

Skolöverstyrelsen

1985:14

L₈₂
VUX

KOMMENTARMATERIAL

GÖTEBORGS UNIVERSITETSBIBLIOTEK



100159 1379

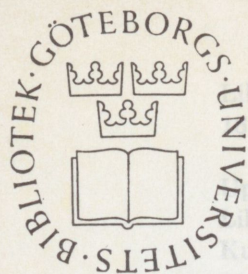
L₈₂
VUX

TILLHÖR REFERENSBIBLIOTEKET
UTLÅNAS EJ

Matematik
på gymnasieskolenivå

Läroplan
820





Biblioteket i Mölndal

KREE
Läroplaner
En. 2

Utbildningsförlaget
STOCKHOLM

Beställnings- och beställningsadress:

Liber Utbildningsförlaget
STOCKHOLM

08-39 96 00 (separatexemplar)

08-39 91 10 (abonnemang)



Redaktör Carola Stuart

**Teknisk
produktion** Hans Thorsell

Presslagd Augusti 1985

© Skolöverstyrelsen och Liber Utbildningsförlaget

ISBN 91-40-71274-5

ISSN 0282-8049

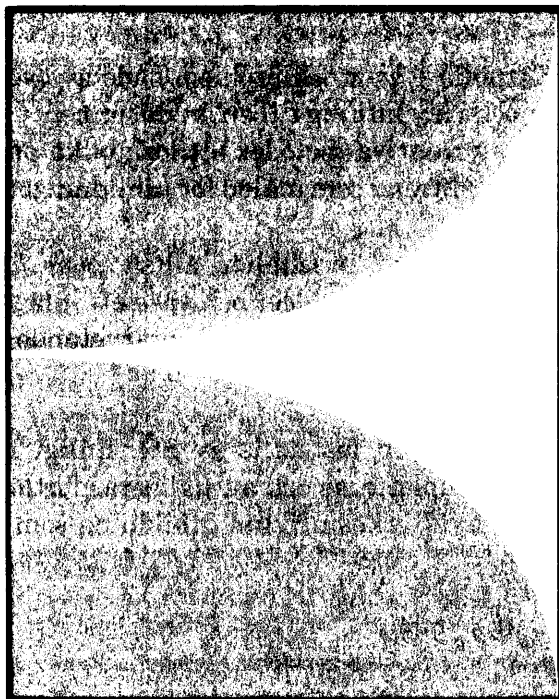
Schmidts Boktryckeri AB, Helsingborg 1985



Kommentarmaterial



*L*₈₂
LUX



Matematik på gymnasieskolenivå

Liber Utbildningsförlaget Stockholm

Förord

Läroplanen för komvux och SSV (statens skolor för vuxna) består av en allmän del och kommentarmaterial. Den allmänna delen innehåller mål och riktlinjer för verksamheten samt tim- och kursplaner. Syftet med kommentarmaterialen är att

- belysa aktuella frågor och problem både av övergripande karaktär och i anslutning till enskilda ämnen
- diskutera alternativa metoder att lösa olika problem och arbeta i den riktning som målen för utbildningen anger.

Kommentarmaterialen innehåller alltså *inga föreskrifter*. Avsikten är att de skall ge idéer och vara ett inlägg i diskussionerna vid bl a kursplanering och utarbetande av lokala arbetsplaner.

Kommentarmaterialen fastställs av SÖ. Enligt anvisningarna skall de kompletteras och aktualiseras fortlöpande. De skall omfatta såväl yrkesinriktad utbildning som allmänna ämnen.

Stockholm i juni 1985.

Skolöverstyrelsen

Innehåll

| | |
|---|----|
| Inledning | 6 |
| Kurserna i matematik | 6 |
| Några synpunkter kring kursstarten | 8 |
| Något om problemlösning | 13 |
| Grunddelen i matematik 2 | 14 |
| Grunddelen i matematik 3 | 18 |
| Grunddelen i matematik 4 | 21 |
| Fördjupningsdelen | 24 |
| Matematik 2 | 26 |
| Matematik 3 och 4 | 29 |

Inledning

Med tonvikt på etapp 1 diskuterar ett tidigare kommentarmaterial i matematik bl a inskolningsperioden, arbetet med fördjupningsdelen och utvärdering.¹ Det här kommentarmaterialet tar i viss mån upp samma frågor men med inriktning på komvux gymnasieskolekurser i matematik. Materialet är indelat i tre huvudavsnitt:

- Några synpunkter kring kursstarten
- Grunddelen i matematik 2, 3 och 4
- Fördjupningsdelen i matematik 2, 3 och 4.

Kommentarerna till grunddelen i de olika kurserna skall betraktas som tolkningar och preciseringar av huvudmomenten, gjorda på grundval av erfarenheter i undervisningen. För vissa huvudmoment har behovet av utförliga kommentarer bedömts vara större än för andra. Därför har huvudmomenten fått olika stort utrymme i diskussionen om grunddelen.

Avsnittet om fördjupningsdelen ger exempel på olika fördjupningsuppgifter med syftet att visa hur uppgifter kan väljas med skilda utgångspunkter, så att de anpassas till deltagarnas erfarenheter, behov och intressen.

Kurserna i matematik

Etappindelning

Komvux kurser i matematik är uppbyggda som en etappindelad ämneskurs.² Kurserna — etapperna — bygger på varandra och utgör delar i en sammanhängande studiegång.

1. SÖ:s publikation Läroplaner 1982:9.

2. Här avses enbart matematik som allmänt ämne.

Varje etapp utgör en självständig kurs som leder fram till en bestämd nivå och ger en viss kompetens. Kurserna är anpassade för vuxna men ger en behörighet som har sin motsvarighet i ungdomsskolans matematikkurser. Eftersom kurserna ingår i en sammanhängande studiegång förutsätter en högre etapp kunskaper och färdigheter motsvarande föregående etapp/etapper.

