Räknekonstens utvecklingslagar.

Av A. Edv. [illegible]

Första lagen.

1. Räknekonstens begynnelse är sammanläggning

$$1+1=2, \qquad 2+3=5, \qquad \text{o. s. v.}$$

ända tills additionen når sin höjdpunkt i begreppet

$$a+b+c+\ldots \qquad (\text{n stycken})$$

d. v. s. summan av huru många och huru stora tal som helst. I stället för generalisering kommer sedan specialisering, nämligen på det enkla sättet, att man utväljer fallet

$$a=b=c=\ldots \qquad (\text{m st.})$$

Upprepad addition med lika stora addender är början till multiplikation

$$2+2+2=2 \,.\, 3=6$$

$$a+a+a+\ldots \; (\text{b st.}) = ab$$

Från summan $a+b$ har man således kommit över till produkten ab genom att först generalisera och sedan specialisera.

2. Subtraktion och division komma något litet på tal i en senare avdelning såsom en omvändning av addition och multiplikation. Nu skulle jag övergå till potensering, men inpassar här ett par anmärkningar. Först, att de båda räknesätten addition och multiplikation likna varandra däri, att resultatet av räkningen förblir oförändrat, då beståndsdelarna (addender eller faktorer) byta plats

$$a+b=b+a, \qquad ab=ba$$

På grund härav bilda dessa båda räknesätt en särskild grupp, dit intet annat räknesätt hör. Ty man kan tryggt påstå (och även bevisa), att varje räknesätt, som lyder den kommutativa lagen, låter reducera sig till addition eller multipli-

---

af lektor Starbäck väckta motionen, däri han föreslår, att 1907 års riksdag måtte besluta om inrättandet af 75 nya ordinarie adjunktsbefattningar, afsedda att vara med ordinarie innehafvare besatta den 1 januari 1908, och vill sällskapet på samma gång framhålla, att detta antal endast afhjälper det för närvarande mest trängande behofvet.»

kation eller kombinationer av dessa. Endast för att närmare belysa min mening skall jag upptaga till kritik ett av Mannoury[1]) föreslaget nytt räknesätt, som han kallar hypermultiplikation. Han sätter

$$a \mid b = e^{\log a \; \log b}$$

ett räknesätt, som uppenbarligen lyder den kommutativa lagen. Men det är ju tydligt, att detta räknesätt låter reducera sig till multiplikation. Ty märk, att räkningen är obegriplig utan kännedom om logaritmer. Men före logaritmerna komma rötter och potenser. Det må således vara tillåtet att utbyta talen a och b mot talen e^a och e^b. Då fås

$$e^a \mid e^b = e^{ab}$$

således

$$\log (e^a \mid e^b) = ab.$$

Vänstra membrum är nu endast en otymplig beteckning för produkten av a och b.

3. Min andra anmärkning gäller själva övergången från addition till multiplikation. Man väljer

$$b = a, \; c = a \; . \; . \; .$$

(m—1 ekvationer)
En annan möjlighet vore att välja

$$b = a + x, \;\; c = a + 2x, \;\; d = a + 3x, \ldots (m-1 \text{ ekv.})$$

varav det föregående är specialfallet $x = 0$. Summan blir då

$$a + (a + x) + \ldots + [a + (m-1)x] = am + x\frac{m(m-1)}{2}.$$

För $x = 0$ fås härav produkten am såsom det enklaste fallet. Detta endast såsom en illustration till det självklara förhållandet, att summan

$$a + a + a + \ldots$$

har enklare form än varje annan summa av lika många termer.

