon undersökning tog jag del av och har utgått ifrån *Vetenskapsrådets forskningsetiska principer* (Vetenskapsrådet, 2002, s. 6) vilket baseras på fyra olika grundläggande krav: informationskrav, samtyckeskrav, konfidentialitetskrav och nyttjandekrav.

Då jag informerade skolan och inblandade elever om mitt examensarbete innan uppfyllde jag informationskravet. Vid samma tillfälle informerade jag samtliga om att det var frivilligt (Vetenskapsrådet, 2002, s. 7). Alla dokument som jag arbetat med som anknyter till intervjuer eller undersökningar har blivit avidentifierade och all insamlad data används endast till detta arbete (Vetenskapsrådet, 2002, s. 14).

4. Teoretisk bakgrund

4.1 Geometri i kursplanerna

Geometri finns som ett avsnitt i varje kursplan och i den relativt nya läroplanerna från skolverket finns det redan med från kurs ett i grundskolan. Från kurs ett till tre beskrivs ett mål inom geometrin som att eleven ska få möjlighet att se ”Symmetri, till exempel i bilder och i naturen, och hur symmetri kan konstrueras.”(Skolverket, 2011a). Man kan även vidare läsa hur det för årskurs 4-6 beskrivs hur ” Symmetri i vardagen, i konsten och i naturen samt hur symmetri kan konstrueras.”(Skolverket, 2011a). Elever ska alltså redan från tidig ålder utsättas för geometri och hur den kan relatera och förankras i verkligheten och är något som är genomgående för alla kurser på grundskolan.

Även på gymnasiet kan man utläsa liknande formuleringar, nämligen: ”Begreppet symmetri och olika typer av symmetriska transformationer av figurer i planet samt symmetriers förekomst i naturen och i konst från olika kulturer.”(Skolverket, 2011b). Det är alltså så att även på gymnasiet så betonas vikten av att koppla geometri till verkliga företeelser där tydligen geometrin även ska vävas in med konst och kultur. Hur detta ska göras anges inte, utan läraren tycks ha stor frihet att välja detta själv.

Detta verkar heller inte vara något som är nytt, utan en tillbakablick på kursplanen för matematik A i *Läroplan för de frivilliga skolformerna - Lpf 94* avslöjas formuleringar som hänvisar till att eleven ska ”känna till hur matematiken påverkar vår kultur när det gäller till exempel arkitektur, formgivning, musik eller konst samt hur matematikens modeller kan beskriva förlopp och former i naturen.”(Skolverket, 1994). Detta knyts visserligen inte direkt till geometri vilket är något de verkar ha korrigerat i den nya versionen Lgr11 som jag nämnde ovan.

Geometrin och hur den skall knytas till verkligheten har alltså en central roll i kursplanerna och gör det till ett intressant område att utveckla och studera närmare. Speciellt då de nya läroplanerna sätter ett ännu större fokus på det än tidigare version.

4.2 Van Hiele-nivåer

Holländska forskarna Pierre Van Hiele och Dina van Hiele-Geldof använde sig av följande nivåer för att beskriva elevers förståelse av geometri. Enligt Van Hiele var det imperativt att eleven gick igenom samtliga av dessa nivåer för att kunna utvecklas. Han uttrycker även att ett stort problem som ofta uppkommer i klassrum är att läraren kommunicerar på en högre Van Hiele-nivå än vad eleven är kapabel att förstå (Mason, 1998, s. 6). Konsekvenserna för detta blir att eleven som inte helt uppnått förståelsen som krävs hamnar mer och mer efter vilket resulterar negativt på elevens prestation.

Följande nivåer påstår Van Hiele att man måste gå igenom:

Nivå 1: Igenkänning.(Visualisering)

På den första nivån lär sig eleven att känna igen en geometrisk figur men inte nödvändigvis tar hänsyn till den geometriska figuren som helhet. Ingen hänsyn tas heller till objektets olika delar. Ett exempel kan vara hur en elev känner igen en triangel, men inte några vidare egenskaper hos den. Eleven ser helt enkelt triangeln som ett objekt som liknar något i verkligheten och baserar det på perception, inte resonemang (Mason, 1998, s. 4).

Nivå 2: Analys

Här kan eleven analysera det geometriska objektet och räkna upp olika egenskaper som den besitter. Vad eleven inte kan är dock att se hur dessa egenskaper förhåller sig till varandra. Eleven kan heller ej avgöra vilka av dessa egenskaper som är nog för att beskriva objektet (Mason, 1998, s. 4).

Nivå 3: Abstraktion

På denna nivån kan eleven förstå sambandet mellan olika figurer och kan ge meningsfulla definitioner för dem och argumentera för dessa. Här kan de dra logiska slutsatser som att alla kvadrater kan ses som en typ av rektangel (Mason, 1998, s. 4).

Nivå 4: Deduktion

Här förstår eleven vikten av själva deduktionen och hur axiom spelar in under bevisförning. Det är på denna nivå en elev är som själv kan konstruera bevis, men inte nödvändigvis förstår varför axiom är så viktigt (Mason, 1998, s. 4).

Nivå 5: Stringens

När eleven nått nivå 5 förstår hen att precision är viktigt. Eleven kan utveckla egna teorier och jämföra olika matematiska system. Detta utan att använda konkreta föremål. Hen förstår även skillnaden mellan ickeeuklidisk och euklidisk geometri (Mason, 1998, s. 5).

Dessa nivåer beskriver hur en elev ständigt går mot ett mer abstrakt tänkande i geometrin. Den första nivån (Igenkänning) förväntas en elev vara på redan i förskolan där eleven kan identifiera olika former och relatera dessa till t.ex. hur den liknar formen på en dörr eller fönster. Nivå 2 (Analys) utökar detta där eleven nu kan inse mer egenskaper hos det geometriska objektet och identifiera hur t.ex. en kvadrat har parallella sidor. Det är först på nivå 3 som man börjar omsätta den inhämtade information i formler för beräkningar vilket är den nivå man oftast arbetar på under högstadiet och framförallt gymnasiet. Den sista nivån *Stringens* förväntas en elev inte nå upp till förrän universitetsnivå.

Britt Holmgren (2011) skriver i sin artikel i NCM – Nämnaren att eleverna måste nå de olika nivåerna i tur och ordning, det vill säga de kan enligt van Hiele inte hoppa över någon av dessa. Hon fortsätter dock att beskriva att ny forskning visar att en elev faktiskt kan befinna sig på olika nivåer beroende på vilket område som behandlas inom geometrin.(Holmgren, 2011, s. 13). Holmgren beskriver även ett scenario där en elev har svårigheter att utföra beräkningar och detta då kan bero på hur eleven inte fått spendera tillräckligt med tid i nivå 2 (Analys). Hon förklarar att eleven helt enkelt inte fått tillräckligt med tid med att empiriskt analysera vad de olika formerna har för egenskaper (Holmgren, 2011, s. 14).

Detta verkar även vara ett vanligt problem bland elever där forskning faktiskt tyder på att eleverna behöver ha mer tid till en mer utforskande verksamhet, det vill säga mer tid i nivå 2 (Holmgren, 2011, s. 14).

4.3 Gyllene snittet (φ)

Det gyllene snittet har varit fokus för en hel del kontrovers genom åren, där det finns en mängd påståenden om hur historiska verk i allt från Leonardo da Vincis konst, till fornegyptens pyramider och hur det gyllene snittet uppkommer och har används vid konstruktionen av dessa fantastiska verk. Även i naturen hittar man många hänvisningar till hur det gyllene snittet uppkommer. Huruvida detta är sant eller inte är svårt att svara på, då dessa påstående baseras på att konstnärerna och arkitekterna faktiskt kände till det förhållande som representerar gyllene snittet och sedan aktivt valde att använda sig av det.

Birch Fett (2006) beskriver kort om historian bakom namnet och symbolen på det gyllene snittet med att ”The symbol (τ) means "the cut" or "the section" in Greek. In the early twentieth century, American mathematician gave the golden ratio a new name. Mark Barr represented the Golden Ratio as phi (φ), which is the first Greek letter in the name of Phidias“ (Fett, 2006, s. 158). Han fortsätter med att beskriva hur man sedan faktiskt behöll namnet fi för att hedra konstnären och att detta namn sedan fortsatte att användas.

Det gyllene snittet, eller the *Divine Ratio* eller *The Divine Section* som det ibland kallas kan i enkelhet förklaras genom bilden nedan.

