Läroplan för gymnasieskolan Lgy 70

Matematik för treårig humanistisk, ekonomisk och samhällsvetenskaplig linje

II Supplement 93 2. uppl.

SKOLÖVERSTYRELSEN 1983

Föreliggande supplement i matematik på treårig humanistisk, ekonomisk och samhällsvetenskaplig linje skall tillämpas fr o m läsåret 1984/85 och ersätter sidorna 257–264 i Lgy 70:II Supplement 3-årig E, H, N, S och 4-årig T linje.

Lgy 70 II

Läroplan för gymnasieskolan

SKOLÖVERSTYRELSEN

Utbildningsförlaget Stockholm

[2]

Supplement 93

Fastställt 1983-06-11
Dnr 5050-83:1590

Matematik

för treårig humanistisk, ekonomisk och samhällsvetenskaplig linje

Utbildningsförlaget
Box 3071
103 61 STOCKHOLM

Separata exemplar kan beställas genom
Liber
Kundtjänst Utbildningsförlaget
162 89 STOCKHOLM
Tel 08-739 96 60

FÖRORD

Detta nytryck av supplementet 93 till **Läroplan för gymnasieskolan** innehåller kursplaner med kommentarer för ämnet matematik vid dels treårig humanistisk linje, dels de treåriga ekonomiska och samhällsvetenskapliga linjerna.

Kursplanerna återges efter Lgy Allmän del (tredje upplagan 1983) s 229—230. (Dessa kursplaner var införda också i första upplagan av supplement 93.)

Kommentardelen är också i sak oförändrad. Föregående upplaga innehöll emellertid hänvisningar till vissa sidor i supplementet 69 (matematik för de tvååriga ekonomiska och sociala linjerna). Dessa sidor har vid denna nytryckning införts också i supplement 93.

Stockholm i januari 1989

Skolöverstyrelsen

ISBN 91-47-03102-6 Upplaga 2:1

Svenskt Tryck Stockholm 1989 903427

INNEHÅLL

HUMANISTISK LINJE

Mål

Eleven skall genom undervisningen i matematik

uppöva den numeriska räknefärdigheten med och utan tekniska hjälpmedel

skaffa sig kunskap om några begrepp och metoder inom matematiken samt

utveckla förmågan att tillämpa matematiken inom olika områden.

Huvudmoment

Numerisk räkning med de fyra räknesätten, enhetsbyten, närmevärden, potenser och procent

Användning av räknetekniska hjälpmedel

Beskrivande statistik

Geometri. Längd-, area- och volymberäkning

Datalära

Funktionslära. Grafiska metoder, proportionalitet, exponentiell förändring. Räta linjens ekvation

Sannolikhetslära

EKONOMISK OCH SAMHÄLLSVETENSKAPLIG LINJE

Mål

Eleven skall genom undervisningen i matematik

uppöva den numeriska räknefärdigheten med och utan tekniska hjälpmedel

bli förtrogen med några väsentliga matematiska begrepp och metoder samt

utveckla förmågan att tillämpa matematiska begrepp och metoder inom olika områden.

Huvudmoment

Numerisk räkning med de fyra räknesätten, enhetsbyten, närmevärden och procent

Användning av räknetekniska hjälpmedel

Geometri. Längd-, area- och volymberäkning

Datalära, tolkning och skrivning av enkla program

Sannolikhetslära

Statistik, normalfördelning

Funktionslära, proportionalitet, räta linjens ekvation

De fyra räknesätten med bokstäver. Algebraisk lösning av ekvationer av första och andra graden och linjära ekvationssystem

Lösning av ekvationer, ekvationssystem och olikheter med grafiska metoder

Potenser, logaritmer, exponentialfunktioner

Geometriska summor, ränta på ränta, annuitet, nuvärde

Begreppen ändringskvot och derivata med tillämpningar. Derivatan av polynomfunktioner och exponentialfunktioner

Integralbegreppet

Fritt val bland följande alternativa områden:
Matriser och ekvationssystem
Linjär optimering
Numeriska metoder
Fördjupad sannolikhetslära
Behandling av stora datamängder t ex i samband med en statistisk undersökning
Annat lämpligt område

För SE-eleverna bör studierna läggas upp så att man särskilt betonar de moment som är av störst betydelse för de fortsatta studierna i matematik t ex bokstavsräkning och funktionslära.

Allmänna kommentarer

Matematiken skall förbereda för fortsatta studier och vara ett hjälpmedel i studier av andra ämnen. Det är angeläget att matematikens tillämpningar inom andra områden belyses med meningsfulla exempel.

Utöver dessa nyttosynpunkter har matematiken, liksom ämnen som historia, filosofi, religionskunskap, ett bildningsvärde som en viktig del av den västerländska kulturen. Det är därför värdefullt att undervisningen också ger idéhistoriska utblickar och ett historiskt perspektiv.

Planering och samverkan

Momentförteckningen ger ett förslag till kronologisk ordning mellan de olika momenten. Annan ordning än den föreslagna är naturligtvis möjlig. Krav från andra ämnen kan medföra att ett avsnitt behövs vid en viss tidpunkt. Även andra skäl kan anges för en annan ordning än den föreslagna.

I beskrivningen av *alternativa områden* anges hur dessa kan väljas. Lärare och elever bör gemensamt diskutera valen. Detta ger möjligheter att tillgodose olika elevers behov av matematikkunskaper. I en klass kan det vara lämpligt att alla elever läser samma område, medan i en annan klass olika grupper studerar skilda områden. Lokala resurser och elevönskemål får tillsammans avgöra vilken modell som väljs.

För alla moment gäller att kontakt bör tas med lärare i de ämnen som använder matematik. Matematikundervisningen kan därigenom ge det stöd som behövs bl a i form av aktuella tillämpningar. I vissa ämnen, t ex företagsekonomi, kan förekomma andra beteckningssätt och symboler än dem som gäller inom matematikämnet. Eleverna bör vänjas vid att ett och samma begrepp kan ha olika traditionella beteckningar. På så sätt kan eleverna för fortsatta studier i ekonomisk eller matematisk litteratur få en beredskap för förekommande skiftande språkbruk.

Alla tillfällen till samverkan över ämnesgränserna bör tas tillvara för att ge eleverna en känsla för hur matematik används inom andra ämnen. Detta kan ske genom en aktiv och medveten samplanering mellan lärarna, men också genom att matematikläraren ständigt är beredd att fånga upp situationer som ger möjlighet till samverkan. Genom att aktivt lyssna till vad som sker i andra ämnen kan matematikläraren vid tillfällen då eleverna är högt motiverade för att kunna lösa en viss typ av problem sätta in en kort intensiv insats som ger högt kunskapsutbyte. Särskilt inom avsnittet statistik bör exempel hämtas från flera källor i samverkan med andra ämnen.

Arbetssätt

De flesta elever anser att matematik är viktigt men många elevers självförtroende inför matematikstudierna är dåligt. Det bör därför regelbundet förekomma inslag i ämnet som motverkar elevers rädsla för matematik. Alla bör få uppleva känslan av att lyckas och att ämnet kan vara roligt och spännande.

Undervisningen skall karakteriseras av ett aktivt samarbete mellan lärare och elev och bör därför ofta bedrivas i diskussionsform. Elevernas insikt blir bättre, om de själva får medverka, när nya begrepp och metoder införs. Dialog mellan lärare och elev är viktig även för det individuella arbetet.

Både vid klassundervisning och individuell handledning gäller att avvägningen mellan instruktionsundervisning och heuristiskt bedriven undervisning ställer stora krav på lärarens professionella kunnande. Det finns enstaka tillfällen då en enkel instruktion av typen "Gör så här" är effektiv även på lång sikt men i normalsituationen bör en skickligt insatt heuristisk frågeföljd ge eleven aha-upplevelser, som gör den då förvärvade kunskapen mera bestående.

Inom varje moment bör eleverna ges möjlighet att bli säkra både i räknefärdighet och i att lösa tillämpningsuppgifter. Läraren bör organisera regelbundet återkommande repetitioner för att underhålla kunskaperna. Överslagsräkning och huvudräkning är viktiga inom alla delar av kursen och bör ägnas systematisk övning.

Matematikämnet kan bidra till att ge varje elev en ökad insikt om den egna förmågan. Det är därför viktigt att använda läroböcker och annat studiematerial ger eleven möjlighet att med lärarens hjälp bestämma svårighetsgraden hos det som studeras. Det är lämpligt att läraren före varje nytt moment kontrollerar elevernas förkunskaper.

Miniräknaren är ett viktigt hjälpmedel inom alla delar av kursen. Miniräknarens främsta användningsområde är naturligtvis numeriska beräkningar i samband med problemlösning t ex prickning av funktioners grafer, men den kan också användas som ett instrument för matematiska laborationer t ex vid studiet av gränsvärden och variation av tillväxtfaktorer.

Ett viktigt mål för undervisningen är att träna upp elevernas omdöme när det gäller noggrannheten i angivelser. Miniräknarens långa rad av siffror ger många tillfällen att diskutera vad som är rimligt när man lämnar ett numeriskt svar. Matematikläraren bör vara medveten om att det inom ekonomiska tillämpningsämnen finns en inbyggd spänning mellan kameral noggrannhet, som kan ange miljonbelopp intill sista öret, och beräkningar där för många värdesiffror kan ge helt missvisande uppfattning om tillförlitligheten i resultatet. Överhuvudtaget bör eleverna vid problemlösning ofta påminnas om att tänka igenom om resultatet är rimligt, om det t ex stämmer med erhållna figurer.

Huvuddelen av undervisningstiden används till problemlösning. Eleverna bör övas att själva fundera ut tillvägagångssättet dvs välja matematisk modell och metod. Det är därför nödvändigt att problemen är av väl avpassad svårighetsgrad. Man får börja med mycket enkla problem och därefter successivt öka svårighetsgraden. Det är också nödvändigt att problemen är konkreta så att de lätt uppfattas på ett riktigt sätt. Man får dock beakta att de matematiska modellerna förutsätter en viss idealisering av verkligheten. Detta gäller inte minst i ekonomiska sammanhang. Penningflöden får t ex förutsättas ske dygnet runt i jämn takt och inte som i verkligheten vid vissa tidpunkter om man skall kunna tillämpa derivat- och integralkalkyl.