4. Kombinationer av addition och multiplikation äro t. ex.

$$a(b+c) \quad \text{och} \quad a+bc.$$

Sådana kombinationer upptagas icke såsom särskilda

[1]) Nieuw archief voor wiskunde 4, Amsterdam 1899—1900.

räknesätt och kunna därför här förbigås. Vi komma så till konsten att upphöja till dignitet, räknesättet potensering (Potenzierung eller Potenzieren). På samma sätt som vi förut (§ 1) från summan $a + b$ övergingo till produkten $a\,b$, skola vi nu från denna produkt komma över till potensen (digniteten) a^b, nämligen genom att först generalisera och sedan specialisera. Vi generalisera till produkten av huru många och huru stora tal som helst

$$a\,b\,c\,.\,.\,.\qquad (n \text{ st.})$$

och utvälja sedan det fall, som har den enklaste formen

$$a\,a\,a\,.\,.\,.\quad (b \text{ st.}) = a^b.$$

Upprepad multiplikation med lika faktorer är här början till potensering, liksom upprepad addition med lika addender förut var början till multiplikation.

5. Det är välbekant, att räknesättet potensering icke lyder den kommutativa lagen, lika litet som subtraktion eller division. Men låt oss undersöka saken något närmare. Låt a vara det större och b det mindre av två hela positiva tal, som satisfiera ekvationerna

$$a + b = b + a, \qquad ab = ba,$$
$$a - b = b - a, \qquad a:b = b:a,$$
$$a^b = b^a$$

De båda första satisfieras identiskt. De två följande äro orimliga. I den sista ekvationen insätter jag $a = b + c$ på högra sidan om likhetstecknet och får då

$$a^b = b^b \cdot b^c,$$

således

$$\left(\frac{a}{b}\right)^b = b^c = \text{helt tal.}$$

Därav följer, att b måste gå jämnt upp i a. Jag sätter därför

$$a = nb \quad (n = 2, 3, 4, \ldots)$$

och får då

$$b = \sqrt[n-1]{n} = 2, \sqrt{3}, \sqrt[3]{4}, \ldots$$

Av alla dessa förslag är tydligen endast det första rimligt, således

$$n = 2,\ b = 2,\ a = 4.$$

Alltså finnes det blott ett enda fall, i vilket basen och exponenten kunna byta plats, utan att dignitetens värde därigenom ändras, nämligen fallet

$$4^2 = 2^4 = 16.$$

6. Potenseringens utveckling ur multiplikationen är väsentligen beroende av det självklara förhållandet, att produkten

$$a\,a\,a\,.\,.\,.$$

har enklare form än varje annan produkt av lika många faktorer. Man kan fråga, vad som kommer därnäst i enkelhet. Ja, t. ex.

$$a\,(a+1)\,(a+2)\,(a+3)\,\ldots$$

speciellt

$$1.\,2.\,3.\,4.\,\ldots\,n = n!$$

Den minsta avvikelse från regeln att alltid välja den enklaste formen skulle prisgiva valet av nya räknesätt åt rena godtycket.

7. Såsom exempel på kombinationer av addition, multiplikation och potensering må anföras (jfr. § 4)

$$a + b^c,\quad a^{b+c},\quad (a+b)^c,$$
$$ab^c,\quad a^{bc},\quad (ab)^c,$$
$$a^b + cd + e.$$

Dylika sammanställningar, som kunna varieras i det oändliga, upptagas naturligtvis icke såsom särskilda räknesätt.

8. Sedan det matematiska tänkandet sålunda utvecklat multiplikation ur addition och därefter enligt samma lag potensering ur multiplikation, vore det ologiskt att söka hindra en fortsatt utveckling enligt samma lag till räknesätt av högre ordning (fjärde, femte, o. s. v.). Riktigt har Schubert [1]) anmärkt, »dass vom Standpunkte der das Gesetz der Permanenz anerkennenden reinen Arithmetik die eingehende Untersuchung der Operationen vierter und höherer Stufe nicht allein nicht überflüssig, sondern sogar dringend geboten ist». Och i sådana läroböcker i aritmetik, som behandla räkneoperationerna strängt systematiskt, fram-

---

[1]) Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik 22 (årg. 1890), sid. 432.

hålles det från rent teoretisk ståndpunkt berättigade i att införa operationer av fjärde och högre ordning, eller betraktas det såsom självklart, att ett räknesätt av fjärde ordningen är lika berättigat som det bekanta räknesättet av tredje ordningen (potensering). Så t. ex. Hankel, Grassman, Scheffler, E. Schröder, O. Schlömilch, Schubert. Också ha rätt många matematiker lämnat spår i litteraturen efter sina ganska allvarliga ansträngningar för att ur potenseringen utveckla ett räknesätt av fjärde ordningen med dithörande generalisationer och omvändningar. Jag skall redan här citera några.