Av skissen nedan framgår hur kurserna är organiserade. Högsta antal undervisningstimmar (ut) anges för respektive kurs.

| | Komvuxkurser | Linje/stadium i ungdomsskolan |
|---------------------|---|----------------------------------|
| Gymnasienivå | matematik 4 100 ut | N, T |
| | matematik 3 115 ut | S, E, Te |
| | matematik 2 100 ut 20 delningstimmar ¹ | H, So, Ek |
| Grundskole- nivå | matematik 1 270 ut 20 delningstimmar ¹ | grundskolans högstadium |

Grunddel och fördjupningsdel

Kurserna indelas i grunddel och fördjupningsdel.

Grunddelen omfattar det stoff som behövs för fortsatta studier i kommande etapp. Innehållet i grunddelen anges i kursplanerna. Samtliga huvudmoment skall behandlas. Lärare och kursdeltagare måste dock göra ett urval av stoffet alltefter gruppens förutsättningar och bestämma hur mycket tid som skall ägnas åt varje moment. Nivån på undervisningen

1. Föreskrifter om delning återfinns i Lvux 82, Mål och riktlinjer.

anpassas så att alla kursdeltagare får möjlighet att inhämta de kunskaper och färdigheter som grunddelen omfattar. Möjligheterna till stödundervisning bör utnyttjas för kursdeltagare som har svårigheter att följa undervisningen, t ex på grund av sjukdomsfrånvaro eller luckor i förkunskaperna.

Inom fördjupningsdelen väljer kursdeltagarna i samråd med läraren olika arbetsuppgifter utifrån egna erfarenheter, behov och intressen. Detta innebär att kursdeltagarna prioriterar vissa delar av kursen på bekostnad av andra. Härigenom får de möjligheter att bearbeta några kursavsnitt grundligare och att tillämpa inlärd färdigheter. Arbetet i fördjupningsdelen ger också deltagarna tillfälle att ta större ansvar för delar av kursen och att pröva mera tidskrävande arbetsmetoder.

Några synpunkter kring kursstarten¹

Kursdeltagarna

När vuxna börjar läsa matematik har de i allmänhet mycket skiftande förväntningar på såväl kursinnehåll som arbetsformer. Detta gäller i synnerhet kursdeltagare i matematik 2, där "ytterlighetsfallen" med en viss generalisering kan beskrivas så här. Somliga deltagare vill studera vardagsmatematik i ett långsamt tempo. Andra önskar sig en "effektiv" undervisning utan onödig tidsspillan på avsnitt som de finner lätta. I den senare gruppen återfinns ofta kursdeltagare som planerar att läsa flera etapper i matematik eller ämnen som bygger på matematik.

1. Den diskussion som förs i det här avsnittet utvecklas ytterligare i SÖ:s kommentarmaterial "Introduktionen till komvux", SÖ:s publikation Läroplaner 1985:13.

Kursdeltagarnas förväntningar har ofta ett samband med deras förkunskaper. Särskilt till kurser i matematik 2 kommer deltagare med mycket varierande bakgrund. I samma grupp kan det finnas studerande som gått igenom matematik 1, årskurs 9 allmän eller särskild kurs, realskola, gymnasieskola eller någon utländsk utbildning. Kursdeltagarna är också mycket olika vad gäller studievana. Det behöver dock inte vara så att de som läst matematik för länge sedan och kanske är ovana vid vissa moment och arbetsformer har de största svårigheterna.

I samtliga etapper kan det förekomma att en del studerande känner anonymitet och saknar självförtroende vid kursstarten. Detta beror bl a på att grupperna är stora och att deltagarna har olika intresseinriktning. Dessutom innebär varje kursstart att en ny grupp skapas där deltagarna i många fall varken känner varandra eller läraren sedan tidigare.

Sammanfattningsvis kan man beskriva en inte alltför ovanlig situation vid kursstarten så här:

- Kursdeltagarnas förväntningar på undervisningen är mycket olika.
- Gruppen är mycket heterogen vad gäller förkunskaper och studievana.
- Gruppen är stor vilket kan skapa en känsla av anonymitet och bristande självförtroende hos en del studerande.

Vad kan man då göra för att påverka situationen så att den inte leder till studiemisslyckanden och kursavbrott? Fortsättningsvis ges några synpunkter på åtgärder med syftet att skapa en undervisningssituation som bidrar till att öka deltagarnas möjligheter att klara sina studier i matematik.

Organisation av kurserna

En kurs, där undervisningstimmar är fördelade över en längre period, kan passa vissa kursdeltagare bättre än en mer komprimerad kurs. Om förhållandena på en komvux-enhet så medger kan det därför vara en fördel om en kurs kan anordnas med varierande studietid.

Stora grupper är vanliga i matematik. Speciellt gäller detta etapp 2. Det schema som görs före kursstarten måste utformas så att det finns utrymme att ta ut delningstimmar, om och när det blir nödvändigt. Hur delningstimmarna disponeras bestäms i samråd mellan deltagare och lärare under kursens gång.

Att välja rätt kurs

En väl genomförd studierådgivning är ett sätt att förhindra studiemisslyckanden. I god tid före kursstarten bör de blivande kursdeltagarna få möjlighet till vägledningssamtal angående hela sin studiesituation, bl a lämpliga utbildningsvägar, ledighet för studier och studieekonomiska frågor. Vägledningssamtalen skall utmynna i en realistisk studieplanering för den enskilde deltagaren. Dit hör att en deltagare börjar på rätt studienivå, i det här fallet i matematik.