Utvärdering av studiearbetet

Betygsättning i matematik får inte göras enbart utifrån resultatet av skriftliga prov utan skall grundas på en helhetsbedömning av elevernas arbete i matematik.

Utformningen av de skriftliga proven bör variera. Elevernas förmåga att tillämpa begrepp och metoder bör inte enbart prövas med typexempel.

Ett skriftligt prov bör i regel omfatta områden som nyligen behandlats i undervisningen och områden som behandlats tidigare. Man bör undvika alltför speciella problem på tidigare avsnitt.

Övervägande delen av uppgifterna bör vara sådana att de kan lösas av flertalet elever. Skrivningarna bör också ge varje enskild elev möjlighet att visa sin förmåga. Det bör dock framgå för eleverna vilka uppgifter som är av större svårighetsgrad, t ex genom uppgifternas placering eller på annat sätt.

Läraren skall vid rättningen kommentera felaktigheter, så att eleverna utan svårighet inser vari felen ligger. Inte minst av pedagogiska skäl bör skrivningarna återlämnas och efterbehandlas snarast och helst inte senare än efter en vecka. Vid genomgången av skrivningen kan läraren kommentera vanliga fel, diskutera olika lösningsalternativ och ge förslag till kompletteringsuppgifter.

Miniräknare bör vara ett naturligt hjälpmedel för eleverna både vid lektioner och skrivningar.

Kommentarer till speciella moment

Jämfört med tidigare kursplan har *statistiken* utökats och jämte avsnitten *derivata* och *integral* fått en delvis annan utformning.

Diskussion av förutsättningar och datas kvalitet samt tolkning av erhållna resultat bör få en framträdande plats i avsnittet *statistik*. Exempel kan med fördel hämtas från samhällsvetenskapliga och ekonomiska områden. Man bör eftersträva att gärna i samverkan med andra ämnen, särskilt samhällskunskap, ge eleverna träning i kritisk granskning av statistiska material och på dessa baserade slutsatser. Definitionsproblem, mätproblem, tveksamma urvalsmetoder, bortfallsfel, snedvridande faktorer, förväxling av orsak och verkan kan härvidlag exemplifieras. Vid denna undervisning är det viktigt att rätt balans upprättshålls så att även ett positivt synsätt på statistikens roll i samhället förmedlas.

Förståelsen av de svårare avsnitten inom statistiken och sannolikhetsläran underlättas ofta av laborationer och datorsimuleringar.

I samband med momentbeskrivningen till statistiken beskrivs kortfattat en laboration som syftar till att ge ökad insikt i konstruktionen av konsumentprisindex (KPI) och som även antyder svårigheterna att betämma ett allmänt mått på prisförändringarna i samhället.

I avsnittet *ändringskvot och derivata* är det väsentligt att eleverna får en god begreppsuppfattning. De måste därför få se många olika konkreta tillämpade exempel för att förstå vad ändringskvoten mäter och hur den beräknas samt hur den kan användas för beräkning av ändringar. Den begreppsmässiga tyngdpunkten bör ligga på begreppet *ändringskvot* och inte på den gränsövergång som sedan ger derivatan. Först när man visat vad ändringskvoten eller derivatan mäter, bör man övergå till att formelmässigt beräkna derivatan till enkla funktioner. Därefter är det dags att utnyttja derivatan som ett hjälpmedel för att beräkna ändringskvoter och lutningar och för att göra maximi- och minimibestämningar.

Vid studiet av *integraler* måste en hel del tid ägnas åt att ge eleverna olika konkreta exempel, där en kvantitet beräknas med hjälp av den speciella typ av produktsummor som leder fram till integraler. Därefter definieras begreppet integral. Genom att sedan knyta integralbegreppet till en standardsituation, areaberäkning, visar man hur alla integraler kan tolkas som areor och hur en del integraler kan beräknas eller uppskattas denna väg. Därefter visar man hur en del enkla integraler kan beräknas med hjälp av primitiva funktioner.

Momentbeskrivning

Efter varje rubrik anges inom parentes förslag till antal undervisningstimmar för avsnittet.

Exemplen anger den ambitionsnivå som bör eftersträvas för de flesta elever.

ÅRSKURS 1 HSE-linjerna

1 Numerisk räkning (25)

MOMENT	KOMMENTARER	EXEMPEL
1.1 Storleksordning av tal	Uppgifter av typ a), b), c) löses genom resonemang. Uppgifter av typ d) kan lösas genom att talen skrivs om på decimalform.	Avgör om a) $\frac{3}{7} < 1$ b) $\frac{3}{7} < \frac{4}{7}$ c) $\frac{3}{7} > \frac{3}{8}$ d) $\frac{3}{7} < \frac{4}{9}$ Vilket tal ligger mitt emellan 0,1 och 0,2.
1.2 De fyra räknesätten 1 utan miniräknare	I c) avses bråk på formen p/q multiplicerade med varandra men ej nödvändigtvis förenklade så långt som möjligt. Uppgifter av den typ som förekommer i c) är av betydelse i sannolikhetsläran. Det får anses vara mindre nödvändigt att utan miniräknare kunna lösa uppgifter försedda med *.	Beräkna a) $5 + 2 \cdot 3$ b) $(5 + 2) \cdot 3$ c) $\frac{3}{7} \cdot \frac{4}{9} \left(= \frac{12}{63}\right)$ d) $\frac{2}{3} \cdot 12$ e) $5 \cdot 0{,}3$ f) $\frac{15}{0{,}1}$ g) $1{,}40 + 2 \cdot 3{,}60$ *h) $\frac{2}{3} \cdot \frac{6}{7} \left(= 2 \cdot \frac{2}{7} = \frac{4}{7}\right)$ *i) $\frac{7}{6} - \frac{2}{5} + \frac{1}{3}$ *k) $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{5}{6} \cdot \frac{9}{5}$ *l) $\frac{2/3}{5/6}$ *m) $\frac{20 \cdot 6 \cdot 12}{3 \cdot 8 \cdot 5}$
2 med miniräknare		Beräkna a) $3{,}7 + 5{,}2 \cdot 6{,}3$ b) $(3{,}7 + 5{,}2) \cdot 6{,}3$ c) $\frac{2}{2{,}7} - \frac{3}{4{,}7}$ d) $\frac{2}{5 - 3/26}$
1.3 Huvudräkning	Momentet övas lämpligen under hela studietiden i matematik, speciellt vid överslagsräkning och rimlighetsbedömning.	Hur mycket är 1/8 av 200 kg? Hur många dagar räcker 20 000 m^3 olja om förbrukningen är 8 m^3/h?
1.4 Enhetsbyten, prefix tera, giga, mega, kilo, hekto, deci, centi, milli	Mätetalen skrivs utan hjälp av tiopotenser.	Skriv som meter a) 8 m och 7 cm b) 206 cm Skriv som kilogram a) 7 g b) 650 g Skriv som kvadratmeter a) 3 dm^2 b) 49 cm^2 Skriv som kubikcentimeter a) 40 mm^3 b) 3,4 m^3 Skriv som timmar, minuter och sekunder 3,23 h

MOMENT	KOMMENTARER	EXEMPEL
		Skriv som timmar 3628 s Skriv som meter per sekund 67 km/h Skriv som kilometer per timme 2,8 m/s Skriv som watt a) 2,1 TW b) 2300 kW c) 22 MW d) 6 GW
1.5 Procent-räkning procent, pro-mille, ppm index	Tillväxtfaktorn kan införas här eller i samband med exponentiell tillväxt.	Hur mycket är 4% av 150 000 kr? Hur många procent är 7 av 13,8? En vara kostar 2000 kr. Priset höjs med 8%. Beräkna det nya priset. En vara kostar efter 15% höjning 150 kr. Vilket var priset före höjningen?
1.6 Tillämp-ningsupp-gifter	En del tillämpningsuppgifter bör hämtas från angränsande ämnen. Enhetsbyten kan också övas här.	En människokropp består till cirka 2/3 av vatten. Hur mycket vatten innehåller en människa som väger 72 kg? En motionslöpare springer 5 000 m på 22 minuter. Hur lång tid tar det för löparen att springa 1 km? Ange svaret i hela minuter och sekunder. En cyklist och en löpare startar samtidigt ett 1500 m-lopp. Löparen springer sträckan på 3 minuter och 36 sekunder. Cyklistens hastighet är 24 km/h. Vem kommer först i mål?

2 Beskrivande statistik (15)

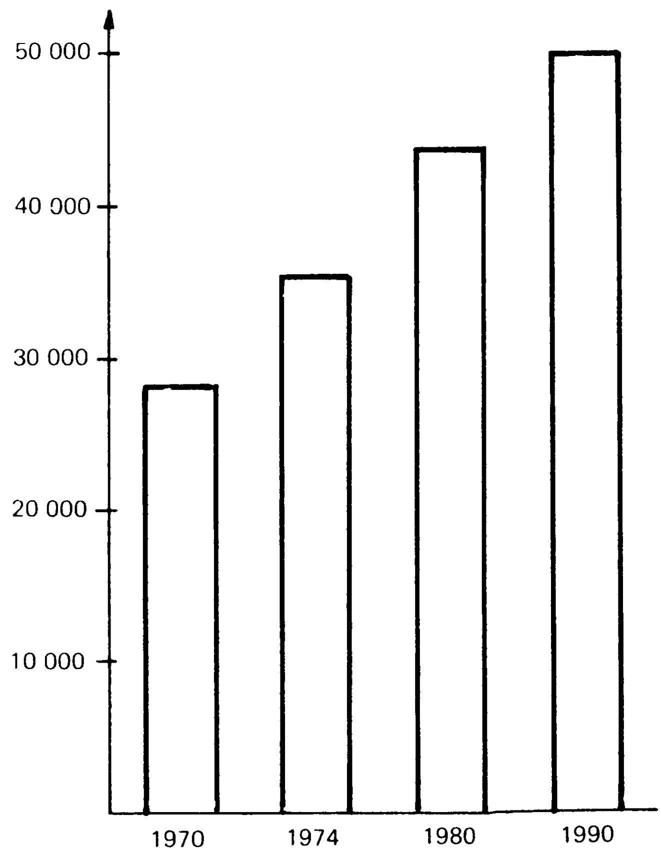
MOMENT	KOMMENTARER	EXEMPEL

2.1 Diagram

Det är viktigt att förutom ritning även tolkning av diagram diskuteras. Det är lämpligt att eleverna får tillfälle att samla in eget material.