F. Wöpcke, Crelles Journal 42, år 1851, sid. 83 följ.
F. Paugger, Grunerts Archiv 35, år 1860, sid. 21—32.
H. Gerlach, Zeitschrift fur math. und naturw. Unterricht 13, år 1882, sid 423 följ.
Emil Schulze, Grunerts Archiv (2) 3, år 1886, sid 302—314.
» » 9, år 1890, sid. 320—326
E M Lémeray, Nouvelles Annales de Mathématiques (3) 15, Paris 1896, sid. 548—556
» » 16, Paris 1897, sid. 54—61
» Proceedings of the Edinburgh math. Soc. 16, år 1897—98, sid. 13 följ.
H Scheffler, Lärobok i Aritmetik.
H Schubert »

Alla dessa sju författare ha infört nya och sins emellan olika beteckningar för ett räknesätt av fjärde ordningen Därom mera längre fram (§ 12)

9 En synnerligt god ansats till utveckling av ett nytt räknesätt gjordes redan av Euler i hans stora avhandling (i Petersburgs vetenskapsakademis acta) om upprepad potensering[1]). Han börjar med ett sifferexempel, som jag

[1]) L. Euler, De formulis exponentialibus replicatis, Acta academiæ scientiarum petropolitanæ pro anno 1777, tom. 1, pars 1, mathematica, pag. 38—60. Petropoli 1778. Avhandlingen är långt senare (år 1898) kompletterad i vissa detaljer av D. Gravé (i Petersburg). Oberoende af Euler men i samma anda ha Eisenstein, Paugger, Seidel, Müller och Lémeray skrivit märkliga avhandlingar, som skola refereras i det följande.

under h. t. 1906 använde såsom problem vid matematisk skrivning i nedre sjunde realklassen under följande form.

Problem.

De hela talen x, y, z och u bestämmas genom följande ekvationer

$$x = 2^2, \quad y = 2^x, \quad z = 2^y, \quad u = 2^z.$$

Man skall beräkna x, y och z, men i fråga om u får man nöja sig med att angiva dess första och dess sista siffra samt siffrornas antal.

Lösning.

$$x = 4, \; y = 2^4 = 16, \quad z = 2^{16} = 65536,$$

$$u = 2^{65536} = 16^{16384} = 200353 \ldots 6 \text{ (19729 siffror)}$$

Att verkligen u har 6 till sista siffra (likaväl som y och z), följer därav, att alla produkter av formen

$$16. \; 16. \; 16 \ldots 16$$

sluta på 6 Att siffrornas antal är 19729 och den första siffran 2, följer därav, att

$$\log u = 65536 \log 2 = 65536. \; 0{,}30103000 = 19728{,}302$$

10. I ett exempel som detta framträder behovet av ett nytt aritmetiskt beteckningssätt av internationell räckvidd. Euler själv har icke föreslagit något sådant, men väl många av de senare författarna i ämnet (under åren 1850—1900, se § 8). Sedan numera Schuberts förslag genom Encyklopedien[1]) fått en helt annan spridning än de andra, torde det bliva allmänt antaget. Med Schuberts beteckningssätt löses det nämnda problemet (§ 9) på följande sätt.

