FRITS WIGFORSS — HJALMAR NILSSON

STUDIEPLAN I MATEMATIK

För sjunde och åttonde skolåren vid pedagogisk försöksverksamhet i överensstämmelse med beslut av 1950 års riksdag

STOCKHOLM
AB MAGN. BERGVALLS FÖRLAG

Studieplanerna i denna serie har utarbetats på uppdrag av kursplanedelegationen inom 1946 års skolkommission.
Författarna till studieplanerna har icke varit bundna av andra föreskrifter än de huvudmoment för försöksverksamheten, vilka på förslag av skolkommissionen och dess kursplanedelegation fastställts av skolöverstyrelsen. Ehuru kursplanedelegationen underkastat studieplanerna viss granskning, är respektive författare helt ansvariga för planernas utformning och innehåll.

Stockholm 1952
AB Gustaf Lindströms Boktryckeri

FÖRORD

Det är författarnas mening att snarast möjligt utarbeta en lärobok i överensstämmelse med denna studieplan. En del av läroboken är avsedd att innehålla den geometriska, en annan del den aritmetiskt-algebraiska kursen för klasserna 7—8 på enhetsskolans högstadium.

Kalmar i oktober 1952

Frits Wigforss *Hjalmar Nilsson*

INNEHÅLL

Matematikundervisningens mål i enhetsskolan

Undervisningen i matematik har till uppgift att ge kunskap och färdighet i räkning samt någon förtrogenhet med algebrans och geometrins elementära begrepp och metoder. Eleverna bör förvärva säkerhet och snabbhet i såväl huvudräkning som skriftlig räkning. De bör göras förtrogna med allmänt brukliga matematiska uttryck, och deras natur- och samhällsorientering bör vidgas genom räkneproblemens sakliga innehåll. Ämnets logiska bildningsvärde bör tillvaratagas både inom aritmetiken, algebran och geometrin. Genom undervisningen i geometri bör förmågan av rumsföreställning uppövas och den geometriska fantasin utvecklas. Elevernas personlighetsfostran bör befrämjas därigenom, att de får erfara vikten av samvetsgrant och mycket noggrant arbete samt nödvändigheten av tanke- och viljeansträngning för att förelagda uppgifter skall kunna lösas.

Huvudmoment

Högstadiet (klass 7—8)

Aritmetik

Översikt av positionssystemet.
De fyra räknesätten i hela tal, decimalbråk och allmänna bråk.
Positiva och negativa tal.
Något om kvadratrötter.
Huvudräkningsövningar.
Procent och promille med tillämpningar.

Algebra

Sifferekvationer med en obekant jämte tillämpningar.
Användning av formler och i samband därmed lätta algebraiska räkningar.
Grafisk framställning.

Geometri

Något om cirkelns geometri. Cirkelns omkrets och yta.

Pytagoras' sats med enkla räkneexempel.

Det viktigaste om kongruens och likformighet med praktiska tillämpningar.

Rätliniga figurers ytor.

Enkla fältmätningsövningar.

Räta pelares volym. Cylinderns volym och mantelyta.

Något om pyramidens, konens och klotets volym.

Tillämpningsproblem av skilda slag och allmän matematisk orientering

Praktiska problem i vardagslivet med särskilt beaktande av elevernas intressen samt problem i anslutning till undervisningen i andra ämnen.

Problem för inövande av enkla matematiska tankegångar.

Överslagsberäkningar.

Översikt av mått- och viktsystemen.

Allmänt brukliga matematiska uttryck.

Anmärkningar

1. Huvudmomenten anger, vad *grundkursen* i allmänhet bör omfatta, dvs. det som samtliga elever på ifrågavarande stadium bör arbeta med. En del av grundkursen — en kärna av oumbärliga färdigheter och kunskaper — bör om möjligt alla elever lära sig att säkert behärska.

Utöver grundkursen skall elevernas arbete omfatta *överkurser*. Av dessa kan en del vara gemensamma för klassavdelningens elever och avpassade med hänsyn till klassens standard, lärarnas och elevernas särskilda intressen samt lokala förhållanden. Dessutom bör så många elever som möjligt, enskilt eller i mindre grupper, arbeta med individuella överkursuppgifter, vilkas inriktning, omfång och svårighetsgrad självfallet blir beroende av varje elevs intresse och förmåga. Sådana uppgifter, såväl inom som utom huvudmomentens område, bör väljas i samråd med eleverna. I fråga om både grundkurs och överkurs bör arbetsmetoder och redovisningssätt så långt möjligt avpassas efter elevernas individuella förutsättningar.

Överkurserna i matematik kan omfatta fyllnads- och tillämpningsuppgifter men också få den formen, att elever med stora förutsättningar för ämnet tillåtes att arbeta med en kurs, avsedd för högre klass.

2. Eleverna bör systematiskt övas att arbeta självständigt och under eget ansvar och att därvid utnyttja olika slags studie- och arbetsmaterial, utföra egna försök, göra egna iakttagelser och sammanställningar och på grundval därav dra slutsatser. Det självständiga arbetet, överkurserna inräknade, redovisas bl. a. genom skriftliga rapporter, muntliga redogörelser och medverkan i diskussioner.

3. Målmedvetet bör man söka vänja eleverna vid produktivt och friktionsfritt samarbete med kamrater. Åtskilliga av uppgifterna inom ämnet kan lösas under grupparbete eller andra former för samarbete mellan eleverna.

4. Samverkan bör ske med undervisningen i fysik, samhällskunskap, hemkunskap, teckning och slöjd. I görligaste mån bör valet av uppgifter stödja undervisningen också i övriga ämnen. Matematikundervisningen bör lämna stöd åt undervisningen i modersmålet genom att ge övning i exakt läsning samt i muntlig och skriftlig framställning.

5. Ett huvudsyfte vid räkneundervisningen bör vara, att eleverna erhåller färdighet i huvudräkning. Så ofta det finnes lämpligt, bör de åskådliggörande räkneexempel, som avser att införa eleverna på ett nytt område, väljas så, att de kan lösas genom huvudräkning. Under lågstadiets två första terminer är all räkning huvudräkning. Först efter införande av skriftliga metoder för uträkning av tecknade uppgifter blir särskilda huvudräkningsövningar behövliga.

6—9. (Dessa anm. hänför sig till låg- och mellanstadiets kurs och medtages därför ej här.)

10. Kursmomentet Något om kvadratrötter i klasserna 7—8 avser att göra eleverna bekanta med begrepp och beteckning och ge dem färdighet i användning av en rottabell.

11. Kursen i geometri i klasserna 7—8 omfattar framför allt planimetriska och stereometriska beräkningar. Den systematiska genomgången av geometriska satser med bevis hör till klass 9. De mera matematiskt begåvade eleverna bör emellertid redan i klasserna 7—8 göras bekanta med hur en geometrisk sats bevisas med hjälp av andra satser.

12. I anslutning till kursmomentet Enkla fältmätningsövningar är det lämpligt att låta eleverna syssla med indirekt mätning av avstånd och höjder samt med mätning av höjd- och synvinklar.

13. Som exempel på allmänt brukliga matematiska uttryck och beteckningar, som eleverna skall känna till, kan nämnas

ord som ellips, spiral, kubikrot och tecknen för större än och mindre än samt dignitetsbeteckning.

Särskilda metodiska frågor

Arbetssättet

Enligt författarnas mening är såväl ensidigt bedriven klassundervisning som ensidigt bedriven individuell undervisning ytterligheter som bör undvikas. Elevernas matematiska begåvning är så olika, att det är orimligt låta alla räkna samma slags uppgifter, men å andra sidan skulle väsentliga uppfostringsvärden förspillas, om varje elev fick arbeta i sin egen takt utan hänsyn till kamraterna. Slutsatsen blir, att man måste sträva efter en viss sammanhållning av klassen utan att uppgiva kravet på att var och en skall få spänna krafterna efter sin förmåga. Erfarenheten visar att så är möjligt. Vägarna till målet kan vara många och de antydningar som i det följande göres är på intet sätt menade som något slags generalrecept.

En enkel metod är att i stor utsträckning hålla klassen samlad vid början av arbetet med varje särskilt kursavsnitt. Det finns alltid en del upplysningar som kan ges åt alla när klassen skall börja med ett nytt avsnitt av kursen. Handledningen fortsätter sedan med grupp- och individualundervisning. Inom kursavsnittet ges anvisning på så enkla uppgifter att alla kan klara dem, men även på så svåra att endast få orkar med dem. Ingen tvingas att arbeta med uppgifter som han ej har några utsikter att gå i land med. Sammanhållningen inom klassen vidmakthålles genom grupparbeten av olika slag. Även tävlingar kan bli ett värdefullt inslag i klassens arbete, om de anordnas på ett förståndigt sätt.

Inom vissa kursavsnitt, t. ex. grafisk framställning och de geometriska avsnitten, är det särskilt lätt att ordna med *grupparbeten*. Gäller det t. ex. att åskådliggöra statistiska siffror är det ofta praktiskt att dela upp arbetet mellan olika grupper. Inom varje grupp får medlemmarna dels rita ett diagram i sina egna arbetsböcker, dels hjälpas åt att göra ett i större format att fästas upp på väggen. En grupp ritar t. ex. ett diagram över markens fördelning på åker, skog, berg osv. i Sverige, en annan grupp ritar motsvarande diagram för Norge osv. Gemensamt studerar sedan hela klassen det samlade resultatet av gruppernas arbete.

Även *tävlingar* kan stimulera hela klassen och skapa ett gemensamhetsintresse. Individualtävlingar med »bäst-sämst»-placering av eleverna är inte trevliga och bör undvikas. Tävlingar mellan jämnstarka grupper med växlande tävlingsresultat kan däremot verka stimulerande utan att någons mod behöver slås ned. De uppgifter som ges kan t. ex. vara av olika svårighetsgrad och fördelas mellan gruppmedlemmarna så att de svaga har relativt lika goda utsikter att klara sina uppgifter som de duktiga. En grupps seger kan sålunda komma att bero på att dess allra svagaste medlem skött sig särskilt bra. Man kan alltemellanåt låta hela klassen vara en tävlingsenhet och mäta klassens framsteg. Har man tillgång till standardiserade prov kan framsteget mätas på en skala som visar klassens ställning i förhållande till andra klasser. Man tävlar alltså med andra klasser men på sådant sätt att någon bitterhet mot dem ej kan uppkomma. Ej heller dessa »tävlingar» ger de svaga någon särskilt utsatt ställning. Om framsteget någon gång blir otillfredsställande, kan det ju lika väl vara de duktigas som de svagas fel. Hänsyn till elevernas olika begåvning kan således tagas genom att de får räkna olika svåra uppgifter. Differentieringen kommer att ytterligare fördjupas genom elevernas val av *överkurser.* I anmärkningarna till huvudmomenten säges att så många elever som möjligt bör arbeta med individuella överkursuppgifter, »vilkas inriktning, omfång och svårighetsgrad självfallet blir beroende av varje elevs intresse och förmåga».

Överkursuppgifterna kan vara av två slag: de som breddar kursen på basis av gemensamt behandlade kursavsnitt, och de som fortsätter kursen i längdriktningen. Ovan skisserade plan för arbetssättet passar bättre samman med förra slaget, men bör inte hindra att särskilt duktiga elever kan få räkna »i förväg». De bör dock deltaga i de grupparbeten och tävlingar som håller samman klassen till en enhet. De bör inte heller få lämna ett kursavsnitt förrän de räknat även svåra uppgifter inom detsamma.

Några förslag till särskilda överkursuppgifter skall i övrigt inte här framläggas. I den följande studieplanen ges inom flera avsnitt anvisningar om sådana. Se även kapitlet om »Problem och problemlösning». Man bör vidare beakta att eleverna inom många områden *själva kan framställa överkursuppgifter.* Eleverna kan få tänka ut räkneuppgifter inom det område som behandlas. Då deras aktivitet härvid är mera allsidig än vid arbete med av läraren eller läroboken givna uppgifter och då de själva bestämmer uppgifternas svårighetsgrad är detta arbete mycket lämpligt. Ju större förmåga eleverna har dess mera originella och svåra uppgifter kan de hitta på.

När det gäller överkurserna må här till slut citeras följande ur Wigforss—Romans studieplan i matematik för lågstadiet, vilket synes oss vara tillämpligt för studierna på alla stadier:

»Man torde för övrigt kunna säga att varje uppläggning av studiearbetet, som på ett tillfredsställande sätt differentierar arbetet efter de enskilda elevernas krafter, förverkligar det mål man velat vinna med kravet på överkurser.»

Huvudräkning och skriftlig räkning

Säkerhet och snabbhet i huvudräkning är till stor nytta i det praktiska livet. Även ur andra synpunkter bör huvudräkning ingå som ett viktigt led i undervisningen, framför allt när man börjar på ett nytt avsnitt av kursen eller vill kontrollera att eleverna uppfattat och tillägnat sig det genomgångna.

När en uppgift är av något svårare art, bör man på tavlan skriva upp de siffertal, som det skall räknas med. Eleverna kan också själva få fundera ut huvudräkningsproblem av för tillfället aktuell typ och själva ställa frågorna till klassen.

Bakom disken och på kontoret använder man huvudräkning särskilt när det är fråga om enkla additioner eller multiplikationer. Så snart man känner sig det minsta osäker, tar man mellertid till papper och penna eller räknemaskin. Man har ingen facit att kontrollera resultatet, och man *får inte* räkna fel.

Vid skriftlig räkning är ordentlighet av största vikt. Räkningen skall på detta stadium utföras snabbt, och man har ej tid att skriva snirklade siffror. Men tydliga måste de vara, alltså lätta att skilja från varandra. Läraren bör granska elevernas siffror och ge anvisningar om de ändringar som ev. är behövliga.

Problem och problemlösning

I huvudmomenten anges de synpunkter, som bör läggas vid problemvalet:

»Praktiska problem i vardagslivet med särskilt beaktande av elevernas intressen samt problem i anslutning till undervisningen i andra ämnen. Problem för inövande av matematiska tankegångar.»

Ungefär samma syn på problemvalet ger arbetet Den grundläggande matematikundervisningen av Frits Wigforss:

»Man kan säga att en uppgift försvarar sin plats vid undervisningen, om den innehåller en beräkning, som sannolikt kommer att möta i livet efter skolans slut, om den är behövlig för uppövande av den mekaniska räknefärdigheten, om den ger värdefull realkunskap, om den intresserar eleverna och om den på ett gott sätt påverkar deras tanke- och viljeliv.»

I fråga om de praktiska problemen kan man väl ej så hårt hålla på att de alltid skall vara av det slag som sannolikt kommer att möta eleverna efter skolans slut, men gränsen mellan i vanlig mening praktiska problem och problem, som har betydelse blott för vissa specialister, får dock ej utsuddas. Klasserna 7 och 8 skall ej ge yrkesutbildning utan allmänbildning. Elevernas intresse för uppgifterna ger här åtskillig ledning. Avlägsnar man sig för långt från vardagslivet eller det som behandlas i andra ämnen i skolan, blir det svårt att få fram något intresse för uppgifterna.

I regel räknar eleverna lärobokens »tal» det ena efter det andra, endast därför att de förekommer i den ordningen i boken. Det är nyttigt om de till omväxling ibland själva får ställa upp problem. De kan konstruera problem, som leder till en given ekvation eller problem analoga med dem som man för tillfället sysslar med i skolan.

Sifferuppgifterna får eleverna själva hitta på. Någon gång kan de tillhandahållas av läraren. Han ger t. ex. följande upplysningar om herr A.: A har 500 kr utlånade mot 4 % och 600 kr mot 3 %. Elevernas uppgift blir då att bilda problem på grundval av dessa upplysningar. De kan komma med förslag som dessa:

Hur mycket har A inalles i årlig ränta på sina utlånade pengar?