1 stapeldiagram

I stapeldiagrammet presenteras befolkningsutvecklingen i Kungsbacka kommun i Halland.



a) hur många procent ökade befolkningen mellan åren 1970 och 1974?

b) hur många procent förväntas befolkningen öka mellan åren 1980 och 1990?

2 stolpdiagram

Vi frågade 30 män hur många ishockeymatcher de hade sett i TV under VM 77.
Här är svaren:

0 11 8 4 6 7 7 9 5 7 8 4
3 10 9 10 10 9 8 9 6 11 0 6
7 8 9 5 8 7

a) gör en frekvenstabell

b) åskådliggör materialet med hjälp av ett stolpdiagram.

MOMENT	KOMMENTARER	EXEMPEL

3 cirkel-diagram

Tabellen visar riksdagens partiställning våren 1977.

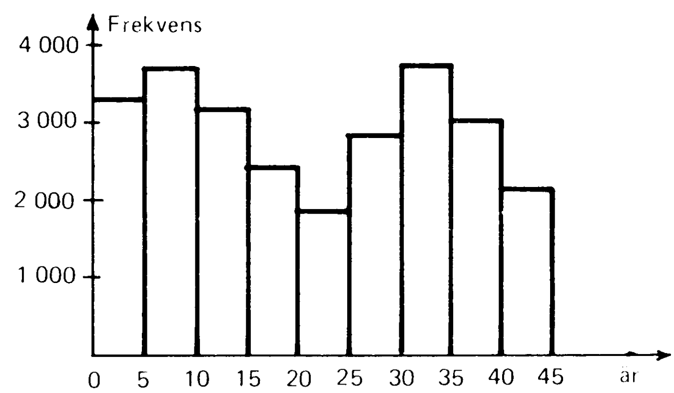
	Antal ledamöter
Socialdemokraterna	152
Centern	86
Moderaterna	55
Folkpartiet	39
Vänsterpartiet kommunisterna	17

Gör ett cirkeldiagram som visar partiställningen.

4 histogram

Val av lämpliga klassgränser är svårt för många elever. Man bör ej lägga för stor vikt vid detta.

Histogrammet visar åldersfördelningen från 0 till och med 44 år i Kungsbacka år 1976.
Åldrarna har grupperats i femårsklasser. Totala invånarantalet i kommunen var år 1976 38 000.



Bestäm med hjälp av histogrammet hur stor del av totala befolkningen som åldersgruppen 10–15 år utgör.

Gör ett nytt histogram med dubbla åldersklasser.

2.2 Lägesmått

medelvärde, median, typvärde

I en familj är åldrarna 3, 11, 7, 34, 42 och 13 år.

Beräkna a) medianåldern b) medelåldern

Vid en arbetsstudie tog man reda på tillverkningstiden för en viss detalj. Man fick följande tider i sekunder:

40 40 41 36 37 39 38 39 39 40
35 38 37 36 41 40 39

a) gör en frekvenstabell b) beräkna typvärdet

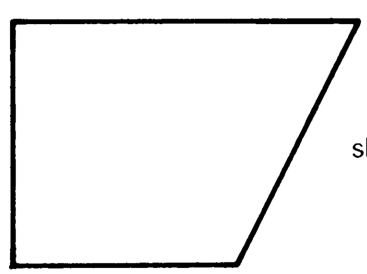
2.3 Hur man ljuger med statistik

Här kan exempelvis skalförvrängning och snett urval tas upp.

2.4 Val av diagram och lägesmått

Eleverna bör själva få välja diagram och lägesmått då de åskådliggör statistiskt material.

3 Geometri (15)

MOMENT	KOMMENTARER	EXEMPEL
3.1 Kvadrat-rötter	Inga räknelagar behöver tas upp, men begreppet kvadratrot belyses med uppgifter som i a) och b). Uppgiften i c) kan lösas med miniräknare.	a) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}$ (= 5) b) $\sqrt{4{,}23} \cdot \sqrt{4{,}23}$ (= 4,23) c) $\sqrt{3{,}4 \cdot 10^{-5}}$
3.2 Ekvationer	Här behandlas ekvationer både för geometri och andra tillämpningsområden. Ekvationerna kan lämpligen införas successivt i samband med att tillämpade uppgifter behandlas. Uppgiften i g) kan lämpligen lösas genom prövning.	Lös ekvationerna (3 värdesiffror) a) $3 \cdot x = 12$ b) $\frac{x}{7} = 3{,}2$ c) $\frac{11{,}2}{x} = 5$ d) $4x + 3 = 6{,}28$ e) $3{,}14 \cdot x + 4{,}1 = 2 \cdot x + 9{,}2$ f) $4 \cdot x^2 + 11 = 17$ g) $3{,}2 \cdot x^3 = 121$
3.3 Vinklar triangel, fyrhörning		I en triangel är två vinklar 36,5° och 40,8°. Beräkna triangelns tredje vinkel.
3.4 Längder 1 Pytagoras sats	Satsen kan göras trolig genom empiriska undersökningar.	I en rätvinklig triangel har hypotenusan längden 3,2 dm och en katet längden 1,8 dm. Beräkna den återstående kateten.
2 cirkelns omkrets		En cirkels diameter är 0,28 m. Beräkna cirkelns omkrets.
3 skala		En ritning på en tomt ges i figuren. Beräkna tomtens sidor.  skala 1:2000
4 likformighet	Endast enkla fall behandlas.	En rektangel med sidorna 16 cm och 20 cm är likformig med en annan rektangel, vars minsta sida är 48 m. Beräkna den andra sidan.

4 Mer numerisk räkning (30)

MOMENT	KOMMENTARER	EXEMPEL
4.1 Negativa tal 1 introduktion	Introduktion kan göras via tallinjen.	
2 addition och subtraktion		a) $-8+5$ b) $5-8$ c) $5-(-8)$
*3 multiplikation och division	Momentet är mindre centralt.	*a) $5 \cdot (-8)$ *b) $\frac{8}{-5}$ *c) $(-2) \cdot (-2) \cdot (-2)$ *d) $(-2) \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$
4.2 Närmevärden 1 avrundning värdesiffror "tumregeln"	Enligt tumregeln skall resultatet anges med lika många värdesiffror som de givna värdena har. Om de givna värdena har olika många värdesiffror så går man efter minsta antalet.	Avrunda a) 17,44 till 2 värdesiffror b) 0,026 till 1 värdesiffra En rektangels sidor är 2456 cm och 29 cm. Beräkna arean. Använd tumregeln.
2 överslagsräkning		a) $\frac{500\,000}{202}$ b) $11{,}2 \cdot 6{,}4$
3 rimlighetsbedömning		Är 400 m^3 färg vad som går åt vid målning av ett villagarage?
4.3 Potenser 1 introduktion	Förståelsen av potenser kan göras via potenser av formen: 2^2 2^{-3} $2{,}3^{-4}$	
2 grundpotensform[1]	Såväl positiva som negativa exponenter skall förekomma.	Skriv följande tal i grundpotensform a) 321 b) 0,040 Skriv om 0,264 MW i watt med grundpotensform.
3 de fyra räknesätten	Övning på tal skrivna med hjälp av tiopotenser. Potenslagarna behöver ej tas upp.	a) $1{,}25 \cdot 10^3 - 3{,}7 \cdot 10^2$ b) $\frac{3{,}2 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^2}{1{,}8 \cdot 10^7}$ c) $5 \cdot 10^3 \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-6}$

[1] Grundpotensform: Ett tal på formen $a \cdot 10^b$ där $1 \leq a < 10$ och b ett heltal.

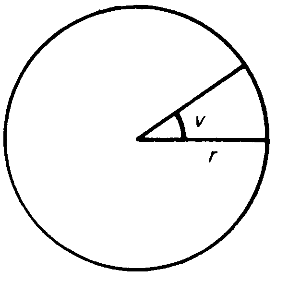
MOMENT	KOMMENTARER	EXEMPEL
4 tillämpningsuppgifter		Ljuset utbreder sig med hastigheten 300 000 km/s. Skriv i grundpotensform ljusets hastighet uttryckt i m/s. Ett billass sand väger 10 ton. Hur många sandkorn är detta, om varje korn väger 2 mg?
5 enhetsbyten		Skriv som kvadratmillimeter och svara i grundpotensform. a) $2 \cdot 10^6\ m^2$ b) $367\ cm^2$
4.4 Blandade uppgifter	Insättning i formler och uppställning av ekvationer kan tas upp här.	En cirkelsektors (se figur) area kan beräknas med formeln:

$$T = \frac{v}{360} \cdot \pi \cdot r^2$$

där v är den vinkel cirkelsektorn upptar av cirkeln och r cirkelns radie.
För en cirkelsektor gäller att vinkeln v är 37° och r är 11,2 cm.

Beräkna
a) hur många procent som cirkelsektorn upptar av cirkeln

b) cirkelsektorns area



Den effekt P som en elektrisk kokplatta avger kan beräknas med formeln

$$P = \frac{U^2}{R}$$

där U är spänningen över kokplattan och R kokplattans resistans

Beräkna en kokplattas resistans då den avger 2,4 kW och spänningen över kokplattan är 220 V.