Om man delar upp en sträcka i en längre del AB samt en kortare sträcka AC så ska sträckan AB förhålla sig till AC som AC förhåller sig till CB. Detta formulerar man som:

Om vi tillskriver sträckan som där längden har längden x betyder det att längden har längden 1. Användning av ovan formel ger oss då att:

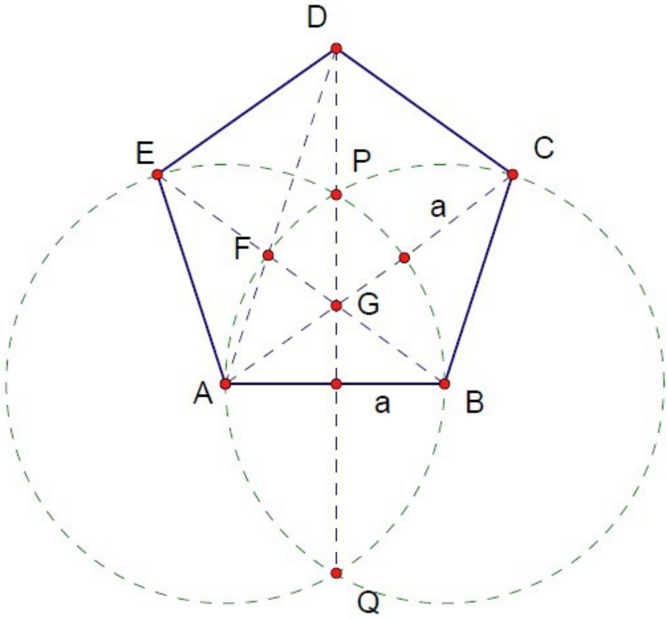
Förenkling av denna ekvation ger att där kvadratkomplettering ger oss två möjliga lösningar; nämligen:

Då vi pratar om en längd förkastar vi den negativa lösningen och konstaterar då att

Denna proportion är alltså den konstant som beskriver det gyllene snittet, alltså förhållandet mellan dessa två längder och kallas fi (φ).

4.3.1 Gyllene trianglar och pentagrammet

Som jag nämnde tidigare tycks det gyllene snittet dyka upp i olika konstverk, som t.ex. fornegyptens Cheopspyramid. Det sägs här att de fornegyptiska arkitekterna använde sig av något som kallas en gyllene triangel för att konstruera dess mått. En gyllene triangel är lättast att beskriva genom att studera en geometrisk figur som med säkerhet innehåller det gyllene snittet, nämligen pentagrammet.

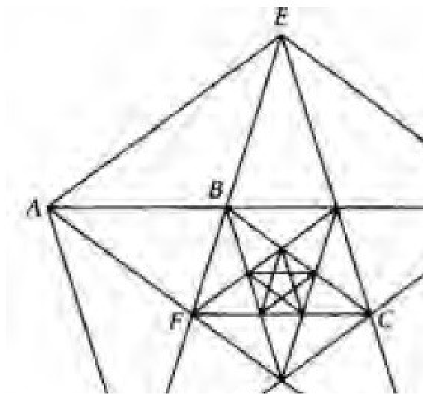


Figur 1: Pentagram (Fett, 2006, s. 163)

I figur 1 (Fett, 2006, s. 163) beskrivs själva konstruktionen av ett pentagram och utgörs av att man på en punkt A ritar en cirkel med radie a, följt av detsamma vid punkt B. Sedan vid punkt P konstruerar man en mittpunktsnormal PQ på linjen AB.

Drar man linjer mellan de olika vertexpunkterna kommer det här uppstå fem stycken så kallade gyllene trianglar. Gyllene snittet uppkommer i dessa då man dividerar basen med höjden. Dessa trianglar har två vinklar som är 72° och en som är 36°. Värt att nämna här är att dessa fem gyllene trianglarna tillsammans utgör det vi kallas en pentagon vilket illustreras i figur 2.

Fett beskriver det genom att vi ”From the Pythagoreans and the construction of the pentagram (which has five equal-area golden triangles) it can be seen that the length of the longer side to that of the shorter side is in golden proportion.”(Fett, 2006, s. 158). Figur 2 (Livio 2001, s. 206) illustrerar även hur man kan innesluta ett oändligt antal mindre pentagoner inne i ett pentagram.



Figur 2: Pentagoner (Livio 2001, s. 206)

4.3.2 Fibonaccisekvensen

Leonardo da Pisa föddes 1172 e.v.t. och är kanske mer känd som Fibonacci. Fibonacci är mest känd för att han introducerade världen för det så kallade kaninproblemet och Fett (2006) beskriver problemet enligt:

> The rabbit problem asked to find the number of rabbits after *n* months, given that adult rabbits produce a pair of rabbits each month, offspring take one month to reach reproductive maturity, and that all the rabbits are immortal. This problem gave the mathematical world the series of Fibonacci numbers (Fett, 2006, s. 160)

Tabell 1

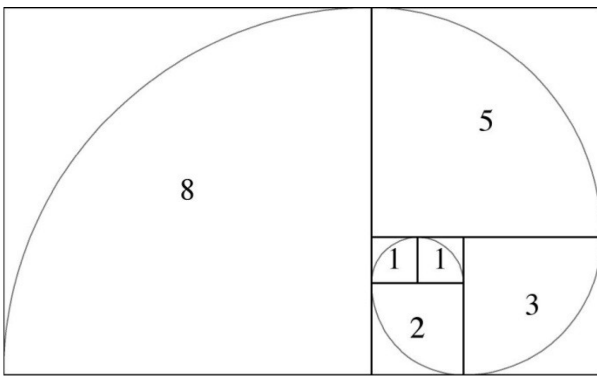
Tabellen ovan presenterar hur serien utvecklas där representerar antalet kaniner efter månader. beräknas genom att ta där man som i tabell 1 kan se hur t.ex. .

Tabell 1 illustrerar även hur konvergerar mot det gyllene snittet och vid kommer vilket börjar likna det vi känner till som det gyllene snittet.

Detta kan även uttryckas som att:

Denna serie uppkommer också i det som kallas en gyllene rektangel vilket illustreras i figur 3 (EIC, 2014).

En gyllene rektangel är en rektangel där förhållandet mellan längden och bredden är exakt gyllene snittet. Det sägs att denna rektangel är den som vi människor tycker är vackrast, men Fett förklarar hur människan inte kan skilja på en rektangel vars förhållande mellan längd och bredd är 1.6 eller 1.7. Det framgår dock att det dock verkar som att vi människor föredrar rektanglar som är väldigt nära det gyllene snittet (Fett. 2006. s. 167).

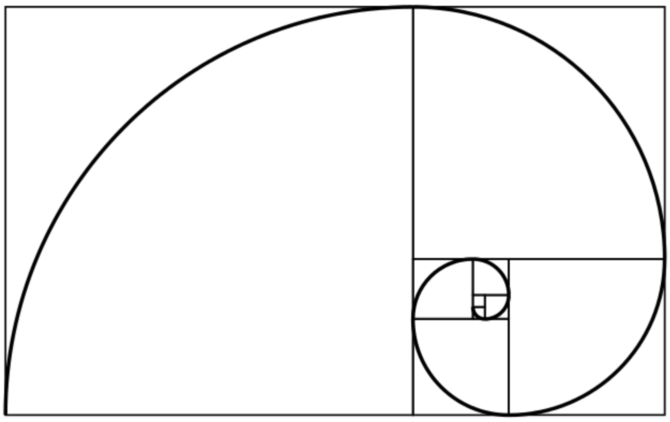


Figur 3: Gyllene rektangel (EIC, 2014)

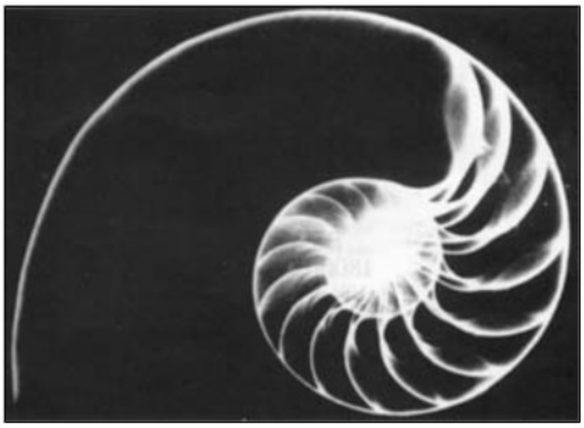
Även Euklides (325 f.v.t. – 265 f.v.t.) var intresserad av rektanglar och visade faktiskt hur man får fram gyllene snittet ur dessa. Euklides använde sig dock inte av benämningen gyllene snittet men grekerna ansåg att de rektanglar som innehöll gyllene snittet var speciellt välproportionerliga vilket influerade deras konst och arkitektur (Thompson, 1991, s. 228-230).

I detta skede känns det naturligt att nämnda det som kallas Fibonaccispiralen, eller det allmänna namnet logaritmisk spiral. Figur 4 visar det typiska utseendet på denna kurva samt ger en tydlig bild över hur den gyllene rektangeln sammanvävs med den logarimiska spiralen. Den generella formen för en logaritmisk spiral ges av den polära ekvationen:

I ekvationen ovan representerar avståndet från kurvans ursprung, vinkeln mätt i radianer som kurvan färdats och den naturliga logaritmen. Konstanten i formeln avgör utbredningshastigheten för spiralen och i den spiral som visas i figur 4 är denna konstant a exakt .