Vilket lån inbringar honom mest ränta?

Hur stor ränta har A i medeltal på sina utlånade pengar?

Kanske kan något matematiskt snille hitta på ett problem som detta:

A har inalles 1 100 kr utlånade till B och C. B betalar 4 % ränta på sitt lån, C 3 %. B erlägger 1 kr mer än C i ränta. Hur stort var B:s lån? Hur stort var C:s?

Så snabbt som varupriser, arbetslöner m. m. stiger nu för tiden kan det inte undvikas att vissa uppgifter i läroböckernas exempelsamlingar ter sig föråldrade. Detta är en stor olägenhet. Eleverna tillrådes ju alltid att tänka efter om svaren är rimliga. Blir resultatet av deras kalkyler att 1 kg kaffe kostar 2: 80 och att en grovarbetare förtjänar 5 kr om dagen, är det inte att undra på att de känner sig lite tveksamma. Man kan ju alltid säga att de i alla fall lär sig metoder att lösa problemen, men kan dessa även ge någon föreställning om gängse priser och löner och nutida förhållanden över huvud taget, är det så mycket bättre. Intresserade elever samlar gärna för skolans räkning in prisuppgifter från handelsboden, skriver efter kataloger, förfrågar sig om arbetslöner, förhållanden inom kommunen m. m. Om resekostnader och restider upplyser Sveriges kommunikationer. När eleverna själva ger problem, bör de röra sig med korrekta sakuppgifter.

Olika problem kan bli aktuella i olika sammanhang. En annons, en tidningsnotis, göromål i och inköp till hemmet, annons om en billighetsresa osv. kan ge anledning till beräkningar.

Här några exempel som även kan vara av intresse vid förslag till överkurser:

Hur många procent sparar man genom att köpa en returbiljett i stället för två enkla?

Vad kostar det att resa till Stockholm? (med snälltågsbiljett, sovvagnsbiljett ev. med båt eller flyg).

Vad kostar det att göra en resa med hela familjen på familjebiljett? Med semesterrabatt?

Jämför tåghastigheter i Sveriges Kommunikationer.

Flygtider och flyghastigheter (avstånd mätes på kartan, större avstånd på en jordglob).

Planering av skolresa.

Avbetalningsköp. Hur många procent sparar man, om man betalar kontant?

Konsum lämnar vid årets slut 3 % rabatt för varor köpta under året. I år fick mor 25: 50 i »återbäring». Hur mycket hade hon köpt för i fjol?

Min bror röker tio cigarretter om dagen till ett pris av 12 öre stycket. Hur mycket röker han upp i månaden?

A sparar till en cykel, pris 210 kr. Han har 70 kr på sin sparbanksbok och sätter in 10 kr i månaden. Banken ger 2 % ränta. När kan han köpa cykeln och betala den kontant?

Vad kostar en pepparkaka som man bakar hemma och en som man köper i affären? Beräkna kostnaderna för ingredienser och bränsle. Tag reda på den tid som går åt för baket och räkna ut vad mor får i timpenning för sitt arbete.

Jämför på samma sätt pris på en hemmalagad och en färdiglagad maträtt, på en hemmasydd och en färdigköpt kjol.

Det är inte allt som lönar sig att göra hemma utan är mera praktiskt att köpa färdigt. Exempel?

Det har varit val till riksdag eller kommunalfullmäktige. Har partierna fått in representanter i förhallande till röstetalen?

Ett golv skall täckas med linoleum. Kostnaden?

En bondson kanske kan vara intresserad av diverse beräkningar rörande hemmagården.

Han kan studera ägokartan och räkna ut hur många procent av jorden som är åker, äng, skog. Han kan söka besvara frågor som dessa:

Hur mycket gödningsämne av olika slag behöver tillföras en viss åker? Priset?

Hur mycket utsäde behövs för samma åker? Kostnaden?

Förhållandet mellan skörd och utsäde? Avkastningen pr ha?

Mjölkleveranser till mejeriet olika månader. Grafisk framställning.

Nederbörd under olika månader. Grafisk framställning.

Hur många procent av åkerjorden är besådd med råg, vete osv.?

Rita en ägokarta och markera åkerarealens användning med olika färger.

Hur många tegelpannor går åt till ett tak?

Hur mycket jord behöver schaktas bort för ett planerat dike?

Uppskatta volymen av en jordhög, en potatisstuka?

Eleverna kan vidare komma med förslag om ritning av diagram av olika slag. De kan förfärdiga geometriska modeller och apparater för fältmätning. Grupparbete kan i sådana fall vara lämpligt.

Det praktiska livets män klandrar ofta de i läroböckerna förekommande problemen. De menar att läroboksförfattarna gärna tillrättalägger siffermaterialet, så att den numeriska räkningen blir enklare än vad fallet brukar vara i praktiken.

Gäller det t. ex. att finna räntan på en viss summa för en viss tid, väljes gärna dagantalet och procenten, så att en del faktorer kan förkortas bort och det tyckes vara den förkortningen som är huvudsaken i problemet.

Lärarna vill säkert inte gå med på att göra alla problem så »praktiska». Man vill ju att eleverna skall hinna med rätt många problem på ett visst område, så att de får förståelse för det som man vill lära dem i ifrågavarande kursavsnitt. Övning i sifferräkning kan ju också vinnas genom att räkna flera enkla problem än ett fåtal komplicerade. Kompletterar man lärobokens problem med sådana som hämtas direkt ur praktiska livet, tillmötesgår man i någon mån det ställda kravet.

Sådana praktiska problem har det goda med sig att eleverna får klart för sig att matematiken är ett ämne, som man verkligen kan ha nytta av i det praktiska livet. Men man bör hålla sig till sådana områden, som eleverna känner sig något så när förtrogna med. På detta stadium kan man inte vänta sig att finna intresse för transaktioner med växlar, obligationer o. d. Även eljest intressanta skatteproblem bör helst uppskjutas till 9:e klassen.

När eleverna skriver in lösningen av ett problem, räcker det inte med att de bara skriver siffror. Den förklarande texten skall vara knapp och klar. Man skriver inte dit tal, som ej förekommer i själva texten utan att det framgår hur man funnit dem. Löses uppgiften med ekvation, bör x definieras. Svaret skrives som en fullständig sats. Läraren kan låta eleverna skriva upp något exempel på hur ett problem skall räknas och skrivas in i arbetsboken.

Ex.: A köper 3 m tyg à 19 kr per m. Hur många procents rabatt fick han, då han fick betala 54,15 kr för tyget?

3 · 19 kr = 57 kr

Bruttopris	57,00	kr
Nettopris	54,15	»
Rabatt	2,85	kr

Rabattprocenten = x

$$\frac{x \cdot 57}{100} = 2{,}85$$

$$x = \frac{285}{57} = 5$$

Svar: Han fick 5 % rabatt.

Särskilt fäster man elevernas uppmärksamhet vid att det inte är tillåtet att skriva x = 5 %. Det är missbruk av likhetstecknet, x är ju ej 0,05 utan 5.

Geometrikursen

I sjunde klassens kurs har huvudsakligen upptagits planimetriska och rymdgeometriska beräkningar. Det övriga geometristudiet är sålunda förlagt till klass 8. Detta innebär icke att den egentliga geometrin skall alldeles försummas i klass 7. De i föregående klasser förvärvade kunskaperna behöver repeteras och befästas. En del av de i kursavsnitt X (fältmätnnig) föreslagna uppgifterna lämpar sig väl även för 7:e klassen.

Liksom förut bedrives geometristudiet empiriskt. Eleverna uppskattar i allmänhet inte stränga bevis för satser, som förefaller dem självklara. Exempel bör dock ges på att man av sådana enkla satser kan sluta sig till sanningen av andra, som ej är omedelbart självklara.

Praktiska tillämpningar fångar elevernas intresse. Redan tidigare har de sysslat med geometriska övningar utomhus, på skolgården eller på fältet. De har stakat ut en rät linje mellan två punkter, förlängt en rät linje, stegat upp avstånd. De har kanske utfört en eller annan geometrisk konstruktion i det fria. Även i fortsättningen är det lämpligt att jämsides med skrivbordskonstruktionerna låta eleverna lösa uppgifter utomhus. På högstadiet får denna utomhusgeometri sin praktiska tillämpning vid fältmätning med enkla medel.

Vid sådana övningar i det fria måste flera elever arbeta tillsammans på uppgiften. Även i skolsalen kan det vara lämpligt att låta eleverna arbeta i grupper. Liksom i föregående klasser kan då och då en grupptävling anordnas. Utomhusgeometrin bör i stor utsträckning kunna förläggas till friluftsdagar.

Särskilt i landsbygdens skolor är geometriska övningar utomhus ägnade att intressera eleverna. Den som vill kan som överkursuppgift få göra mätningar hemma på den egna gården.

Huvudparten av det geometriska arbetet försiggår emellertid i skolsalen. Ritningarna utföres i en olinjerad ritbok eller i en arbetsbok med lösa blad. Det sista alternativet medför den fördelen att ett olinjerat blad ibland kan bytas ut mot ett rutat (rutbredd 1 eller ½ cm). Vidare kan en misslyckad teckning göras om på ett nytt blad. Det är nämligen viktigt att alla ritningar göres omsorgsfullt och ordentligt. Låt eleverna få god tid på sig! Arbetsboken bör se prydlig ut. I viss mån skall den tjänstgöra som lärobok.

Då mätningar skall göras på en figur, ritas denna alltid med spetsig blyertspenna.

Ibland är det lämpligt att rita vissa linjer med färgpenna eller färglägga vissa ytor. Ibland kan en figur klippas ut av färgat, gummerat papper och klistras in i boken. Genomskinligt papper (t. ex. smörgåspapper) bör finnas till hands.

Det behövs ingen dyrbar materiel. Passare, mm-graderad linjal och gradskiva är förstås oundgängliga. En vinkelhake är önskvärd. I nödfall kan den ersättas av en vanlig skrivbok eller en hemmagjord kartongtriangel. Små planspeglar är roliga att ha, när man studerar symmetriska figurer.

För utomhusgeometrien behövs en del speciell materiel. Se kapitlet »Fältmätning».

Prov av olika slag. »Luckor i kunskaperna»

Till varje kursavsnitt ges prov, genom vilka eleverna får visa om de inlärt det väsentliga i kursavsnittet. Dessa prov bör vara av *diagnostisk art.* Därmed menas att proven skall klargöra i vilka avseenden ev. osäkerhet föreligger. Det gäller att upptäcka *luckor i vetandet.* Man behöver därvid använda både *grupprov* och *individualprov.*

Genom sådana prov får läraren reda på vilket slag av övning som eleven behöver. Att effektivt ordna sådan »remedial teaching» betraktas av många metodiker som en av lärarens mest maktpåliggande uppgifter.

Dessa prov är även av betydelse för betygssättningen, men räcker dock ej till för denna. De ger ej tillräcklig upplysning om en elevs hela kapacitet i ämnet. Därtill behövs prov med såväl mycket lätta som mycket svåra uppgifter, så att alla elever, de svaga såväl som de duktiga, kan få visa vad de verkligen kan. Sådana prov bör dessutom innehålla uppgifter från ett relativt stort kursområde.

De för låg- och mellanstadiet utarbetade s. k. *standardproven* är av denna art. Sådana prov för högstadiet är under utarbetande.

Översikt av kursavsnitten

Enligt enhetsskolans timplan har matematiken i klass 7 3 veckotimmar och i klass 8 4 veckotimmar. Kursen har i vår studieplan uppdelats i 18 kursavsnitt. De 8 första är för klass 7, de återstående för klass 8. Man torde kunna räkna med ca 10 undervisningstimmar i medeltal per kursavsnitt men de olika avsnitten tar mycket olika tid i anspråk. Då tiden under alla förhållanden blir mycket knapp, är det av vikt att läraren följer något tidsschema, så att han ej fastnar orimligt länge på något visst avsnitt. Studieplanen förutsätter att mycket av elevernas arbete förlägges till hemmet. Detta gäller i synnerhet för dem som har svårt för ämnet. Författarna är emellertid övertygade om att även dessa elever skall kunna tillgodogöra sig huvudinnehållet i *grundkursen*, så att de kan räkna mycket lätta uppgifter inom varje kursmoment. Någon annan differentiering av undervisningen än att de svagare får räkna lättare och de duktigare svårare tillämpningsuppgifter på de olika kursmomenten tror vi inte skall bli nödvändig. Att undervisningstimmarna inte väsentligen utfylles av klassundervisning är dock en förutsättning för ett gott resultat av arbetet. I kapitlet om arbetssättet har hithörande frågor redan diskuterats.

I studieplanerna i matematik för låg- och mellanstadierna av Wigforss—Roman är varje kursavsnitt uppdelat i en A- och en B-avdelning. Skillnaden mellan dessa karakteriseras på följande sätt:

»A-avdelningarna är mera inriktade mot det matematiska huvudinnehållet i kursen och dess logiska uppbyggnad, medan B-avdelningarna ger mera av praktiska tillämpningar och samhällsorientering samt mera tillvaratager de psykologiska synpunkterna. Denna uppläggning bör kunna göra arbetsplanen mera rörlig och levande samt stimulera läraren till personliga initiativ, utan att ämnets inneboende krav på reda äventyras.»

I studieplanernas B-avdelningar placeras »fortlöpande repetitioner», »förberedelser», »luckor i kunskaperna», »intresseområden», »överkurser», »aktuella problem», »särskilda huvudräkningsövningar».

En liknande uppdelning av kursavsnitten har ej direkt föreslagits i denna studieplan, men idén bör man ta fasta på. Nödvändiga repetitioner försummas t. ex. lätt vid en strängt genomförd systematisk lärogång, aktuella problem och intressen blir inte behandlade, arbetet med överkurserna i skolan får sitta trångt, och »luckor i kunskaperna» blir inte reparerade osv.

Innehållet i fråga om det som ovan kallats kursavsnittens »A-avdelningar» framgår av följande översikt.

I. *Taluppfattning och talbeteckning*

Uppfattning av hela tal och decimaltal. Om primtal och sammansatta tal. Delbarhetsregler. Allmänna bråk. Hur samma tal kan betecknas på olika sätt. Periodiska decimalbråk. Avkortning av tal. Begreppet »gällande siffra». Något om räkning med approximativa tal.

II. *Addition och subtraktion*

Addition och subtraktion av hela tal och decimaltal. Addition och subtraktion av allmänna bråk. Parenteser och parentesregler. Sifferekvationer av typerna: x — a = b, x + a = b, a — x = b med aritmetisk lösningsmetod.

III. *Multiplikation och division*

Multiplikation med heltalsmultiplikator och motsvarande division. Sifferekvationer av typerna: a · x = b och x/a = b (a och b hela tal). Tecken- och parentesregler. Multiplikation med bråkmultiplikator. Motsvarande division. Sifferekvationer av de nämnda typerna där a och b är bråktal.

IV. *Procent- och promillebegreppen. Förhållandebegreppet. Tillämpningsuppgifter av skiftande slag.*

1) Bråkdelsräkning. 2) Förhållandebegreppet. 3) Procentbegreppet. Förvandling av bråktal och hela tal till procent och omvänt. Promillebegreppet. 4) Procent- och promilleräkning.

V. *Planimetriska och stereometriska beräkningar*

Förberedande fältmätningsövningar. Rätliniga figurers ytor. Trapetset. Cirkelns omkrets. Cirkelns yta. Regelbundna månghörningar. Volymen av raka pelare. Cylinderns volym och yta. Ellipsen.

VI. *Enkla algebraiska räkningar*

Härledning och utvärdering av enkla formler. Addition och subtraktion av algebraiska termer. Inmultiplicering av en faktor. Division av monom med monom. Förkortning av bråk.