För att "komma till lämplig etapp" måste kursdeltagaren kunna bilda sig en uppfattning om innehållet i de olika matematikkurserna, dvs få en möjlighet att stämma av sina egna förväntningar mot de krav kursen ställer. I detta sammanhang har den personal på skolan som deltagaren möter före första lektionen en viktig uppgift. För att ge deltagarna underlag för en bedömning av vad som är rätt nivå kan det vara lämpligt att lärarna i matematik utformar någon form av kursbeskrivning och anger krav på förkunskaper.

En del skolor har utarbetat diagnostiska test för att ge kursdeltagarna hjälp att bedöma sin kunskaps- och färdighetsnivå före kursstarten. I anslutning till testen är det viktigt att man klargör för kursdeltagarna att diagnostiska prov endast är ett hjälpmedel för inplacering på lämplig nivå. Eventuella test bör alltid kompletteras med personlig vägledning. Ett dåligt testresultat behöver inte betyda att en kursdeltagare får svårigheter att följa undervisningen i kursen.

Om man vid vägledningssamtalen finner att en kursdeltagare behöver komplettera sina förkunskaper för att kunna börja en viss kurs kan detta ordnas på olika sätt.

- Kursdeltagaren får anvisning på lämpligt studiematerial att arbeta med på egen hand.
- På vissa skolor kanske man hittar en lämplig nivå för deltagarna i en pågående lägre etapp.
- Ibland kan stödundervisning före eller i samband med kursstarten ge en kursdeltagare möjlighet att bättra på sina förkunskaper.

Vid vägledningssamtalen kan det också visa sig att en kursdeltagare har förkunskaper som täcker stora delar av den kurs han tänkt sig att gå. I sådana fall bör kursdeltagaren beredas möjligheter till inhopp i en redan pågående kurs.

Inskolningsperioden

Enligt Lvux 82 bör alla kurser börja med en kortare inskolningsperiod. Inskolningsperiodens utformning kan variera, framför allt beroende på kursens längd, vilken etapp det är, antalet kursdeltagare i gruppen och deras förutsättningar och behov. Varje skola måste arbeta fram en modell som passar den egna verksamheten. I det följande ges en del exempel på vad som kan tas upp under inskolningsperioden.

Man kan skilja mellan en social del och en ämnesspecifik del i inskolningen, även om det i praktiken inte finns några fasta gränser mellan dem. Den sociala delen syftar till att deltagarna skall lära känna varandra och läraren. Ett sätt att uppnå detta är att deltagarna gör intervjuer med varandra i smågrupper. Intervjuerna kan exempelvis beröra

- tidigare erfarenheter av matematik
- förväntningar på kursens innehåll
- kursdeltagarnas personliga mål för studierna.

Intervjuerna är värdefulla för både lärare och kursdeltagare. Deltagarna finner kanske att de både har liknande erfarenheter av studier och samma förväntningar på den nya kursen. Dessutom kan de upptäcka att de faktiskt redan har en del kunskaper i matematik. Även läraren bör berätta något om sin bakgrund och sitt arbete som lärare.

Under den ämnesinriktade delen av inskolningen måste läraren bli göra en bedömning av kursdeltagarnas förkunskaper. Syftet med en sådan bedömning är i första hand

- att klarlägga om en kursdeltagare "kommit till rätt kurs"
- att få underlag för en anpassning av undervisningen efter kursdeltagarnas behov
- att kartlägga om några kursdeltagare har behov av stöd-undervisning eller annan hjälp.

Till ämnesdelen av inskolningen hör vidare att kursdeltagaren får information om den aktuella kursen, dvs dess timtal, innehåll och målsättning, hur den förhåller sig till andra matematikkurser på gymnasienivå och närgränsande ämnen, möjligheterna till delningstimmar och stödundervisning. Bedömning och betygsättning är ett par andra punkter som också bör diskuteras liksom uppdelningen av kursen i grunddel och fördjupningsdel.

De nya kursplanerna i Lvux 82 ger större utrymme åt deltagarnas självverksamhet än tidigare läroplaner. Enligt läroplanen skall dessutom arbetsformerna i en komvuxkurs varieras. Ett viktigt syfte med inskolningsperioden är att den skall ge deltagarna reella förutsättningar att påverka undervisningen. Under inskolningsperioden bör deltagarna därför få tid och möjlighet att

- diskutera vad kunskap i ämnet är
- tillämpa olika arbetsformer
- pröva olika redovisningsformer
- använda olika sorters material.

Det är lärarens uppgift att under inskolningen se till att deltagarna får pröva olika arbetssätt och ge alternativ, så att deltagarna successivt får möjlighet att ta större ansvar för studieplanering, val av arbetsformer, val av material och redovisningsformer.

Något om problemlösning

En diskussion om kunskap bör bygga på den kunskapssyn som uttrycks i läroplanens mål och riktlinjer. I ett ämne som matematik bör man också på ett tidigt stadium diskutera problemlösningens metodik och syfte.

Det torde vara lärarens viktigaste roll i matematikundervisningen att ge kursdeltagaren förmåga till problemanalys, färdighet att strukturera och lösa matematiska problem samt att själv kunna utforma matematiska frågeställningar. Många kursdeltagare nöjer sig ofta med ett svar som är riktigt enligt facit och går vidare utan att fundera på vad de lärt sig. Läraren bör ofta "tala matematik", exempelvis diskutera tankegången när man angriper ett problem.

Kursdeltagarna bör vänja sig vid att läsa matematisk text och att göra klara och följdriktiga uppställningar. Ett viktigt moment är att de studerande lär sig att tänka igenom en lösning på ett problem innan de börjar räkna. Det blir annars lätt så att de ödslar tid på meningslöst manipulerande med siffror.

Vid arbetet med problemlösning bör läraren sträva efter att låta deltagaren komma vidare på egen hand, något som förutsätter en konstruktiv dialog mellan lärare och kursdeltagare.