5 Datalära (10)

MOMENT	KOMMENTARER	EXEMPEL
	Ett viktigt syfte med detta avsnitt är att eleven skall förstå att all databehandling styrs av program skrivna av människor. Syftet är inte att utbilda eleverna till att skriva program.	
Datorns delar	Detta moment kan lämpligen behandlas successivt under hela avsnittet. Här kan också något om binär representation tas upp.	Datorns huvuddelar beskrivs, centralenhet, in- och utmatningsenheter och minnesenheter. Olika typer av databärare (såsom magnetband, hålkort, streckkodade etiketter).
Programmering och program 1 tolkning av enkla program		Vilken utskrift ger följande program om A tilldelas värdet 7 och B värde 11? 10 PRINT "MATA IN A OCH B" 20 INPUT A,B 30 S = 2 − A + 3• B 40 PRINT "S ="; S 50 END
2 skrivning av enkla program	Flödesplaner kan användas. Programmen skrivs lämpligen i små steg, som testas var för sig, korrigeras och sätts ihop till färdiga program.	Skriv ett program (på dator eller programmerbar miniräknare) som beräknar till vilket belopp 2150 kr växer under 1 år om räntesatsen är 9,5%. Skriv ett program (på dator eller programmerbar miniräknare) som beräknar till vilket belopp ett kapital växer under 1 år med given räntesats.
3 demonstration och användning av färdigskrivna program.	Detta moment kan också studeras via studiebesök. Samverkan med samhällskunskap kan göras här.	Befolkningsprognoser Energiprognoser

6 Funktionslära (30)

MOMENT	KOMMENTARER	EXEMPEL

6.1 Grafiska metoder

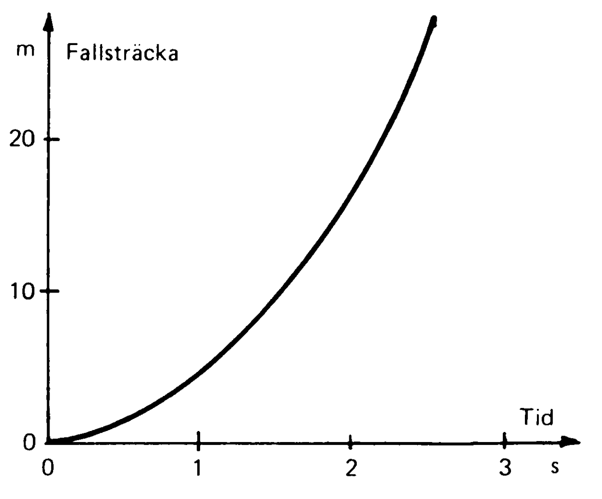
1 rätvinkliga koordinatsystem

2 linjär indelning

Övning i att göra avläsningar ur diagram.

En sten faller fritt till marken. Diagrammet nedan visar sambandet mellan fallsträcka och tid.

Beräkna
a) hur lång tid det tar för stenen att falla 25 m från tidpunkten 0 s
b) hur lång sträcka stenen fallit under de två första sekunderna.

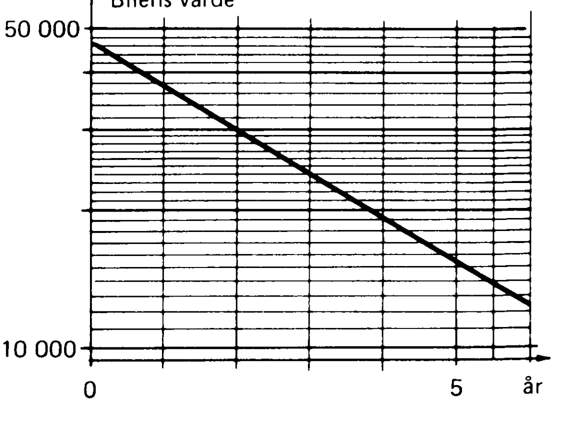


3 icke linjär indelning

Övning i att göra avläsningar ur diagram.

En bil kostar ny 46 000 kr. Bilens värde avtar med tiden enligt diagrammet nedan.

Ange bilens värde efter
a) 1 år b) 5 år



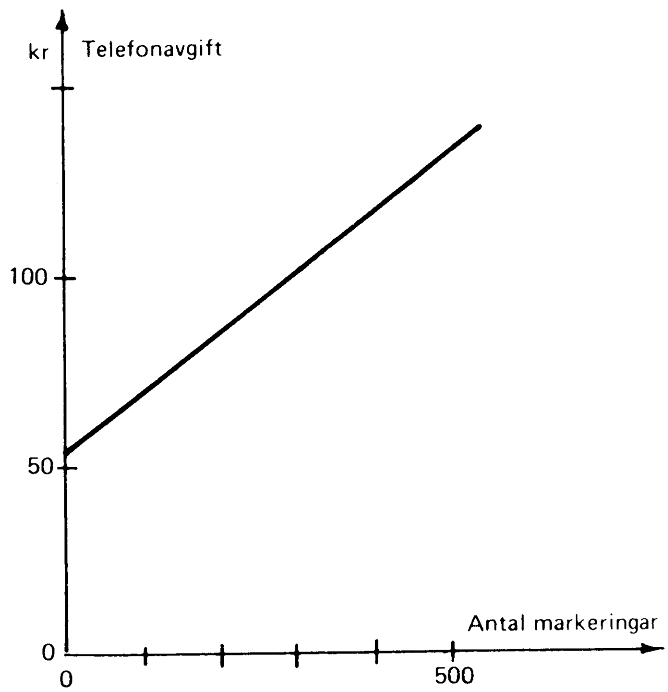
MOMENT	KOMMENTARER	EXEMPEL
4 tolkning av linjära grafer	Fasta och rörliga kostnader kan tas upp.	Diagrammet visar hur telefonavgiften varierar med antalet markeringar under ett kvartal.

Bestäm med hjälp av diagrammet

a) kvartalsavgiften (fast avgift)

b) markeringsavgiften för ett samtal (rörlig kostnad)

c) totala avgiften för ett kvartal då 400 markeringar registrerats.



MOMENT	KOMMENTARER	EXEMPEL
5 kurvritning	Kurvritning görs via värdetabell.	I tabellen finns samhörande värden på x och y angivna

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y	−14	−11	−8	−5	−2	1	4	7	10

a) pricka in punkterna i ett koordinatsystem och sammanbind punkterna med varandra.

b) ange med hjälp av grafen de y-värden som svarar mot x-värdena 1,5 och −2,5.

c) ange de x-värden som svarar mot y-värdena −9 och 2

MOMENT	KOMMENTARER	EXEMPEL

En kula kastas rakt uppåt. En person mäter samhörande värden på tid och höjd enligt tabellen.

tid (s)	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,4	1,8	2,0
höjd (m)	0	1,9	3,2	4,1	4,8	5,1	4,2	1,7	0

a) markera punkterna i ett koordinatsystem och förena dem i en så jämn kurva som möjligt.

b) vid vilken tidpunkt vänder stenen?

c) efter hur lång tid återkommer stenen till utgångsläget?

6.2 Proportionalitet

1 värdetabell, diagram

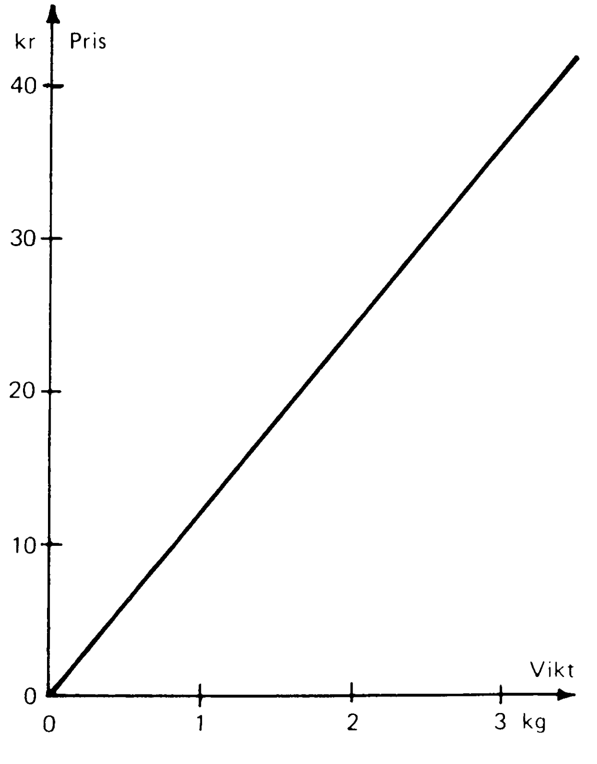
Proportionalitet införs lämpligen genom att värdetabeller och diagram studeras.

Tabellen och diagrammet visar hur priset på en vara varierar med vikten.

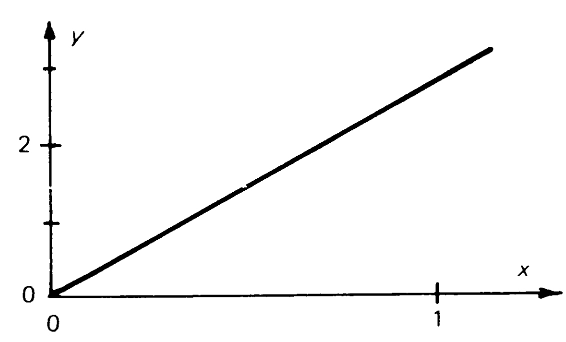
a) fyll i de värden som är utelämnade i tabellen.

b) ange med hjälp av diagrammet priset för 2,8 kg av varan.

pris (kr)	0	6	12	18	24	30	36
vikt (kg)	0	0,5		1,5	2		3



MOMENT	KOMMENTARER	EXEMPEL
2 tabeller, kurvritning	Proportionalitet används och inövas exempelvis via tabellifyllning och kurvritning.	Överljudsplanet Concorde kan flyga med den konstanta farten 0,65 km/s. Flygsträckan är proportionell mot flygtiden. a) gör en tabell som visar hur flygsträckan beror på flygtiden. Låt flygtiderna vara 0 s, 100 s, 200 s, . . ., 4000 s b) rita in punkterna i ett diagram och sammanbind dem med en rät linje. c) använd diagrammet för att beräkna flygsträckan efter 1 timmes flygfärd. d) beräkna med hjälp av diagrammet den tid det tar för planet att flyga 120 mil. Ange svaret i timmar och minuter.
3 proportionalitetsfaktor	$y = k \cdot x$ används för att beskriva proportionalitet, proportionalitetsfaktorn k bestäms.	Årsräntan, r kronor, på ett lån är proportionell mot lånesumman, s kronor. Räntesatsen är 10%. a) ange ett samband mellan r och s. b) åskådliggör sambandet i ett diagram. c) bestäm årsräntan då lånesumman är 126 000 kr. För ett ämne med massan y gram och volymen x cm^3 är y proportionell mot x. Proportionalitetskonstanten kallas i detta fall för ämnets densitet. Diagrammet nedan anger sambandet mellan massa och volym för aluminium. Bestäm med hjälp av diagrammet densiteten för aluminium.