VII. *Ekvationslösning*

1. Algebraisk lösning av ekvationer som förut lösts med aritmetisk metod.
2. Ekvationer med reducering av x-termer.
3. Ekvationer med numerisk nämnare.
4. Ekvationer med x i nämnare.

VIII. *Problem av skilda slag lösta med ekvationsmetod*

Ränteproblem. Affärsproblem. Blandningsproblem. Fördelningsproblem.

IX. *Geometri*

Triangelns vinkelsumma: empiriskt bevis och bevis ur enklare satser. Vinklar av olika slag. Kongruenta trianglar. Likformiga trianglar. Symmetri. Konstruktionsuppgifter. Parallellogrammen. Cirkeln.

X. *Fältmätning*

XI. *Algebraiska räkningar*

Uppdelning i faktorer. Förkortning av bråk. Multiplikation av binom med binom. Kvadrerings- och konjugatformlerna.

XII. *Ekvationslösning*

1. Enkla ekvationer med binommultiplikation.
2. Ekvationer med x-termer i nämnare utan binommultiplikation.
3. Ekvationer med x-termer i nämnare och med binommultiplikation.

XIII. *Pytagoras' sats. Begreppet kvadratrot*

XIV. *Pyramiden, konen, klotet*

XV. *Grafisk framställning*

Stapel- och kurvdiagram. Grafisk lösning av problem.

XVI. *Problem av skilda slag. Begreppet direkt proportionalitet*

Förhållandebegreppet. Problem i vilka direkt proportionalitet föreligger. Några särskilda problemslag: affärsproblem av olika slag, enkel och sammansatt ränta, bolags-, arbets-, medeltals-, blandnings- och rörelseproblem, enkla fysikaliska och algebraiska problem.

XVII. *Översikt av sorterna och talsystemet*

Dekadiska och icke-dekadiska sorter. Positionssystemet. Enkla talproblem. Andra talbeteckningssystem.

XVIII. *Prov och problem av olika slag*

Kursavsnitt

I. *Taluppfattning och talbeteckning*

Hela tal och decimaltal

Mycket stora hela tal och mycket små decimaltal brukar intressera eleverna. De kan själva få bidraga med uppgifter om sådana tal, som de hämtar från tidningar och annan litteratur. De får åskådliggöra de stora talen på olika sätt. »Hur mycket är egentligen en million?» Man kan räkna ut hur långt man kommer på en million steg, hur lång tid det skulle ta att gå så många steg osv.

Eleverna kan få till uppgift: Studera sifferuppgifterna i ett tidningsnummer (helst en större tidning)! Är alla tal skrivna som du är van vid? Hur skriver man decimalbråk?

Vi finner att hela tal i olika sammanhang skrives med olika stora mellanrum mellan siffrorna: telefonnummer som 140 32, 12 34 56, postgironummer som 191 950 och 19 19 50, och när det gäller penningbelopp över 1 000 kr, är ofta en punkt eller ett komma utsatt efter tusentalssiffran.

Vilket sätt att skriva ett flersiffrigt tal är det bästa? Vi är ense om att, när vi skriver hela tal, skall vi akta oss för att ta med något, som ser ut som ett decimalkomma. Vi tycker också att det kan vara lämpligt att dela upp siffrorna i grupper. Telefonnummer skriver vi förstås som i tidningen men eljest tar vi helst tre siffror i var grupp. Vi är då genast på det klara med vilken siffra som representerar millioner och vilken som anger tusental.

Några har hittat tal, som skrivits både med siffror och bokstäver: 30 tusen, 23 millioner, 64,3 milj. Vi har ingenting emot det skrivsättet. När man skall skriva stora tal, är det ofta behändigare att skriva talsortens namn än att skriva ut alla nollorna. Vi skriver 3,25 billioner i st. f. 3 250 000 000 000.

Vi kommer att tänka på att den metoden kan användas också när det gäller att skriva mycket små bråktal. Är det inte bättre att skriva 12 milliondelar än 0,000 012?

Hur är det med decimalbråken i tidningen? Vi finner att decimalkommat ofta ersättes med en punkt eller ett kolon.

Vi har ingen anledning att ta efter detta bruk. Det skapar bara onödig risk för förväxling med multiplikations- och divisionstecken.

Ibland träffar vi på tal, som ser ut som decimalbråk men inte är det. Somliga tidningar anger tiden för eftermiddagsnyheterna till 19.15, andra skriver 19,15. Detta sista sätt att skilja timmar och minuter med ett komma ogillar vi givetvis — 15 min. är ju $\frac{15}{60}$ timme och inte $\frac{15}{100}$ timme. Det är viktigt att vi har detta klart för oss, när vi skall räkna ut hur lång tid en tågresa tar.

Någon anmärker att i tidningen är decimaler och heltalssiffror lika stora. Vi förstår att det skulle vara ett extra besvär för sättaren att behöva använda två sorters typer — det har man ju ej heller på en vanlig skrivmaskin. Själva har vi inte anledning att ändra på vår vana att skriva decimalerna med något lägre siffror.

Läraren passar på tillfället att inpränta hur viktigt det är att sätta decimalkommat på rätt ställe. Ett felplacerat decimalkomma har i praktiken mången gång haft ödesdigra verkningar. Tänk alltid efter om »svaret» är rimligt!

Primtal och sammansatta tal. Delbarhetsregler

Intresse för frågan om ett givet tal är primtal eller sammansatt väckes lätt och kan ge upphov till mycket frivilligt räknande. Exempel på överkursuppgifter:

Hur många primtal finns det under 100?

Vilka tvåsiffriga tal kan delas upp i 6 primfaktorer?

Talet 12 är delbart med 1, 2, 3, 4, 6. Hur många tal finns det, som går jämnt upp i 60?

Reglerna för tals delbarhet med 2, 3, 4, 5, 6, 9 får anses höra till grundkursen. Eleverna kan med lite ledning själva komma underfund med reglerna, även om de inte kan bevisa dem.

Det är lätt att se på ett tal, om det är delbart med 2 eller 5. Men kan vi utan att utföra divisionen avgöra om ett tal är delbart med 9? Studerar vi 9-serien 9, 18 osv. finner vi att alla talen har en siffersumma, som är 9 eller en mångfald av 9. Kanske delbarheten med 3 också har något med siffersumman att göra? Vi finner snart att så är fallet.

Regeln för delbarhet med 4 är lätt att finna.

För 6 behöver vi ingen särskild regel, och 8-regeln har man i praktiken inte mycket nytta av.

Enkla bevis för reglerna passar bra som *överkursuppgift* (se t. ex. Nilsson—Wigforss: Aritmetik).

Allmänna bråk. Förlängning, förkortning, förvandling till decimalbråk

Förlängning och förkortning av bråk har vi sysslat med på mellanstadiet. Men vi behöver repetera. **Vi ritar på nytt** upp en cirkel på tavlan och konstaterar att $\frac{3}{4}$ är = $\frac{9}{12}$. **Det** är ju klart att vi får lika mycket, om vi tar 3 gånger så många delar men i stället gör dem »3 gånger så små».

Vi kan nu förkorta bråk med större tal i täljare och nämnare och har därvid nytta av delbarhetsreglerna. Skrivsättet vid sådan räkning är ett problem. Det ser inte ordentligt ut med överstrykningar och överskrivningar i täljare och nämnare. Vi kommer överens om att inte skriva

så:
$$\frac{\overset{\overset{2}{\cancel{6}}}{\cancel{12}}}{\underset{\underset{5}{\cancel{15}}}{\cancel{30}}} = \frac{2}{5}$$

utan så:
$$\frac{12}{30} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

Om flera faktorer finns i täljare och nämnare, kan det emellertid vara behändigt med överstrykningar, likaså vid ekvationslösning.

I fråga om förlängning är det viktigaste att kunna förlänga ett bråk så att det får en viss nämnare.

Ex.: Förläng bråken $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{9}{20}$, $\frac{4}{25}$, $\frac{32}{50}$, så att alla får nämnaren 100.

Härmed är vi inne på ett annat viktigt moment, nämligen förvandling från allmänt bråk till decimalbråk. När vi använder den vanliga divisionsmetoden, stöter vi ofta på den **svårigheten att divisionen inte går jämnt upp. Eleverna kan** få upptäcka att de decimalbråk, som då uppkommer, **alltid är** periodiska. **Vissa** periodtal har intressanta egenskaper, t. ex. 142857, som man får, när man förvandlar $\frac{1}{7}$ till decimalbråk. Som *överkurs* kan särskilt intresserade elever studera ett eller annat kapitel ur Örne: »Förtrollade siffror».

Avkortning av tal. Begreppet »gällande siffra». Något om räkning med approximativa tal

Många taluppgifter är endast approximativa. Om ett givet tal skall uppfattas som approximativt eller exakt är ofta en omdömesfråga. Om man säger att 27 personer var närvarande i ett rum, är uppgiften tydligen menad att vara exakt, men om invånarantalet i en storstad uppges vara 1 500 000, är det uppenbart fråga om en approximation. Man brukar säga att endast de två första siffrorna i talet 1 500 000 är »gällande» siffror. Nollornas uppgift är endast att markera de gällande siffrornas talsort. Beteckningen 1,5 miljoner är här mycket lämplig. Med den kan man också lätt ange om ev. några av nollorna skall betraktas som gällande siffror, t. ex. 1,50 miljoner. Meningen med att nollan utsättes bör ordentligt klargöras. I decimalbråk tar man inte gärna med fler decimaler än som har täckning i verkligheten. Hur många som bör medtagas beror också på talsorten. Ex.: 0,0032 m är samma uppgift som 0,32 cm, fast den förra innehåller 4 och den senare 2 decimaler. Antalet gällande siffror är i båda fallen detsamma.

De vanliga reglerna för avrundning av decimalbråk genomgås i detta sammanhang.

Ex.: Addera bråken $\frac{2}{3}$, $\frac{9}{13}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{3}{11}$ genom att förvandla dem till decimalbråk.

Ex.: Ordna bråken $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{9}{13}$ efter storleken (det minsta först). Ledning: förvandla dem till decimalbråk och tag med så många decimaler som behövs.

Principerna för räkning med approximativa tal är ett kapitel, som man inte kan ge sig in på, men eleverna bör genom räkning av valda exempel få klart för sig att slutresultatet kan bli åtskilligt osäkert, när man räknar med sådana tal.

Ett närmare studium av osäkerhetsgraden kan vara en lämplig *överkursuppgift.*

II. *Addition och subtraktion*

Addition och subtraktion av hela tal och decimaltal. Övning i »stora additionstabellen».

Träningsövningar i addition och subtraktion av hela tal och decimaltal skall fortfarande förekomma. De bör ordnas så, att eleverna kan märka ev. framsteg i snabbhet och säkerhet. Ett viktigt led i träningen är övning av »stora additionstabellen». Därmed brukar man mena summorna av två tal, av vilka det ena är tvåsiffrigt och det andra ensiffrigt. Ett för folkskolan standardiserat sådant prov finns i »Rostads standardprov i mekanisk räkning». Provet benämnes »Addition III» och kan rekvireras från »Rostads Elevförbund, Rostads folkskoleseminarium, Kalmar».

Addition och subtraktion av allmänna bråk

Mellanstadiets kurs omfattar addition och subtraktion av de vanligast förekommande bråken. Högstadiets kurs är ej begränsad till dessa bråk, men det är klart att övningen måste hållas inom trång tidsram, så att ej andra och viktigare moment försummas. Metoden att dela upp nämnarna i primfaktorer bör ingå i grundkursen.

Parenteser

Vi kan säga att meningen med en parentes är att vi skall räkna ut vad som står i den och räkna vidare med det som vi då får.

175 + (25 + 37) skall alltså räknas 175 + 62.

Det är tydligt att vi får samma resultat om vi ökar 175 först med 25 och sedan med 37. Det sista sättet är enklare. Här hade vi helt enkelt kunnat skriva 175 + 25 + 37 och sedan lagt samman talen i den ordning vi finner lämpligast. Vi hade alltså kunnat ta bort parentesen utan vidare. Kan man alltid göra så? Vi experimenterar med små tal.

Reglerna för borttagning av en parentes, som föregås av minus, studeras på enkla exempel som 10 — (3 + 2) och 10 — (3 — 2).

Skall vi räkna ut 937 — 43 — 57, lägger vi, om vi är förståndiga, samman 43 och 57 och drar summan från 937. Vi har då räknat som om det hade stått 937 — (43 + 57). Vi behöver också öva oss med att sätta in en parentes utan att uttryckets värde förändras.

Vi formulerar och lär oss parentesreglerna.

I ett uttryck som 12 — 8 — 2 + 3 — 5 för vi tillsammans plustermerna för sig och minustermerna för sig och sätter parentes om de sista: 12 + 3 — (8 + 2 + 5) och kommer så fram till regeln att man skall minska summan av plustermerna med summan av minustermerna. Första termen 12 räknas här som plusterm. Vi kan skriva 12 = 0 + 12.

Då här räknas med »tilläggningar» och »fråndragningar», har man kommit in på kapitlet »positiva och negativa tal». Vi inför inte detta uttryck ännu. Likaså undviker vi uppgifter, där slutsumman blir negativ.

Vi övar nu med mera komplicerade parentestal.

Innebörden och *sambandet* mellan räknesätten addition och subtraktion belyses med enkla sifferekvationer av typerna x — a = b, x + a = b, a — x = b, om dessa liksom på mellanstadiet löses med aritmetisk metod. Se Wigforss: Studieplan i matematik för fjärde, femte och sjätte skolåren.

III. *Multiplikation och division*

Multiplikation med heltalsmultiplikator och motsvarande division

Multiplikation med heltalsmultiplikator hör till mellanstadiets kurs men behöver fortfarande övas. Särskilt vid heltals- och decimalräkningen bör träningen läggas så att eleverna kan konstatera ev. framsteg. Rostads standardprov Multiplikation III och Division III kan användas.

Terminologien: produkt och faktorer, dividend, divisor och kvot inövas. Genom prövningssatsen: dividenden = divisorn gånger kvoten markeras sambandet mellan multiplikation och division.

Räknesättens innebörd och samband belyses med aritmetisk lösning av sifferekvationer av typerna

$$a \cdot x = b,\ x : a = b,\ \frac{x}{a} = b \text{ (a och b hela tal)}$$

Ex.: Ekvationen $16 \cdot x = 208$ kan studeras ur terminologisk synpunkt.

Vi kan översätta problemet från »algebraiska» till svenska på flera sätt:

16 gånger ett tal är 208. Vilket är talet?

16:e mångfalden (16-falden) av ett tal är 208. Vilket är talet?

Vilket tal skall man multiplicera 16 med för att produkten skall bli 208?

Produkten av två tal är 208. Den ena faktorn är 16. Vilken är den andra?

Man får lösningen genom att dividera 208 med 16. Produkten blir då dividend och den okända faktorn kvot.

Analogt behandlas ekvationen

$$x : 12 = 35 \text{ eller } \frac{x}{12} = 35$$

Tecken- och parentesregler

Ex.: $5 \cdot 3 + 4 \cdot 5 \cdot 6 - 6 : 2$

Här ligger det nära till hands att tro att räkningarna skall utföras i den ordning de står tecknade. Eleverna måste upplysas om att man i själva verket menar $(5 \cdot 3) + (4 \cdot 5 \cdot 6) - (6 : 2)$, att multiplikationer och divisioner går före additioner och subtraktioner, att tecknen + och — delar upp uttrycket i 3 termer: $15 + 120 - 3$.

Ex.: $\dfrac{8+6}{2} = (8+6) : 2 = 7$

Här tjänstgör bråkstrecket som parentes och parentesen måste skrivas ut, om vi byter ut bråkstrecket mot divisionstecken.