Figur 4: Fibonaccispiral (Wikipedia 2015)



Figur 5: Fossilt pärlbåtsskal (Persson 1994)

I figur 5 syns en bild på ett fossil av en pärlbåtssnäcka som följer den logaritmiska spiralens mönster. Den logaritmiska spiralens mönster uppkommer på ett flertal ställen i naturen. Man kan se spiralen uppkomma i spiralgalaxer, solrosen och i tornados (Livio, 2001, s. 117).

4.3.3 Fraktaler

Fraktaler uppkommer ofta i naturen och är ett exempel på komplexa system som faktiskt är förhållandevis enkla att beskriva. Per Alexandersson (2014) beskriver att ”En annan anledning är att fraktaler uppstår i gränslandet mellan fasta regler och kaos. Detta förekommer naturligt i naturen, där fysikens lagar är bestämda.”(Alexandersson, s. 4). Han fortsätter med att beskriva hur t.ex. blixten tar den snabbaste vägen ner och att blixten, när den delar upp sig kan ses som små kopior av sig själv (Alexandersson, 2014, s. 5). En fraktal kan alltså i korthet beskrivas som en mindre kopia av sig själv.

Sättet som man generar fram dessa mindre kopior av ett givet geometrisk objekt fås genom en så kallad itererad process. Gör man denna iterering tillräckligt mycket kommer det i många fall uppkomma fraktaler (Alexandersson, 2014, s. 5).

Definition: Ett itererande funktionssystem är en ändlig uppsättning av funktioner som avbildar planet på sig själv: . Här behöver det inte vara från planet till planet, utan rummet till rummet (Alexandersson, 2014, s. 5).

Om det ovan nämnda från definitionen är helt uppfyllt, samt att varje är kontraherande, alltså att den avbildar ett område på ett område med mindre area, så kommer det att finnas en mängd S, sådan att:

Det är just denna mängden som kallas för systemet attraktor, vilket innebär att vid en slumpvandring av detta system kommer den mängden hjälpa till att konvergera mot den speciella mängd som då genererar fraktala egenskaper (Alexandersson, 2014, s. 5).

Om vi skulle ha en mängd och använda oss av den ovan nämnda formeln kommer den att efter tillräckligt många itereringar generera en fraktal.

För att generera en fraktal som liknar en ormbunke, som ofta kallas Barnsley-ombunken använder man sig av den så kallade *Chaos game-algoritmen.* I denna använder vi oss av ett itererande funktionssystem där en punkt väljs slumpmässigt. Detta är ett exempel på så kallade *affina system* som alla kan skrivas på formen:

där och är konstanter. Punkten avbildas alltså på . På matrisform skrivs det ut enligt:

Funktionen ovan är kontraherande om (Alexandersson, 2014, s. 6).

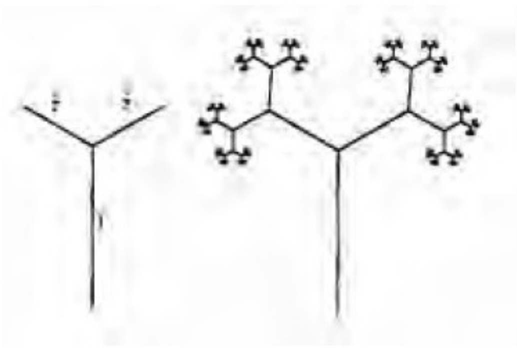
För att återgå till Barnsleys ormbunke krävs det faktiskt bara fyra funktioner för att skapa en fraktal med utseende som i figur 6. Dessa fyra funktioner har följande utseende:

(Alexandersson, 2014, s. 11)

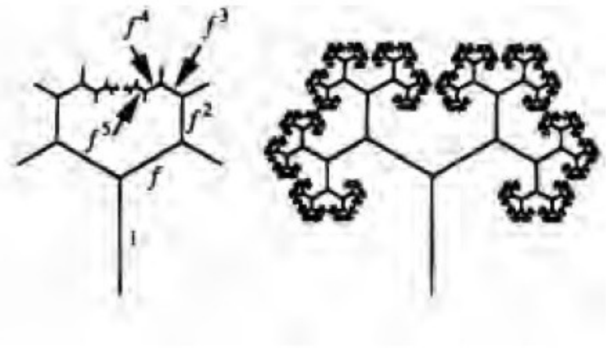
Den första funktionen kommer generera det som kommer stå för stjälken, medan avbildar själva ormbunken på det nedersta vänstra, respektive det nedersta högra delbladet. Den sista avbildningen krymper och roterar ormbunken medurs och flyttar den uppåt, så att den täcker alla utom de understa delbladen (Alexandersson, 2014, s. 6)

Figur 6: Barnsleys ormbunke (Alexandersson, 2014, s. 11).

För att visa hur det gyllene snittet mer konkret uppkommer när man pratar om fraktaler kan vi betrakta figur 7 och 8.



(a) (b)



(a) (b)

Figur 7 (Livio, 2001, s. 219)

Figur 8 (Livio, 2001, s. 219)

Figuren visar ett väldigt förenklat system där man låter en gren förgrena sig i två mindre, till en skala av och en vinkel Om vi här hade valt ett tal som är större än   hade grenarna flyttats lite närmare varandra allt eftersom fler grenar uppstår. Det är faktiskt så att vid exakt är grenarna precis intill varandra. Går man över detta tal, kommer grenarna som lättast ses i figur 8b att gå över och överlappa varandra, istället för att som i figuren ligga precis intill varandra (Livio, 2001, s. 219).

Som bevis för detta kan vi studera figur 8a. Det kan konstateras att ett kriterium för att de olika grenarna ska precis röra vid varandra är att grenarna som inte är vertikala ska bilda en summa där ska vara lika stor som de allt kortare grenarna och uppåt. Alla dessa komponenter är givna av deras totala längd multiplicerat med . Just används då deras förgreningsvinkel var

Detta ger:

Division med resulterar i:

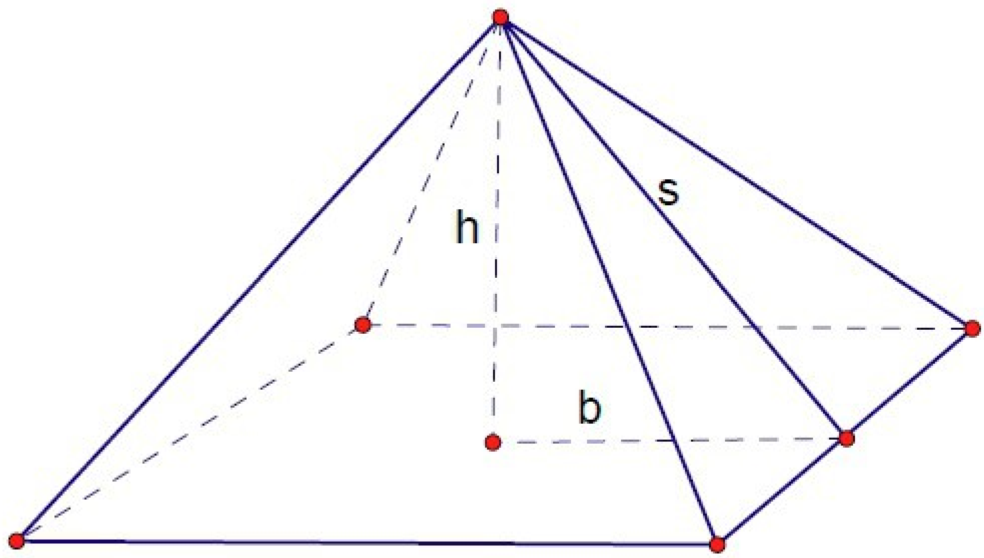
Då detta är en oändlig geometrisk serie, alltså en serie termer där varje term är lika med den förra multiplicerat med en konstant. Detta uttrycker vi på följande vis:

och division med ger oss ekvationen . Genom att multiplicera upp får vi den ekvivalenta ekvationen: . Denna andragradsekvation har den positiva lösningen (Livio, 2001, s.265-266).

4.3.4 Gyllene snittet i Cheops-pyramiden

Som jag tidigare nämnde finns det personer som påstår hur det gyllene snittet går att hitta i bland annat fornegyptens pyramider. Hur är det då man påstår sig ha hittat detta?

Livio berättar att Midhat J. Gazales I hans bok *Gnomon: From Pharaohs to Fractals* hur det tydligen rapporterats hur den gamla grekiska historikern Herodotos (485 f.v.t. – 425 f.v.t.) lärde sig från de fornegyptiska prästerna att pyramidens höjd var lika med arean av dess triangulära laterala sida. Vad som gör detta påstående intressant är att det faktiskt implicerar att pyramiden var konstruerad så att förhållandet av höjden på dess triangulära sida till halva basen faktiskt överensstämmer med det gyllene snittet (Livio, 2001, s. 56).



Figur 9 (Fett, 2006, s. 9).