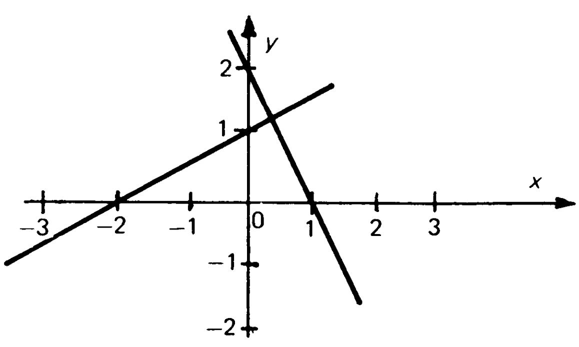
6.3 Exponentiell förändring	Begreppet tillväxtfaktor kan tas upp.	
1 introduktion	Exponentialfunktioner införs exempelvis via 2^x.	

MOMENT	KOMMENTARER	EXEMPEL
2 tillämpningsuppgifter	Uppgifterna kan lösas genom upprepad användning av miniräknare.	En varas pris, p kronor, efter t år kan beräknas ur sambandet $$p = 625 \cdot 1{,}05^t$$ Bestäm priset då t är a) 2 b) 4 c) 11 Bestäm t då $p = 1000$. En vara kostar 1600 kr. Priset höjs med 26% varje år. Efter hur lång tid har priset fördubblats?
6.4 Räta linjens ekvation	Med hjälp av tabell och xy-diagram övas eleverna i att ställa upp ett samband mellan x och y. Eleverna övas i att bestämma k- och m-värden för en given rät linje. Ekvationen för den räta linjen skrivs sedan på formen $y = k \cdot x + m$. Enpunktsformen och tvåpunktsformen är överkurs.	I tabellen finns samhörande värden på x och y angivna

x	−4	−2	0	2	4
y	−8	−4	0	4	8

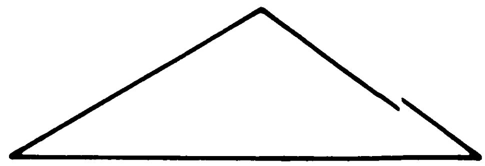
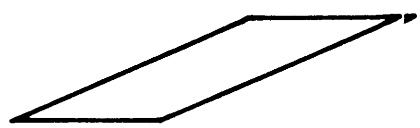
a) pricka in punkterna i ett koordinatsystem och sammanbind punkterna med varandra.

b) ange ett samband mellan x och y.



Bestäm k och m för de två linjerna i figuren.
Bestäm också ekvationer för linjerna.

7 Area- och volymberäkningar (10)

MOMENT	KOMMENTARER	EXEMPEL
7.1 Area 1 triangel		Beräkna genom mätning i figurıren triangelns area. 
2 rektangel		En rektangels omkrets är 12,6 c cm och en sida dubbelt så stor som en annan. Beräkna rektangelns area.
3 parallello- gram		Figuren visar i skala 1:10 en meetallplåt i form av en parallellogram. Gör mätningar i i figuren och beräkna plåtens area. 
4 cirkel		En cirkels area är 123 cm^2. Beräkna cirkelns a) radie b) diameter
7.2 Volym 1 rätblock		En husgrund är 8,0 m bred, 12,!,0 m lång och har formen av en rektangel. Husgruunden skall fyllas med 12 cm tjockt gruslager. Gr,ruset kostar 85 kr/m^3. Beräkna kostnaden fcör gruset.
2 cylinder		En pelare av trä har en höjd av 11,0 m och den cirku-iära basytan har diametern 32 ccm. Vad väger pelaren då träets dennsitet är 0,64 kg/dm^3?

8 Sannoliikhetslära (15)

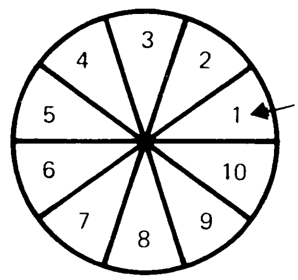
MOMENT	KOMMENTARER	EXEMPEL

8.1 Enkla slumpförsök

symmetriska försök, addition av sannolikheter

Varje utfall tilldelas samma sannolikhet.

Om man snurrar på hjulet i figuren, vad är då sannolikheten att man får
a) en sjua b) minst sju



8.2 Relativa frekvenser

En tärning kastas 100 gånger. Ungefär hur många gånger kan man förvänta sig att få en fyra?

8.3 Försök i flera steg

multiplikation av sannolikheter

Utfallen åskådliggörs med träddiagram.
Avsikten med momentet är att förbereda för momentet **8.4 statistisk anknytning**

Ett symmetriskt mynt kastas två gånger.

a) åskådliggör de möjliga utfallen (resultaten) i form av ett träddiagram.

b) för in sannolikheterna i diagrammet.

c) beräkna sannolikheten för att man får exakt en klave.

I en urna finns två svarta och tre vita kulor.
En person drar två kulor ur urnan.

Vilken är sannolikheten för att han får kulor av olika färg?

8.4 Statistisk anknytning

icke symmetriska försök

Uppgifterna hämtas lämpligen från samhälls-arbetslivet.

Vid svensk bilprovning första kvartalet år 1975 fann man att 87 508 bilar av 625 403 hade fel på strålkastarna.

a) ange sannolikheten för att en godtyckligt vald bil hade fel på strålkastarna.

b) ange sannolikheten för att två godtyckligt valda bilar hade fel på strålkastarna.

Vid en skrivning i matematik i en klass blev betygsfördelningen enligt tabellen

betyg	1	2	3	4	5
frekvens	2	8	12	7	1

Ange sannolikheten för att en slumpvis vald elev i klassen skall minst ha betyget 4.

ÅRSKURSERNA 2 OCH 3 SE-LINJERNA

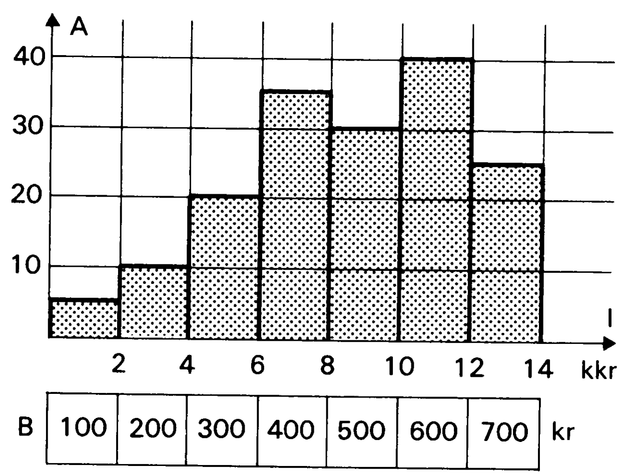
9 Statistik (35)

MOMENT	KOMMENTARER	EXEMPEL
Viktat medelvärde Klassindelat material Histogram Summapolygon	Beräkning av medelvärde och standardavvikelse ur histogram. Beräkning av median ur summapolygon.	Närvaron vid daghemmen under en dag redovisas i en kommun på följande sätt:

Daghem	Antal barn	Närvaro
A	50	52%
B	40	58%
C	30	80%
D	25	73%
E	30	71%

Hur många procent av barnen var närvarande denna dag?

I en kommun är antalet barn (A) med daghemsplats fördelade efter föräldrarnas månadsinkomst (I) så som figuren visar. I denna visas också månadsavgiften (B) per barn för de olika inkomstklasserna. Ingen familj har mer än 1 barn i daghem.



a) Vilken är medelinkomsten per månad för de familjer som har barn i daghem?

b) Hur stor blir kommunens inkomst av daghemsavgiften per månad?

c) Hur stor är medianinkomsten per månad för de familjer som har ett barn i daghem?

MOMENT	KOMMENTARER	EXEMPEL

Snedvridande faktorer

Eleverna bör övas i att finna snedvridande faktorer och diskutera deras inverkan. T ex är män och kvinnor på en arbetsplats ofta olika fördelade beträffande ålder och typ av arbete. Därför kan medelfrånvaron bland män och kvinnor ge ett missvisande mått på könsfaktorns betydelse för sjukfrånvaron.

Standardpopulationsmetoden för eliminering av snedvridande faktorers inverkan behandlas.

Tabellen visar resultatet från en tentamen. Materialet är klassindelat efter resultatet från ett tidigare förkunskapsprov.

Poäng på förkunskapsprovet	Tentamensresultat			
	Grupp 1		Grupp 2	
	Antal	Medelpoäng	Antal	Medelpoäng
−50	3	25,0	2	23,0
51−75	11	32,0	8	32,5
76−100	6	40,5	7	40,0
101−	2	48,0	5	52,0

a) Beräkna medelvärdet i grupperna.

b) Gör en jämförelse enligt standardpopulationsmetoden så att inverkan av förkunskaper elimineras.

Svarsbortfall

Svarsbortfallets inverkan på en undersökning belyses med olika antaganden, bl a extremfallen att a) alla b) ingen i bortfallet har den undersökta egenskapen.

Enkät i Eskilstunaområdet:

Hälften inom Metall positiva till arbetet

Rubriken baseras på de 2 550 som svarat av 7 500 tillfrågade. Beräkna andelan "positiva till arbetet" bland samtliga 7 500 tillfrågade om man antar att a) alla b) ingen c) 30% d) 70% i bortfallet är positiva till arbetet. e) Är rubriken bra? Sätt annars ny rubrik till referatet.

Man behandlar metoden att genom ett stickprov skatta andelen med den undersökta egenskapen i bortfallet.

Vid en rundfråga till 4 000 hushåll om de ville ha en kvällsöppen butik svarade endast 1 600 och bland dessa svarade 30% ja. I bortfallet valdes slumpmässigt 200 hushåll för personligt besök och av dessa svarade 100 hushåll ja. Den använda urvalsmetoden gör det rimligt att låta andelen ja-svarare i stickprovet utgöra skattning av motsvarande proportion bland de 2 400 hushållen i bortfallet. Gör en uppskattning av hur stor andel av de 4 000 hushållen som vill ha en kvällsöppen butik.

