

Vanskligheter vid den tidigare geometri- undervisningen.

Av Einar Oije.

I.

Det kan nog inte undvikas, att mången vid åsynen av denna uppsats tänker: överflödigt! Ty vanskligheterna äro av alla undervisare väl kända och ideligen erfarna, varför en blott påminnelse om dem ej kan vara behöflig; och gäller det metoder att övervinna dem, så erinrar man sig måhända, att vi ingalunda lida brist på sådana. Dessa rader utgöra emellertid ett försök att finna, vad som ligger bakom de fortfarande mycket stora, alltför stora, svårigheterna vid handhavandet av undervisningen i detta ämne inom våra läroverk.

När i tredje klassen geometristudiet förberedes, är det till åskådningen man vädjar. I fjärde klassen däremot, när man börjar på allvar, är man mindre angelägen om den hjälpen; den leder ytterst ofta på villospår och står i vägen för den logiska deduktionen.

Att vänja eleverna vid åskådning går nog lätt; att vänja dem av med densamma är svårare. De flesta vägra i vändningen; frågas kan dock, huruvida kommandoordet från läraren alltid är tillräckligt tydligt.

Åskådningen kan dock ej avvaras. Är det då verkligen så säkert, att den står i vägen för deduktionen?

Ja, på detta stadium. För den, som har begreppen klara, utgör åskådning ofta ett värdefullt hjälpmedel, som tjänar till att hålla trådarna samlade. Men den, som just genom geometristudiet får sin första egentliga skolning i logiskt tän-

kande, är icke benägen att använda åskådningen på detta sätt. Inför fjärdeklassistens uppfattning är det nog, att han kommer till ett *resultat*, och han har svårt att förstå, varför det ej skall anses tillräckligt, att han ritar upp en figur, noggrant och omsorgsfullt förstås, och sedan kontrollerar, huruvida satsen visat sig riktig. Endast de stora begåvningarna kunna vid den åldern ha behov av en annan metod, endast de goda begåvningarna bringas själmant att förstå ett sådant behov. Vad de övriga beträffar, kunna de lära in metoden, om de ha fallenhet, men för många, kanske för flertalet, blir det endast ett oförklarligt påfund av dem, som makten hava, att det skall pratas fram och tillbaka om en sak, som så lätt kunde undersökas på mera fattbara vägar.

Den abstraktion, som ligger i varje teorem, finner fjärdeklassisten något besvärlig, och hans taktik är sannolikt den, att han utan synnerlig eftertanke rabblar upp satsen för att sedan, så snart han fått upp figuren, läsa upp hypotes och tes, sådana de stå angivna boken — alltså en ny utanläsning! Att hypotes och tes direkt framgå ur teoremet, är då ingen levande sanning för honom. Klickar det så för honom vid angivandet av hypotes och tes i anslutning till figuren, så finner han ingenting oegentligt i att försöka med någonting annat, som han tycker se riktigt ut för ögat. Häri ligger icke bara en vanlig gissning; även de redbarast arbetande elever kunna göra sig skyldiga till detta fel, kanske genom sammanblandning. Och jag finner detta helt naturligt; kan eleven ej utan figur angiva hypotes och tes, så går det sannoligen ej heller med hjälp av en figur, som visar båda delarna och mera därtill för ögat; det sistnämnda nyttiga organet uppfattar mera, än vad som redan var för mycket för hjärnan, men jugerar ännu sämre än denna.

Lyckas man nu komma därhän, att teoremet (med problem är det inte så farligt) blir något mera än tomma ord, så återstår likväl att bibringa eleverna en uppfattning om i vad mån man får ta hjälp av den uppritade figuren. Ny-

börjaren i fjärde klassen tror naturligtvis, att han skall »åskåda» sig fram — han har som nämnt knappast förutsättningar att tro något annat, och förrän han blivit grundligt tagen ur denna villfarelse, kan undervisningen ej bära frukt. Enstaka tillsägelser: »*Vet du det?*» komma honom möjligen — möjligen! — att tvivla på *iakttagelsens riktighet*, redan det ett otillfredsställande resultat af ledfrågan; men han har därmed ej klart för sig, varför han just då (eller ens någonsin) skall vara skeptisk. Och med fjärdeklassistens dagsländeintellekt torde han lika litet vilja gå till botten med detta som med andra spörsmål; han skall tvingas därtill, om det skall bli av.