Från figur 9 (*Fett, 2006, s. 9)* ovan kan vi se hur vi med hjälp av Pythagoras sats kan få ut hur:
Vi kan vidare konstatera att och genom att substituera in uttrycket för i ovan ekvation att .
Dividerar vi båda sidorna med får vi att .

Om vi ansätter att får vi ekvationen vilket är exakt den ekvation som tidigare användes för att bestämma värdet på det gyllene snittet, alltså .

Det man kan utläsa från de mätningar som faktiskt gjorts av pyramiden är dock att det inte stämmer överens med de mått som krävs för att få ett exakt på gyllene snittet, vilket gör det svårt att avgöra om de fornegyptiska arkitekterna faktiskt kände till det gyllene snittet. Beräkningar kommer väldigt nära det gyllene snittet när man använder sig av måtten på pyramiden ().

Fett redogör för möjligheten att de fornegyptiska matematikerna skulle kunna känna till värdet på gyllene snittet genom deras metod att räkna med fraktioner. Nedan visar en bild (figur 10: Fett, 2006, s. 166) på hur man med hjälp av Fibonacci och fornegyptens räknemetod kan komma fram till en approximering av gyllene snittet.

1/2 = 1/2
3/5 = 1/2 + 1/10
8/13 = 1/2 + 1/10 + 1/65
21/34 = 1/2 + 1/10 + 1/65 + 1/442
55/89 = 1/2 + 1/10 + 1/65 + 1/442 + 1/3026
144/233 = 1/2 + 1/10 + 1/65 + 1/442 + 1/3026 + 1/20737

Figur 10 (Fett, 2006, s. 166)

Som det är just nu finns det dock inga konkreta bevis för att fornegyptens matematiker eller arkitekter hade någon kännedom om gyllene snittet. Jag får därför tillsvidare anta att de påstående som cirkulerar inte är sanna. Jag blundar dock inte för möjligheten att de kände till det. Fett avslutar sin discussion om Cheops-pyramiden med att säga: ”However, it seems unlikely that ancient Egyptians were aware of the Fibonacci numbers. Egyptian math is considered an applied math, no records have been found on the theory behind their mathematics.”(Fett, 2006, s. 166).

4.3.5 Gyllene snittet i konst

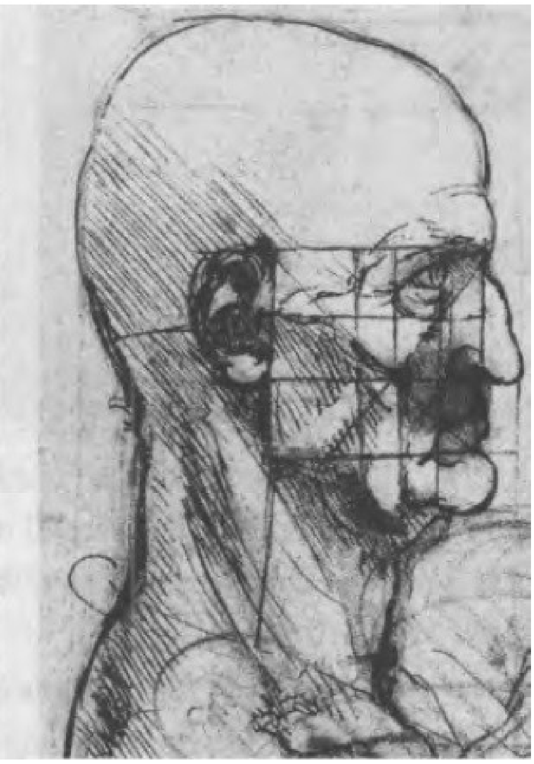
Det hade varit svårt att inte nämna måleri och konstverk när man pratar om gyllene snittet då detta är ett av de vanligast område som debatteras. Idén om att t.ex. den gyllene rektangeln är den som vi människor uppfattar som allra vackrast har såklart spelat en stor roll för många konstnärer.

1509 publicerade en man vid namn Piciolo sitt verk *Divina Proportione* (The Divine Proportion) vilket innehöll information of det gyllene snittet och motiveringar till varför man borde använda sig av det. Argumenten grundades på religiösa uppfattningar som att t.ex. definitionen för gyllene snittet innehåller tre längder precis i enlighet med kristendomens treenighet (Livio, 2001, s.131-132). Det beskrivs även hur Leonardo da Vinci (1452-1519) bidrog med flera skisser på föremål som innehöll det gyllene snittet vilket då gör att Leonardo da Vinci utan tvekan kände till det gyllene snittet (Livio, 2001, s. 133).

Leonardo da Vinci är förmodligen den konstnär som man främst kopplar ihop med det gyllene snittet då han har varit i fokus i en mängd studier. De verk som man diskuterar mest är ”...the unfinished canvas of ‘St. Jerome’, the two versions of ‘Madonna of the Rocks,’ the drawing of ‘a head of an old man,’ and the famous ‘Mona Lisa’.”(Livio, 2001 s. 162).

Han berättar vidare hur han valt att inte analysera “Mona Lisa” då det utförts en så enormt stor mängd studier på det specifika verk och att ingen verkat komma fram till något otvivelaktigt svar (Livio, 2001, s. 162).

Som ett exempel på hur en studie av ett konstverk går till kan vi studera Leonardo da Vincis verk ”a head of an old man” i figur 3 (Livio, 2001, s. 165). Rutnätet som syns i ansiktet är utritade av Leonardo någon gång kring år 1490. Anledningen till varför denna målning kanske är extra intressant är hur den avslöjar hur Leonardo använde sig av rektanglar för att konstruera sina proportioner och samma proportioner kan man finna i många av hans andra målningar. Tyvärr är linjerna så grovt ritade att det är omöjligt att bestämma ett exakt värde, men rektanglarna är väldigt nära en gyllene rektangel (Livio, 2001, s. 164-165).



Figur 11: ”A head of an old man” (Livio, 2001, s. 165)

Det finns otvivelaktigt många historiska verk där man kan finna gyllene snittet men väldigt lite bevis för att det var ett aktivt val från konstnärens sida. Fett (2006) beskriver hur:

> *In the thirteenth century three artists' work contain close proportions to the Golden Rectangle. Italian painter and architect Giotto di Bondone (1267-1337) painted the "Ognissanti Madonna" which is also known as "Madonna in Glory." Both the painting as a whole and the central figures in the painting can be inscribed by Golden Rectangles. Similarly, Sienese artist Duccio di Buoninsegna's (1255-1319) "Madonna Rucellai" and Florentine painter Cenni de Pepo's (1240-1302) "Santa Trinita Madonna" can be inscribed by Golden Rectangles*.(B, Fett, 2006, s. 169)

Då dessa verk målades innan Piciolo släppte sin bok *Divini Proportione* spekulerades det i att konstnärerna inte medvetet inkluderade gyllene snittet i deras verk, utan var drivna att använde den p.g.a. dess estetiska dragkraft (Fett, 2006, s. 169).

Det finns även de som påstår artister inspirerats av skönheten i en logaritmisk spiral där Livio påstår hur kvinnans hår i Leonardo da Vincis målning ”Leda and the Swan” var format efter en sådan form (Livio, 2001, s.118). Det är kanske i relation till konsten och hur konstnärer kan använda sig av gyllene snittet som vi faktiskt förstår hur mycket matematik som faktiskt döljer sig i ansikten och i andra proportioner hos oss. Här används geometri och grundläggande former som en grund för att skapa fantastika verk som får oss att häpna även efter hundratals år.

5. Resultat

I detta avsnitt presenterar jag resultaten från mina intervjuer samt min undersökning.

5.1 Lärares inställning till geometriundervisningen

Jag har totalt intervjuat tre lärare (två kvinnor och en man) där två av dessa var relativt nyexaminerade och den tredje en som varit verksam i läraryrket under en längre tid.

Vad som främst framkom från de intervjuer som jag genomfört visade hur tiden var den faktor som absolut spelade stört roll för hur en lektions upplägg ser ut. Vid väldigt få tillfällen gjorde läraren i fråga en egen uppgift, då det i nästan alla fall bedrev geometriundervisningen genom kurslitteraturen. Det uttryckes hur kursplanerna visserligen gav stort utrymme för egen tolkning, men att de trots detta allt som oftast blev arbete från boken i en mer traditionell undervisning där läraren har en genomgång på dagens begrepp, följt av eget arbete i boken.

Jag summerar kort varje enskild intervju nedan:

Lärare 1: Detta var en av de yngre lärarna som hade varit anställd och jobbat på skolan i ungefär fyra år. Hon beskrev sin geometriundervisning som en traditionell undervisning där hon nästan varje lektion introducerade ett nytt begrepp som sedan eleverna fick jobba med under resten av lektionen. En bra uppgift tyckte hon var sådana som var av problemlösningskaraktär, alltså uppgifter där vägen till målet inte var känt direkt. Hon uttryckte även ett missnöje med hur kurslitteraturen var uppbyggd, då det enligt hennes erfarenhet var väldigt få av denna typ där. Hon visste inte vad det gyllene snittet var för något, men hade hört talas om det. Jag beskrev då i korthet vad det innefattade och hon verkade genuint intresserad av konceptet.