$$x = 2^2 = (2\,;\,2) = 4,$$

$$y = 2^x = 2^{(2;2)} = (2\,;\,3) = 16,$$

$$z = 2^y = 2^{(2;3)} = (2\,;\,4) = 65536,$$

$$u = 2^z = 2^{(2;4)} = (2\,;\,5) = 200353 \ldots 6 \text{ (19729 siffror).}$$

Liksom man förut vant sig vid beteckningssättet

[1]) Encyclopédie des sciences mathématiques I, 1: Principes fondamentaux de l'Arithmetique; exposé, d'après l'article allemand de H. Schubert, par J. Tannery et J. Molk, Paris 1904, p. 61.

$$10^2 = 100, \quad 10^3 = 1000, \ldots$$
$$10^{25} = 1000 \ldots 0 \text{ (25 nollor)}$$

så bör man hädanefter vänja sig vid beteckningarna

$$(2;3) = 16, \quad (2;4) = 65536,$$
$$(2;5) = 200353 \ldots 6 \text{ (19729 siffror)},$$

således allmänt beteckningen $(2;n)$, där $n = 3, 4, 5, 6, \ldots$. Man har såsom definition

$$(2;n) = 2^{(2;n-1)}$$

De enda primfaktorerna i $(2;n)$ äro således 2. Man kan skriva

$$(2;n) = 16^{1/4\,(2;n-1)} = 16.\ 16.\ 16 \ldots 16 \text{ (m st.)}$$

Men alla sådana produkter sluta på 6. Därav följer, att de hela talen $(2;n)$ sluta på 6.

11. Vi ha nu sett exempel på ett nytt räknesätt, som med logisk nödvändighet utvecklas ur potensering på samma sätt, som potensering förut utvecklats ur multiplikation och denna allra först ur addition. Liksom upprepad addition med lika addender är början till multiplikation och upprepad multiplikation med lika faktorer är början till potensering, så är upprepad potensering med lika beståndsdelar början till ett nytt räknesätt, låt oss säga superpotensering. På samma sätt som vi förut (§ 1) från summan $a+b$ kommit över till produkten $a\,b$ och därefter (§ 4) från produkten ab till potensen a^b, där a är bas och b exponent, så skola vi nu från denna potens komma över till superpotensen $(a;b)$, där a är låt oss säga, argument och b index. Regeln var: först generalisera, sedan specialisera. Alltså skola vi till en början generalisera potensen av 2 beståndsdelar a och b (bas och exponent) till potensen av 3 beståndsdelar a, b, c. Liksom vi förut i summan $a+b$ ersatte a eller b med en ny summa av samma form $c+d$ och sålunda fingo en summa av 3 addender $b+c+d$ eller $a+c+d$, liksom vi sedan i produkten $a\,b$ ersatta a eller b med en ny produkt av samma form $c\,d$ och sålunde fingo en produkt av 3 faktorer $b\,c\,d$ eller $a\,c\,d$, så skola vi nu i potensen a^b ersätta a eller b med en ny potens av samma

form c^d i avsikt att sålunda få en potens av 3 beståndsdelar b, c, d eller a, c, d. Jag skall börja med det senare[1].

12. Jag utgår således från potensen a^b och ersätter exponenten b med en ny potens av samma form c^d. Resultatet blir en potens av 3 beståndsdelar a, c, d, av vilka a och c ingå såsom baser (ingendera såsom exponent) men d såsom exponent (icke såsom bas). Vid fortsatt generalisering efter denna princip utbyter jag exponenten d mot en ny potens av samma form e^f. Resultatet blir en potens av 4 beståndsdelar a, c, e, f, av vilka a, c, e ingå såsom baser (enbart) men f såsom exponent (enbart). Sedan utbyter jag exponenten f mot en ny potens o. s. v. Resultatet blir en upprepad potens av huru många och huru stora beståndsdelar som helst a, c, e, g, .. u, av vilka endast den sista u ingår såsom exponent (den står högst upp), under det att alla de andra äro baser. Jag betecknar nu antalet av dessa beståndsdelar med b och specialiserar på vanligt sätt

