Om Euklides' elementa och undervisningen i geometri.

Mer och mer synes den meningen göra sig gällande, att Euklides' elementa icke längre kunna anses utgöra lämplig lärobok för begynnare i den vetenskapliga geometrien. Under långa tider af lärarne missbrukad har emellertid denna vördnadsvärda bok under de senaste decennierna börjat blifva på ett förståndigare sätt använd, men på samma gång har man insett, att tidens ström omsider gått henne förbi och att de växande fordringarna på större kunskapsmassor nödvändigt kräfva mera hastigt verkande undervisningsmedel.

Redan för flera år sedan (1881) har *E. F. Gustrin* i en uppsats i Pedagogisk Tidskrift grundligt tagit i tu med uppgiften att blotta felen och svagheterna hos Euklides' elementa, ett initiativ, för hvilket hvarje vän af reform på den geometriska elementarundervisningens område måste vara honom på det högsta tacksam. Då jag nu väljer denna sakrika uppsats, som jag i allt väsentligt gillar, till utgångspunkt för min följande framställning, må det vara mig tillåtet att på samma gång angifva de få punkter, hvari jag ej kan instämma med den högt ärade författaren, samt där och hvar, så godt jag kan, taga Euklides' elementa och de lärare, som använda denna bok, i försvar, då de enligt min mening något strängt antastats. Jag kan göra detta så mycket hällre, som jag väl får, sedan många år, räkna mig själf till matematik-lärarnes antal.

Sålunda känner jag mig såsom sådan berörd däraf, att författaren af citerade uppsats, åtminstone på den tid den skrefs, tyckes tro, att lärare, som i brist på bättre eller i följd af eforalstyrelsens föreskrift använda Euklides såsom lärobok, göra detta på ett helt och hållet blindt och okritiskt sätt. De skulle sålunda, exempelvis i fråga om geometriska konstruktionsproblem, sätta teorien i den mest skärande kontrast till bruklig praxis, hvarigenom lärjungarne skulle komma till den "öfvertygelsen, att teorien är till helt och hållet för sin egen skull och har intet med praktiken att göra". Det "pestgift" denna mening skulle införa i själslifvet måste enligt förf. hafva de mest olyckliga följder (se uppsatsen i fråga, s. 145 i 1881 års årgång af Pedag. Tidskrift).

Men nu finnes väl icke bland den yngre generationen af för sitt kall bildade lärare i matematik någon som så slafviskt följer Euklides, att han icke förstår skilja mellan den konstruktion som bör användas för ett problems lösning och för dess bevisning, och när denna skilnad vederbörligen iakttages samt den lilla förändring mot Euklides göres, att passaren användes äfven för att flytta linier, ser jag för min del här vid lag ingen skilnad mellan teori och bruklig praxis. Eller huru skall man dela en vinkel midt itu på enklare sätt än genom att med passaren göra benen lika långa och sedan sammanbinda spetsen med den enligt Eukl. I,1 funna topp-punkten till den liksidiga eller likbenta triangel, hvars bas utgöres af sammanbindningslinien mellan benens afskärningspunkter? Eller hur dela en linie midt itu enklare än genom att söka topp-punkterna till liksidiga eller likbenta trianglar, som ha linien till bas, samt sammanbinda dem (eller, rättare, söka sammanbindningsliniens skärningspunkt med den gifna), o. s. v.?

Eget nog har emellertid under hela fem års tid ingen lärare funnit för godt att taga till ordet i denna sak — ett karaktäristiskt exempel på nationallynnets tröghet.

Ännu mer obegripligt är det för mig, att någon gensägelse ej häller gjorts mot förf:ns följande påstående (s. 145), att man ingenstädes i vårt land torde "utföra ett bevis för riktigheten af formlerna för de plana rätliniga figurernas beräkning". Af min egen lärare i matematik (framlidne lektor Kjelldahl i Upsala) har jag redan för mer än $^1/_4$ sekel sedan fått lära, och själf har jag i min tur sökt bibringa mina lärjungar, huru Eukl. I,36, 41 leder till beräkning af sådana parallelogrammer och trianglar, hvilkas baser och höjder äro kommensurabla med enheten, och Eukl. VI,1, 23 till det samma om dem, hvilkas baser och höjder icke äro det. Jag kan med trygghet påstå, att jag icke varit ensam om detta framställningssätt, men är förvånad, att det icke varit mera allmänt än att det kunnat af en framstående skolman förbises.