MOMENT	KOMMENTARER	EXEMPEL
Index	Användning av olika index, speciellt konsumentprisindex. Omräkning till fast penningvärde med hjälp av index.	Under vilken av femårsperioderna 1971–1976 och 1976–1981 var prisändringen (procentuellt) störst? En person hade år 1975 nettoinkomsten 40 000 kr. År 1978 var hennes nettoinkomst 50 000 kr. Har nettoinkomsten ökat eller minskat om man räknar i fast penningvärde? Använd tabellen för konsumentprisindex för omräkning.
	Omräkning mellan olika indexserier	Konsumentprisindex har numera 1980 som basår (tidigare 1949). För huvudgruppen "Kläder och skor" var indextalet 106,1 för januari 1982 enligt 1980 års serie. I 1949 års serie var indextalet för "Kläder och skor" 310 för år 1980. a) Beräkna indextalet för huvudgruppen "Kläder och skor" för januari 1982 med 1949 som basår. b) För huvudgruppen "Kläder och skor" var indextalet 175 för år 1971 i 1949 års serie. Vilket blir motsvarande indextal i 1980 års serie?

År	Konsumentprisindex
1971	254
1972	269
1973	287
1974	316
1975	347
1976	382
1977	426
1978	469
1979	502
1980	571
1981	640
1982	695

MOMENT	KOMMENTARER	EXEMPEL

Normal-fördelningen

Arbetet med histogram får föra över till frekvensfunktioner. Speciellt studeras den normala frekvensfunktionen som approximation av motsvarande histogram som visas i figur 1.

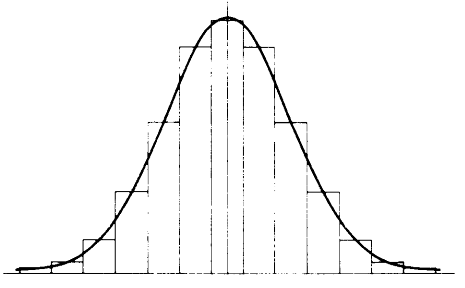


Fig. 1

Normalfördelningen presenteras grafiskt eller i en förenklad tabell så som framgår av figurerna 2 och 3. För normalfördelade material gäller följande symmetriska fördelning.

Innehållet i en storförpackning djupfrysta grönsaker anges vara 500 g. I själva verket är mängden grönsaker i förpackningen normalfördelad med medelvärdet 510 g och standardavvikelsen 7,5 g.
Hur många förpackningar i ett parti på 100 000 kan väntas väga minder än 487,5 g?

En maskin kapar metalltrådar. Längden i mm av en tråd är normalfördelad med medelvärdet 265 och standardavvikelsen 2,0 mm. Hur stor del av produktionen kan väntas ha en längd mellan 261 mm och 269 mm?

Vid försäljningen av ovannämnda metalltrådar vill företaget uppge en minsta längd som ca 98% av trådarna i en stor leverans skall ha. Vilken minsta längd kan företaget uppge?

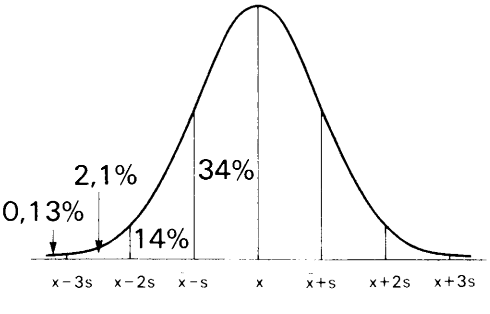


Fig. 2

eller i tabellform:

Observation	Relativ frekvens	Kumulerad relativ frekvens
$x < \bar{x}-3s$	0,13%	0,13%
$\bar{x}-3s < x < \bar{x}-2s$	2,14%	2,28%
$\bar{x}-2s < x < \bar{x}-1,5s$	4,41%	6,68%
$\bar{x}-1,5s < x < \bar{x}-s$	9, 18%	15,87%
$\bar{x}-s < x < \bar{x}-0,5s$	14,99%	30,85%
$\bar{x}-0,5s < x < \bar{x}$	19,15%	50,00%

Fig. 3

Konsumentprisindex (KPI)

Här beskrivs en laboration som syftar till att ge ökad insikt i konstruktionen av konsumentprisindex (KPI) och som även antyder svårigheterna att bestämma ett allmänt mått på prisförändringar i samhället.

Som arbetsmaterial behöver eleverna tillgång till indextabeller ur någon årgång av "Konsumentpriser och indexberäkningar" (SOS, LiberFörlag). Dessutom behövs prisuppgifter som eleverna samlar in bland ortens affärer. Eleverna skall nämligen, enskilt eller i grupp, konstruera ett "personligt" konsumentprisindex och därvid utgå från en faktisk eller tänkt månadsbudget. Följande instruktioner kan ges:

"Uppskatta hur dina månatliga utgifter fördelar sig procentuellt på följande s k huvudgrupper:

1. Livsmedel.
2. Alkoholhaltiga drycker, tobak.
3. Bostad, bränsle, lyse.
4. Kläder och skor.
5. Diverse (nöjen, resor, tidningar, böcker etc).

Dessa procenttal blir dina s k *vägningstal* (som kan vara noll t ex för alkohol och tobak).

I din tabell finns bl a en förteckning över de representantvaror som KPI baseras på. Välj ut minst fem av representantvarorna ur grupp 1 och minst tre varor ur vardera av grupp 2, 4 och 5. Som "representantvara" för grupp 3 väljer du din eller familjens bostad. Tänk efter (och notera) hur mycket du förbrukar per månad av var och en av dina representantvaror.

Gå nu ut i butikerna och ta reda på de dagsaktuella priserna på dina representantvaror. I "Konsumentpriser och indexberäkningar" finner du sedan respektive pris år 19xx.

För var och en av huvudgrupperna kan du nu beräkna ett delindextal. För t ex grupp 1 "Livsmedel" gör du så här. Beräkna vad din månadsförbrukning av de fem representantvarorna sammanlagt kostar idag. Räkna också ut vad denna förbrukning hade kostat år 19xx. Kvoten av dessa två summor multiplicerad med 100 utgör delindextalet för grupp 1. På liknande sätt erhålls delindextalen för de övriga grupperna.

Du har nu beräknat fem delindextal (I_1, I_2, I_3, I_4, I_5). För att få ett sammanfattande mått på prisutvecklingen för hela din konsumtion skall de beräknade delindextalen vägas samman till ett totalindex. Som vikter används dina tidigare uppskattade vägningstal (w_i). Formeln ser ut så här:

$$I_{\text{total}} = \frac{w_1I_1 + w_2I_2 + w_3I_3 + w_4I_4 + w_5I_5}{100}$$

Det framräknade indextalet beskriver alltså prisutvecklingen från år 19xx till dagens datum. Detta indextal skall sedan kedjas till KPI år 19xx så att du får det dagsaktuella värdet på ditt personliga KPI med 1980 (eller 1949) som basår. Jämför slutligen ditt personliga KPI med SCB:s senast publicerade värde."

I en klass är vanligen elevernas indextal olika. Olikheter i indextalen jämfört med KPI kan ge upphov till intressanta diskussioner om dettas lämplighet som mått på prisförändringarna för olika grupper i samhället.

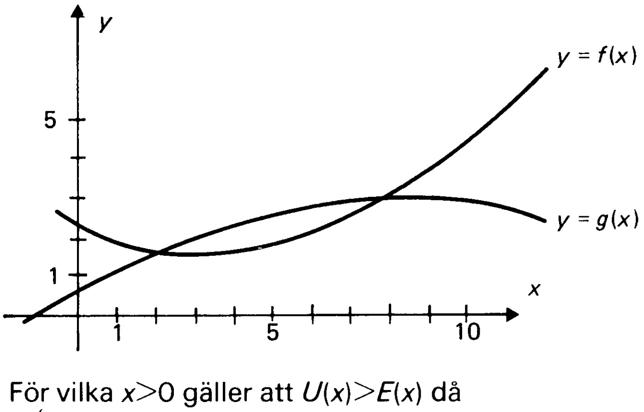
Laborationen lämpar sig som koncentrationsdag tillsammans med samhällskunskap.

10 Algebra (20)

MOMENT	KOMMENTARER	EXEMPEL
De fyra räknesätten med bokstäver **Distributiva lagen** **Konjugatregeln** **Kvadreringsregeln**	Momentet avser att tillgodose behovet av algebra i momenten 11–14. Förenklingar och uppdelning i faktorer med hjälp av reglerna.	Skriv som ett bråk $\frac{1}{a} - \frac{1}{3a}$ Förenkla $3(a+2b) - 2(3a-b)$ Skriv som en summa a) $(x+h)(x^2+2xh+h^2)$ b) $x(1+\frac{1}{x})$ I ett bråk är täljaren $x^2 - p^2$. Nämnaren är $x-p$. Förenkla bråket. Förenkla $\frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$
Nollställen		Lös ekvationen a) $x(x-1)(x+5) = 0$ b) $t^3 - 4t = 0$
Andragradsekvationer	Övning i att införa en beteckning på en obekant storhet och att ställa upp en ekvation.	Lös ekvationen $\frac{1}{x} = 4 - x$ a) Ange svaret exakt b) Ange svaret med minst tre värdesiffror. Lös ekvationen $2{,}19u^2 - 25{,}8u + 71{,}3 = 0$ Ange svaret med tre värdesiffror. Bestäm sidorna i en rektangel med omkretsen 28 l.e. och diagonalen 10 l.e.

11 Funktionslära (fortsättning) (20)

MOMENT	KOMMENTARER	EXEMPEL
Värdetabeller och grafer Symbolen *f(x)*	En repetition av momentet 6.1 med tonvikt på tillämpningar. Beräkning av värdetabeller och prickning av funktioners grafer. Kännedom om andragradsfunktioners grafer.	Pricka kurvorna a) $y = 2x^2 - 3x + 2$ b) $y = x^3 - 2x$ c) $y = \frac{3}{x} + 5$ d) $y = 5 - 4x - 3x^2$ Bestäm $f(5)$ där a) $f(x) = 3 - 0{,}2x$ b) $f(x) = \frac{2}{x}$ c) $f(x) = x(8 - x)$ d) $f(x) = 1{,}2^x$ Man har $f(x) = x^2 + 3x$ Beräkna $f(3) - f(2)$
	Övning i att införa en variabelbeteckning och att bilda ett funktionsuttryck med denna variabel.	Ett hushålls totala elkostnad under ett år består av en fast del 420 kr och en rörlig del 0,20 kr/kWh. a) Ställ upp en formel som anger hur den totala elkostnaden beror av antalet förbrukade kilowattimmar. Ange sambandet i ett koordinatsystem. b) Beräkna antalet förbrukade kilowattimmar om den totala elkostnaden är 1500 kr. Vid priset x kr/enhet kan man sälja $(100-x)$ enheter. Ange ett uttryck för intäkten.
Grafiska lösningar	Lösning av ekvationer, olikheter och ekvationssystem med grafisk-numeriska metoder (en kombination av grafritning och användning av miniräknare).	Lös grafiskt ekvationssystemet a) $\begin{cases} 1{,}2x - 3{,}1y = -3{,}2 \\ 3{,}4x + 2{,}2y = 6{,}1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = -1 \\ x^2 - y = 0 \end{cases}$ Lös med hjälp av värdetabell och graf ekvationen $x^3 - 3x - 5 = 0$ Lös grafiskt olikheten $f(x) < g(x)$ med hjälp av nedanstående figur.