$$c = a, \ e = a, \ g = a, \ \ldots u = a \qquad (b - 1 \text{ st.})$$

Resultatet blir en upprepad potens av b st. beståndsdelar, alla lika med a, av vilka endast en (den sista eller högsta) är exponent, under det att alla de övriga äro baser. Detta resultat använder jag nu såsom definition på superpotensen (la surpuissance) (a; b) och kallar a argument och b index. Således är enligt definitionen

$$(a; 2) = a^a, \ (a; 3) = a^{(a;2)}, \ldots (a; b) = a^{(a;b-1)}$$

Argumentet ingår såsom exponent en gång och såsom bas så många gånger, som index utvisar, minus ett. Man kan utläsa (a; b) såsom a i potens b gånger.

De övriga kända förslagen till beteckningssätt för samma sak äro följande (jfr § 8).

$$\text{Wöpcke } \underset{a}{\overset{b}{\smile}} \qquad\qquad \text{Gerlach } {}^{b}a$$

[1]) Framställningens utförlighet motiveras av det misstag, som blifvit begånget i denna fundamentala punkt (av Schulze, Schubert och Weber, se § 13).

Paugger $a^4 b$	Schulze $\underline{\underline{a^4 b}}$
Scheffler $a \sim b$	Lémeray $\left.\begin{matrix} b \\ \dot{a} \end{matrix}\right\vert^{1}$

Härvid bör dock anmärkas, att Schulzes förslag (av år 1886) endast var provisoriskt. I en senare avhandling (av år 1890) använder han själv Gerlachs beteckningssätt. Även Müller ansluter sig till Gerlach. Lémeray definierar (i likhet med Euler och hans efterföljare Gravé) ett något allmännare begrepp

$$\left.\begin{matrix} 1 \\ \dot{a} \end{matrix}\right\vert^{c} = a^c, \quad \left.\begin{matrix} 2 \\ \dot{a} \end{matrix}\right\vert^{c} = a^{a^c}, \ldots \left.\begin{matrix} b \\ \dot{a} \end{matrix}\right\vert^{c} = \ldots$$

13. Vi ha således kommit fram till superpotensen (a; b) genom att utgå från potensen a^b och däri utbyta exponenten b mot en ny potens av samma form o. s. v. Det andra förslaget var (§ 11) att utbyta basen a mot en potens c^d. Men därigenom kommer man till kombinationen c^{bd}, varom vi förut (§ 7) talat. Samma kombination fås, då man i potensen a^b utbyter exponenten b mot en produkt c d, vilket ger a^{cd}. Men detta är icke början till en upprepad potens, lika litet som kombinationen a (b + c) är början till en upprepad produkt.[1])

14. Man kan icke förneka tillvaron av en bestämd lag för utvecklingen av räknesätt av allt högre ordning ur den enkla sammanläppningen av två tal a och b. Varje steg uppåt förverkligas genom en generalisering från en kombination (a, b) till en kombination (a, b, c, d, ...) och en därpå följande specialisering

$$a = b = c = d = \ldots$$

Därmed har man övergått från kombinationen (a, b) med

---

[1]) Ett misstag i detta avseende har blivit begånget av Schulze (Grunerts Archiv 1886 och 1890, mest utpräglat i den senare uppsatsen), och hans omdöme har — egendomligt nog — påverkat icke blott Schubert (Encyclopédie etc. p. 61, jfr § 10) utan även Weber (Encyklopädie der elementaren Algebra und Analysis, Leipzig 1903, sid. 28). Den anmärkning, som av dessa författare riktats mot superpotenseringen, träffar icke den framställning därav, som jag här givit, men väl äldre framställningar, t. ex. av Wöpcke eller av Schulze själv. Jag har ingen anledning att här ingå på ett referat utan hänvisar den intresserade till de anförda arbetena.

beståndsdelarna a och b till en ny kombination av högre ordning (a, a, a, a,. . .), innehållande n st. a, med beståndsdelarna a och n. Den fortsatta utvecklingen enligt denna lag leder successivt till det femte, sjette, o. s. v. av de enkla och direkta räknesätten. T. ex.