Ex.: $\dfrac{12}{2} \cdot 6 = (12 : 2) \cdot 6 = 36$

Den ordning, i vilken räkningarna skall utföras, framgår här av beteckningen.

Ex.: $\dfrac{12 \cdot 6}{2}$

Eftersom bråkstrecket tjänstgör som parentes, skall man först multiplicera 12 med 6 och sedan dividera produkten med 2. Eleverna får emellertid övertyga sig om att det inte spelar någon roll, om man låter divisionen gå före multiplikationen. Så gör man, när man förkortar bråk.

Denna regel om ordningens likgiltighet kan emellertid lätt missförstås.

Ex.: $12 : 2 \cdot 6$

Utföres räkningar i angiven ordning, blir resultatet 36, men räknar man först ut produkten $2 \cdot 6$ och sedan dividerar 12 med denna, blir resultatet = 1.

En beteckning som $12 : 2 \cdot 6$ bör undvikas. Vill man att divisonen skall utföras först, skriver man antingen $(12 : 2) \cdot 6$ eller $\dfrac{12}{2} \cdot 6$

Vill man att multiplikationen skall utföras först, får man skriva $12 : (2 \cdot 6)$ eller $\dfrac{12}{2 \cdot 6}$

Ökar man en term i en summa med ett tal, så blir hela summan ökad med detta tal. Multiplicerar man en faktor i en produkt med ett tal, så blir hela produkten multiplicerad med detta tal. Det är inte underligt om någon elev har den föreställningen att man kan multiplicera en summa med ett tal genom att multiplicera en enda term med talet. Vi prövar med enkla sifferexempel:

$3 \cdot (5 + 4) = 3 \cdot 5 + 3 \cdot 4 = 27$

och kommer så fram till den riktiga regeln. På samma sätt kommer vi fram till regeln för multiplikation av en skillnad.

Multiplikation med bråkmultiplikator

Detta slags multiplikation är ett nytt moment för högstadiet. Förklaringen erbjuder vissa svårigheter. En multiplikation, som ger en produkt, som är mindre än multiplikanden, strider mot den uppfattning av multiplikation, som eleverna förut förvärvat. Läraren bör tala med dem om saken och hålla med om att benämningen »multiplikation» är något egendomlig, när det faktiskt är fråga både om en multiplikation och en division.

Ex.: Med beteckningen $\frac{3}{4} \cdot 12$ menas 3 fjärdedelar av 12,

alltså $3 \cdot \dfrac{12}{4}$ eller $\dfrac{3 \cdot 12}{4}$

Man visar att beteckningen är närliggande. Då 2 dussin $= 2 \cdot 12$, 3 dussin $= 3 \cdot 12$ osv., ligger det nära till hands

att teckna $\frac{3}{4}$ dussin med $\dfrac{3}{4} \cdot 12$.

Man måste dock beakta att den nya benämningen och beteckningen är åtskilligt villsam. Det är därför viktigt att momentet ej införes för tidigt. Dess förflyttning från mellan- till högstadiet är välmotiverad.

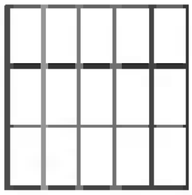
Att multiplicera två bråktal med varandra innebär nu ingen större svårighet, om eleverna behärskar mellanstadiets kurs i bråkräkning, som repeterades i början av detta kursavsnitt.

Ex.: $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}$

Här skall man dividera $\frac{4}{5}$ med 3 och multiplicera kvoten

med 2, alltså $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \dfrac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{8}{15}$

När en rektangels sidor mätes av hela tal, beräknar vi ytan genom att ta basen gånger höjden. Kan vi räkna på samma sätt, när mätetalen är bråk?



Vi ritar upp en kvadrat med 1 dm sida och passar in i den en rektangel med sidorna $\frac{2}{3}$ dm och $\frac{4}{5}$ dm. Se fig. Vi finner ytan = $\frac{8}{15}$ dm². Den vanliga formeln för rektangelytan duger tydligen också när sidornas längder anges med bråktal.

Decimalbråk har vi multiplicerat redan på mellanstadiet. Behandlingen måste där bli ganska bristfällig. Vi tar nu upp frågan på nytt och övertygar oss om att våra gamla regler fullständigt stämmer överens med dem som vi nu funnit gälla för de allmänna bråken.

Ex.: $0{,}3 \cdot 0{,}4 = 0{,}12$ överensstämmer med

$$\frac{3}{10} \cdot \frac{4}{10} = \frac{3 \cdot 4}{10 \cdot 10} = \frac{12}{100}$$

Övningen fortsätter tills eleverna med lätthet utför bråkmultiplikationer av olika slag.

Ex.: $\frac{3}{4} \cdot 4\frac{1}{2}$

Den vanliga uträkningsmetoden är $\frac{3}{4} \cdot \frac{9}{2} = \frac{27}{8} = 3\frac{3}{8}$

Men man kan också räkna så: $\frac{3}{4} \cdot (4 + \frac{1}{2}) = 3 + \frac{3}{8} = 3\frac{3}{8}$

Ex.: $\frac{5}{6} \cdot \frac{6}{5}$

Sådana övningar kan vara bra som förberedelse till divisionen i nästa moment. Likaså uträkningar som

Ex.: $\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} = \frac{3}{6}$

Division med bråkdivisor

En division med ett blandat tal inordnas relativt lätt i elevernas uppfattning om vad som menas med en division. Vi börjar alltså med sådana uppgifter.

Ex.: $2\frac{1}{2}$ alnar är 150 cm. Hur lång är en aln?

Uppgiften tecknas:

150 cm : $2\frac{1}{2}$ eller 150 cm : $\frac{5}{2}$

Resonemang: 5 halvalnar är 150 cm, en halvaln $\frac{150 \text{ cm}}{5}$

och en aln $\frac{2 \cdot 150 \text{ cm}}{5} = 60$ cm.

På så sätt kommer man fram till »upp- och nervändningsregeln».

Prövning: $2\frac{1}{2} \cdot 60$ cm $= 150$ cm.

Vi låter nu divisorn vara ett egentligt bråk.

Ex.: 12 liter saft tömmes på flaskor, som rymmer $\frac{2}{3}$ liter, Hur många sådana flaskor behövs?

Hade det gällt tvålitersflaskor, skulle vi tecknat uppgiften: 12 liter : 2 liter, nu blir det: 12 liter : $\frac{2}{3}$ liter.

Resonemang: Om varje flaska rymmer $\frac{1}{3}$ liter, behövs det $3 \cdot 12$ flaskor. Men då flaskorna är dubbelt så stora, behövs endast hälften så många, alltså $\frac{3 \cdot 12}{2} = 18$.

Man når sålunda även i detta fall fram till samma regel.

Resultatet kontrolleras genom det vanliga divisionsprovet: dividenden = divisorn gånger kvoten, alltså $18 \cdot \frac{2}{3} = 12$.

Ex.: $\frac{3}{10} : \frac{2}{5}$

Någon mera djuplodande förklaring av en sådan division behöver ej göras. Eleverna tillämpar den vanliga regeln och erhåller: $\frac{3}{10} : \frac{2}{5} = \frac{3}{10} \cdot \frac{5}{2} = \frac{3}{4}$

Divisionsprovet: $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{10}$
visar att allt är i sin ordning.

Division av decimalbråk behandlades redan på mellanstadiet. Nu kan vi övertyga oss om att »upp- och nervändningsregeln» överensstämmer **med** den **metod vid använde vid decimalbråk.**

Ex.: 0,51 : 0,3

Talet 0,51 skall divideras med $\frac{3}{10}$, alltså multipliceras med 10 och divideras med 3, således: 5,1 : 3, alldeles i enlighet med den vanliga metoden.

Förenkling av dubbelbråk till vanligt bråk behandlas som exempel på **division av två bråk.**

Ex.: $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{8}}$ uträknas som divisionen $\frac{3}{4} : \frac{5}{8}$

IV. *Bråkdelsräkning. Förhållande. Procent och promille. Tillämpningsuppgifter*

Bråkdelsräkning

Tre typer av problem behandlas. Vi ger exempel på varje.

1. Ex.: Hur mycket är $\frac{2}{5}$ av $7\frac{1}{2}$?

   Lösning: $\frac{2}{5} \cdot \frac{15}{2} = 3$

   Vi åskådliggör problemet genom att rita en sträcka $= 7\frac{1}{2}$ cm och dela denna i 5 lika delar.

2. Ex.: $\frac{3}{4}$ av ett tal är $4\frac{1}{2}$. Vilket är talet?

   a) Huvudräkning: $\frac{3}{4}$ av talet $= \frac{9}{2}$

   $\frac{1}{4}$ » » $= \frac{3}{2}$

   Talet $= \dfrac{4 \cdot 3}{2} = 6$ Prövning: $\frac{3}{4} \cdot 6 = 4\frac{1}{2}$

   b) Ekvationsräkning: $\dfrac{3x}{4} = \dfrac{9}{2}$

   $$\frac{x}{4} = \frac{3}{2}$$

   $$x = \frac{12}{2} = 6$$

   c) Åskådliggörandet kan, om man vill, ta form av geometrisk räkning: Avsätt en sträcka $= 4\frac{1}{2}$ cm. Dela den i 3 lika delar. Förläng den med en sådan del.

3. Ex.: Hur stor del är 8 av 20?

   Lösning: $\frac{8}{20} = \frac{2}{5}$

   Prövning: $\frac{2}{5} \cdot 20 = 8$

   Ex.: Hur stor del är $2\frac{1}{2}$ av 10?

   Lösning: $\dfrac{2\frac{1}{2}}{10} = \dfrac{5}{20} = \dfrac{1}{4}$

   Prövning: $\frac{1}{4} \cdot 10 = 2\frac{1}{2}$

   På en sträcka av 10 cm kan $2\frac{1}{2}$ cm avsättas 4 gånger.

   Ex.: Hur stor del är $\frac{2}{3}$ av $\frac{4}{5}$?

Analogivis får vi lösningen: $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{6}$

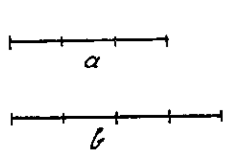
Prövning: $\frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2}{3}$

Eleverna genomskådar kanske ej helt lösningsmetoden. Prövningen visar emellertid att den är riktig.

Med de sista exempeln är vi inne på förhållandebegreppet.

Förhållande

Förhållandebegreppet brukar erbjuda vissa svårigheter. Åskådliga exempel är därför av nöden.



Vi har två sträckor, a och b, så stora att, när vi delar a i 3 och b i 4 lika delar, alla delarna blir lika. Vi säger då att a förhåller sig till b som 3 till 4, och att b förhåller sig till a som 4 till 3. Vi kan också säga att förhållandet mellan a och b är $\frac{3}{4}$ och att förhållandet mellan b och a är $\frac{4}{3}$, och vi menar därmed att a är $\frac{3}{4}$ av b och att b är $\frac{4}{3}$ av a.

Antag att var och en av delarna är 5 cm. Sträckan a är då 15 cm och sträckan b 20 cm. Vi får då förhållandet mellan a och b genom att dividera 15 med 20. Kvoten är $\frac{15}{20}$ vilket är detsamma som $\frac{3}{4}$. På samma sätt är förhållandet mellan b och a = $\frac{20}{15} = \frac{4}{3}$.

Vi kan också tala om förhållandet mellan ytor, volymer, vikter, tider och penningsummor, m. a. o. vad vi brukar kalla *storheter* av olika slag. Vi fastställer följande definition:

Förhållandet mellan två storheter är kvoten mellan deras mätetal, då mätetalen räknas i samma mått.

Vi förstår att det sista tillägget är nödvändigt. Hade vi mätt sträckan a i dm och sträckan b i cm, skulle ju kvoten blivit $\frac{3}{40}$.

Är det bara fråga om två *tal,* är förhållandet = talens kvot.

Förhållandet mellan 1 g och 1 kg är = 0,001, förhållandet mellan 1 kg och 1 g är 1 000.

I det första fallet anger förhållandet hur stor del 1 g är av 1 kg, i andra fallet anger det vilken mångfald 1 kg är av 1 g.

Procentbegreppet

I allmänhet brukar man inte ange förhållandet mellan två storheter som allmänt bråk. Det är inte alltid så lätt att jämföra två bråk. Skall vi avgöra vilket av bråken $\frac{5}{7}$ och $\frac{12}{17}$ som är störst, får vi göra dem liknämniga. Ett utmärkt sätt är att skriva alla bråk som hundradelar = procent. I vårt exempel är $\frac{5}{7} = 71{,}4\ \%$, $\frac{12}{17} = 70{,}6\ \%$.

Procentbegreppet tillhör mellanstadiets kurs. Eleverna vet alltså att procent betyder hundradelar. De har fått begreppet åskådliggjort på olika sätt t. ex. genom delning av en rektangel. Vi måste fortfarande ta åskådningen till hjälp. »Det hela» kan få vara 1 m på tavlan, 1 dm i arbetsboken.

Förut ha vi endast räknat med hela procenttal. Nu skall vi kunna skriva även andra procenttal som allmänna bråk:

Ex.: $\frac{1}{2}\ \% = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{100} = \frac{1}{200}$ eller $= 0{,}5 \cdot 0{,}01 = 0{,}005$.

Ex.: $3\frac{1}{2}\ \% = \frac{7}{200}$ eller $0{,}035$.

Här förvandlade vi från procent till allmänt bråk och decimalbråk. Det är viktigt att också omvändningen övas.

Ex.: Förvandla $\frac{1}{2}$ till procent.

Vi vet att en hel är lika med 100 %.

Bråket $\frac{1}{2}$ är alltså hälften av 100 % eller $\frac{1}{2} \cdot 100\ \% = 50\ \%$.

På samma sätt är $\frac{1}{3} = \frac{1}{3} \cdot 100\ \% = 33\frac{1}{3}\ \%$.

Eleverna lär sig regeln, att, när man vill förvandla ett bråk till procent, skall man multiplicera med 100.

På samma sätt, när antalet procent blir ett decimaltal, t. ex. $0{,}045 = 0{,}045 \cdot 100\ \% = 4{,}5\ \%$.

Det kan vara bra att veta att

$\frac{1}{2} = 50\ \%$, $\frac{1}{4} = 25\ \%$, $\frac{3}{4} = 75\ \%$, $\frac{1}{8} = 12{,}5\ \%$

$\frac{1}{3} = 33\frac{1}{3}\ \%$, $\frac{2}{3} = 66\frac{2}{3}\ \%$, $\frac{1}{6} = 16\frac{2}{3}\ \%$

$\frac{1}{5} = 20\ \%$, $\frac{1}{10} = 10\ \%$

Om man vill, kan man anordna en liten grupptävling, där det gäller att bedöma procent efter ögonmått. Ex.: På tavlan är ritade två linjer. Hur många procent är a av b?, b av a? Dela en linje så att en del blir en viss procent av hela linjen. Hur många procent är en viss sektor av hela cirkelytan? osv. Vid sådana tävlingar blir klassmedelvärdet ofta mycket nära det rätta värdet.

Promillebegreppet

Promille definieras som »tusendelar» och tecknas ‰. Begreppet behandlas och förklaras alldeles som procentbegreppet. Regeln att förvandla ett tal till promille genom multiplikation med 1 000 är även här närliggande.

Ex.: $0{,}0035 = 0{,}0035 \cdot 1\,000\ ‰ = 3{,}5\ ‰$.

Procent- och promilleräkning

Även här behandlas tre typer:

1. Ex.: **Hur mycket är $2\frac{1}{2}$ % av 560?**

Flera **uppställningar kan komma i fråga:**

a) $\dfrac{2{,}5 \cdot 560}{100}$ eller b) $0{,}025 \cdot 560$ eller c) $\dfrac{5 \cdot 560}{200}$

Ex.: Hur mycket är $\frac{2}{3}$ % av 600?