Lärare 2: Den andra jag intervjuade var en man som jobbat på skolan i ungefär åtta år. Precis som den förra intervjuade hade de liknande upplägg men han använde sig ibland av gruppuppgifter som komplement. Dessa uppgifter var oftast en uppgift som utfördes under ett lektionstillfälle och han motiverade användandet av gruppuppgifter genom problemlösning. Denna lärare hade hört och läst om gyllene snittet men inte använt sig av det själv. Han trodde att det var en bra idé att använda sig av begreppet då det minskar gapet mellan matematiken på lektionen och verkligheten. En oro som uttrycktes i relation till hur kurslitteraturen utformats var hur uppgifterna är uppdelad i olika svårighetsgrader (A, B och C-uppgifter) där A representerar E-nivå och övriga nivåer högre. Ofta gör de elever som inte siktar på ett högre betyg endast A-uppgifterna vilket resulterar i att de kan missa de lite svårare uppgifterna som mer kräver problemlösning.

Lärare 3: Den sista jag intervjuade var en äldre kvinna som varit verksam i läraryrket en längre tid. Hon hade dock inte varit på skolan jag besökte i mer än två år. När hon beskrev sina lektioner framkom det att hon var den som minst använde sig av den traditionella undervisningen. Hon hade ofta egna uppgifter med sig till lektionen som ibland skulle lösas enskilt och ibland i grupp. Hon berättade även att dessa uppgifter var något hon samlade i en pärm som hon använde om och om igen. Gyllene snittet hade hon precis som de andra två lärarna hört talas om, men inte lagt något fokus på.

Samtliga av de intervjuade lärarna tyckte att det var väldigt intressant med det gyllene snittet men erkände att de inte hade speciellt bra insikt i hur det verkligen fungerade. De var dock väldigt intresserade av information kring begreppet då de, precis som jag ansåg att det kunde vara ett unikt sätt att göra det mer intressant för eleverna. Alla intervjuade lärare ville ha en som förankrade undervisningen mer i vardagen som i t.ex. konst, natur och arkitektur men att de inte riktigt visste hur de skulle gå till väga för att genomföra det.

Ingen av de intervjuade lärarna kände heller till van Hiele-nivåer men höll med efter en kort redogörelse om att det var en viktig del av en lärares uppgift att kunna identifiera detta. De beskrev hur man gjorde denna bedömning hela tiden dock, även om man inte kände till teorin bakom vad just Van Hiele beskrev.

5.2 Elevers inställning till geometriundervisningen

Jag intervjuade tre stycken elever som gick andra året på det samhällsvetenskapliga programmet på gymnasiet där två av dessa var tjejer. Intervjuerna i sig var relativt korta så istället för att gå in på varje enskild intervju har jag valt att istället framföra deras tankar löpande i texten. Elever hade en relativt klar bild av vad för dem geometri var. Eleverna pratade med övertygelse om olika geometriska former och hur man räknade ut volym, area och sträckor. Endast en av eleverna nämnde att de vid ett tillfälle i tidigare i högstadiet hade haft en lektion där de fick gå ut på skolgården och mäta vissa sträckor, följt av lektionstid där de sedan beräknade andra storheter som volym och area. Eleven tillade även intressant nog att detta var förmodligen den lektion hen kom ihåg bäst.

Ingen av de intervjuade verkade speciellt intresserade av geometri vilket märktes av deras kommentarer och inställning. De kunde heller ej svara speciellt utförligt när jag ställde frågan det var något speciellt de hade svårt för inom geometrin. Det verkade råda en form av konsensus hos eleverna där samtliga jag intervjuade hade problem med att få in all information som presenterades för dem på lektionerna. Det fanns så många olika formler och satser de skulle kunna, som t.ex. topptriangelsatsen, Pythagoras sats och transversalsatsen och jag fick intrycket av att de försökte memorera alla dessa som en form av glosa.

En summering för elevintervjuerna gör det klart att de flesta av eleverna ser geometri som ett ämne man hittar i matematikboken, inte i verkligheten. Ingen av eleverna kan heller motivera varför de är en bra idé att faktiskt lära sig geometri vilket då direkt reflekterar på deras inställning till det.

5.3 Elevers lösningar

Uppgiften utfördes tillsammans med tre olika grupper från samma klass där alla hade olika kunskapsgrund. Värt att nämna är hur eleverna nyligen arbetat med just geometri, där de fått träna på t.ex. Pythagoras sats, volym- och areaberäkning samt olika satser som topptriangelsatsen och transversalsatsen. Den första gruppen bestod av tre killar och de hade stora svårigheter med att identifiera vad som behövdes göras. De kunde identifiera den geometriska figuren som en pyramid samt att triangeln som fanns inuti skulle arbetas med på något vis. Samtliga i gruppen misslyckades med att koppla den räta vinkeln till Pythagoras sats vilket resulterade i att uppgiften inte gick att lösa. Ingen i gruppen kände heller till vad formeln för pyramidens volym var. Efter att ha kollat upp vad denna formel var gjorde de ett försök att sätta upp den men märkte snabbt att höjden fattades.

Den andra gruppen som bestod av två tjejer och en kille kunde identifiera att Pythagoras sats skulle användas. De lyckades dock inte sätta upp formeln på ett korrekt vis vilket i sin tur ledde till att svaret de kom fram till var felaktigt och orimligt. Ingen i gruppen identifierade dock att deras svar var orimligt.

Den sista gruppen var med två killar och en tjej och var den grupp som klarade sig bäst. Det var främst två elever i gruppen som diskuterade uppgiften där den andra verkade förstå det på ett annat plan. Denna elev satt mest och höll med, men verkade förstå efter det att de andra två resonerat kring det. Det är denna grupps diskussion jag valt att presentera, då den gav mig mest underlag för analys. Namnen som är angivna nedan är inte elevernas riktiga namn utan insatte för att göra läsningen mer behaglig.

Detta var vad som hände under uppgiftlösningen och ett nytt stycke representerar hur eleverna tar sig tid att tänka:

[1]Alva: Ah men det här har vi ju gjort!
[2}Björn: Så det är alltså en pyramid
[3]Alva: Det är ju sånt som ni vet.. man tar ena sidan...
[4]Björn: Är det en fyrsidig eller tresidig?
[5]Alva: Det är ju en sån..
[6]Christian: Det är ju en fyrsidig, det ser du ju här.
[7]Björn: Är det någon som kan formeln till volymen av en pyramid?
[8]Björn: Ska vi tänka logiskt så borde det vara den... gånger den gånger höjden...
[9]Björn: Jag kollar upp snabbt på telefonen.
[10]Alva: Alltså, den sidan, ska ju vara en tredjedel.
[11]Björn: Basen gånger höjden delat med tre.
[12]Alva: Aja då är det bara att köra på, basen gånger höjden delat med tre...

[13]Björn: Då har vi två okända och det är ju inte så bra...Vi kan kalla volymen för X.
[14]Alva: Men det spelar ju ingen roll
[15]Björn: Nej det har du rätt i.
[16]Alva: Men de tar ju ut varandra...
[17]Björn: Nja, så lätt kan det inte vara.
[18]Alva: Men är det inte basytan man ska använda?
[19]Björn: Jo det är det ju såklart, dåliga källor, wikipedia!

[20]Alva: Ja men då är det den då!
[21]Christian: Men då är det, 3.83 gånger 3.83 då.
[22]Björn: Men ska man ta alla sidorna då eller? Gånger 4?
[23]Alva: Nej det är arean du ska ta, inte omkretsen.
[24]Björn: A juste.
[25]Björn: Nu tog jag den gånger sig självt, skulle jag det?
[26]Björn: Men vi har ju inte höjden...
[27]Alva: Nu hamnade vi i samma situation som innan...

[28]Björn: Det är svårt att veta vad som är relevant...vi måste ju veta vad h är i alla fall.
[29]Christian: 3.10 står ju där av någon anledning.
[30]Björn: Ja men den finns inte med i formeln.
[31]Christian: Nej men den finns ju med där
[32]Christian: Den står ju där av någon anledning.
[33]Alva: Kan man inte räkna ut arean på alla sidorna...?

[Längre paus här där de tänker]

[34]Alva: Men den där, den är ju rätvinklig.
[35]Alva: Pythagoras eller?
[36]Björn: Ja det måste det vara...
[37]Björn: Ja vi har ju alla sidorna...för volymen behöver vi h.
[38]Alva: Men kolla här, vi vet att den är 3.10, den är i mitten och då går den ner så...
[39]Alva: Om man räknar ut skillnaden här och drar in kanske den blir kortare...
[40]Christian: Nej...
[41]Björn: Men om vi ska göra den här, vi har ju basen.
[42]Alva: Ja nu är det ju enkelt.
[43]Alva: Fast hälften då.