De anmärkningar, herr Gustrin framställer mot det för trånga Euklideiska vinkelbegreppet, eller beträffande saknaden af satser om loci, eller hvad han yttrar om motsvarigheten mellan vissa satser i Euklides 2:dra bok och lagarne för polynoms multiplikation i algebran m. m., erkännes otvifvelaktigt af alla sakkunnige såsom riktigt, men man bör äfven här skilja mellan Euklides efter bokstafven och Euklides sådan den i verkligheten läses. Ingen lärare i matematik på det lägre stadiet lär låta sina lärjungar läsa hvad Euklides har att säga om krokliniga vinklar, lika litet som han lär underlåta att *i sinom tid* vederbörligen utveckla det euklideiska vinkelbegreppet (från början kanske hälst bestämdt kort och godt såsom: olikhet i räta liniers riktning) och i öfrig måtto bereda dem till studiet af den högre geometrien med dess på funktionsbegreppet hvilande metod. Men att från början *söka* gifva (jag säger: *söka,* ty det *lyckas icke)* lärjungen generela definitioner och allmänna öfversigter är här, såsom i andra ämnen, enligt min mening, — ett pedagogiskt felgrepp. Elementas förnämsta styrka i pedagogiskt afseende ligger just i den *starkt konkreta* form, som Euklides förstått gifva hela sin framställning, så definitionerna, som satsernas innehåll och bevisning. Det är också *just därigenom* den euklideiska geometrien besitter sin obestridliga och ryktbara duglighet såsom elementargeometrisk lärobok för begynnare. Jag önskar att redan här betona denna min hufvudtanke.

Äfven mot Elementas förmenta logiska felfrihet och däraf betingade förträfflighet såsom formelt bildningsmedel har hr G. sammanfört åtskilliga befogade anmärkningar, som tid efter annan framstälts. Jag skulle emellertid vilja tillägga, just emedan behofvet af utvidgadt vinkelbegrepp i mer än ett afseende förut varit på tal, det allvarsamma inkast, som kan göras mot Euklides' bevisning af sin VI,33, hvilken bevisning i själfva verket icke låter sig förenas med hans definition på vinkel och på lika proportion. Däremot måste jag bekänna att jag, efter mitt sätt att se saken, icke kan förstå meningen med hr G:s yttrande (s. 148) att "omvändningen af femte bokens 5:te definition . . . ingalunda kan betraktas såsom själfklar". Ty har man definierat "lika proportion" så som Euklides säger samt erkänt hans definition såsom rimlig, så är det enligt min åsigt icke tu tal om huruvida storheter äro proportionela, då de uppfylla definitionens vilkor. Har däremot någon behagat taga saken annorlunda och i tysthet med proportion menat något annat än Euklides säger, så blir för honom Euklides' 5:te definition icke längre någon definition, utan ett teorem, som måste bevisas, äfven till sin omvändning. Att vända om ett på vissa antaganden grundadt påstående låter sig väl göra, men tanken att göra omvändning af en matematisk definition utmynnar i en betydelselös omsägning.

I fråga om de euklideiska definitionerna i 1:sta boken bör jag kanske begagna tillfället framhålla, att definitionerna på rätvinklig, trubbvinklig och spetsvinklig triangel uppenbarligen hälst böra ha sin plats efter I,17 och definitionerna på kvadrat, rektangel, romb (med förenklad lydelse) efter I,34.

Af axiomen tillhöra 1—7 och 9 den allmänna storhetsläran och af dem kunna de flesta bevisas. Blott ax. 8 (med dess följdsats ax. 11) och ax. 12 tillhöra ensamt geometrien. Ax. 8 innehåller *grundprincipen för geometriska storheters likhet* (och olikhet). Ax. 12, som bör ha en förändrad och lättare motiverad lydelse, hvartill jag i en följande uppsats vill återkomma, utgör enligt min mening en utbruten del af den rumsåskådning, som ligger till grund för all geometrisk bevisning och som borde, mer än hittills skett, närmare utredas och i sina detaljer konstateras. Det samma kan sägas om det euklideiska ax. 10.