Här kan bråket ej exakt förvandlas till decimalbråk. Vi väljer därför uppställning c.

2. Ex.: 3 % av ett tal är 465. Hur stort är talet?

Lösning utan ekvation:

1 % av talet $= \dfrac{465}{3}$, talet $= \dfrac{465 \cdot 100}{3}$

Lösning med ekvation:

$\dfrac{3 \cdot x}{100} = 465$ eller $0{,}03\,x = 465$

3. Ex.: **Hur många procent är 26 av 650?**
Utan ekvation:
Vi uttrycker förhållandet mellan 26 och 650 som allmänt bråk och förvandlar detta till procent:

$\dfrac{26}{650} \cdot 100\ \% = 4\ \%$

Med ekvation:

$\dfrac{x \cdot 650}{100} = 26$, $x = 4$. Svar $= 4$ %

Promilleuppgifterna behandlas på samma sätt.
Tillämpningsproblem på procent- och promilleräkning hämtas från områden av för eleverna välkänd karaktär.

V. *Planimetriska och stereometriska beräkningar*

Förberedande fältmätningsövningar

Under höstterminen i 7:e klassen kan eleverna på friluftsdagar få syssla med en del av de fältmätningsuppgifter, som är upptagna i kursavsnitt X.

Ex.: Stegning, avståndsbedömning, indirekt avståndsmätning enligt någon enkel metod.

Tillverkning av en del för fältmätning behövlig enkel materiel kan vara en lämplig *överkursuppgift* för slöjdintresserade elever (se kursavsnitt X).

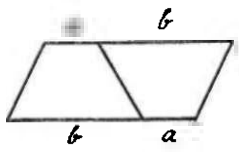
Rätliniga figurers ytor

Redan på mellanstadiet har eleverna beräknat ytorna av rektanglar, parallellogrammer och trianglar. Formlerna behöver emellertid repeteras och motiveras på nytt. Räkneexempel gives, bl. a. sådana där bas och höjd är angivna i olika sorter. Beräkna ytan av en brädbit, som är 7,3 dm lång och 75 mm bred; ytan av en planka, som är 6,5 m lång och 10 tum bred.

I skolan kan eleverna få till uppgift att rita t. ex. en spetsvinklig triangel med sidorna 6,5, 7,5, 7,0 cm, dra de tre höjderna med hjälp av vinkelhake och beräkna ytan på tre olika sätt. Eleverna kan även som *överkursuppgift* lära sig att rita de tre höjdlinjerna i en trubbvinklig triangel och beräkna dess yta på tre sätt. Alla bör veta att man kan räkna ut ytan av en rätvinklig triangel på två olika sätt.

I klassrummet ritar eleverna var för sig i sina böcker. Kontrollen kan bli besvärlig för läraren, men vid grupparbete kan den i viss utsträckning utövas av kamraterna i gruppen genom att dessa jämför varandras resultat. Har uppgiften varit att rita en triangel med givna mått på sidorna, kan en elev rita av sin triangel på genomskinligt papper och lägga »kalken» över kamratens trianglar. Stämmer inte trianglarna överens, måste åtminstone den ena vara felakligt eller mindre noggrant ritad. Läraren kan också låta en pålitlig elev klippa ut en »facittriangel» av tunn kartong, som de övriga kan jämföra sina trianglar med.

Även om eleverna i det nyss anförda exemplet ritar och mäter aldrig så noggrant, får de i regel något olika värden på ytan, allt efter som de väljer den ena eller andra sidan till bas. Denna och liknande erfarenheter får dem att förstå att alla mätningar är behäftade med större eller mindre fel.



Formeln för trapetsets (parallelltrapetsets) yta behöver man bl. a. när man skall mäta ytan av ett fält. Den vanliga metoden att härleda formeln genom att dela upp trapetset i två trianglar är alltför algebraisk. Bättre är att betrakta trapetset som hälften av en parallellogram, vars bas är summan av de parallella sidorna.

Eleverna bör även mäta någon yta utomhus. Man kan välja ett fält, som har form av en oregelbunden fyrhörning, där man mäter en diagonal och höjderna mot denna.

Cirkelns omkrets

Vad är förhållandet mellan omkretsen av en cirkel och dess diameter? Vi vet att radien kan gå runt periferien i 6 steg. Den inskrivna reg. sexhörningen har alltså en omkrets = 6 radier = 3 diametrar. Den omskrivna kvadratens omkrets är 4 gånger diametern. Cirkelns omkrets bör alltså vara mellan 3 och 4 gånger så stor som diametern.

Vi mäter cirklars omkretsar på olika sätt: vi rullar en rund ask ett varv längs en måttlinjal, lindar ett snöre flera varv runt en cylindrisk burk osv. Utomhus gör vi mätningar på tunnor och cykelhjul. Vi ritar en cirkelkvadrant med 7 cm radie, tar 1 cm i passaren och låter den spatsera från bågens ena ändpunkt till den andra. Vi finner bågens längd vara ungefär 11 cm och hela cirkelns omkrets alltså 44 cm. Förhållandet mellan omkrets och diameter är alltså ungefär $\frac{44}{14} = 3\frac{1}{7}$ eller ungefär 3,14. Vi skriver formeln

$$p = 3{,}14 \cdot d$$

Eleverna bör veta att 3,14 eller $3\frac{1}{7}$ endast är närmevärden. I samband härmed kan läraren berätta något om talet π och dess historia. Formeln kan sedan skrivas

$$p = \pi \cdot d = 2\,\pi \cdot r$$

Vi kan nu beräkna jordklotets radie, då vi känner dess omkrets, vi kan räkna ut längden av en meridiangrad, en distansminut och en distanssekund, vi kan beräkna längden av vilken båge som helst, då vi känner radien och gradtalet.

Cirkelns yta

Vi jämför cirkelns yta med kvadraten på radien. Cirkelns yta måste vara större än den inskrivna kvadratens, mindre än den omskrivnas. Vi vet alltså på förhand att den är mellan 2 och 4 gånger så stor som kvadraten på radien.

Vi ritar på $\frac{1}{2}$ cm rutpapper eller mm-papper en kvadrat med 10 cm radie och räknar rutorna i kvadranten. Delade rutor räknas som halva. Det sökta förhållandet blir nära 3,14. Är det en tillfällighet att vi får samma tal som när vi beräknade förhållandet mellan omkretsen och diametern?

Vi ritar en cirkel på färgat, gummerat papper, delar den i 12 lika sektorer, delar en av dem mitt itu längs en radie, klipper ut dem alla och klistrar upp dem bredvid varandra så att vi får en figur, som liknar en rektangel, vars höjd är lika med radien och vars bas är hälften av cirkelns omkrets. Hade vi delat cirkeln i flera delar, hade rektangeln blivit ännu bättre. Vi får cirkelns yta

$$y = \frac{p \cdot r}{2} = \frac{6{,}28 \cdot r \cdot r}{2} = 3{,}14 \cdot r \cdot r$$

Formeln kan även skrivas $y = \pi \cdot r^2$

Regelbundna månghörningar

När skall man säga att en månghörning är regelbunden? Vi finner att det bästa sättet att rita reg. månghörningar är att inskriva dem i en cirkel. Med passarens hjälp kan vi dela periferien i 3, 4, 6, 8, 12 lika delar. Vill vi ha en reg. femhörning, sätter vi i medelpunkten med gradskivans hjälp en vinkel på $\frac{360°}{5} = 72°$. Vi ritar några trevliga geometriska mönster.

För att ta reda på ytan av en reg. månghörning behöver vi bara mäta bas och höjd i en av deltrianglarna, räkna ut ytan och multiplicera med antalet.

Volymen av raka pelare

Eleverna är vana vid att beräkna volymen av raka pelare enligt formeln V = b · l · h. Har de inte gjort det förut, får de lära sig att formeln också kan skrivas V = B · h, där B betyder basytan, och att denna sista formel gäller för vilka pelare som helst.

Vi gör mätningar på träprismor och beräknar volymen. Vi mäter rymden av fyrkantiga askar, även sådana som vi själva gjort av stadigt papper. Resultaten kontrollerar vi genom att fylla asken med gryn och hälla innehållet i ett mätglas. Vi erinrar oss att 1 l = 1 dm^3 och att 1 ml = 1 cm^3.

Cylinderns yta och volym

Den buktiga ytan av en cylinder får vi reda på genom att lägga ett papper runt cylindern och mäta dess yta.

Om formeln $V = B \cdot h$ gäller för en pelare med hur många sidoytor som helst, borde den väl också gälla för cylindern? Vi mäter diametern och höjden i en cylindrisk plåtburk och räknar ut volymen enligt formeln. Så mäter vi den med mätglas och ser efter om det stämmer. Hemma mäter vi en cylindrisk mjölkflaska och kontrollerar med liter- och decilitermått.

Ellipsen

Skär man en rund korv snett, blir snittytan en ellips. De cirklar vi iakttar ter sig för oss i allmänhet som ellipser, t. ex. tallrikarna på ett bord. Vi lär oss att rita ellipser, i ritboken med tråd och häftstift, i trädgården med snöre och pinnar. Vi kan säga att cirkeln är en ellips, där axlarna är lika långa.

Vi ger som *överkursuppgift* formeln för ellipsens yta och räknar ut ytan av en elliptisk trädgårdsrabatt. Kan vi räkna ut ytan av en cirkel med ellipsformeln?

VI. *Algebra*

Formler

Hittills har vi använt bokstaven x för att beteckna ett okänt tal, som söktes. Vi kan också använda bokstäver för att beteckna vilka tal som helst.

Om en kvadrats sida är s cm och dess omkrets p cm, så är

$$p = 4s$$

Vi har härmed fått en *formel*, enligt vilken vi kan beräkna omkretsen av en kvadrat, då vi känner sidan. Är sidan s dm, blir omkretsen 4s dm. Likheten gäller, om vi mäter p och s i samma mått. Eleverna bör få klart för sig att p och s i formeln inte betyder sträckor utan tal.

När ett uttryck innehåller en eller flera bokstäver, som kan bytas ut mot tal, kallas det ett algebraiskt uttryck.

Ex.: Beräkna enligt formeln omkretsen av en kvadrat med 2,5 km sida.

Vi får $p = 4 \cdot 2{,}5 = 10$. Svar 10 km.

Man säger då, att man »utvärderat» formeln eller utrycket för $s = 2{,}5$.

I formeln skrev vi 4s i stället för $4 \cdot s$. Eleverna får lära att i algebran tecknet »gånger» ofta utelämnas. Produkten av a och b tecknas ab.

Ex.: Giv en formel för en kvadrats yta (y), då sidan (s) är given.

Man observerar att i formeln $y = s \cdot s$ är y och s uttryckta i olika men motsvarande mått.

I stället för $s \cdot s$ brukar man skriva s^2.

Likaså skriver man s^3 i stället för $s \cdot s \cdot s$. Termerna bas och exponent användes. Man jämför skrivsätten:

$$s + s + s = 3s \text{ och}$$
$$s \cdot s \cdot s = s^3$$

Ex.: Formeln för en kubs volym är $v = s^3$. Hur stor volym har en kub, vars sida är 10 cm? Utvärdering för $s = 10$ ger $v = 10^3 = 1\,000$. Kubens volym är alltså 1 000 cm³ = 1 dm³.

Ex.: Giv en formel för beräkning av räntan r på k kr efter p % under t år. Den kända formeln är:

$$r = \frac{kpt}{100}$$

Man kan också låta eleverna räkna med formler, som de ej kan härleda.

Ex.: Fahrenheitsgrader kan förvandlas till Celsiusgrader enligt formeln:

$$C = \frac{5(F - 32)}{9}$$

Ex.: Ett ungefärligt mått på rymden av en tunna ger formeln:

$$V = \frac{h(2D^2 + d^2)}{4}$$

där h är tunnans höjd, D dess största och d dess minsta diameter.

Utvärdering av formler ger nyttig övning i mekanisk räkning, samt förståelse av vad en formel är och tjänar till.

Addition och subtraktion av algebraiska termer. Parentesregler

När vi som i ett föregående exempel ersätter $s + s + s + s$ med 4s, utför vi en algebraisk addition.

Om en rektangels bas betecknas med b, dess höjd med h och dess omkrets med p, gäller formeln

$$p = b + h + b + h = 2b + 2h$$

I uttrycket $b + h + b + h$ kan b och h utbytas mot vilk tal som helst, men varje b i formeln måste bytas ut mot samma tal, likaså varje h.

Ex.: Går det att förenkla uttrycket $ab + cd + bc + ab + cd + ab + bc$?

När uttrycket skall utvärderas, måste alla a bytas ut mo samma tal, likaså alla b och alla c. Produkterna skulle hä kunna vara rektangelytor. I så fall får man, hur man äı ersätter bokstäverna med tal, tre typer av rektanglar me(ytorna resp. ab, bc och cd. Uttrycket kan alltså skrivas

$$3ab + 2bc + 2cd$$

Efter ytterligare klargörande exempel får eleverna öva addition och subtraktion mera mekaniskt och lära sig sammanslå likformiga termer.

Ex.: $4a^2b - a^2b + ab^2 + 4ab^2 - a^2b - 3ab^2 - ab^2$ reduceras till $2a^2b + ab^2$. Eleverna bör få klart för sig att det inte gåı att slå ihop termerna ab^2 och a^2b.

Parentesreglerna i kursavsnitt II genomgås åter.

Ex.: $3x^2 + 5y^2 - (2x^2 + 4y^2)$ förenklas till $x^2 + y^2$

Det är lämpligt att låta eleverna utvärdera uttrycken med användning av godtyckligt valda x- och y-värden. Sådana jämförande utvärderingar gör innebörden i de algebraiska förenklingarna mera påtagliga.

Innmultiplikation av en faktor

I kursavsnitt II har vi formulerat regler, som på formelspråk kan skrivas:

$$a(b + c) = ab + ac$$
$$a(b - c) = ab - ac.$$

Ex.: Förenkla uttrycket

$$8(2x + 5) + 6(x - 5)$$

Vid jämförande utvärdering väljer vi endast sådana x-värden, som gör faktorerna positiva. I ovanstående exempel bör alltså x-värdet inte vara mindre än 5.

Ex.: Förenkla $2x(y + 5) - x(y + 9)$

Ex.: Förenkla $8 \cdot \frac{x}{4} + \frac{x}{8} - 4 \cdot \frac{x}{2} - \frac{x}{4}$

Division av monom med monom. Förkortning av bråk

Endast mycket enkla uttryck behandlas.

Ex.: $ab : b = a$ och $\frac{ab}{b} = a$

Jämför med analoga aritmetiska uttryck!

Även förkortning av bråk, där täljaren är en produkt av er monom och ett flertermigt uttryck, övas.

Ex.: $\frac{5(3x+5)}{5}$ Ex.: $\frac{3\frac{1}{2} \cdot (x-6)}{3\frac{1}{2}}$

VII. *Ekvationslösning*

Eleverna har redan sysslat med ekvationslösning och löst enkla ekvationer med vad som kallas »aritmetisk» metod. De får nu lära den i det hela mera effektiva »algebraiska» metoden. Enligt denna får man den sökta storheten ensam på ena sidan om likhetstecknet genom att utföra samma räkneoperationer med talen på båda sidor om likhetstecknet. Sedan eleverna löst en ekvation får de pröva om det funna värdet »satisfierar» ekvationen. Ordet »satisfierar» behöver emellertid ej användas. Skillnaden mellan en ekvation och en algebraisk identitet uppmärksammas i detta sammanhang.

Även om ekvationslösning är huvudsaken i detta kursavsnitt bör dock belysande problem inte försummas. Eleverna kan själva hitta på problem till ekvationstyperna eller leta reda på sådana i en lärobok.