[44]Björn: Då tar vi den här gånger sig själv
[45]Björn: Då är det x^2 nu.
[46]Alva: Men alltså den är ju inte hälften så lång, det är ju diagonalen.
[47]Björn: Ah nej det är ju inte samma som den. Den kan ju inte vara 16 och den 3.
[48]Alva: Hur kan man hitta diagonalen på den då?
[49]Björn: Det är en triangel, som vi har måtten på... det är Pythagoras sats igen.
[50]Alva: Gud vilken lång uppgift!

[51]Björn: 3.83 gånger 3.83 så plus varandra
[52]Christian: Sen roten ur också.

[53]Björn: Då är x^2= 29.34

[54]Björn: Då är detta längden på diagonalen.

[55]Christian: Så 2.7...

[56]Björn: Nu kan vi göra Pythagoras sats på den andra också..
[57]Alva: Som vi tänkte från början.

[58]Björn: Ta 2.7 där istället
[59]Alva: Så
[60]Christian: Sen roten ur också?

[61]Alva: Men det blev ju samma som den andra sidan
[62]Björn: Ah ja men det är klart det måste vara det
[63]Christian: Så vi gjorde allt detta innan i onödan?
[64]Björn: Så går det om man är dum!
[65]Alva: Okej men nu kan vi åtminstone få ut höjden.

[66]Alva: 1.915 nu, sen 3.10
[67]Björn: Sen ska vi ta roten ur det här, om jag förstått rätt.
[68]Björn: Så det blir cirka 2.44

[69]Björn: Nu kan vi räkna ut den här ekvationen i.a.f! Volymen
[70]Björn: Nu vet vi vad h är, så stoppa in det där bara.

[71]Alva: Volymen blir alltså 35.8, avrunda till 36.
[72]Alva: Sen en tredjedel av 36 också

[73]Björn: 12 blir det då, det är nya volymen alltså.
[74]Alva: Gör det baklänges nu bara

[75]Björn: 12 = och då måste vi ha måttet. Basarean gånger höjden delat på tre
[76]Christian: Basen ska vara samma.

[77]Alva: Men då är vi nästan klara, basen är 14.66, men då vet vi inte höjden. Den gånger den...
[78]Björn: Så då har vi bara h kvar. Dela båda sidorna med 14.66 nu. Det blir 2.45, härligt!

För att summera gruppens genomförande av uppgiften började dem med att läsa igenom uppgiften och att studera figuren som följde med. Det kom snabbt fram till att den geometriska figuren var en pyramid och vad deras uppgift var. Ingen i gruppen visste dock vad volym-formeln för en pyramid var vilket resulterade i att en i gruppen kollade upp det på wikipedia.

Efter att de hittat formeln för volymen skrev det ner det på ett papper de fått och konstaterade att de hade två obekanta i ekvationen vilket inte var speciellt bra. De tolkade även formeln de hittade på wikipedia fel, där de istället för basarean i formeln använde sig av längden av en bas. Detta kom dock en i gruppen på men samma problem kvarstod, alltså två obekanta och en ekvation.

Här fastnade gruppen ett tag utan att ha en direkt plan för att komma vidare. Detta var tills Alva i gruppen nämnde Pythagoras sats då de var misstänksamma mot den längd som var omnämnd som 3.10.

Efter två försök med Pythagoras sats för att få ut längden på diagonalen på basytan kunde de efter att ha dividerat denna med två återigen upprepa Pythagoras sats för att få ut höjden. Samtliga i gruppen missade dock faktumet att den okända sidan b i triangeln måste vara samma som den angivna längden 1,915 pga. pyramidens utformning.

Information ovan kommer jag använda som grund i den analys som kommer i nästa avsnitt.

6. Analys

Som underlag för min analys har jag valt att använda mig av Van Hiele-nivåer och ska nu försöka dissekera och utreda var eleverna, vars diskussion jag postat ovan befinner sig och om det finns eventuella problem eller hinder i deras förståelse. Intervjuerna kommer jag inte analysera, dock kommer dessa användas som underlag för diskussionen.

Samtliga av eleverna som utförde testet kunde identifiera objektet som en pyramid utan större problem vilket förväntas av en elev i gymnasiet. Van Hieles första nivå om igenkänning är alltså något som inte behöver diskuteras i analysen då denna nivån uppnås utan problem.

Endast en av grupperna kunde komma igång med uppgiften genom att använda sig av Pythagoras sats vilket då indikerar att de två övriga grupperna inte nådde upp till nivå 3, nämligen abstraktion av problemet. De kunde visserligen identifiera pyramiden och se hur det fanns trianglar inuti objektet. Dock tog det stopp där och de kunde inte ta fram från minnet hur Pythagoras sats skulle användas. Misslyckandet att på ett relevant sätt analysera figurerna och använda sig av axiom tyder starkt på att samtliga elever i både grupp 1 och 2 arbetat för lite med att empiriskt analysera geometriska figurer och dess egenskaper.

Den tredje gruppen vars diskussion postades ovan använde sig av Pythagoras sats efter att ha konstaterat att där dels fanns en triangel men även att det var en rät vinkel. Användandet av detta begrepp samt deras förtrogenhet med de underliggande axiomen tyder på att åtminstone två personer (Alva och Björn) nådde upp till eller åtminstone behärskade delar av nivå 3 i Van Hieles skala.

Det kan även konstateras att deras språkbruk var väldigt vardagligt där få matematiska termer användes. Som exempel så frågar Björn[4] om pyramidens bas är en fyrsidig eller tresidig vilket sedan följs upp med att Christian[5] svarar med att det är en fyrsidig. Inte någon gång användes ord som katet eller hypotenusa heller. Istället refererades dessa konsekvent till som sidor. Det är mycket möjligt att uppgiften skulle blivit enklare för dem om deras språkbruk varit annorlunda. Hade deras analysförmåga varit god nog och att de använt begrepp som rätvinklig, katet och hypotenusa kanske detta hade lett till att Pythagoras sats automatiskt hade dykt upp i deras tankar.

För att studera närmare hur deras diskussion var kan det först noteras hur Björn försökte att resonera sig fram till vad formeln för volym bör vara [8]. Han misslyckades dock med detta då han gav upp snabbt och vände sig istället till sin telefon [9] för hjälp. Att eleverna inte kunde hämta formeln för volymen från minnet förvånar mig inte, då de är vana att alla dessa finns på en formelsamling. Vad som var mer intressant kanske var hur de först misslyckades med att tolka volymformeln på ett korrekt vis och det var först när Alva [18] påpekade att det kanske var basarean man skulle använda som det verkade klarna för de två övriga medlemmarna. Misslyckandet att tolka formeln korrekt tyder på att det finns gap i deras kunskap där man i Van Hiele-termer skulle kunna bekräfta att åtminstone två av de tre eleverna (Björn och Christian) befinner sig på olika Van Hiele-nivåer samtidigt. Det är alltså möjligt att Björn och Christian gått för snabbt igenom grunderna för att så snabbt som möjligt ta sig till vad de tror passar deras nivå bättre.

Björn visar även efter att det konstaterats att det är basarean som ska användas hur han inte riktigt är införstådd med vad som sker. I uttalande [22] frågar han om man ska summera alla sidorna i den kvadratiska basen och vill alltså räkna ut omkretsen istället för arean vilket vidare bekräftar att han har problem med grunderna. Det är alltså tveksamt vilken nivå Björn befinner sig på, utan verkar pendla starkt mellan 2 och 3.

När väl arean är beräknad utbrister Björn att det är svårt att veta vad som är relevant för att nå slutmålet [28]. Detta bekräftar vidare att han inte fullt bemästrat nivå 2 även om det kan bero på en ovana att utföra denna typ av uppgift som är mer problemlösningsbaserad än vad de kanske är vana vid. Att kunna plocka ut vad som är relevant för att kunna lösa en uppgift är dock vad nivå 2, d.v.s. vad analysen främst fokuserar på vilket är något som Britt Holmgren lagt märke till i sin studie (Holmgren, 2011, s. 14).

När de väl kommit fram till vad de olika längderna är applicerar dem detta på Pythagoras sats och verkar inte ha några problem med att identifiera och separera kateter från hypotenusa. Skulle jag tolka detta så beror det förmodligen på att boken innehåller många exempel där man inte själv behöver komma fram till längderna på kateter eller hypotenusa, utan där dessa redan är angivna. När väl detta var klart kunde de identifiera en situation som de var vana vid och därefter lösa uppgiften utan större problem. Det är alltså möjligt att deras läromedel fokuserar för lite tid på analysen och istället ger eleverna uppgifter som de mekaniskt ska lösa genom att använda en formel. Följdfrågan blir då om eleverna faktiskt förstår vad de räknar ut, eller om det är helt mekaniskt.

En sammanfattning av elevernas prestation blir:

Alva: Hon var den som uppvisade störst kompetens vad gäller själva analysen av pyramiden. Hon kunde identifiera hur man på den rätvinkliga triangeln kunde använda sig av Pythagoras sats [34-35], samt var den som från den kvadratiska basytan kunde skapa ännu en rätvinklig triangel. Detta visar hur Alva bemästrat nivå 1 och 2 bättre än de två övriga i gruppen och var därmed bättre utrustad för att lösa uppgiften.