Spontant löser sig ej gåtan för honom. Oavsett andra omständigheter är väl att märka, hurusom just i fjärde klassen införes åskådningsämnet par préférence, nämligen fysik. Han uppmuntras här på det livligaste att dra slutsatser *av vad han ser* och att se *så mycket som möjligt* direkt. Ett studium, liknande denna samma geometri före sommaren. Att ämnet skall tas annorlunda efter ferierna, blir till slut en kanske bitter erfarenhet för honom, men troligen drar han till en början blott den slutsatsen, att det nu blivit mycket svårare.

Jag yttrar mig inte alls om våra läroböcker, huruvida de i den inledande »åskådningsläran» skulle ha på något förgripligt sätt vant lärjungarna att ta för mycket som kontant. Men låt läroboken vara hur väl avvägd som helst i detta avseende, kvarstår dock alltid i hög grad för lärjungen behov av ett påpekande: härintill — men icke vidare. Man får komma ihåg, att lärjungarna äro just i en ålder, då iakttagelseförmågan kraftigt utvecklas och inriktas på med geometrien besläktade områden. Där lärjungens intresse väckts, fortsätter han gärna på egen hand, men hans metoder äro ej spekulativt deducerande; så långt har han ännu icke kommit. Det är yttringar och icke väsende, som utgör hans naturliga studieobjekt.

Åskådningsundervisningen i tredje klassen förstår han sig ganska bra på, och jag har aldrig hört någon lärare klaga över bristande resonans hos lärjungarna härvid. Säkerligen ha dessa heller ingenting emot att på denna väg skaffa sig en mera systematiserad kunskap av samma omfattning ungefär som fjärde och femte klassernas geometrikurser.

Men ett svårt crux blir nu metoden. Vem kan undra över det! Redan beträffande just denna intager detta ämne en från övriga ämnen isolerad ställning, vilket medför, att till varje geometrilektion en särskild »inställning» erfordras, som utom ansträngning även kräver tid, kanske hela lektionen! Ty skolundervisningen i allmänhet har försinnligats: synbilder och ljudbilder samt »praktiska metoder» i språkundervisningen, genrebilder och tavlor i historieundervisningen etc. — allt är anlagt på en bekväm assimilation av stoffet. Ensam kvar på skansen står geometrien, moderniserad men i grunden densamma. Även övriga grenar av matematiken lämna alltmera geometrien i sticket: »parentestalen», som åtminstone tjänade som exercis, äro numera rätt beskedliga, och algebran kommer först senare. — Och då de flesta läroböcker i geometri icke synas sikta på de anförda centrala svårigheterna, förbättras saken ej heller av det sätt, på vilket även geometrien själv gjorts »lättare».

Viktigare än läroboken är emellertid den direkta, personliga undervisningen, av hvilken det hela ytterst beror. För läraren ställer sig uppgiften enligt det anförda sålunda: han skall bibringa stoffet enligt en för lärjungarna ny, rent av främmande metod, som dessutom erbjuder särskilda svårigheter på grund av både lärjungarnas förutsättningar och ämnets tidigare behandling. Det hela är ingalunda tacksamt och synes mig förutsätta som villkor för framgång, att lärjungarne skola ha fått någon uppfattning av åskådningens vanskligheter och den logiska deduktionens företräden. *Kan ej detta ske, så är undervisningen förfelad*, och det hjälper då föga med de klaraste läroböcker, de knepigaste metoder, det trägnaste arbete.

Härmed är det väsentliga i mina synpunkter framfört, men jag kan ej motstå frestelsen att andraga en i mitt tycke belysande parallell, vilken jag funnit hos ingen mindre än Goethe!