Läraren kan ofta med liten hjälp, t ex genom att visa på andra infallsvinklar, öppna vägar för kursdeltagaren att hitta fram till en lösning. Inläringen blir på detta sätt mer aktiv för kursdeltagaren än en presentation av en färdig lösning.

Om en kursdeltagare kör fast bör man råda honom eller henne att försöka beskriva sitt tillvägagångssätt. En stegvis analys av hur problemet angripits, vilka slutsatser som drags, vilka lösningsstrukturer som valts etc kan ofta medföra att kursdeltagaren själv kommer underfund med hur man kan nå en riktig lösning.

Genom en övergång till enklare problemtyper kan kursdeltagarna träna upp sin förmåga att angripa och lösa problem för att senare återvända till de frågeställningar de tidigare kört fast på.

Grunddelen i matematik 2

Allmänna kommentarer

Kursen i matematik 2 är obligatorisk för avgångsbetyg 2 inom komvux, såväl från yrkesinriktad sektor som de teoretiska sektorerna.

Många av de moment som ingår i grunddelen i etapp 2 ingår också i etapp 1. Kraven på säkerhet i hanteringen av olika problemtyper inom dessa moment bör dock ställas högre på den senare etappen.

Matematik 2 är inte identisk med gymnasieskolans kurser på tvåårig ekonomisk och social linje. Bland huvudmomenten ingår inte sannolikhetslära, exponentialfunktioner och logaritmer, moment som traditionellt tagits upp på motsvarande nivå. Sannolikhetslära torde utifrån den enskilde deltagarens intresse och behov ge rika möjligheter till studier inom fördjupningsdelen. Avsnitten exponentialfunktioner och logaritmer återfinns i matematik 3. Momentet trigonometri har tillkommit i matematik 2 för att möjliggöra en god studieuppläggning för deltagare med naturvetenskaplig eller teknisk inriktning.

I det följande ges helt kortfattat några kommentarer till en del av huvudmomenten i kursplanen.

Numerisk räkning

På etapp 2 varierar deltagarnas säkerhet i räkning med de

fyra räknesätten. Många behöver förstärka sina färdigheter. En repetition i form av en översikt kan därvid vara en utgångspunkt.

Miniräknare är ett naturligt hjälpmedel inom alla huvudmoment men huvudräkning, räkning med papper och penna samt överslagsräkning bör ändå ägnas systematisk övning. Deltagarna skall vänja sig vid att tänka efter om ett resultat förefaller rimligt och nödvändigheten av ständiga kontroller genom överslagsberäkning bör betonas. Problem som omfattar flera tankesteg och som kombinerar flera i sig enkla deluppgifter bör komplettera färdighetsträningen inom varje delmoment.

Negativa tal behandlas i anslutning till praktiska situationer, t ex temperaturmätning och befolkningsstatistik. Färdighetsträning med parentes- och teckenregler bör endast omfatta enklare problemtyper.

Potens- och rotlagarna kan deltagarna med fördel själva upptäcka genom kreativa övningar med hjälp av miniräknare.

Procent och promille

Beräkningar med procent ingår i matematik 1. Det betyder att de flesta deltagarna endast behöver befästa sina kunskaper. Avsnittet är dock viktigt och om så behövs måste det få ta relativt lång tid även i matematik 2.

Till momentet hör uppgifter som innehåller flera procentuella förändringar efter varandra, t ex problem med ränta på ränta. Innan deltagarna möter denna typ av problem bör man ha behandlat beräkningar av procentuella andelar med hjälp av procentsatser i decimalform. En sådan arbetsgång underlättar väsentligt arbetet med tillväxtfaktorer. I anslutning till procentuell tillväxt kan lämpligen geometriska talföljder behandlas.

Geometri

Enligt den nya kursplanen skall vardagslivet vara utgångspunkten för geometrin och därigenom blir det också naturligt att använda ett undersökande, problemorienterat arbetssätt.

Geometriundervisningen bör ha en mycket praktisk och konkret inriktning men den skall också lägga en grund för en mera formaliserad geometri. Detta kräver stor urskiljning och hänsynstagande till deltagarnas intressen och behov. Endast vissa deltagare behöver fördjupade kunskaper om den formaliserade geometrin och deras behov bör främst tillgodoses genom individuella val inom fördjupningsdelen.

Algebra och funktionslära

Huvudmomenten algebra och funktionslära har grundläggande betydelse inom områden där matematiken används som verktyg. Detta gäller framför allt vid begreppsbyggnad, problemlösning och beskrivningar av olika fenomen.

Funktionsbegreppet introduceras genom verklighetsanknytta exempel. Tyngdpunkten skall ligga på funktionsbegreppet som ett uttryck för hur olika storheter hänger ihop.

Det är av vikt att deltagarna lär sig beskriva en funktion på olika sätt: i form av en värdetabell som ett direkt resultat av ett experiment, i form av en grafisk bild i ett koordinatsystem eller i en formel (algebraisk form). Deltagarna skall också lära sig tolka enkla funktioner, avbildade i ett koordinatsystem. Speciell uppmärksamhet bör ägnas åt beräkning av funktionsvärden genom att sätta in dem i formler, knutna till vardagslivet.

Svårighetsgraderingen av uppgifterna vid ekvationslösning kräver stor omsorg. Det är inte bara olika svårigheter med förenklingen av de uttryck som ingår i ekvationerna som behöver uppmärksammas utan också det talområde som lösningen tillhör.

Linjära ekvationssystem och enkla andragradsekvationer

bör kursdeltagarna komma i kontakt med genom problemlösning.

Med dator kan man med enkla program visa hur algebra och funktionslära utnyttjas vid programmering samt hur datorn kan användas vid exempelvis beräkning av funktionsvärden, sammanställningar i värdetabeller och konstruktion av grafer.