Björn visade stora brister i sin förmåga att analysera figuren och omsätta detta till ett fungerande resonemang. Han kunde dels inte identifiera att Pythagoras sats skulle användas utan Alvas hjälp men inte heller fullt omsätta formeln för volym på ett korrekt sätt. Han visade dock upp ett bra mekaniskt räknande när väl Pythagoras sats var uppsatt.

Christian är väldigt svår att analysera med tanke på att han var väldigt passiv. Jag får anta att Christian inte kunde formulera argument eller resonemang kring uppgiften och därmed att hans förståelse för geometri är något lägre än både Alvas och Björns. Att han verkade förstå vad de andra pratade om tyder dock på att han bemästrar nivå 3 relativt bra, men att nivå 2 fallit efter. Kommentarer som [63] där han utbrister frågande om de gjort allt i onödan visar också på en brist i förståelse.

För att summera vad analysen givit är det faktum som främst står ut att kunskapsnivån som eleverna uppvisar varierar kraftigt mellan varandra och att främst handlar om en analytisk skillnad i att känna igen och kunna identifiera egenskaper hos objekten.

7. Diskussion

Elevernas förståelse för geometri var generellt låg då det enbart var en grupp som lyckades med uppgiften. Detta trots att det var geometri som de nyligen jobbat med på lektionerna och alltså borde vara färskt i deras minne.

Med tanke på Van Hieles tanke om att en elev endast kan gå vidare i sin utveckling om tidigare nivåer är bemästrade tyder på att elevernas tidigare undervisning i detta område inte varit helt fullkomlig. Som min analys tydde på verkade det huvudsakliga problemet ligga i elevens analytiska förmåga av de geometriska figurerna vilket kommer skapa stora problem för dem att utveckla sin förståelse allt eftersom undervisningen blir svårare. Med detta i åtanke är det en mycket god idé att som lärare spendera längre tid på de tidiga nivåerna i Van Hieles skala och inte för tidigt gå vidare till nivå 3 som omsätter information man fått från analysen till beräkningar.

För att göra undervisningen så meningsfull som möjligt ligger alltså ett stort ansvar på läraren som måste kunna identifiera vilken nivå eleven befinner sig på. Även de högpresterande eleverna som utförde uppgiften uppvisade svårigheterna med att analysera de relevanta komponenterna och jag skulle tro att det är ett mycket vanligt problem. Det förvånar mig inte speciellt mycket då trenden i skolan numera går mot ett allt med proceduriellt lärande där ett mekaniskt lärande gynnas.

En annan aspekt som är speciellt intressant med undersökningen är att samtliga grupper jag lät utföra uppgiften kommer från samma klass och har alltså fått samma undervisning. Endast en av grupperna visade en förståelse som är högre nivå 2, vilket betonar vikten av att läraren måste vara medveten om att det finns stora skillnader även inom klassen. De två grupper som försökte lösa uppgiften men inte lyckades komma speciellt långt kommer alltså lyssna och försöka förstå samma innehåll som den grupp som faktiskt nått en högre nivå. För att göra undervisningen meningsfull måste man alltså som lärare ta hänsyn och anpassa sitt språkbruk så att man inte enbart kommunicerar med de elever som nått en högre nivå.

Av intervjuerna framgick det att eleverna generellt sett inte ansåg geometri som något spännande. Detta synsätt kommer naturligvis ha en negativ inverkan på deras inlärning då det kommer vara svårare för dem att hitta motivation att studera. Deras perspektiv på geometrin bekräftade även min teori om att elever generellt sätt ser geometri som något abstrakt som återfinns i matematikboken.

Vad gäller lärarnas kontribution så är det intressant att inte fler gör som Lärare 3 och gör mer uppgifter som sedan kan sparas och återanvändas. Jag tycker detta är ett utmärkt system där man även kan tänka sig att förbättra uppgiften allt eftersom man upptäcker eventuella brister. Jag tror även det kan gynna eleven mycket, då matematiklektionernas upplägg blir mindre statiska där eleven inte redan innan lektion vet vad som ska hända.

Skulle jag gjort om min undersökning och haft den information jag nu har hade jag förmodligen förändrat min uppgift och istället valt uppgifter som mer fokuserat på själva analysen av geometriska former. Det hade nu i efterhand eventuellt varit mer givande att se olika grader av analysförmåga då det var där jag upplevde stora brister hos eleverna.

Det här arbetet har varit mycket givande för mig då den teoretiska delen närmast öppnade en ny mystisk dörr till ett av matematikens mörkare hörn. Jag har även fått en bättre förståelse för hur elever tolkar och arbetar med geometri vilket är något jag kommer ha stor nytta av i min arbetskarriär.

8. Slutsatser

Vad gäller den myriad av påstående kring det gyllene snittet och hur den används finns det väldigt lite i form av konkreta bevis. Många av de så kallade bevis som skapats är starkt beroende på osäkra mätningar där det oftast blir något som är nära gyllene snittet men inte ett exakt svar. För att konkretisera så kan man alltid få fram gyllene snittet någonstans, beroende på hur tjocka linjer man ritar som är grund för beräkningen.

För att återkoppla till mina ursprungliga frågeställningar vilka var:

- Hur kan geometriundervisningen se ut i en gymnasieskola?
- Vad är det gyllene snittet och var dyker det upp genom historien?
- Hur ser elevers geometriförståelse ut på gymnasiet?

Samtliga av dessa anser jag att jag har utforskat och besvarat med hjälp av mina litteraturstudier, intervjuer och undersökningar.

Studien av det gyllene snittet har varit väldigt givande, då det fått mig att dels inse hur mycket matematiken finns i naturen omkring oss i form av logaritmiska spiraler eller i former som pentagrammet. Det är både oerhört intressant men också något som kan vara en resurs för mig som lärare när jag konstruerar lektionsplaner i inte bara geometri, utan även andra områden. Det finns även grund för att göra ett ämnesöverskridande projekt där man inkluderar matematik med t.ex. naturkunskap.

Att kursplanerna ändrades till att mer betona verklighetsexempel tyder även på att det är ett problem som fler identifierat i den svenska undervisningen.

Lärares och elevers inställning till geometriundervisningen visar en vilja att bryta de mönster som de uttrycker som enbart handlar om att komma förbi uppgifter som finns i kurslitteraturen och lärarna ansåg att idén om gyllene snittet var god. Även om en del av matematiken som ligger till grund för t.ex. fraktaler eller logarimiska spiraler är för hög för en gymnasieelev, kan man använda det som inspirationskälla och konstruera uppgifter med detta som utgångspunkt. Vad gäller Cheops-pyramiden kan man tänka sig en uppgift som utformas som ett mysterium, där elevens uppgift är att försöka lista ut om det gyllene snittet faktiskt kan hittas.

Människokroppen som även den påstås uppvisa gyllene snittet både här och där kan även den användas som grund för uppgifter istället för att låta eleven ständigt arbeta med en bok. Genom att göra det kan matematikundervisning gå mer mot en form av laborativ upplevelse där världen omkring oss agerar som material för inlärning istället för boken de är vana vid. Detta arbetssätt kan vidare styrkas genom att det nyligen i Lgr11 tillades ett centralt innehåll som behandlar problemlösning.

Trots de bristfälliga bevisen finns där uppenbarligen en stor fascination kring det gyllene snittet. Det råder heller inga tvivel om att man faktiskt kan använda det när man själv konstruerar uppgifter. Det kan bidra till att ett större intresse för matematik uppstår, samtidigt som man arbetar mer med verkliga exempel som kopplas till vår kulturella historia. Uppgifterna kan då även utformas så att problemlösning kommer in på ett annat vis, där man kan koppla in samtliga Van Hiele-nivåer samtidigt. Förutom att det kan göra det lättare för läraren att identifiera vilken nivå en elev befinner sig på, kommer det uppmärksamma eleven på att matematik, det är inget som bara finns i en bok utan överallt omkring oss.

9. Källförteckning

Böcker

Bryman, A. (2008). *Samhällsvetenskapliga metoder.* Liber.

Esaiasson, E. Gilljam, M. Oscarsson, H. & Wängnerud, L. (2012). Metodpraktikan. Fjärde upplagan. Vällingby: Norstedts Juridik AB. ISBN: 978-91-39-11217-4.

Livio, Mario. 2001 The golden ratio - The story of phi, the world most astonishing number. Ebok.

Thompson, J. (1991). *Historiens Matematik.* Studentlitteratur: Lund.

Internetkällor

Alexandersson, Per, 2014. Klassiska fraktaler. Hämtad från: http://people.su.se/~peal0658/files/Klassiska.Fraktaler%5B2009%5D%5BSwe%5D-ALEXANDERSSON.pdf

EIC 2014. Digital bild. Hämtad från: http://educateinspirechange.org/spirituality/learn-magic-fibonacci-nature-math-god/

Fett, B 2006, 'An In-depth Investigation of the Divine Ratio', *Montana Mathematics Enthusiast*, 3, 2, pp. 157-175, Education Research Complete, EBSCO*host*, läst 19 February 2015.