I den följande framställningen har bokstaven x alltid använts som symbol för den obekanta storheten. Läraren bör emellertid som överkursuppgifter låta eleverna lösa ekvationer även med andra symboler för den obekanta t. ex. y, z, m, n.

Ekvationer och identiteter

Ex.: $3(x + 5) = 3x + 15$ är en identitet, men
$3(x + 5) = x + 25$ är en ekvation.

Den förra likheten stämmer för varje värde på x, men den senare endast för $x = 5$. För alla andra värden på x blir i den senare likheten vänstra och högra ledet olika.

Man skulle kunna säga, att *identiteten innebär ett påstående* att vänstra och högra ledet är lika, vad än x må betyda för ett tal, medan *ekvationen är en fråga,* vilket värde på x som gör vänstra ledet lika med det högra. När man funnit ett sådant värde har man funnit en lösning till ekvationen. Man bör i detta sammanhang uppmärksamma att ekvationsbeteckningen kan innebära en orimlighet.

Ex.: $3(x + 5) = 3x + 5$

Här finns intet x-värde som gör vänstra ledet lika med det högra.

Vi ger i det följande ett förslag till lärogång genom en serie ekvationer.

Ekvationer I. Här är i stort sett fråga om ekvationer, som eleverna förut löst med aritmetisk metod. Inom varje moment ges såväl lättare som svårare exempel.

1. $x + 65 = 120$

Lösning: Vi kan få x ensamt på ena sidan likhetstecknet genom att minska med 65. Men då måste vi minska med lika mycket på andra sidan om likhetstecknet, om vi vill att talen fortfarande skall bli lika stora. Vi får $x = 55$ och prövar genom insättning: $55 + 65 = 120$.

När eleverna löst åtskilliga ekvationer på detta omständliga sätt, får de göra upptäckten att man kan »flytta över» en term från vänster till höger, om man ändrar tecken.

2. $x + 7{,}4 - 0{,}8 + 2{,}5 = 12{,}5 + 8{,}5$

Här reduceras först siffertermerna på vardera sidan.

3. $x - 17 = 85$

4. $x + 3{,}5 - 8{,}5 = 6$

Lösning: $x - 5 = 6$ osv.

Här har »fråndragningarna» vägt över »tilläggningarna». Någon stor svårighet behöver inte detta innebära, men det bör naturligtvis ordentligt redas ut. Benämningarna positiva och negativa tal användes fortfarande ej.

5. $75x = 900$

Lösning: $\frac{75x}{75} = \frac{900}{75}$ osv.

6. 3 1/[illegible] x = 17 1/[illegible]

Lösning: $\dfrac{3\frac{1}{2}x}{3\frac{1}{2}} = \dfrac{17\frac{1}{2}}{3\frac{1}{2}}$ osv.

Eleverna bör i det föregående ha förvärvat färdighet att räkna med dubbelbråk.

Sedan åtskilliga ekvationer av denna typ räknats omständligt förenklas:

7. $6{,}2x = 43{,}4$

$x = \dfrac{43{,}4}{6{,}2}$ osv.

8. $\dfrac{x}{92} = 40$

Lösning: $\dfrac{92x}{92} = 92 \cdot 40$ osv.

Även här mognar eleverna snart för förenklingen:

$\dfrac{x}{92} = 40$ Lösning: $x = 92 \cdot 40$ osv.

9. $x : 8 = 5$

Lösning: $\dfrac{x}{8} = 3$ osv.

10. $\dfrac{3{,}5x}{100} = 21$

Lösning: $3{,}5x = 100 \cdot 21$, $x = \dfrac{100 \cdot 21}{3{,}5}$

11. $\dfrac{4{,}625x}{100} = 12{,}5$

12. $3x + 6 = 18$

13. $2{,}5 \cdot (x + 2{,}8) = 20{,}5$

Här sker lösningen i tre etapper: inmultplikation, överflyttning, division.

Ekvationer II. Utöver ekvationstyperna i avd. I tages här upp ekvationer som för sin lösning kräver reduktion av x-termer.

1. $5x + 7x = 12$

Denna ekvationstyp innebär ingen svårighet, då eleverna redan sysslat med addition av likformiga termer.

2. $4{,}3x - 2{,}9x = 7$
3. $7 + 5x - 3x = 15 + 6$
4. $15 + 3\,(4x - 30) = 33$
5. $3\,(4x - 14) + 5\,(2x - 7) = 11$
6. $7x = 4x + 12$

Regeln är att samla alla x-termerna på vänstra sidan och alla de kända talen på höger sida om likhetstecknet. Att »överflyttningsregeln» kan användas även för x-termer, torde eleverna betrakta som självklart men bör till en början visas med några exempel.

7. $8x + 12 = 40 - x + 8$
8. $1{,}8x - (1{,}3x - 2{,}4) = 1{,}6 - (1{,}1x - 1{,}2)$
9. $14\,(2x - 1) + 4\,(8x - 7) = 3\,(10x - 9)$
10. $6 - x = 2$

Ett aritmetiskt resonemang visar genast att $x = 4$. Hur skall ekvationen lösas med algebraisk metod? Flyttar man över termerna på vanligt sätt får man

$$-x = 2 - 6$$

En utväg vore att flytta över x-termen till höger och samla de kända termerna till vänster om likhetstecknet. Man finge då: $6 - 2 = x$, alltså $4 = x$, vilket ju betyder att x är 4.

Emellertid är det lämpligt att lära eleverna att det mycket väl går för sig att flytta över termerna som vanligt. Vi får då $-x = -4$.

Denna likhet utsäger egentligen att »en fråndragning av x är lika med en fråndragning av 4», vilket ju innebär att $x = 4$. I samband härmed ges regeln att man alltid har rätt att ändra tecken för talen på båda sidor om likhetstecknet.

11. $81 - (4x + 4) - (x + 7) = 0$

Lösning: $81 - 4x - 4 - x - 7 = 0$

$70 - 5x = 0$

$-5x = -70,\ 5x = 70,\ x = 14$

12. $5(15 - 5x) - 16(7x - 4) = 9x - 7$

Ekvationer III. Ekvationer med siffertal i nämnarna. Nämnarna bortskaffas genom att ekvationernas båda led multpliceras med nämnarnas minsta gemensamma dividend. Exempel:

1. $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 30$

Lösning: $\frac{6x}{2} + \frac{6x}{3} = 6 \cdot 30$

$3x + 2x = 180$ osv.

Multiplikation av vänstra ledet med 6 bereder möjligen någon svårighet.

2. $\frac{5}{6} + \frac{11x}{12} - \frac{3}{8} = \frac{9}{16} - \frac{3x}{4}$

Lösning: $40 + 44x - 18 = 27 - 36x$ osv.

Eleverna vänjes att så som här skett omedelbart utföra förkortningsändringarna.

3. $4\frac{2}{3} + \frac{1}{6}x = 8 - \frac{1}{4}x$

Först förvandlas till oegentligt bråk och x sättes i bråkens täljare:

$\frac{14}{3} + \frac{x}{6} = 8 - \frac{x}{4}$

Sedan multipliceras med 12 osv.

4. $\frac{2x - 8}{2} = \frac{x + 4}{3}$

5. $\frac{5(11x - 2)}{3} - \frac{7(15x - 7)}{4} = 1$

Multiplikation med 12 och omedelbar förkortning ger $20(11x - 2) - 21(15x - 7) = 12$ osv.

6. $\frac{15x - 1{,}2}{0{,}9} - \frac{3{,}6 - 16x}{2{,}4} - \frac{3x - 1{,}3}{1{,}2} = 0$

Eleverna får rådet att först förlänga de enskilda bråken så att nämnarna blir hela tal. Därefter multiplicera med mgd.

alltså: $\frac{150x - 12}{9} - \frac{36 - 160x}{24} - \frac{30x - 13}{12} = 0$ osv.

7. $\frac{2x - 3}{2} \quad \frac{x - 1}{2\frac{1}{2}} \quad \frac{x - \frac{2}{3}}{4}$

I stället för $\frac{x - 1}{2\frac{1}{2}}$ skriver vi $\frac{2(x - 1)}{5}$

Ekvationer IV. Ekvationer med x i nämnare. Med aritmetisk metod har vi förut löst ekvationer av typen $\frac{a}{x} = b$.

Exempel:

1. $\frac{3}{x} + \frac{5}{x} = 4$

Multiplikation med x ger $3 + 5 = 4x$ osv.

2. $\frac{5}{x} - \frac{3}{2x} = 7$

Multplikation med 2x och förkortning ger

$10 - 3 = 14x$, $7 = 14x$, $0{,}5 = x$ eller $x = 0{,}5$.

Att här flytta över x-termen till vänster med åtföljande teckenförändring är naturligtvis onödigt.

3. $\frac{3x - 5}{x} = \frac{7x - 15}{4x} + 1$

4. $\frac{39 + 13x}{x} = 28$

VIII. *Problem av skilda slag lösta med ekvationsmetod*

Här kan ges enkla problem av många olika slag: ränte- och andra affärsproblem, medeltals-, blandnings-, bolags- och arbetsproblem, även planimetriska och stereometriska problem samt diverse problem utanför dessa rubriker. Vägledande för problemurvalet bör framför allt vara möjligheten att intressera eleverna för de uppgifter som ställes. Samma problem passar inte alla eleverna. Så långt som möjligt bör problemens svårighetsgrad anpassas efter de enskilda elevernas förmåga.

En viktig grupp är *ränteproblem* av olika slag, i vilka räntan, kapitalet, räntefoten eller tiden efterfrågas.

Ränteproblem

Med utgång från formeln $r = \frac{kpt}{100}$ blir ekvationsbehandlingen av alla dessa uppgifter enkel. Av vikt är att utgångsformeln är väl förstådd. I annat fall sjunker arbetet till en för låg nivå, och förmågan att lösa uppgifterna blir sannoligt ej varaktig. Man bör inte krångla till saken genom att låta eleverna lära sig särskilda formler för k, p och t. Möjligen kan man låta eleverna i klass 9 härleda sådana ur grundformeln.

Ex.: Ett kapital på 7 200 kr ger 105 kr i ränta på 5 månader. Efter vilken räntefot har räntan beräknats?

Då eleverna ställer upp ekvationen

$$\frac{5 \cdot 7\,200 \cdot x}{12 \cdot 100} = 105$$

bör de upprepa den tankegång, som ligger till grund för formeln, inte bara sätta in siffertalen.

I Skolöverstyrelsens metodiska anvisningar för klass 3^5 heter det: »*Affärsproblemen* böra i denna klass vara av enkel beskaffenhet. Svårigheten i en uppgift får ej ligga i en anhopning av affärstermer eller vara beroende av lärjungarnas förmåga att hålla isär sådana termer. Sammankoppling av t. ex. vinst och rabatt kan lämpligen anstå till följande klass.»

Dessa kloka ord behöver understrykas. Eleverna bör förvärva förtrogenhet med sådana affärstermer, som icke-yrkeskunnigt folk använder, men om andra termer förekommer i ett problem bör de förklaras. Uttryck som rabatt, vinst och förlust användes i dagligt tal, och eleverna skall lära sig använda dem på ett riktigt sätt. En sådan term som »pålägg» är en yrkesteknisk term, som bör förklaras, om den användes i ett problem. Men naturligtvis bör det i ekonomiläran klaras upp vad »vinst» är och att det är missvisande att säga att en affärsmans »vinst» på en vara är skillnaden mellan varans försäljningspris och inköpspris. Äldre läroböckers framställning var på denna punkt olämplig. En utredning av vad som i läroböckernas problem kan menas med »inköpspris» bör naturligtvis göras. Men eftersom termen »inköpspris» har en annan betydelse för yrkesmännen, ersättes det lämpligen med »självkostnadspris», som får omfatta alla kostnaderna för varan fram till försäljningstillfället.

Eleverna har då endast två likheter att handskas med: försäljningspriset (nettopriset) — självkostnadspriset = vinsten, och bruttopriset — nettopriset = rabatten.

Den kunskap, som ligger i dessa båda likheter, torde innefatta vad vanligt »bildat» men ej »yrkeskunnigt» folk sitter inne med. Vid vinstprocentproblem bör anges på vilken storhet procenten skall beräknas.

Lätta problem inom dessa områden kan även svaga elever lära sig klara.

Blandningsproblem

Ex.: 5 liter 96-procentig alkohol blandas med 15 liter 40-procentig alkohol. Hur många procent alkohol innehåller blandningen? (Det är tydligen här frågan om volymsprocent.)

En ekvation bygger på att någon storhet kan uttryckas på två olika sätt. I blandningstal är det mängden (vikten eller volymen) av något ämne. Här skall ekvationen uttrycka att mängden alkohol i den ena blandningsdelen plus mängden alkohol i den andra är lika med alkoholmängden i blandningen.

Ekvationen blir:

$$\frac{(5 + 15) \cdot x}{100} = \frac{5 \cdot 96}{100} + \frac{15 \cdot 40}{100}$$

Enligt anvisningarna till undervisningsplanen för läroverken behöver man där inte syssla med blandningstal, där halten anges i karat. Fortfarande är dock karat ett rätt mycket använt begrepp och får väl anses höra till »de allmänt förekommande matematiska uttryck», som eleverna skall göras bekanta med.

Ex.: Hur mycket koppar skall sättas till 90 g 20-karatsguld för att man skall få 18-karatsguld?

Ett sådant exempel bör dock inte ges i en provräkning utan att det förklaras vad som menas med karat.

Fördelningsproblem

Ex.: Två arbetare har utfört ett arbete på ackord och tillsammans fått 480 kr. Hur skall arbetsförtjänsten delas, då deras andelar skall förhålla sig som 2 till 3?

Att andelarna i detta »bolagsproblem» skall förhålla sig som 2 till 3 betyder att, om den ena får 2 kr, skall den andre ha 3 kr osv. Får den ene 2x kr, skall den andre ha 3x kr. Ekvationen alltså:

$$2x + 3x = 480; \quad x = 96$$

Svar: Den ene skall ha 2 · 96 kr = 192 kr, den andre 3 · 96 kr = 288 kr.

Mera komplicerade bolagsproblem behandlas först längre fram.

Andra enkla förhållandetal kan också ges:

Ex.: Då kol brinner, förenar det sig med syre i förhållandet 3 till 8. Hur mycket syre åtgår till förbränning av $1\frac{1}{2}$ kg kol?

Ex.: Vi har ett gammalt mjölkspann, på vilket det står $\frac{3}{4}$ kanna. Det rymmer nära 2 liter. Hur många liter är då en kanna?

IX. *Geometri*

Några av de i detta kursavsnitt upptagna satserna är kanske för svåra för vissa elever. Att märka är emellertid att satserna bör betraktas som övningsuppgifter och ej som läxuppgifter. De elever, för vilka arbetet med de föreslagna satserna dock är för tungt, sysselsättes lämpligen med geometriska repetitionsuppgifter.

Vinklar

Repetition av det på mellanstadiet genomgångna: varvets indelning i grader och nygrader, bäring, användning av gradskiva. Kontrollera att eleverna också kan avsätta och avläsa trubbiga vinklar. Termerna supplementvinklar och komplementvinklar införes.

Sidovinklar. Den vanliga figuren ritas i arbetsboken och under den skriver man: »Två sidovinklar är tillsammans = två räta = 180°».

Vertikalvinklar. I arbetsboken ritar vi två varandra skärande räta linjer och mäter de fyra vinklarna. Vi lägger ett genomskinligt papper över figuren, ritar av den ena vinkeln, sticker fast passarspetsen i skärningspunkten och vrider »kalken» ett halvt varv. Vi konstaterar att vinklarna täcker varandra och formulerar satsen: »Två vertikalvinklar är lika». Satsen skrives in under figuren.