För vilka $x > 0$ gäller att $U(x) > E(x)$ då

$$\begin{cases} U(x) = x^2 + 2 \\ E(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$$

MOMENT	KOMMENTARER	EXEMPEL
Ekvationssystem	Algebraisk lösning av linjära ekvationssystem.	Lös exakt ekvationssystemet $\begin{cases} 2x+y=8 \\ 5x-2y=5 \end{cases}$

En eldistributör säljer elenergi till en fabrik inom processindustrin. Taxan var ett år 11 öre/kWh för natt och 22 öre/kWh för dag. Fabrikens elkostnad var då 2 750 kr/dygn. Tre år senare hade taxan höjts till 16 öre/kWh för natt 28 öre/kWh för dag, och fabrikens dygnskostnad för elenergi var då 3600 kr.

Vilken blir fabrikens dygnskostnad för elenergi, om taxan höjs till 20 öre/kWh för natt och 30 öre/kWh för dag? Man förutsätter att fabrikens elkonsumtion är oförändrad under årens lopp.

12 Ändringskvot och derivata (35)

MOMENT	KOMMENTARER	EXEMPEL

Ändringskvot

Värdet av ändringskvoten,

$$\frac{\text{ändringen } i\ y}{\text{ändringen } i\ x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

skall ingående studeras för olika funktioner. Genom numeriska och grafiska undersökningar i många exempel observeras, att ändringskvoten för små Δx är nästan oberoende av Δx. Det kan vara lämpligt att först studera ändringskvoten för funktioner där denna är konstant. Ändringskvoten är här lika med k-värdet och ett mått på linjens lutning.

Begreppen ändringskvot och lutning studeras sedan även för icke-linjära förlopp. Man finner att ändringskvoten för små Δx kan användas som ett mått på kurvans lutning och att tangentens riktningskoefficient nära överensstämmer med denna ändringskvot.

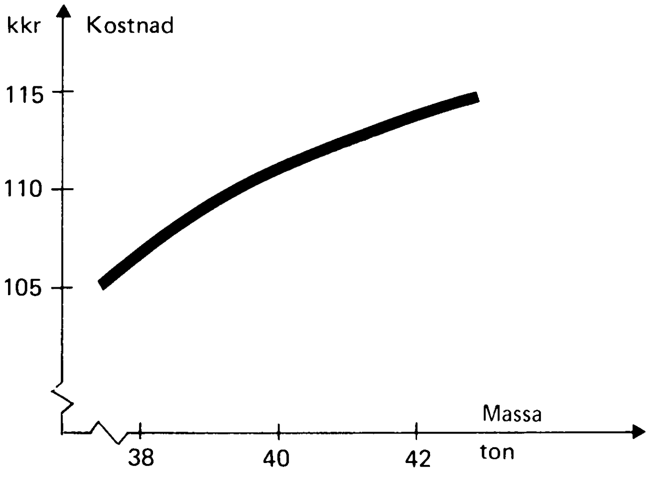
Hur stor är ändringskvoten (marginalskatten) i följande skattetabell)

Inkomst (kr)	Skatt (kr)
60 100	25 011
60 200	25 074
60 300	25 137
60 400	25 200
60 500	25 263

Man studerar hur omkretsen och arean av en cirkel beror av radien r. Beräkna i vartdera fallet ändringskvoten då r ökar från a) 8 till 8,2 b) 8 till 8,1

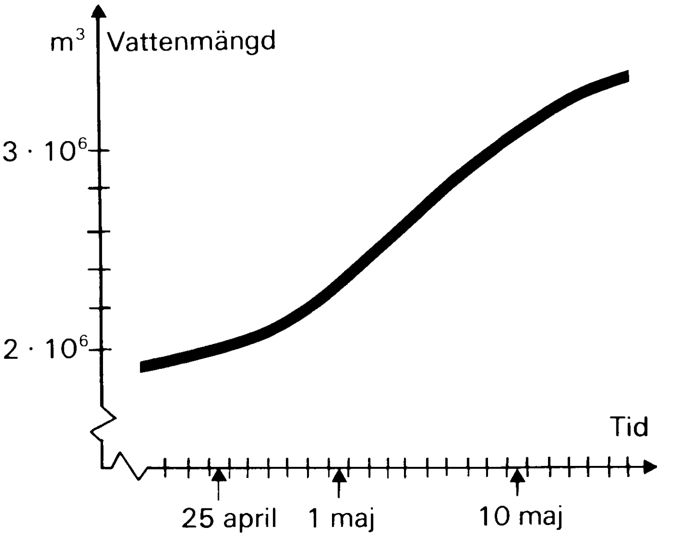
Skatten på 70 000 kr är 32 950 kr. Marginalskatten i detta inkomstläge är 0,75.
Vad är skatten på
a) 73 500 kr b) 69 000 kr.

Kostnaden att producera x kg av en viss kemikalie framgår av grafen nedan. Bestäm ändringskvoten (marginalkostnaden) i kr/kg då man ökar produktionen vid nivån 40 ton.



MOMENT	KOMMENTARER	EXEMPEL

Vattenmängden i en damm beror av tiden enligt nedanstående diagram. Med vilken hastighet (i kubikmeter per minut) ökar vattenmängden mitt på dagen den 1:a maj?



Bestäm med grafisk metod lutningen hos kurvan $y = x^2 + 3x$ i punkten (1,4).

Man beräknar tangentens k-värde och därmed lutningen hos en kurva.

Bestäm k-värdet för ett antal linjer genom punkten $P\,(2,1)$ på kurvan $y = x^2/4$ och andra punkter Q på kurvan i närheten av P. Bestäm därur k-värdet för kurvans tangent i punkten P.

Derivata

Derivatan definieras som gränsvärdet av ändringskvoten.

Bestäm $f'(x)$ då $f(x) = x^2$ med hjälp av derivatans definition.

Symbolen $f'(x)$.

Man skriver

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

och

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

och accepterar en intuitiv uppfattning av symbolen lim.

Bestäm $f'(x)$ med hjälp av derivatans definition då
a) $f(x) = 2x + 1$ b) $f(x) = x^2 - 1$ c) $f(x) = 2x^2$

För en funktion f gäller att $f(2) = 3$ och $f'(2) = 4$.

a) Ange ungefärliga värden på $f(2{,}05)$ och $f(1{,}95)$.

b) Gör en jämförelse med de exakta värdena på $f(x) = x^2 - 1$.

Kostnaden för att tillverka 2 000 burkar lingonsylt är 3 000 kr. Marginalkostnaden för att tillverka fler burkar lingonsylt är 4 kr per burk. Ange den totala kostnaden för att tillverka 2 050 burkar lingonsylt.

MOMENT	KOMMENTAR	EXEMPEL
Derivering	Man bevisar $Dx^n = nx^{n-1}$ för några n-värden och accepterar regeln för övriga n. Derivatan härleds för $y = ax+b$, $y = ax^2$ Man accepterar utan härledning uttrycken för y' då $y = 1/x$ och för ett polynom.	
	Satserna $D(kf(x)) = kf'(x)$ $D(f(x)+g(x)) = f'(x)+g'(x)$ accepteras utan bevis	Beräkna $f'(x)$ då $f(x) = 3x^2-2x+5$ Beräkna $f'(2)$ då $f(x) = 5x+\frac{2}{x}$
	Tillämpningar på olika förändringar, t ex hastighet.	En fallande sten kan beräknas ha fallit $5x^2$ meter efter x sekunders fall, där $0 \leqq x \leqq 10$. Beräkna stenens hastighet för $x = 1,5$.
Kurvritning, maximum-minimum-problem	Intuitiv förståelse av att derivatan är noll i inre extrempunkter. Detta utnyttjas vid ritning av enkla kurvor.	Betrakta kurvan $y = x^3-9x^2+24$. a) Beräkna derivatans nollställen. b) Gör en värdetabell för y som innefattar derivatans nollställen. c) Rita kurvan.
	Några enkla maximum- och minimumproblem studeras.	Vid priset x kr kan man sälja $(8-0,2x)$ enheter. Beräkna den maximala intäkten. Att tillverka q enheter kostar $T(q)$ kr, där $T(q) = 1\,600+40q+q^2$ $(10 \leqq q \leqq 50)$. Beräkna lägsta genomsnittskostnaden.