Beskrivande statistik

Som framgår av kursplanen skall deltagarna inom momentet beskrivande statistik i första hand lära sig tolka och värdera den information som vi får genom massmedia. Alltför många människor kan inte förstå och ta tillvara den mängd information som man ständigt möter i form av tabeller och diagram.

Diskussion om förutsättningar och mätdatas kvalitet samt tolkning av erhållna resultat bör få en framträdande plats. Exempel kan med fördel hämtas från samhällsvetenskapliga och ekonomiska områden. I samverkan med andra ämnen kan deltagarna bygga upp sin förmåga till kritisk granskning av statistiska material och på dessa baserade slutsatser. Definitionsproblem, mätproblem, tveksamma urvalsmetoder, förväxling av orsak och verkan kan exemplifieras i detta sammanhang. Här krävs det dock en viss balans i undervisningen så att även ett positivt synsätt på statistikens roll i samhället förmedlas.

Lägesmått och spridningsmått, bl a. standardavvikelse, bör ses som naturliga komplement till tabeller och diagram för tolkning och värdering av information och bör behandlas utifrån ett empiriskt synsätt.

Datalära

Med hjälp av datorer och miniräknare kan man tillföra undervisningen nytt intressant stoff direkt från vardagslivet. Datorer och miniräknare kan även användas som verktyg i

en undervisning som utmanar kursdeltagarnas kreativitet, exempelvis i enkla programmeringsövningar.

Deltagarna bör tidigt få en orientering om datorernas roll på gott och ont i ett föränderligt samhälle. Om möjligt ges en utförligare inblick vad gäller datorernas roll i samhället i samarbete med samhällskunskap. Undervisningen bör till största delen bygga på befintliga program så att kursdeltagarna inte behöver ägna onödigt lång tid åt egna programmeringsövningar.

Trigonometri

Sinus-, cosinus- och tangensbegreppen bör i första hand definieras och behandlas med hjälp av beräkningar i rätvinkliga trianglar. Avsnittet kan med fördel konkretiseras med praktiska övningar och mätningar. Vid numeriska beräkningar är miniräknare att föredra framför räknetabletter.

Grunddelen i matematik 3

Allmänna kommentarer

Matematik 3 är inte identisk med gymnasieskolans kurser på linjerna Te, S och E. Huvudmoment som vanligen funnits på denna nivå är statistik och inledande trigonometri men dessa får anses behandlade i matematik 2. Vissa delar av statistiken som standardavvikelse och normalfördelning kan för många kursdeltagare vara naturliga val inom fördjupningsdelen.

Även på etapp 3 kan många kursdeltagare känna sig osäkra inför studierna. Kursen bör därför regelbundet rymma inslag som gör att deltagarna får uppleva känslan av att lyckas och av att matematik kan vara roligt och spännande. Inom varje moment bör deltagarna ges möjlighet att bli säkra både vad gäller räknefärdighet och att lösa tillämpningsuppgifter.

Polynomfunktioner

Funktionsbegreppet introduceras liksom begreppen definitionsmängd och värdemängd. Kursdeltagarna bör vidare få tillfälle att beräkna värdetabeller och öva inprickning av funktionens grafer.

Ekonomiska tillämpningar som utbudsfunktion, efterfrågefunktion och intäkt kan förslagsvis användas som illustration till det allmänna funktionsbegreppet.

Riktningkoefficient definieras och beräknas för en rät linje genom två givna punkter.

Förenklingar och uppdelningar i faktorer görs med hjälp av algebraiska regler.

Som tillämpning på andragradsekvationer kan exempelvis Pythagoras sats användas. Olika talområden som rationella tal och reella tal behandlas t ex i samband med lösning av andragradsekvationer. Även komplexa tal kan nämnas.

Derivata

Deltagarna kan göra upp tabeller för gränsvärden med miniräknare. Med dessa som grund kan gränsvärdebegreppet behandlas och exemplifieras.

Derivatabegreppet belyses geometriskt och definieras. Även praktiska tillämpningar bör förekomma. Efter övning i beräkning av derivatan direkt ur definitionen härleds derivationsreglerna. Undervisningen skall inte enbart ge formella bevis. Deltagarna skall också få möjlighet att tänka sig in i matematiska frågeställningar. Vad skall bevisas och hur skall det bevisas? Införandet av allmänna begreppsbyggnader bör ske först sedan de motiverats med konkreta exempel.

Funktioner studeras med hjälp av förstaderivata. Extremvärden bestäms. De tillämpningsproblem som behandlas bör vara enkla och oftast utgöra direkta tillämpningar av genomgången stoff.

Exponential- och logaritmfunktioner

Momentet bör omfatta en presentation av räknelagarna, bevis för någon lag, ritning av grafer till funktionerna $y=a^x$ och $y=10^{kx}$, förklaring av talet e och logaritmfunktionerna $\lg x$ och $\ln x$.

Som komplement till algebraisk lösning kan ekvationer med obekant exponent lösas med hjälp av tex miniräknare och värdetabell samt kurvritning.

Tillämpningsuppgifterna bör innehålla exponentiella förändringar där tillväxtfaktorn eller exponenten är obekant.

Integraler

Vid introduktion av integral som gränsvärde för en summa kan man lämpligen anknyta till areaberäkning. Därvid kan också sambandet mellan primitiv funktion och integral belysas. Tillämpningsövningarna kan exempelvis omfatta beräkning av areor.

Huvudvikten i avsnittet bör inriktas på begreppet integral och dess anknytning till olika tillämpningar och mindre på hur man beräknar integraler med hjälp av primitiva funktioner.

Numeriska metoder och programmering

Till följd av den ökade användningen av miniräknare och datorer har numeriska metoder fått allt större betydelse. Metoder för iteration, stegning och simulering kan med hjälp av datorer och programmerbara miniräknare utnyttjas för problemlösning.