När Faust inför kejsarens lysande hov presenterar Helena, antikens sköna kvinna, blir effekten inte precis, vad man kunde vänta. Omdömena falla rätt olika, beroende på från vilket håll de komma: »för litet huvud», »som en tavla», »hon är kokett», »fräck», »underskön» o. s. v., men i allmänhet behåller man sansen. Priset tages dock av den lärde, som, »regelrätt utgående från tvivlet», överraskar med att bevisa, att detta verkligen *är* Helena. Granskar man hans bevisföring, så blir man inte vidare imponerad, ehuru det måste medges, att beviset, om det nu nödvändigtvis skulle vara ett sådant, näppeligen kunde göras bättre.

Nu kommer den prosaiska tillämpningen, som jag nöjer mig med att blott skissera. — Det ritas någonting på tavlan, och klassen reagerar efter förmåga: »linjen blev lite krokig», »de där vinklarna äro lika», »magistern ritar snyggt», »*den* är kortast». Men ingen tvivlar på att den triangeln verkligen är likbent, att de linjerna verkligen äro parallella, och det kommer för den oförberedde som en ytterlig överraskning, när man första gången upplever, hurusom läraren påstår, att detta också måste *bevisas!* Sedan gäller det att höra efter — jäså, var det så — men det visste man då lika bra förut!

Och nu till korollarierna!

II.

I medvetande om lönlösheten av att låta lärjungarna lära sig bevisa saker, vilka för dem framstå som självklara, men utan att dock vilja avstå från den logiska deduktionen ger undervisningsplanen två föreskrifter: öka axiomens antal och bevisa blott »sådana satsar, i fråga om vilka lärjungen kan

anses känna behov av bevis»; men gör deduktionen sträng, där sådan verkligen fordras.

Det kan synas, som om från min i det föregående utvecklade synpunkt ett sådant förfaringssätt skulle vara oan- gripligt. Med skyldigt erkännande av det förnuftiga i nämnda föreskrifter kan jag dock ej anse metoden vara *tillfyllest*.

Till en början kan nog fundamentet till dessa föreskrifter, sådant det i undervisningsplanen utvecklas, ge anledning till eftertanke. »På grund av den genom de förberedande övningarna vunna *erfarenhets-kunskapen*» (kurs. av mig) kunna axiomen ökas till antalet — angående denna sak bör min uppfattning i det föregående vara tydligt nog uttalad. De förberedande övningarna må ge, vad deras natur direkt åsyftar, nämligen »förtrogenhet med de geometriska fundamentalbegreppen»; vill man vinna mer genom dem, fruktar jag, att man sätter bocken till trädgårdsmästare. Man bör väl ej själv hjälpa till med att förslöa sinnena för behövligheten av ett bevis, när denna »slöhet» är ens värsta stöttesten. — Axiomen böra på nybörjarstadiet ingenting annat vara än »formuleringar av vissa satser, som kunna anses genom åskådningen omedelbart givna». Återigen »åskådningen». Men giv denna ett finger, och den skall taga hela handen! Det lilla ordet »omedelbart» kan nu emellertid synas reducera saken till sådana proportioner, att mina farhågor skulle vara överflödiga. Men då uppställer sig frågan: »*Inför vem* skola de framstå som omedelbart givna?» Av ordalagen att döma synes man här ej avse läraren; f. ö. bleve väl ökningen i så fall knappast nämnvärd. Således inför lärjungarna. — Emellertid finnes ännu en inskränkning: det står ej t. ex. »de satser» eller blott »satser», utan »vissa satser, som» etc., en inskränkning, som dock ej blir mycket värd, när den ses i ljuset av följande punkts redan citerade fastslående av vilka satser, som således böra bevisas. Hur många dessa återstående satser sedan skulle bli, kan man väl undra, och i varje fall känner lärjungen till slut ej behov av annat bevis än en enkel mätning! (För kanske samma lärare är ju även

en sådan bevisning under fysiklektionerna rent av bindande!) — Hela stycket igenom förekomma orden »kan» och »kunna», varmed tydligen avses en rekommendation, ett anbefallande; de ge likväl även ett kryphål åt den, som vill begagna det.