13 Exponentialfunktioner (30)

MOMENT	KOMMENTARER	EXEMPEL
Potenser med heltalsexponent Geometrisk summa	Potenslagarna behandlas och definitionerna av a^0 och a^{-n} ($n \in Z_+$) motiveras. Formeln för geometrisk summa härleds.	Skriv som en potens a) $7^5 7^{-8} 7^9$ b) $3^9/3^{-5}$ Visa att $25^{90} = 125^{60}$ Beräkna $500 + 500 \cdot 1{,}08 + 500 \cdot 1{,}08^2 + \ldots + 500 \cdot 1{,}08^{23}$ Beräkna $5 + 15 + 45 + 135 + \ldots + 32\,805$
Ränta på ränta annuitet nuvärde		Vid åtta årsskiften i följd sätts vid varje årsskifte in 2 000 kr på en bankbok. Hur stort är nuvärdet av dessa insättningar vid tidpunkten för den första insättningen? Räntesats 9%. Ett lån på 150 000 kr samt ränta skall betalas med 20 lika stora årliga belopp med början ett år efter det att lånet erhölls. Beräkna annuiteten om räntesatsen är 11%.
	Problem som leder till räkningar med uttryck av typen $a \cdot b^n$ ($n \in Z$) behandlas.	I en bakterieodling fördubblas antalet bakterier varje timme. Hur många bakterier finns i odlingen efter 14 h om det fanns 200 från början?
Potenser med reell exponent	Symbolerna $\sqrt[n]{a}$ och $a^{\frac{m}{n}}$ definieras Problem som leder till räkningar med uttryck av typen $a \cdot b^c$ ($c \in R$) behandlas. Potenslagarna formuleras.	Antag att kronans värde minskar med 10% per år. Hur mycket är i så fall en krona värd i dagens penningvärde om 8 år? Lös ekvationen $4^x = 8$ I ett visst land är folkmängden 17 miljoner och den antas vara fördubblad om 25 år. Hur stor är den om 10 år om tillväxten är exponentiell? En kub har volymen 5,00 dm^3. Beräkna kubens totala begränsningsarea. Hur stor är inflationen varje 2-årsperiod om den är 50% varje 7-årsperiod? Den årliga inflationen förutsätts vara konstant.
Exponential-funktioner	Kurvor $y = a^x$ ritas och lutningen för $x = 0$ diskuteras. Talet e införs i samband med att $De^x = e^x$ troliggörs.	Rita kurvan a) $y = 2^x$ b) $y = 3^x$ c) $y = 0{,}5^x$
Sammansatt funktion	Regeln $D(f(ax+b)) = f'(ax+b) \cdot a$ troliggörs.	Beräkna $f'(3)$ då $f(x) = 3 \cdot e^{2x}$ Bestäm talen A och k i likheten $f(x) = A \cdot e^{kx}$ så att $f(0) = 5$ och $f'(0) = 0{,}5$

MOMENT	KOMMENTARER	EXEMPEL

Logaritmer

Aktivt behärskande av logaritmlagarna krävs ej, men exempel kan ges i övningsuppgifter. Huvudsakligen diskuteras baserna 10 och e.

Visa att $10^{\lg 2 + \lg 3} = 10^{\lg 6}$

Visa att a) $1{,}15^x = 10^{x \cdot \lg 1{,}15}$
b) $\lg 1{,}15^x = x \cdot \lg 1{,}15$

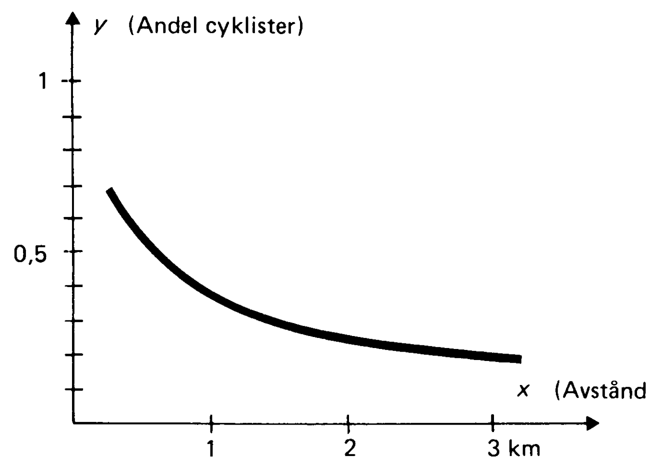
Bestäm talet k så att $2^x = e^{kx}$ för alla x.

Beräkna $f'(0)$ då $f(x) = 2^x$

Beräkna $f'(2{,}5)$ då $f(x) = 5 \cdot 3^{2x}$

Om I betecknar ljudintensiteten i W/m^2, så definieras ljudnivån L i enheten decibel enligt
$L = 10 \cdot \lg I/I_o$ där $I_o = 10^{-12}$ W/m^2.
Med hur många decibel ökar ljudnivån om
a) ljudintensiteten ökar från $8 \cdot 10^{-7}$ W/m^2 till $8 \cdot 10^{-4}$ W/m^2.
b) ljudintensiteten fördubblas.

En undersökning av färdmedelval (bil, cykel etc) i Malmö gav nedanstående resultat.
Man kan räkna med att $\ln y = Ax + B$. Läs av diagrammet vid $x = 0{,}5$ och $x = 3$ och beräkna därefter värdena på A och B.



MOMENT	KOMMENTARER	EXEMPEL
	Problem som leder till ekvationer av typen $a \cdot b^x = c$ behandlas.	Lös ekvationen $e^{0.7} = 10^x$ En population antas växa exponentiellt. Vid en viss tidpunkt bestod populationen av 190 000 individer och 15 år senare av 280 000. a) Hur stor är populationen efter ytterligare 10 år? b) Efter hur många år har populationen vuxit till 460 000 individer?
	Approximationen ändringskvoten $\approx$ derivatan tillämpas.	I en bakterieodling finns från början 300 bakterier. Antalet växer exponentiellt och fördubblas varje halvtimme under de första 5 timmarna. Hur många nya bakterier bildas per sekund efter 4 h?

14 Integraler (15)

MOMENT	KOMMENTARER	EXEMPEL

Inledning

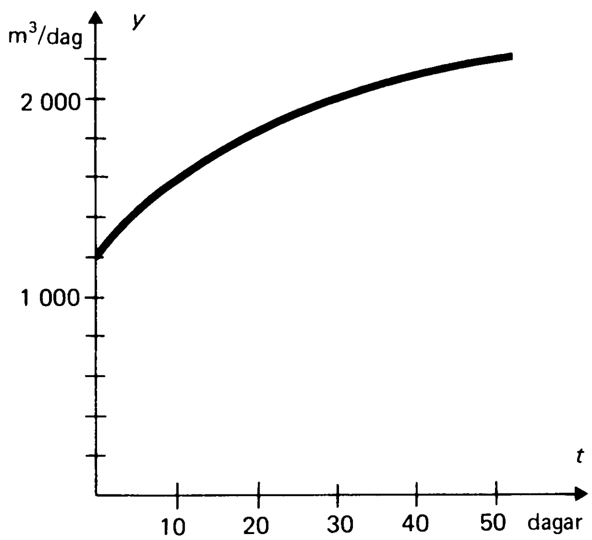
Det kan vara lämpligt att inleda med numeriska beräkningar av summor av produkter där den ena faktorn varierar. Dessa summor av produkter kan illustreras med exempelvis tabeller och areor.

t (s)	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
v (m/s)	5	6	7	8	9	10	11

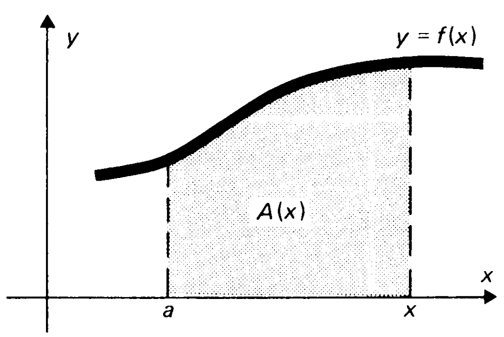
Tabellen visar en bils hastighet vid några tidpunkter. Gör en uppskattning av hur långt bilen har gått under de 3 första sekunderna.

Hur långt kör en bil under 5 sekunder om dess hastighet under detta tidsintervall kan beskrivas med formeln
a) $v = 5 + 2t$ b) $v = 5 + 2t - 0{,}2t^2$
där v är hastigheten i m/s vid tiden t sekunder efter intervallets början.

I en flod ökar vattenmängden på våren och i nedanstående figur visas hur y, som är antalet tusen kubikmeter vatten som per dag strömmar förbi ett visst mätställe, beror av tiden. Tiden t anger antalet dagar efter 1 april. Hur många kubikmeter vatten har strömmat förbi mellan den 1 april och 20 maj?



Försäljningen i ett nyöppnat varuhus ökar varje dag enligt formeln $y = 0{,}4t + 80$, där y anger dagskassan i tusentals kronor och t anger antalet dagar efter det varuhuset öppnat. Hur mycket säljer man sammanlagt under de första 100 dagarna?

MOMENT	KOMMENTARER	EXEMPEL
Integral-begreppet	Beteckningen $\int_a^b f(x)dx$ införs för dylika summor av produkter. Numeriska integralberäkningar.	Beräkna $\int_0^1 x^n dx$ för olika n-värden.
	Beräkning av integral med hjälp av area.	Beräkna, t ex genom att tolka integralen som en area: a) $\int_0^b x dx$ b) $\int_a^t 2dx$ c) $\int_1^t (3x+1)dx$
		En slalomåkares puls är 75 slag i minuten 2 minuter före ett åk. Sedan går den upp med konstant hastighet, så att den är ungefär 200 slag i minuten, när 30 sekunder av åket förflutit och även under resten av åket. Hur många slag slår slalomåkarens hjärta under ett åk som tar 2 minuter?
Primitiv funktion	Sambandet $A'(x) = f(x)$ troliggörs geometriskt. Likheten $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ härleds.  Endast områden i första kvadranten studeras.	Beräkna arean av området mellan $y = e^x$ koordinataxlarna och $x = 1$. Beräkna arean av området mellan $y = 2x+3$ och $y = x^2$
Tillämpningar		Antalet tusen kubikmeter vatten, som per dag strömmar fram i en flod, har under april visat sig kunna approximeras med uttrycket $1200 + 40t - 0{,}40t^2$ där t anger antalet dagar efter 1 april. Hur mycket vatten kan beräknas strömma förbi under maj månad om samma modell för vattnets strömning gäller? (t anger fortfarande antalet dagar efter 1 april).
		Sveriges valutareserv minskade under en 20-dagarsperiod med y Mkr om dagen, där $y = 5 - t + 0{,}1t^2$ och $t = 1, 2, 3, \ldots, 20$. Ge ett ungefärligt värde på den totala minskningen av valutareserven under dessa 20 dagar.

15 Fritt val bland följande alternativa områden (25)

Matriser och ekvationssystem

Linjär optimering

Numeriska metoder

Fördjupad sannolikhetslära

Behandling av stora datamängder t ex i samband med en statistisk undersökning

Annat lämpligt område

Läroplan för gymnasieskolan Lgy 70

II Supplement 93

UTBILDNINGSFÖRLAGET

ISBN 91-47-03102-6