Hvad postulaten och problemen angår, anser jag, såsom redan nämts i det föregående, att man gör väl i att använda linialen och passaren mera fritt än Euklides vill, nämligen såsom rent mekaniska hjälpmedel, äfven då det gäller att afsätta en linie af gifven längd eller upprita en cirkel med sådan radie, hvarjämte man, såsom äfven förut antydts, har att noga skilja mellan den för problemets utförande nödiga konstruktionen och den som kräfves för beviset, hvilken senare, strängt taget, blott behöfver tänkas, ej utföras.

De af hr G. påpekade svårigheterna för nybörjare med de euklideiska I,5, 6, 13 undvikas lätt t. ex. på följande sätt, af mig länge praktiseradt. Eukl. I,5 ådagalägges med användande af det bekanta beviset, då man tänker sig toppvinkeln delad midt itu, hvarigenom nybörjaren på samma gång får en lätt och lämplig applikation af I,4. Eukl. I,6 spares tills I,18 genomgåtts, hvarefter man af I,5, 18, 6, 19 får ett system af 4 sammanhörande satser, af hvilka 6 och 19 äro omvändningar af 5 och 18. Hvad åter angår I,13, så utgöra där omtalta nabovinklar tillhopa en rak vinkel enligt ofvan nämda definition på vinkel (olikhet i riktning) och äro således tillhopa = 2:ne räta.

Det torde emellertid blifva för vidlyftigt att här anföra alla dessa småändringar och lättnader för nybörjaren, som hvarje lärare i matematik, som förstår sitt ämne, söker åstadkomma vid läsningen af Euklides. Vare det anförda nog blott såsom exempel för att visa, huru lämpliga förenklingar kunna göras, utan att någon total omstöpning af Euklides blir behöflig.

Elementas betänkligaste brist i vetenskapligt hänseende blir otvifvelaktigt, såsom hr G. med styrka framhåller, den att Euklides där uraktlåtit att ordna satserna efter deras naturliga sammanhang; han har icke förstått, för att tala med danske skolinspektören prof. A. Steen *, att åstadkomma en sådan systematisk utveckling af innehållet, som hvilar på en rationel begrundning. Redan denna ofullkomlighet utgör skäl nog mot ett fortsatt användande af Euklides, så snart någon annan geometrisk lärobok finnes att tillgå, som med vederbörlig korthet och vetenskaplighet på en gång uppfyller vilkoret af systematisk utveckling af ämnet och äfven eger Euklides' stora förtjänst att på ett klart, tydligt och konkret sätt framställa sin sak. Det senare är icke mindre vigtigt än det förra, men min mening om Euklides i ifrågavarande afseende synes icke delas af prof. Steen, som kallar de euklideiska bevisen tröttande och ofta långsläpiga samt menar, att läraren har ett svårt arbete att inplugga dem i lärjungarne — just raka motsatsen till min och tillfrågade medlärares erfarenhet.

För att nu kunna, så att säga i ett mera konkret ljus, taga i skärskådande den förra, af prof. Steen framstälda, hufvudfordringen, har jag skaffat mig tillgång till den vid Danmarks lärda skolor (så vidt jag kunnat inhämta) mest använda läroboken i elementär plangeometri, nämligen Julius Petersens Lærebog i den elementære Plangeometri, 5:te Udgave, Kjøbenhavn 1884. Den är ett mästerstycke af enkelhet och korthet. På endast 76 rymligt tryckta sidor med figurer innehåller den det väsentliga af Euklides' 6 första böcker (med tillägg af läran om symmetri, likställighet m. m.) samt den hos oss vanligen till den algebraiska läroboken förlagda kursen i planimetri (inklusive cirkelperiferiens rektifikation), förutom 143 dels rent geometriska, dels planimetriska öfningssatser. Denna stora korthet må väl sätta en svensk euklideslärare i förvåning, men förklaringen ligger däri att lärokursen är föga detaljerad och framställningen starkt sammandragen, så att man t. ex. anser obehöfligt att upptaga eller åberopa sig på några axiom. Öfverhufvud kan icke arbetet i fullständighet, liksom ej häller i strängt genomförd systematisk utveckling, mäta sig med den i Sverige mera bekanta Mundt-Bergroths förträffliga bok: J. E. Bergroth, Elementarkurs i Geometrien, Bearbetning efter C. E. Mundts Lærebog i den elem. Plangeometri og Stereometrie, Helsingfors 1876.