Jag har i det föregående påpekat, vad jag tror vara grundorsaken till svårigheterna, och — detta är kärnpunkten — *denna kan enligt sin natur ej undanröjas genom medgivanden.*

Metoden synes mig i övrigt pedagogiskt fullt riktig; med sin utgångspunkt kan den emellertid ej ge, vad den eljest synes lova. Den gör nu knappast mera än flyttar över svårigheterna till en annan punkt, där de visserligen befinna sig så att säga i en förmånligare miljö, varefter man hoppas på framtiden. — Men är detta nog? Lärjungen har ej fått sin missuppfattning rättad, varför lättningen endast kan bli tillfällig. Dessutom blir man väl emellanåt och redan tidigt tvungen att vid den anbefallda stränga bevisföringen fordra bevis vid moment, som äro mera självklara än erfarenhetsaxiomen.

Jag är således av den uppfattningen, att undervisningsplanen i detta avseende ej tagit sikte på den verkligt ömma punkten. Detsamma kan även sägas gentemot de flesta av våra läroböcker; man förenklar och underlättar på ett sätt, som smakar entreprenad; bygget blir därefter. Men om man tänker på t. ex. vad som i *jörsta* klassen fordras i tyska språket, all grammatik, allt deklinerande, allt konjugerande, så kan man väl ej vidhålla tron på att det är mindre arbetskvantitet, mindre ansträngning, som behövs i *fjärde* klassen. Man uträttar ingenting i sak genom att göra bevisen »lätare».

Denna strävan, som ibland yttrar sig i att man väjer undan för svårigheterna, där de dock ej kunnat kringgå, och så litet som möjligt låtsar om dem, måste leda till betänkliga konsekvenser, ibland nära nog till rena fel. På det sättet vinnes ej den skolning, som kan förebygga för tidiga

slutsatser; ej heller befrämjas därigenom den utveckling, som skall underlätta arbetet i det följande och göra detta till annat än en utanläsning i det oändliga. Över huvud taget synes man i sin för all del mycket lofvärda strävan att göra ämnet i början njutbart samtidigt förgäta, att även här »ungdoms möda ger ålderdoms ro», en synpunkt, som väl ej bör för mycket dominera men ej heller får ignoreras. — En koncentring av gamle Euklides' material är enligt min uppfattning oantastlig, om detta därigenom grupperas systematiskt, ty en systematisering är här till hjälp, och en förenkling, vunnen på denna väg, utgör ett lyckligt drag. Men även här lurar en fara, sedan alla förut påtalade omständigheter rätt beaktats: man får akta sig för att ge framställningen en så bestickande naturlig form, att den ej ger eleven hållpunkter att haka sig fast vid. Själva *arbetet* med inlärandet saknar härvidlag icke sitt pedagogiska värde.

* * *

Det låge nära till hands att här belysa de mera allmänt använda metoderna ur synpunkten av det sagda. Även kunde en granskning av de mera spridda läroböckerna vara lockande. Därigenom skulle emellertid denna uppsats växa betydligt i omfång, utan att i realiteten mera blivit sagt. Innan jag slutar, vill jag blott i korthet söka förebygga vissa möjliga missförstånd.

Kanske kan det tyckas, som om jag hade en allt för pessimistisk syn på situationen. Visst är geometriundervisningen krävande, tänker man måhända, men den är väl i alla fall ej så resultatslös. Småningom vänja sig eleverna in i tankegången, och många reda ut saken riktigt bra, när de väl insett, hur läraren vill ha det. Och låt vara, att de berörda hindren kunna göra sig gällande; till slut falla de ändock bort, bara man har tålamod och är konsekvent.

Jag bestrider ej, att i varje klass ganska många elever finnas, för hvilka ämnet ej erbjuder särskilda svårigheter.