Vinklar vid parallela linjer. Drar man en rät linje parallell med en annan genom att skjutsa en vinkelhake längs en linjal, litar man tydligen på satsen: »Om två likbelägna vinklar är lika, så är linjerna parallella». Vi ritar en ny linje, som skär de båda parallella och mäter ett par likbelägna vinklar. Vi ritar av den ena vinkeln på genomskinligt papper och skjuter den längs den skärande linjen så att den täcker den andra. Satsen att likbelägna vinklar vid parallella linjer är lika stora, formuleras och skrivs in tillsammans med omvändningen. Likaså satserna om alternatvinklarna och de motställda inre vinklarna. De sistnämnda satserna bör kanske betraktas som *överkursuppgifter.*

Triangels vinkelsumma

På mellanstadiet har eleverna mätt vinklarna i olika trianglar och räknat ut deras summa. De får nu göra om mätningen på en triangel, som ritats efter bestämda mått på sidorna. Resultaten tabelleras på tavlan.

Alla är nog övertygade om att 180° är det riktiga värdet, men finner det svårt att motivera varför summan skall vara just så stor. Här kan vi få ett exempel på hurusom en sats, som ej förefaller självklar, kan härledas ur andra, om vilkas sanning man är övertygad. Vi *bevisar* satsen med stöd av satsen om likbelägna vinklar.

Vi kan nu räkna ut en vinkel i en triangel, när vi känner de två andra. Vi vet att summan av de spetsiga vinklarna i en rätvinklig triangel är en rät. De är m. a. o. komplementvinklar.

Hur stor är summan av vinklarna i en fyrhörning? Vi mäter och finner summan nära 360°. Hade vi kunnat komma till detta resultat utan mätningar?

Duktigare elever kan få till uppgift att ta reda på vinkelsumman i månghörningar med ett större antal sidor och fundera på problemen: Hur stor är summan av en triangels, en månghörnings yttre vinklar?

Kongruenta trianglar

Redan förut har eleverna ritat trianglar efter mått, klippt ut dem och jämfört dem med andra trianglar, ritade efter samma mått. Nu skall vi gå mera systematiskt till väga och formulera de tre kongruenssatserna.

Eleverna får exempelvis till uppgift att rita en triangel med en vinkel = 58° och de omfattande sidorna = 5 cm och 7 cm.

Trianglarna klipps ut och jämföres. Det kan vara lämpligt att läraren har en faciltriangel på katedern. Vi formulerar satsen: Två trianglar är kongruenta, om de överensstämmer med avseende på en vinkel och de omfattande sidorna.

På liknande sätt övertygar vi oss om riktigheten av de bägge andra kongruenssatserna. Med dessa har vi fått tre olika metoder att avbilda en triangel i naturlig storlek.

Kongruenssatserna kommer till användning vid mätning i det fria. Vi kan bestämma avståndet till en otillgänglig punkt, och lösa andra intressanta uppgifter.

Är två fyrhörningar kongruenta, om de överensstämmer i alla fyra sidorna? En elev i varje grupp sammanställer en fyrhörning av pappersremsor, som fästes samman med »pappersfästare», som tjänstgör som gångjärn. Denna fyrhörning kan man forma om på hur många sätt som helst, men sätter man dit en femte remsa som diagonal, blir fyrhörningen bestämd både till form och storlek. Vi förstår att, när vi skall kartlägga ett fyrkantigt fält, räcker det inte med att mäta sidorna.

Symmetri

Redan i föregående klass har vi talat om symmetriska figurer. De är så beskaffade att, om man viker figuren längs en viss rät linje (symmetriaxel), så kommer figurens bägge delar att täcka varandra. Med en spegel på symmetriaxeln kan vi få en hel figur av en halv.

Vi kan också tala om figurer, som har symmetriskt läge. Rita en vägg med symmetriskt upphängda tavlor!

Vi ritar på rutpapper en begränsad rät linje AB och dess *mittnormal.* Vi väljer ut punkter på normalen och jämför deras avstånd från A och B. Vi konstaterar att punkter på ena sidan om mittnormalen ligger närmare A, punkter på andra sidan närmare B. Det är tydligt att, om en punkt ligger lika långt från A som från B, så måste den ligga just på mittnormalen till AB. Vi viker papperet längs mittnormalen och konstaterar att den är symmetrilinje till AB.

På skolgården kan vi markera en sträcka med ett par pinnar, staka ut mittnormalen och spänna snören från punkter på normalen till sträckans ändpunkter.

Till sist formuleras och antecknas satsen om mittnormalen jämte omvändning.

Vi klipper ut en *likbent triangel*. Vi ser att den har en symmetriaxel. Viker vi kring denna, faller basvinklarna p varandra. Dessa är alltså lika stora. Vi ritar en triangel dä basvinklarna är lika och finner att den blir likbent. Bägg satserna formuleras.

Konstruktioner

Mittnormalens egenskap av symmetrilinje ger uppslag til lösningen av ett par grundläggande konstruktionsproblem att med passare och linjal dela en sträcka mitt itu oc att rita en normal till en linje från en punkt på eller uton linjen. Av symmetrin framgår också riktigheten av den van liga konstruktionen för att dela en vinkel mitt itu. Med et snöre löses samma uppgifter på skolgården.

Vi kan nu utan gradskiva konstruera vinklar på 45°, 30° 15° osv. Vi kan själva finna på lösningen till problemet at flytta en vinkel och t. o. m. bevisa lösningens riktighet me hjälp av 2:a kongruenssatsen.

Dela två sidovinklar mitt itu. Hur stor är vinkeln mella delningslinjerna?

Tre punkter på papperet utmärker tre hus. Ägarna vil anlägga en gemensam brunn. Ingen vill ha längre till brun nen än någon annan. Var skall brunnen grävas?

Eleverna brukar också vara intresserade för att genom kon struktion i lämplig skala lösa uppgifter som denna:

Från en ångbåt observeras en fyr i bäring 30° på ett av stånd av 4 nautiska mil. Ångarens kurs är 62°. Hur nära fyren kommer båten att passera? (Kursvinklarna räknas från norr över öster.)

Parallellogrammen

Parallellogrammer kan vi rita på olinjerat papper me hjälp av vinkelhake och på rutpapper genom att samman binda lämpligt belägna ruthörn.

Att låta eleverna genom mätning övertyga sig om att mot stående sidor är lika långa är ingen idé, eftersom det int finns någon, som tvivlar på saken. I stället åskådliggör v saken så: Vi ritar en parallellogram med dess diagonaler p genomskinligt papper, sätter passarspetsen i diagonalerna skärningspunkt och vrider kalken ett halvt varv. Motstående sidor faller då på varandra, likaså motstående vinklar och man ser vidare att diagonalerna delar varandra mitt itu. Vi formulerar satserna.

Nu faller det sig naturligt att göra en del undersökningar. Kan vi påstå att en fyrhörning är en parallellogram, om man vet att motstående sidor är parvis lika stora? En elev i gruppen kan få i uppdrag att av fyra pappremsor med pappersfästare som gångjärn sammanställa en fyrhörning, där motstående sidor är lika. Vi finner att, hur vi än ändrar figurens form, så förblir den en parallellogram.

Överkursuppgifter: Kan vi påstå att en fyrhörning är en parallellogram a) om två motstående sidor är lika stora och parallella; b) om diagonalerna skär varandra mitt itu?

Vi erinrar oss definitionerna på rektangel, romb, kvadrat. Vi konstaterar att diagonalerna i en rektangel är lika långa och att diagonalerna i en romb är vinkelräta mot varandra (den ena diagonalen måste ju vara mittnormal till den andra).

Rita en romb genom att rita längs bägge kanterna av en linjal. Rita på rutpapper en romb, som »står på hörn». Rita en rektangel genom att dra ett par diametrar i en cirkel och sammanbinda ändpunkterna.

Hur många symmetriaxlar har en kvadrat, en romb, en rektangel, ett likbent trapets?

Parallella linjer har vi förut ritat med linjal och vinkelhake. Nu tar vi upp frågan hur vi med passarens hjälp skulle kunna lösa uppgiften att genom en given punkt dra en rät linje parallell med en annan given. Eleverna föreslår olika metoder. Parallellogram- och rombmetoderna förefaller vara de bästa. Det återstår att lösa samma uppgift utomhus. Förslag väcks att med korstavla avsätta lika långa normaler. Rombmetoden kan också användas, om man tar ett snöre till hjälp osv.

Som lämplig *överkursuppgift* skulle kunna rekommenderas ett studium av kapitlet parallellogrammer i Sjöstedts: Lärobok i Geometri. Där kan de intresserade se hur satserna om parallellogrammen kan bevisas med hjälp av kongruenssatserna. De kan därigenom få någon föreställning om hur ett geometriskt system uppbygges av satser, som härledas ur andra satser.

Cirkeln

De flesta satserna på kapitlet cirkeln är självklara och behöver inte bevisas.

Satserna att i en cirkel lika bågar upptar lika kordor och tvärtom kan omnämnas och formuleras. Satserna åskådliggöres med hjälp av genomskinligt papper och vridning. Försöket visar samtidigt cirkelns egenskap att kunna glida runt i sig själv.

Att en kordas mittnormal går genom medelpunkten följer av vad vi vet om mittnormalens egenskaper. Satsen bör formuleras. Den ger en metod att finna medelpunkten i en cirkel, när denna är okänd.

Man lägger märke till att en korda är större ju närmare medelpunkten den befinner sig och att alltså diametern är den största kordan.

Tangenten definieras som en rät linje, som går genom en radies ändpunkt vinkelrätt mot radien. Att lära eleverna att enligt konstens regler dra en tangent till en cirkel från en utombelägen punkt förefaller onödigt. Att de bägge tangenterna är liga långa framgår av symmetrin.

Satsen, att omkretsvinkar på samma båge är lika, är svår att bevisa fullständigt och bör uppskjutas till 9:e klassen. Dock kan man ta med den s. k. Tales' sats om vinkeln i en halvcirkel. Den har en viss praktisk användning. Man kan som *överkursuppgift* ge följande bevis:

Vi övertygar oss först om att en fyrhörning, där diagonalerna är lika långa och delar varandra mitt itu, är en rektangel. Vill vi nu visa att vinkeln ABC i en halvcirkel är rät, drar vi diametern BD och linjerna DA och DC. ABCD är då en rektangel och vinkeln ABC alltså rät.

Likformiga trianglar

Vi har alla ett medfött sinne för likformighet. Det faller sig lika naturligt att avbilda en figur »i skala» som i naturlig storlek. Undersöker vi närmare två månghörningar, som »vi ser» är likformiga, finner vi att de överensstämmer i fråga om vinklarna. Vi kan säga att de är »ensvinkliga». Termen användes i Norge och Danmark och är bättre än den tvetydiga termen »likvinkliga». Betraktar man den ena figuren som en förstoring av den andra, är det vidare tydligt att alla sidor i den första är förstoringar av motsvarande sidor i den andra i samma skala.

Vi ritar och klipper ut två trianglar, som har en vinkel lika men där de omfattande sidorna i den ena är t. ex. $2/3$ av motsvarande i den andra. Vi lägger trianglarna över varandra och konstaterar att trianglarna är ensvinkliga och att även den tredje sidan i den mindre är $2/3$ av motsvarande i den större. Den mindre triangeln är en avbildning av den större i skalan $2/3$, den större av den mindre i skalan $3/2$.

På liknande sätt studeras de bägge andra likformighetsfallen. Vi formulerar endast det sista: »Ensvinkliga trianglar är likformiga».

Eleverna har redan förut »ritat i skala», varvid t. ex. 1 cm fått motsvara 100 m. Nu införes termen »längdskala» såsom förhållandet mellan en sträcka på bilden och motsvarande i originalet. Skalorna i kartboken och biologiboken studeras.

På ett fyrkantigt fält mäter vi sidorna och en diagonal. Så ritar vi en karta över fältet, sedan vi kommit överens om lämplig skala. Till kontroll kan vi mäta även den andra diagonalen på fältet och på kartan se efter om det stämmer. Vi använder oss av likformiga trianglar för indirekt mätning av avstånd och höjder. Vi kan sikta med pappskivor och knappnålar. Med gradskiva mäter vi synvinklar och höjdvinklar.

X. *Fältmätning*

Vid övningar i fältmätning får eleverna praktisk användning för sina geometriska kunskaper. Övningarna förlägges lämpligen till höstterminens början (8:e skolåret). På landet är då skörden bärgad och man har lämpliga fält till sitt förfogande. Varje grupp bör vara utrustad med måttband eller lantmätarkedja, korstavla, ett antal stakar och trästickor. Det är roligt med rediga doningar, som tar sig något ut, men man kan gott reda sig med hemmagjord materiel. Mätningar kan man göra med ett mätsnöre (10 m) med märken för var meter, till stakar kan man ta unga raka avskalade granstammar och korstavlan kan man också göra själv. Vill någon göra en avvägning hemma på gården, kan han tillverka ett enkelt avvägningsinstrument (överkursuppgift).

Gäller det bara en kartskiss eller en ungefärlig uppmätning, kan man nöja sig med att stega sträckorna. Observera att steglängden måste uppmätas på nytt varje termin. Man tar reda på hur många dubbelsteg man tar på 100 meter (går sträckan flera gånger och tar medeltal). Det är också bra att ha reda på sin »kilometertid» på väg och i terräng. Under friluftsdagarna tränar vi avståndsbedömning. Vi uppskattar avståndet, innan vi stegar det, stegar det innan vi mäter det. Hur brett är ett dike, hur bred en åker, hur högt ett staket, hur långt är det till skogsbrynet? På friluftsdagarna kan vi anordna tävlingar. Inte bara läraren utan också eleverna kan finna på trevliga uppgifter.

Kartläggningsuppgifterna bör inte vara för komplicerade Man kan använda olika metoder.

Triangelmetoden är bra, när det gäller att få in ett områdes konturer. Man delar in fältet i trianglar och mäter sidorna i var och en av dessa. Först gör man en skiss av området och sätter ned stickor eller stakar i de punkter, som man vill ha med på kartan.

Vid koordinatmätning väljer man en baslinje och fäller med hjälp av korstavla normaler mot basen från olika punkter. Fältet blir sålunda indelat i trapets och trianglar.

Vid grafisk mätning placeras ett bord, belagt med ett slätt papper, någonstädes i mitten av det område, som skall kartläggas. En punkt på papperet väljes till likställighetspunkt och linjer ritas ut i riktning mot de punkter, som skall med på kartan. Man har sedan att mäta avstånden till dessa från centrum.

Kartan förses med skala och norrstreck. Den ritas snyggt och omsorgsfullt och färgläggas med vattenfärg.

Hur högt är ett träd? Det finns åtskilliga metoder att välja på. Alla grundar sig på användning av likformiga trianglar. Intresserade kan göra sig en enkel höjdmätare.

Ibland stöter vi på speciella problem. Vi håller på att staka ut en rät linje men stöter på ett hinder. Hur skall vi kringgå det? Eller: Hur skall man bära sig åt för att kartlägga ett område, som till större delen är bevuxet med skog, som hindrar sikten?

Indirekt avståndsmätning blir aldrig tråkig. I sjön ligger en holme, som vi brukar simma ut till. Hur långt är det dit? En grupp åtar sig kanske att mäta avståndet direkt över isen, när det blir vinter. Då får vi se hur noggranna våra indirekta mätningar var. En annan grupp kanske också förklarar sig villig att slå hål på isen, loda och mäta vattendjupet på skilda ställen längs en rät linje. Med hjälp av siffrorna kan hela klassen rita en profil med olika skalor för avstånd och djup. Får eleverna komma fram med förslag behöver man aldrig befara brist på fältmätningsuppgifter.

XI. *Algebraiska räkningar*

Utbrytning av gemensam faktor. Förkortning av bråkuttryck

Eleverna har förut lärt sig att multiplicera in en faktor i en parentes. Omvändningen erbjuder ringa svårighet.