Med utgångspunkt i numeriska exempel visas att de absoluta felen adderas vid addition och subtraktion av närmevärden och att de relativa felen approximativt adderas vid multiplikation och division. Som jämförelse beräknas det största och minsta tänkbara värdet på den undersökta storheten. Mo-

mentet kan förberedas med en lämplig laboration där begrepp som mätnoggrannhet, tillfälliga fel och systematiska fel diskuteras.

Numeriska metoder att lösa ekvationer, minsta kvadratmetoden vid linjär interpolation, numerisk beräkning av integraler och anpassning av polynom till givna koordinater bör gås igenom. Nollställena till enkla funktioner tas fram i enlighet med Newton-Raphsons metod.

Genom tidigare studier i matematik 1 och 2 eller motsvarande bör deltagarna ha uppnått en viss färdighet i att använda datorer. Man kan nu gå vidare och med utgångspunkt från en tillämpningsuppgift skriva ett program för lösning. Det finns mängder av matematiska problem som kan lösas på detta sätt, t ex bearbetning och presentation av statistik, komplicerade formelberäkningar, integrallösning med hjälp av närmevärdesmetoder. Själva kodningsmomenten i programmeringen får inte överdrivas då formulering och strukturering är väsentligare. För att inte riskera att matematikundervisningen övergår till rena programmeringsövningar bör många av problemen lösas med hjälp av standardprogram.

Grunddelen i matematik 4

Allmänna kommentarer

Huvudmoment som traditionellt funnits på "etapp 4-nivå" är komplexa tal, differentialekvationer och sannolikhetslära. Dessa moment ingår inte i grunddelen i matematik 4 men de bör ge goda möjligheter till uppgifter inom kursens fördjupningsdel. Särskilt viktigt är det att de deltagare som ämnar studera tekniska ämnen får sina krav på kunskaper och färdigheter vad gäller exempelvis differentialekvationer tillgodosedda. För deltagare som avser att studera ellära kan komplexa tal vara ett lämpligt val inom fördjupningsdelen.

Endast ett fåtal av deltagarna kommer senare att ägna sig åt matematik som vetenskap. För de flesta kommer matematiken att vara ett instrument som är nödvändigt för fortsatta studier eller yrkesverksamhet. Undervisningen bör utformas med utgångspunkt i kursdeltagarnas olika behov och karaktäriseras av ett aktivt samarbete mellan lärare och deltagare.

Trigonometri

Momentet innebär en utvidgning av kunskapsstoffet i matematik 2. Utifrån enhetscirkeln definieras de trigonometriska funktionerna för alla vinklar. Vinkelmåttet radian införs. Sinus- och cosinussatserna samt formlerna för dubbla vinkeln behandlas. Problem som kräver två eller flera steg vid lösningen bör förekomma liksom problem som leder till två möjliga lösningar. Enkla trigonometriska ekvationer typ $3 \cos 4x + 5/3 = 0$ löses algebraiskt och grafiskt. Derivering av de trigonometriska funktionerna kan göras i anslutning till areaberäkning för funktioner av typen $f(x) = A \sin(kx + \varphi)$.

Vektorer

För många deltagare kan momentet inskränkas till vektorer som riktade sträckor i planet. Addition, subtraktion och multiplikation med reella tal definieras. Koordinatframställning av vektorer behandlas och tillämpningar ges. Momentet bör vidare omfatta längd av vektorer, uppdelning i komponenter, skalärprodukt och definition av absolutbelopp samt vinkeln mellan två räta linjer.

Area- och volymeräkningar

Snittformeln införs diskussionsvis och med dess hjälp visas formler för rotationskroppens volym för cylinder, klot och kon. Vidare behandlas uttryck för volym för rotationskroppar som alstrats genom rotation av kurva kring x-axeln i ett koordinatsystem samt arean av några krökta ytor som rak cirkulär cylinder, kon och klot.

Elementär geometri

Geometrin är ett område, inom vilket det är lämpligt att låta kursdeltagaren öva bevisföring, muntlig framställning och problemlösning i flera steg.

Axiomsystem som förutsättning för logisk bevisföring diskuteras i samband med genomgång av kongruensbegrepp och bevis av satser om exempelvis likbenta och liksidiga trianglar. Deltagarna bör kunna ge ett bevis för Pythagoras sats. Inom likformighetsläran behandlas satser som topptriangelnsatsen och transversalsatsen.

Konstruktion av exempelvis mittpunktsnormal, bisektris, omskriven och inskriven cirkel till triangel bör utföras med passare och ogradrad linjal.

Avståndsformeln i koordinatsystemet liksom max- och minproblem är goda tillämpningar av tidigare behandlat stoff.

Funktionslära

Deriveringsreglerna tas upp till förnyad diskussion, vilket kan innebära att man bevisar satser som tillämpats i matematik 3, exempelvis derivatan av en summa. Derivatan av produkt och kvot tillkommer. Resonemanget kring sammansatt funktion fördjupas.

Momentet bör bidra till att koppla samman tidigare behandlade delar av funktionsläran för att på så sätt ge ökad förståelse för centrala begrepp. Att derivatan är lika med noll i extrempunkter kan visas genom indirekt bevis. Andraderivatans tecken vid lokala maximi- och minimipunkter kan tas upp i samband med tillämpningsuppgifter. Konstruktion av rationella funktioner med angivande av asymptoter och extrempunkter kan behandlas som tillämpning av tidigare genomgångna moment.

Fördjupningsdelen

Inriktning

Inom fördjupningsdelen väljer kursdeltagarna arbetsuppgifter utifrån egna erfarenheter, behov och intressen. Härigenom får de möjligheter att grundligare bearbeta något eller några områden i matematiken och att vidareutveckla inlärd färdigheter. Det fria valet i fördjupningsdelen ger också kursdeltagarna tillfälle att ta större ansvar för sina studier och att pröva mer tidskrävande arbetsformer.