* Sveriges højere Skoler, En Reiseberetning af A. Steen, Kjøbenhavn 1880, åberopad i ofvan citerade uppsats.

Men huru skall jag söka karaktärisera bevisföringen i J. Petersens bok, då jag hufvudsakligen fäster mig vid de för nybörjarne afsedda första kapitlen, såsom de i metodiskt afseende vigtigaste? Jag har redan nämt, att man där ej ansett nödigt klara framställningen genom åberopande af några axiom, hvilket väl förefaller oss något oväntadt, oss som, kanske icke utan skäl, påbördas öfverdrifven formalism vid undervisningen. Naturligtvis hyser man ej häller någon tvekan att, såsom äfven Euklides i III,20 gör sig skyldig till, vid den geometriska bevisningen anticipera behöfliga satser ur proportionsläran, hvilken senare icke beskäres någon annan plats och bevisning än den kan få i talteorien. Den geometriska bevismetoden har på det hela taget ingalunda den likformighet och fasthet, som den euklideiska, hvilken låter lärjungen lättare se, huru han steg för steg från geometriens yttersta principer kommit till den elementära geometriens slutresultat. I Petersens bok söker man ena gången sin utväg genom en vridning (af en linie eller en figur), en annan gång reder man sig genom en omläggning, en tredje gång tager man sin tillflykt till en geometrisk limesöfvergång och jämte allt detta användes, såsom Euklides gör med förkärlek, äfven teorien för kongruenta trianglar. Alltid behandlas sakerna summariskt och man negligerar helt enkelt allt för småaktiga invändningar, hvilka dock stundom kunde bli besvärliga nog. ("Maaske", säger prof. Steen själf, "kan ingen [anden Lærebog] taale Sammenstilling med Euklid.") En sådan obestämdhet och växling i metoden synes mig skola medföra en betydande osäkerhet hos nybegynnarne, som nu ej rätt väl veta hvar de äro hemma, då deras reflexionsförmåga vis à vis ett geometriskt bevis är för litet utvecklad för att tåla vid att splittras på flere sätt. Låt vara, för att taga ett exempel, att ingen nybörjare (om någon annan behöfver det ej nu vara fråga) känner sig frestad att göra invändningar mot det lättvindiga beviset för 2:ne vertikalvinklars likhet, hvilken ådagalägges på det skäl, att vinklarne bägge reduceras till 0 genom samma vridning af det gemensamma vinkelbenet, men nybörjaren vet i alla fall icke, huru han skall våga sig ut på egen hand och på främmande, obekant mark med denna vridningsmetod. Ännu betänkligare blir det för honom (Petersens plangeometri börjar användas i klass I, som ungefär motsvarar vår 4:de), när fråga blir, redan efter läsningen af blott 4 blad, om härledandet af en teori för tangenter till cirklar genom tillämpning af limesbegreppet på kordor. Det heter då i § 25 helt kort och godt, att "da Sætningen i 24 (periferivinkeln = hälften så många grader som den båge den står uppå) gjælder, hvor lille end den ene Korde bliver, maa den ogsaa gjælde, naar Korden bliver uendelig lille, det vill sige, naar den (forlænget) gaar over til at blive Tangent. En Vinkel, der dannes af en Korde og en Tangent, maales alltsaa ved det halve af den Bue, som Korden afskærer". På denna bevisning grundar sig sedan en hel rad af satser.

Det skulle säkerligen vara för en svensk lärare ett alldeles särskildt nöje att höra, huru en dylik bevisning uppfattas af de 12-årige lärjungarne, och huru de själfva tillämpa denna och bokens öfriga växlande bevisningsmetoder vid lösningen af geometriska öfningssatser. Jag befarar, att denna flerfald af bevisningssätt, af hvilka limesöfvergången måste anses passa blott den mognare åldern, väcker stark oro och splittring i nybörjarnes tankegång, som dock vid sysselsättning af nämda slag har stort behof af fasta och konkreta utgångspunkter*.