$$(2\ ;\ ;\ 3) = (2\ ;\ 2\ ;\ 2) = (2\ ;\ 4) = 65536,$$

$$(2;;;3) = (2;;2;;2) = (2;;\ 2;2) = (2;;4) = (2;65536),\ldots.$$

Genom att tillämpa de sex första direkta räknesätten på talen 2 och 3, tagna i denna ordning, får man följande resultat

$$\begin{aligned} 2+3&=5\\ 2\ .\ 3&=6\\ 2^3&=8\\ (2;3)&=16\\ (2;;3)&=65536\\ 2;;;3)&=(2;65536) \end{aligned}$$

Det sista resultatet är alltför stort för att kunna utskrivas med siffror i det dekadiska systemet. Detsamma gäller t. o. m. om siffrornas antal, som i själva verket är större än 0,3 . (2 ; 65535), således ungefär lika svårfattligt som talet självt.

15. Alla de nämnda eller antydda räknesätten kunna ordnas i serie på sådant sätt, att varje efterföljande räknesätt utvecklas ur det föregående enligt en gemensam lag, som framgår därav, att de tre första räknesätten äro i ordning: addition, multiplikation och potensering. Denna serie av direkta räknesätt, ytterst härledda ur addition, är obegränsad. Vid tillämpning på samma båda tal (t. ex. 2 och 3), tagna i samma ordning, av räknesätten n:r 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... successivt växer resultatet oupphörligt och snart nog så oerhört fort, att endast de fyra första räknesätten kunna med säkerhet praktiseras, möjligen också det femte. Från denna synpunkt är varje föregående räknesätt enkelt i förhållande till det efterföljande. Dessutom äro addition och multiplikation enkla räknesätt i förhållande till alla de efterföljande från den synpunkten, att resultatet blir oförändrat, då beståndsdelarna (t. ex. 2 och 3) byta plats, vilket

endast undantagsvis gäller för något av de senare räknesätten. Det finnes sålunda en väsentligare olikhet mellan multiplikation och potensering än t. ex. mellan multiplikation och addition eller mellan potensering och superpotensering. Därför är det naturligare att bilda en avslutad kurs i räkning av de två första direkta räknesätten än av de tre första eller de fyra första o. s. v.

De moderna språken och skolbildningen.

Af **Edvard Strömberg.**

Den, som vill framställa sin uppfattning af de moderna språkens förhållande till skolbildningen, bör naturligtvis först klargöra sin ståndpunkt i frågan, hvilket bildningsideal skolan i möjligaste mån bör söka förverkliga. Nya läroverksstadgan gör i detta hänseende förklarligtvis skillnad på realskola och gymnasium.

»Realskolan har till ändamål att utöfver omfånget för folkskolans verksamhet meddela allmän medborgerlig bildning», heter det. Det faller af sig själf, att det faktum, att realskolan afser bibringa allmän medborgerlig bildning, icke innebär, att den som fått realskolan bakom sig, har stora förutsättningar att bli en mönstergill medborgare i detta ords pregnantaste bemärkelse d. v. s. en självständigt tänkande människa med starka sociala och kulturella instinkter. Det vore väl också bra mycket begärdt. Realskolans uppgift, sådan som läroverkskommittén tänkt sig den, karaktäriseras tydligt genom följande passus i Ernst Carlsons i fjol utkomna broschyr om »Skolfrågans lösning» (S. 17): »Med våra dagars starkt utvecklade industri och kommunikationsväsen samt vidlyftiga förvaltningsapparat kräfves för många platser, där det gäller att utöfva ledning i andra hand, en riklig tillgång på tidigt utbildad, intelligent arbetskraft, och ett sådant tidsbehof lärer den vid 15—16 årsåldern afslutade realskolebildningen blifva ägnad att på lämpligt sätt tillmöteskomma».