Fördjupningsuppgifterna kan anknytas till moment i grunddelen i den aktuella kursen eller till moment från någon annan etapp. De kan även anknytas till moment som inte ingår i kursplanerna men som ändå kan vara angelägna för kursdeltagarna. Någon prioritering av olika fördjupningsuppgifter bör inte göras av läraren men en diskussion om vilka som är lämpligast med tanke på fortsatta studier är värdefull.

Arbetsformer

I matematikkurserna övas färdigheter med tillämpningar inom de mest skilda områden. Kursdeltagarna bör stimuleras att som en del av fördjupningen själva formulera och söka lösningar på problem inom något område som de är intresserade av. Arbetet kan också utformas kring ett gemensamt tema där olika aspekter på ett problemområde behandlas.

Oavsett om fördjupningsuppgifterna utförs enskilt eller i grupp bör kursdeltagarna göra upp en planering av arbetet tillsammans med läraren. Bl a bör läraren hjälpa till att bedöma om ett arbete är genomförbart och kan klaras av inom den tid som står till förfogande.

Fördjupningsdelen kan innebära att kursdeltagarna arbetar med en uppgift som sträcker sig över hela kurstiden eller

med flera mindre uppgifter som planeras efter hand. Arbetet får inte utformas så att kursdeltagare som läser flera ämnen får en alltför omfattande arbetsbörda. Lärarna i de olika ämnena bör samverka i planeringen så att inte fördjupningsarbetet koncentreras till vissa perioder utan får en jämn fördelning över terminen.

Redovisning

Uppgiftens karaktär får avgöra vilken form redovisningen skall ha. I vissa fall kan en redovisning inför klassen vara motiverad, men i flertalet fall kan redovisningen med fördel ske vid en kortare genomgång med läraren. Redovisningarna bör av tidsskäl göras översiktliga och kombineras med en utvärdering där kursdeltagarna själva bedömer i vilken mån de uppnått de avsedda målen. Lärarens bedömning, som utgör underlag för betygsättningen, sker till en del i samband med redovisningen men framför allt genom att läraren följer kursdeltagarnas arbete med fördjupningsdelen.

Matematik 2

Alla kursdeltagare behöver en kärna av kunskaper i matematik som är gemensam. Grundläggande kunskaper och färdigheter i aritmetik, procenträkning, geometri och statistik är centrala mål för etapp 2. Sådana grundläggande kunskaper och färdigheter tränas inte enbart inom grunddelen utan även inom fördjupningsdelen. Det bör också betonas att det inte enbart är "automatiserade färdigheter" som fordras vid lösning av ett problem utan kunskap om hela områden som kursdeltagaren möter i vardagslivet. Exempel på sådana områden är banken, posten, affären eller hemmet med dagstidningar och radio/TV. Begrepp som kan tas upp inom dessa områden är t ex ränta, amortering, check, växel, rabatt och kredit.

I matematik 2 är förmodligen flera av kursdeltagarna ovana vid självständiga arbetsformer och behöver därför en introduktion till arbetet med fördjupningsdelen. Ett sätt kan vara att man under inskolningsperioden delar in kursdeltagarna i grupper, som under lektionstid får arbeta självständigt med några enklare arbetsuppgifter. Nedanstående exempel visar hur sådana uppgifter kan utformas.

- Underlag:* En tidningsannons med jämförpriser.
Uppgift: Formulera med utgångspunkt från annonsen med jämförpriser några olika typer av problem.
- Underlag:* En tidningsartikel med följande uppgifter: timlönen ökade med 5 % eller 2 kronor från 40 kronor till 42 kronor.
Uppgift: I tidningsartikeln ges fyra olika faktauppgifter. Formulera så många olika problem som möjligt där endast två av dessa uppgifter ges och de övriga efterfrågas.
- Underlag:* Bild med ett stympat stapeldiagram.
Uppgift: Granska diagrammet i figuren. På vilket sätt är det vilseledande?

För det fortsatta arbetet med fördjupningen kan man välja mer omfattande uppgifter som ställer krav på inhämtande av fakta. Här följer några förslag.

- Hur beräknas in- respektive utlåningsräntan i X-banken?

- Hur är konsumentprisindex konstruerat och hur fastställs det?
- Vad blir den effektiva räntan vid köp med kontokort Y?
- Hur beräknas inkomstskatten?
- Hur mycket får jag i studiemedel?
- Vilseledande statistik! Granskning av statistiska uppgifter och diagram i dagstidningar.
- Att köpa en bostadsrätt — lönar det sig?
- Vad kostar det att hyra en bil hos Z-firman?
- Hur bestämde antikens astronomer avstånden i rymden?
- Hur fastställs månadshyran för din lägenhet? Gör en kontroll!
- Hur stor är Sveriges area?
- Hur stor volym har cylindern? Jämförelse mellan beräkning med formel och användning av Arkimedes princip.

Flertalet kursdeltagare avslutar sina matematikstudier vid komvux med etapp 2. För dessa kursdeltagare är ett av de viktigaste målen att stärka sina kunskaper och färdigheter i vardagens matematik, framför allt inom momenten procent, statistik och tillämpad geometri.

En annan grupp är de kursdeltagare som avser att läsa etapp 3 och som därför vill stifta bekantskap med något moment från denna etapp eller förbättra sina färdigheter inom något moment som är viktigt för fortsatta studier i matematik.

Geometrin innehåller flera moment som lämpar sig för såväl praktiskt som teoretiskt inriktade fördjupningsuppgifter. Bl a kan kursdeltagarna arbeta med

- konstruktioner med passare och linjal, t ex konstruktion av en bisektris, en normal till en linje, en liksidig triangel och en sträckas mittpunkt
- avståndsbestämning genom parallaxmetoden
- mätningar för bestämning av kroppars area, volym och densitet och i samband härmed feluppskattningar.