Att man mycket väl kan ernå en elegant och systematisk utveckling af geometrien, utan att i någon mån brista i fordringarna på en ända från principerna gående logisk stringens, därpå är Mundt-Bergroths ofvannämda bok ett ojäfaktigt bevis. Man kan, när man läser den, ej finna ord nog af beröm för det öfversigtliga innehållet, ämnets mästerliga utförande i alla detaljer, dess naturliga utveckling ur den inre kärnan, den systematiserade bevismetoden, de i alla motsvariga delar fullt korresponderande satserna o. s. v. Och likväl, hvarför användes boken så litet här i Sverige, och hvarför hafva skicklige lärare till och med öfvergifvit den och återtagit Euklides? Jo, emedan dess abstrakta vetenskaplighet icke passar för nybörjaren, *åtminstone icke under hans första läroår.* Allmänna öfversigter, generaliserade definitioner och bevismetoder, logiska divisioner och subdivisioner, ja äfven vissa indirekta bevis lämpa sig icke för 12-åringens outvecklade reflexionsförmåga. Lärarens bemödanden bortslösas alltid fåfängt, så länge de stå i strid med grundlagen för all undervisning, som här kanske strängare än annorstädes bjuder: *först det mest konkreta, sedan generaliseringen och abstraktionerna.*

Men, frågar man, hvad är det då som här i den vetenskapliga elementargeometrien skall anses såsom det mest konkreta och för 12-åringens fattningsförmåga bäst passande? Jo, det är enligt min mening *den euklideiska läran om 2:ne trianglars kongruens*

---

* Herr Steen yttrar i sin ofvannämda reseberättelse (s. 47) om den geometriska undervisningen i Sverige: "Vel bødes der paa Mangeln i Euklids System ved Todhunter, men det nytter ikke Flertallet af Disciplene, thi Skaden er sket ved den theoretiske Undervisning, Interessen er tabt, praktisk Anvendelse sker med Besvær."

Jag anser mig af flere skäl ha rätt betvifla, att hr Steen här har tillräcklig faktisk grund för sitt omdöme, och jag skulle särdeles gärna vilja komma i tillfälle att med våra egna lärjungar jämföra de danska jämnåringarne i fråga om förmågan att på egen hand lösa geometriska öfningssatser.

samt den likhet mellan sidor och vinklar, som följer af kongruensen. I denna lära har nybörjaren tillfälle att fästa sin uppmärksamhet och sin blick på *en enda påtaglig sak i sender*, med denna lära blir han snart nog förtrogen och den förstår han ofta rätt väl använda vid lösningen af lättare geometriska öfningssatser.

Min öfvertygelse är således, att man vid utarbetandet af nya läroböcker i elementargeometri eller vid bearbetning af den euklideiska ej bör öfvergifva den fasta, konkreta och för nybörjaren passande utgångspunkt, som innefattas i den euklideiska triangelteorien. I en följande uppsats vill jag undersöka, huru den elementära geometriens innehåll bör för nybörjare vidare utvecklas, med särskildt iakttagande af vissa vetenskapliga fordringar, som en lärobok i elementargeometri enligt min mening bör uppfylla.

K. H. S.

Från Östergötlands och Smålands lärareförenings åttonde sammanträde i Alfvesta den 27 april 1886.*

"Är det lämpligt att vid läroverken införa undervisning i slöjd, och huru och till hvilken utsträckning bör i sådant fall denna undervisning anordnas?"

Diskussionen började af rektor *Welin*, som fann frågan vara af svårlöst beskaffenhet, men ganska beaktansvärd.

Slöjd kunde nog införas i ett eller annat mindre befolkadt läroverk, men tal. betviflade, att den skulle kunna införas vid läroverk med större tillopp af lärjungar. Undervisningen i slöjd borde vara valfri och kunde svårligen medhinnas under terminen i de öfre klasserna, hvilkas tid är tillräckligt upptagen af många både läro- och öfningsämnen, men kunde möjligen införas i de lägre klasserna, där mera tid förefunnes. Han ansåg, att mötet borde uttala sitt behjärtande af frågan, men att företrädesvis Hushållningssällskapen och måhända äfven landstingen borde taga saken om hand; dock borde undervisningen på inga vilkor blifva obligatorisk.

Adjunkt *Berggren* instämde med föregående talare och påpekade, att i Malmö undervisning i slöjd var anordnad för de nedre klasserna.

På uppmaning af rektor *Welin* redogjorde *Ordföranden* rekt. Cederschiöld för det sätt, hvarpå denna undervisning komme

* Efter Smålandsposten.