Holmberg, Britt, 2011. Analysera mer I geometri. NCM - Nämnaren nr 4. Hämtad från: http://ncm.gu.se/pdf/namnaren/1015_11_4.pdf

Mason Marguerite 1998. *The Van Hiele levels of geometric understanding, Professional handbook for teachers, geometry: Explorations and applications*, Boston: McDougal Inc. Hämtad från: http://jwilson.coe.uga.edu/EMAT8990/GEOMETRY/Mason,%20Marguerite.%20The%20van%20Hiele%20Levels%20of%20Geometric%20Understanding.%202002.pdf

Persson, Mikael 1994. Förbundet Unga Forskares tidskrift Scientium nummer 5-6. Hämtad från: http://www.skarlsson.net/vetegrasstiftelsen/images/Gyllene%20snittet.pdf

Skolverket. 1994. *Läroplan för de frivilliga skolformerna - Lpf 94.* Hämtad från: http://www.skolverket.se/om-skolverket/publikationer/visa-enskild-publikation?_xurl_=http%3A%2F%2Fwww5.skolverket.se%2Fwtpub%2Fws%2Fskolbok%2Fwpubext%2Ftrycksak%2FRecord%3Fk%3D1071

Skolverket. 2011a. *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet 2011.* Hämtad från: http://www.skolverket.se/laroplaner-amnen-och-kurser/grundskoleutbildning/grundskola/matematik

Skolverket. 2011b. *Läroplan, examensmål och gymnasiegemensamma ämnen för gymnasieskola 2011.*
Hämtad från: http://www.skolverket.se/om-skolverket/publikationer/visa-enskild-publikation?_xurl_=http%3A%2F%2Fwww5.skolverket.se%2Fwtpub%2Fws%2Fskolbok%2Fwpubext%2Ftrycksak%2FRecord%3Fk%3D2705

Vetenskapsrådet (2002). *Forskningsetiska principer inom humanistisk-samhällsvetenskaplig forskning*. Stockholm: Vetenskapsrådet. Hämtad från: http://www.codex.vr.se/texts/HSFR.pdf

Wikipedia, 2015. Digital bild. Hämtad från: http://en.wikipedia.org/wiki/Golden_spiral

Bilaga 1

Intervjuguide - Lärare

Inledande frågor
Generella

- Hur länge har du arbetat som matematiklärare?
- Hur länge har du arbetat på skolan?
- Hur ser en typiskt geometrilektion ut för dig?
- Vad anser du är en bra geometriuppgift?
- Har du hört talas om van Hiele-nivåer?

Uppföljningsfrågor
Mer specifika frågor som riktar sig till geometri.

- Hur länge har du använt dig av denna metod i undervisningen?
- Har du uppmärksammat ett speciellt område som verkar svårare för eleverna?
- Hur löser eleverna problem?

Sonderade frågor
För konkreta exempel.

- Har du någon geometriuppgift som du kan visa som du anser vara bra?
- Hur skulle du introducera ett nytt begrepp inom geometrin?
- Brukar du ha grupparbeten?

Bilaga 2

Intervjuguide - Elev

Inledande frågor
Generella

- Vad innebär matematik för dig?
- Hur ser en typisk matematiklektion ut?
- Är det någon speciell matematiklektion du kommer ihåg extra bra?
- Vad innebär geometri för dig?
- Vad tycker du om kurslitteraturen?
- Vad tycker du om lärarens genomgångar?

Uppföljningsfrågor
Mer specifika frågor som riktar sig till geometri.

- Är det något speciellt du har svårt med i geometriundervisningen?
- Är du noggrann när du skriver ner dina lösningsgångar?
- Brukar du hänga med på genomgångarna?

Bilaga 3

Vad sägs?

[1]Alva: Ah men det här har vi ju gjort!
[2}Björn: Så det är alltså en pyramid
[3]Alva: Det är ju sånt som ni vet.. man tar ena sidan...
[4]Björn: Är det en fyrsidig eller tresidig?
[5]Alva: Det är ju en sån..
[6]Christian: Det är ju en fyrsidig, det ser du ju här.
[7]Björn: Är det någon som kan formeln till volymen av en pyramid?
[8]Björn: Ska vi tänka logiskt så borde det vara den... gånger den gånger höjden...
[9]Björn: Jag kollar upp snabbt på telefonen.
[10]Alva: Alltså, den sidan, ska ju vara en tredjedel.
[11]Björn: Basen gånger höjden delat med tre.
[12]Alva: Aja då är det bara att köra på, basen gånger höjden delat med tre...

[13]Björn: Då har vi två okända och det är ju inte så bra...Vi kan kalla volymen för X.
[14]Alva: Men det spelar ju ingen roll
[15]Björn: Nej det har du rätt i.
[16]Alva: Men de tar ju ut varandra...
[17]Björn: Nja, så lätt kan det inte vara.
[18]Alva: Men är det inte basytan man ska använda?
[19]Björn: Jo det är det ju såklart, dåliga källor, wikipedia!

[20]Alva: Ja men då är det den då!
[21]Christian: Men då är det, 3.83 gånger 3.83 då.
[22]Björn: Men ska man ta alla sidorna då eller? Gånger 4?
[23]Alva: Nej det är arean du ska ta, inte omkretsen.
[24]Björn: A juste.
[25]Björn: Nu tog jag den gånger sig självt, skulle jag det?
[26]Björn: Men vi har ju inte höjden...
[27]Alva: Nu hamnade vi i samma situation som innan...

[28]Björn: Det är svårt att veta vad som är relevant...vi måste ju veta vad h är i alla fall.
[29]Christian: 3.10 står ju där av någon anledning.
[30]Björn: Ja men den finns inte med i formeln.
[31]Christian: Nej men den finns ju med där
[32]Christian: Den står ju där av någon anledning.
[33]Alva: Kan man inte räkna ut arean på alla sidorna...?

[Längre paus här där de tänker]

[34]Alva: Men den där, den är ju rätvinklig.
[35]Alva: Pythagoras eller?
[36]Björn: Ja det måste det vara...
[37]Björn: Ja vi har ju alla sidorna...för volymen behöver vi h.
[38]Alva: Men kolla här, vi vet att den är 3.10, den är i mitten och då går den ner så...
[39]Alva: Om man räknar ut skillnaden här och drar in kanske den blir kortare...
[40]Christian: Nej...

[41]Björn: Men om vi ska göra den här, vi har ju basen.
[42]Alva: Ja nu är det ju enkelt.
[43]Alva: Fast hälften då.

[44]Björn: Då tar vi den här gånger sig själv
[45]Björn: Då är det x^2 nu.
[46]Alva: Men alltså den är ju inte hälften så lång, det är ju diagonalen.
[47]Björn: Ah nej det är ju inte samma som den. Den kan ju inte vara 16 och den 3.
[48]Alva: Hur kan man hitta diagonalen på den då?
[49]Björn: Det är en triangel, som vi har måtten på... det är Pythagoras sats igen.
[50]Alva: Gud vilken lång uppgift!

[51]Björn: 3.83 gånger 3.83 så plus varandra
[52]Christian: Sen roten ur också.

[53]Björn: Då är x^2= 29.34

[54]Björn: Då är detta längden på diagonalen.

[55]Christian: Så 2.7...

[56]Björn: Nu kan vi göra Pythagoras sats på den andra också..
[57]Alva: Som vi tänkte från början.

[58]Björn: Ta 2.7 där istället
[59]Alva: Så
[60]Christian: Sen roten ur också?

[61]Alva: Men det blev ju samma som den andra sidan
[62]Björn: Ah ja men det är klart det måste vara det
[63]Christian: Så vi gjorde allt detta innan i onödan?
[64]Björn: Så går det om man är dum!
[65]Alva: Okej men nu kan vi åtminstone få ut höjden.

[66]Alva: 1.915 nu, sen 3.10
[67]Björn: Sen ska vi ta roten ur det här, om jag förstått rätt.
[68]Björn: Så det blir cirka 2.44

[69]Björn: Nu kan vi räkna ut den här ekvationen i.a.f! Volymen
[70]Björn: Nu vet vi vad h är, så stoppa in det där bara.

[71]Alva: Volymen blir alltså 35.8, avrunda till 36.
[72]Alva: Sen en tredjedel av 36 också

[73]Björn: 12 blir det då, det är nya volymen alltså.
[74]Alva: Gör det baklänges nu bara

[75]Björn: 12 = och då måste vi ha måttet. Basarean gånger höjden delat på tre
[76]Christian: Basen ska vara samma.

[77]Alva: Men då är vi nästan klara, basen är 14.66, men då vet vi inte höjden. Den gånger den...
[78]Björn: Så då har vi bara h kvar. Dela båda sidorna med 14.66 nu. Det blir 2.45, härligt!