Färdighetsträningen inom algebrans olika delmoment måste differentieras med hänsyn till kursdeltagarnas fortsatta verksamhet. För de kursdeltagare som har matematik 3 och 4 som mål är det viktigt med högt ställda krav på färdighet inom detta område. Det är därför naturligt om dessa kursdeltagare väljer färdighetsträning inom algebran som en del av sin fördjupning, exempelvis ekvationslösning, formler och funktionslära.

Ekvationslösning Ekvationer med x i nämnaren, ekvationer med rationella uttryck och ekvationer med parenteser.

Formler Förenklingar och beräkningar av ett uttrycks värde, enkla härledningar av formler, att lösa ut variabel ur en formel.

Funktionslära Algebraisk bestämning av riktningskoefficient, enpunktsformeln, grafisk framställning av några icke linjära funktioner.

Som fördjupningsuppgifter kan också väljas moment som inte ingår i grunddelen i någon etapp, men som ger träning i matematiskt tänkande, förslagsvis uppgifter av följande typ:

- fibonacciserien och andra serier
- talet π i historiskt perspektiv
- binära talsystemet och andra talsystem
- primtal — egenskaper och egenheter.

Matematik 3 och 4

Vad gäller matematik 3 och 4 torde flertalet kursdeltagare ha en viss vana vid att arbeta med fördjupningsuppgifter och kunna göra egna val efter sina behov och intressen.

Ett rikt urval fördjupningsuppgifter erbjuds i de fall man har möjlighet till integration mellan matematik och något annat ämne, t ex företagsekonomi, samhällskunskap eller fysik. En fördel med ämnessamverkan är också att projekten kan ges en vidare tidsram genom att båda ämnenas undervisningstid kan utnyttjas.

Kursdeltagare med ekonomisk eller samhällsvetenskaplig inriktning kan välja fördjupningsuppgifter med anknytning till dessa ämnesområden. Som exempel kan nämnas:

| | |
|-------------------------|---|
| Statistisk undersökning | Bearbetning av insamlat material eller material hämtat från t ex statistisk årsbok eller annat material från SCB. |
| Sannolikhetslära | Normalfördelning, simuleringar med dator, felmarginal vid statistiska undersökningar m m. |
| Talföljder och serier | Tillämpningar på ränteberäkningsuppgifter. |

Kursdeltagare på etapp 3 med inriktning mot teknisk eller matematisk utbildning önskar ofta en förstärkt färdighetsutbildning inom funktionsläran. Uppgifterna kan sålunda utformas så att kursdeltagarna uppnår säkerhet med avseende på bl a

- grafisk framställning och tolkning av de vanligaste funktionstyperna som andragsgradsfunktionen, exponential- och logaritmfunktionerna och de trigonometriska funktionerna (en dator med program för grafitning av funktioner kan vara ett hjälpmedel)
- derivering och integrering av de vanligaste funktionstyperna
- proportionalitet och omvänd proportionalitet med tillämpningar från t ex fysiken.

På etapp 4 gäller som allmän regel att stor hänsyn måste tas till kursdeltagarnas studiemål. För kursdeltagare med teknisk inriktning kan det finnas moment som krävs för studier i vissa kurser men som inte ingår i kursplanerna i matematik. Dessa moment kan utgöra naturliga val inom kursens fördjupningsdel. Det gäller främst

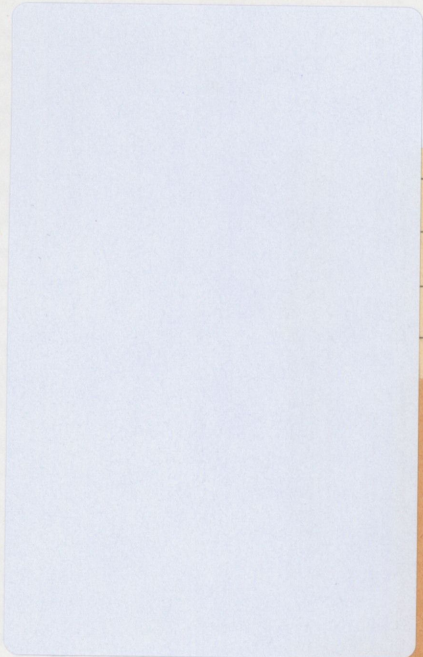
- komplexa tal — momentet krävs till en del för ellära etapp 3
- differentialfunktioner — momentet krävs till en del för reglerteknik E1 respektive Ma.

Valet av fördjupning behöver dock inte styras av behov i andra ämnen eller av krav på förkunskaper för fortsatt utbildning. Alternativa fördjupningsuppgifter utan direkt anknytning till något tillämpningsområde kan också förekomma. Här följer några tänkbara exempel:

- Vad är gyllene snittet? Finns det tillämpningar?
- De regelbundna polyedern — hur många finns det?
- Vad är en superellips?
- De tre kägelsnitten — ellipsen, parabeln och hyperbeln
- Några olika bevismetoder, t ex beviset för att det finns oändligt många primtal, induktionsbeviset av formeln $1 + 2 + \dots + n = n(n + 1)/2$ och ett empiriskt bevis av formeln för cirkelarean.



BIBLIOTEKET
MÖLNDALE



KURSBOK

Ex. nr: 2

Skolöverstyrelsen
Läroplan för kommunal och
statlig utbildning av vuxna
Lvux 82 Kommentarmaterial
Matematik på gymnasieskolenivå

Bfj 2322

L⁸²
LUX

KOMMENTARMATERIAL

 **Liber**
Utbildningsförlaget



ISBN 91-40-71274-5

SÖ:s
publikat
Läroplan
1985:14