Härmed tar jag ej tillbaka, vad jag tidigare sagt om lärjungarnas förutsättningar; med den receptivitet, som är utmärkande för ifrågavarande ålder, kunna redan de solidare medelmåttorna rätt snart lära sig ta saken så, som man begär, även om de för egen del ej finna det motiverat. Småningom går den deduktiva metoden i blodet på dem, utan att man behövt sätta yxan till roten, rubba deras tillit till åskådningen och övertyga dem om nödvändigheten av att tillgripa denna för dem ursprungligen främmande utväg.

Tänker man emellertid på de rena medelmåttorna och de för ämnet mindre väl disponerade, måste man väl erkänna, att både lärare och dessa elever ha att kämpa med oproporcionerligt stora svårigheter. Säkerligen äro de elever talrika, som lära sig läxa efter läxa, och det kan gå skapligt nog, åtminstone så länge intet störande moment kommer emellan — och som aldrig kommit längre, än att de ha varje sats, isolerad för sig, som ren minneskunskap (i den mån minnet uthärdar belastningen). Slutligen äro i detta ämne de särskildt talrika, som ej alls lyckas. Det är på dessa senare kategorier, jag företrädesvis tänkt.

Enligt min utgångspunkt och i följd av den dominerande ställning, jag tillmäter denna, kunde även, ytligt sett, tyckas, som om dessa kategorier egentligen måste förskonas från ämnets studium i hittillsvarande form; vidare är man kanske benägen till invändningen, att faktum av resultat, låt vara obetydliga, skulle jäva mina uttalanden. Intetdera anser jag mig dock behöva medgiva. Att åtskilliga av de mera obegåvade med ofantligt arbete och fast ledning kunna slå i sig pensum, är för mig ett bevis bland andra på att även dessa utgöra odlingsbar mark, och att man billigtvis kan pålägga dem detta studium, om man blott lyckas att på bättre sätt, än vad hittills varit fallet, lägga ämnet till rätta för dem. Som det nu är, synes det mig, att *dessa* elever tillgodogöra sig alla de utmärkta metoder och taktiska finter, varmed man hjälper sig fram vid undervisningen, ungefär som de lösa sina algebraiska problem efter »recept» och formler — och

med motsvarande nytta för sin utveckling. Naturligtvis blir det ett resultat till slut, men hurudant och med vilken möda! Självva satserna, den i så fall enda behållningen, kunde då lika gärna läras empiriskt.

* * *

Jag måste alltså komma till den slutsatsen, att ämnet i sin metodik (en härvidlag mer än vanligt ömtålig sida) ännu ej nått sin korrekta anpassning efter lärjungarnas förutsättningar. Att någonting fortfarande brister, kan ytterligare styrkas genom den häpnadsväckande skillnaden mellan lärjungarnas grepp om teoremen och om problemen, en skillnad, som ofta visar sig t. o. m. i de senares behandling: lärjungen kan vara logisk, när det gäller att utföra konstruktionen, men förmår ej utveckla skälen, giva beviset för konstruktionens riktighet! Låt oss även komma ihåg, hur mycket lättare det går vid problemlösningen med hjälp av ekvationer, vilken dock i själva verket är mer abstrakt än de geometriska teoremen, såsom dessa nu tagas.

Här framförda synpunkter äro ej alla ursprungligen mina — behöver jag säga det?¹ Redan detta skulle rädda mig från svagheten att vilja uppfatta dem som ett pedagogiskt patent. Men ehuru jag väl vet, att frågan är för komplicerad för att kunna lösas så enkelt, vill jag dock ej förneka, att jag anser min huvudsynpunkt gripa in så centralt, att den alltid måste tas med i beräkningen. Dess enkelhet gör den därvid till en bred plattform.

Man kan avhugga knuten, men vill man alltfört söka lösa den, torde man rent av böra börja i denna ända.

¹ Så t. ex. åtskilligt av vad jag anfört gentemot undervisningsplanen.