Vi börjar med sifferfaktorer:

Ex.: $6a + 4b = 2(3a + 2b)$

Övergår därefter till bokstavsfaktorer:
Ex.: $ab + ac = a(b + c)$

När vi bryter ut en faktor, skall vi alltså dividera varje term i uttrycket med faktorn.

Ex.: $a^2b + abc - ab^2 = ab(a + c - b)$

När vi skall förkorta ett bråk, delar vi först upp täljare och nämnare i faktorer. Försumma inte att genom utvärdering av det ursprungliga och det förenklade uttrycket konstatera deras likvärdighet!

Ex.: $\dfrac{a^2b + ab^2}{abc + b^2c} = \dfrac{ab(a + b)}{bc(a + b)} = \dfrac{a}{c}$

Vid utvärderingen får man aldrig sätta in sådana värden på bokstäverna, att en nämnare blir noll. Ett sådant uttryck saknar mening.

Multiplikation av binom med binom

Eleverna har förut lärt sig att multiplicera binom med en monom. Hur multiplicerar man två binom?

Är problemet att utföra multiplikationen $(5 + 3) \cdot (4 + 2)$, är uppgiften lätt. Då räknar vi först ut parenteserna. Men vad blir $(a + b) \cdot (c + d)$? Här kan vi inte utföra de tecknade additionerna. Hur skulle sifferexemplet räknas, om vi inte fick slå samman 5 och 4, 4 och 2?

$(5 + 3) \cdot (4 + 2) = 5 \cdot (4 + 2) + 3 \cdot (4 + 2) = (20 + 10) + (12 + 6) = 20 + 10 + 12 + 6 = 48$

Samma resultat får vi, om vi räknar ut produkten $8 \cdot 6$.

På samma sätt skulle vi kunna multiplicera bokstavsbinomen: $(a+b)(c+d) = a(c+d)+b(c+d) = ac+ad+bc+bd$

Vad blir resultatet, om någon term har minustecken?

Vi beräknar produkterna $(a + b)(c - d)$ och $(a - b)(c - d)$ och ser efter om resultaten stämmer, när vi sätter in talvärden på bokstäverna.

Vi finner regeln: Varje term i den ena binomen multipliceras med varje term i den andra. Lika tecken ger plus, olika tecken ger minus.

Med hjälp av regeln utföres enkla algebraiska räkningar, och riktigheten kontrolleras allt emellanåt genom utvärdering.

Formeln för $(a + b)(c + d)$ kan belysas både aritmeti: och geometriskt. Den vanliga tekniken vid multiplikation hela tal är ju en tillämpning av formeln och geometris åskådliggöres densamma av figuren:

d	ad	bd
	ac	bc
	a	b

Kvadrerings- och konjugatformlerna

Multiplicering enligt reglerna ger oss de tre formlerna:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Eleverna tycker att formlerna är intressanta, om de får a vända dem till att hitta på genvägar i huvudräkning. Vet m att $25^2 = 625$, är det lätt att räkna ut 26^2, 24^2, $24 \cdot 26$. De k få härleda och tillämpa regeln:

$$a^2 = (a + 5)(a - 5) + 25$$

Eleverna kan själva tolka den första formeln geometrisl De bägge andra ges utan geometrisk tolkning.

Kastar vi om leden i de tre likheterna, får vi formler f uppdelning i faktorer. Vi tillämpar dem endast på siffert tryck. Ex.: $75^2 - 4^2 = 79 \cdot 71$. $99^2 - 98^2 = 197 \cdot 1$

I formlerna kan vi byta ut a och b mot andra bokstäve I övrigt tillämpar vi icke formlerna på bokstavsuttryck.

Som *överkurs* kan ges en mera omfattande tillämpning reglerna t. ex. på uppgifter om dessa:

Uppdela i faktorer a) $16x^2 + 40x + 25$ b) $27x^3 - 3x$

XII. *Ekvationslösning*

Enkla ekvationer med användning av binommultiplikation

Ex.: $x^2 + 5x - 2 = (x + 1)(x + 2)$

Lösning: $x^2 + 5x - 2 = x^2 + 2x + x + 2$

$x^2 + 5x - 2 = x^2 + 3x + 2$

$2x = 4$

$x = 2$

Reduktion av x^2-termer möter ej större svårighet än reduktion av x-termer.

Ex.: $3x + (x - 1)(x - 6) = x^2 - 30$

$3x + x^2 - 7x + 6 = x^2 - 30$

$-4x = -36$

$4x = 36x \quad x = 9$

Svårare ekvationer än dessa bör inte här förekomma. De hela talen kan dock ersättas av bråktal.

Ekvationer med binom i nämnarna utan binommultiplikation (Överkursuppgift)

Ex.: $\dfrac{2x - 3}{x - 5} = 9$

$\dfrac{(x - 5)(2x - 3)}{x - 5} = 9(x - 5)$

$2x - 3 = 9x - 45$ osv.

Här förutsättes att detta slag av förkortningar förut övats. Eleverna vänjes vid att utföra förkortningen i huvudet och får efter ekv.

$\dfrac{2x - 3}{x - 5} = 9$ omedelbart skriva $2x - 3 = 9(x - 5)$

Ex.: $\dfrac{x}{5 - x} = 2 - \dfrac{3x - 7}{10 - 2x}$

Vi mutiplicerar med $2(5 - x)$:

$\dfrac{2(5 - x)x}{5 - x} = 2 \cdot 2(5 - x) - \dfrac{2(5 - x)(3x - 7)}{2(5 - x)}$

Denna uppskrivning överhoppas snart och vi skriver direkt:

$2x = 4(5 - x) - (3x - 7)$

Ex.: $\frac{5x}{3x + 21} + \frac{9 - 2x}{x + 7} = 1 - \frac{3x + 5}{7x + 49}$

Alla termerna multipliceras med $3 \cdot 7 \cdot (x + 7)$ osv.

Ekvationer med x i nämnarna, som kräver multiplikation binom för lösningen (överkursuppgift)

Ex.: $\frac{x - 1}{x + 1} + \frac{2x - 1}{x - 1} = 3$

Multiplikationerna utföres utan användning av kvadrering och konjugatreglerna:

$$-x = -3, \quad x = 3$$

Förenklingar vid räkningen

För de flesta eleverna är det nog bäst, om de strikt håll sig till de inlärda räknereglerna och inte inlåter sig på någ operationer, som de känner sig osäkra på. De duktigare k ibland upptäcka genvägar.

Nära till hands ligger förenklingar som dessa:

Ex.: $0{,}672x + 1{,}3 = 1{,}97x + 0{,}002$

Vi övergår från decimalbråk till hela tal genom att mult plicera med 1000, då ekvationen får det trevligare utseende

$$672x + 1300 = 1970x + 2$$

Ex.: $3{,}14 \cdot 24x + 3{,}14 \cdot 288 = 576 \cdot 3{,}14$

En elev, som löst denna ekvation med utförande av al multiplikationerna, blir nog generad, när man påpekar a man kan dividera alla termerna med 3,14 och så få den enl lare ekvationen:

$$24x + 288 = 576$$

En förenkling, som inte är tillrådlig, är invertering av talc på båda sidor om likhetstecknet.

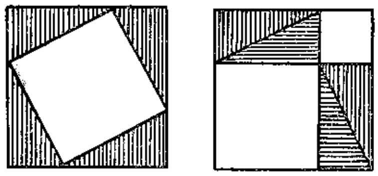
Ex.: $\frac{1}{x} = \frac{3}{7} \quad x = \frac{7}{3}$

Det ligger då nära till hands att tro att man får behandl ekvationen $\frac{1}{x} + \frac{1}{2x} = \frac{3}{7}$ på samma sätt: $x + 2x = \frac{7}{3}$

XIII. *Pytagoras' sats. Begreppet kvadratrot*

Det kan inte bli fråga om något strängt bevis för Pytagoras' sats. Men den bör på något sätt åskådliggöras, så att eleverna blir övertygade om dess giltighet. T. ex. så:

I arbetsboken (gärna på rutigt papper) ritar vi två lika stora kvadrater bredvid varandra och omger dem med en färgad ram. Så klipper vi av färgat, gummerat papper 8 kongruenta trianglar, där kateternas summa är lika med kvadratsidan. Vi klistrar upp trianglarna som i fig.



I ena fallet blir den återstående vita ytan = kvadraten på hypotenusan, i andra fallet kommer den att bestå av kvadraterna på kateterna.

Vi kan också roa oss med att lägga ett pytagoreiskt puzzle. Vi utgår från den vanliga figuren med utåtriktade kvadrater, ritar ut den i boken och gör två kopior av vartdera katetkvadraten, klipper sönder dem i lämpliga bitar och lägger dem så att de fyller ut hypotenusakvadraten.

Det är inte mycket bevänt med att känna till satsen, om man inte får använda den på enkla problem. Vi kan t. ex. rita rätvinkliga trianglar med kateterna 3 och 4 eller 6 och 8 eller 5 och 12 cm, räkna ut hypotenusan och se efter om det stämmer.

Begreppet *kvadratrot* införes. Om eleverna får till sitt förfogande en tabell över de 99 första hela talens kvadratrötter, kan de lösa sådana problem som att räkna ut ytan av en triangel med sidorna 7, 7, 6 cm, höjden i en liksidig triangel med 6 cm sida, ytan av en reg. sexhörning med 4 cm. sida.

Kursavsnittet lämpar sig för *överkursuppgifter.*

XIV. *Pyramiden, konen, klotet*

Skolan brukar ha ett plåtkärl i form av en *pyramid* med kvadratisk bas och ett annat i form av en pelare med samma kvadratiska bas och samma höjd som pyramiden. Man kan fylla det mindre kärlet med vatten tre gånger i följd och hälla innehållet i det större.

Ett *koniskt* kärl jämföres på samma sätt med ett cylindriskt med lika stor bas och lika stor höjd.

I bägge fall gäller formeln $V = \frac{B \cdot h}{3}$

Duktigare elever kan också få formeln för den stympade konens volym och mäta rymden av en vattenhink. Resultatet kontrolleras med litermått. De kan också få veckla ut konens yta till en sektor och beräkna dennas yta enligt formeln

$$Y = \frac{b \cdot r}{2}$$

Eleverna får veta att man kan bevisa att *ytan av ett klot* är 4 gånger ytan av storcirkeln. $(= 4 \pi r^2)$.

För att få reda på *klotets volym* gör vi ett experiment. I materielsamlingen brukar finnas ett ihåligt klot av plåt, som kan skruvas i sär i två halvklot. Ett av dessa jämföres på ovan beskrivna sätt med en cylinder, vars höjd och basdiameter är lika med klotets diameter. Vi finner att cylindern rymmer lika mycket som tre halvklot. Hela klotets volym är alltså ⅔ av volymen av en cylinder, som är just så stor att klotet kan stoppas ned i den. Härav härledes formeln:

$$V = \frac{4 \pi r^3}{3}.$$

På en jordglob studerar vi jordklotets geometri: meridianer och paralleller. Hur går kortaste flygvägen New York—Tokio? Hur lång är den? Vi mäter med ett snöre, vars längd vi avläser på ekvatorn.

Man kan gärna rita ytnät och klistra ihop några kartongmodeller av enkla kroppar. En grupp kan få göra en tresidig pyramid, en annan en fyrsidig osv. Olika grupper kan göra koniska ytor av cirkelsektorer på 90°, 180°, 270°.

XV. *Grafisk framställning. Grafisk lösning av problem*

Man studerar olika metoder att åskådliggöra storheter och diskuterar korrekthet eller lämplighet. Om t. ex. en storhet fördubblats och detta åskådliggöres med två personer av vilka den ene är dubbelt så lång som den andre är det tydligen en felaktig form av grafisk framställning. Likaså om ökningen av kaffeförbrukning åskådliggöres med kaffekittlar ritade i en längdskala som är i överensstämmelse med ökningen.

Såväl stapel- som kurvdiagram användes. Interpoleringsuppgifter behandlas och diskuteras. Ordet »interpolering» är ej nödvändigt. Enkla priskurvor i form av räta linjer ritas och användes för avläsning dels av priset för en given mängd och dels av den mängd som fås för givet pris.

Vägproblem kan behandlas grafiskt. Man kan t. ex. grafiskt ta reda på mötesplats och mötestider. Man kan studera och fundera över en grafisk framställning av en resa.

XVI. *Förhållandebegreppet. Problem av skilda slag*

Förhållandebegreppet. Problem på direkt proportionalitet

Förhållandebegreppet har redan behandlats i kursavsnitt IV. Senast hade vi anledning att räkna med förhållanden, när vi sysslade med likformiga figurer. I matematiken betyder *förhållande* ett tal, som anger vilken mångfald eller vilken bråkdel en storhet är av en annan, alltså kvoten mellan storheternas mätetal.

Detta matematiska begrepp har en utomordentligt stor betydelse i dagligt liv. Att *mäta* är att bestämma förhållandet mellan en viss storhet och en annan storhet av samma slag, som man bestämt sig för att taga som mått. Att en bjälke är 7,3 m betyder att den är 7,3 gånger så lång som en viss stav i riksarkivet, som vi kallar meter. Förhållandetalet 7,3 kallas bjälklängdens *mätetal*.

Förhållandet mellan en sträcka på kartan och motsvarande sträcka i verkligheten kallas kartans *längdskala*.

Procent och promille är förhållandetal.

Om det i en kokbok rekommenderas att till plättar ta 2 delar mjölk och en del grädde, är det också fråga om förhållande i matematisk mening.

Eleverna kan hitta på flera exempel.

Vi har åskådliggjort förhållandet mellan två eller flera storheter med stapeldiagram, där staplarnas höjd förhållit sig till varandra som storheterna i fråga eller som man säger varit proportionella mot dessa. Det enklaste är att åskådliggöra med sträckor.

Har eleverna klart för sig vad som menas med att två sträckor förhåller sig som 3 till 4, bör de själva kunna komma på metoden att dela en sträcka i två delar, som förhåller sig som 3 till 4. De ser att sträckan bör delas i 7 lika delar och att den ena delen är $\frac{3}{7}$, den andra $\frac{4}{7}$ av hela sträckan.

Det kan vara nyttigt att grundligt gå igenom ett sådant delningsproblem och diskutera olika metoder att lösa det.

Ex.: Två arbetare A och B erhåller för ett arbete 420 kr De skall fördela summan mellan sig i förhållande till sin timlöner. A:s timlön är 3 kr, B:s 4 kr. Hur skall summan för delas.

Följande metoder kanske föreslås:

1. En aritmetisk metod ligger kanske närmast till hands. V delar 420 kr i 7 lika delar, ger 3 sådana åt A och 4 åt B.

Med ekvation kan vi lösa problemet på olika sätt:

2. Antag att A får x kr. Då får B (420 — x) kr. Ekv:

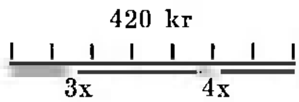
$$\frac{x}{420 - x} = \frac{3}{4}$$

3. A:s del skall tydligen vara ¾ av B:s. Om B får x kr, skal

alltså A ha $\frac{3x}{4}$ kr. Ekv: $x + \frac{3x}{4} = 420$

4. Antar vi att var och en av de små delarna i fig. representerar x kr, får A 3x kr och B 4x kr. Ekv:

$$3x + 4x = 420$$



Härmed är vi i själva verket tillbaka till vår första huvudräkningsmetod.

Den sista metoden är användbar även när det gäller delning i flera delar.

Ex.: Tre personer har köpt en lott tillsammans. A har betalat 3 kr, B 4 kr, C 5 kr. Hur skall en vinst på 1500 kr fördelas?

Några särskilda problemslag

Problemslagen är i stort sett detsamma som behandlats förut. Men allt eftersom elevernas förmåga växer, kan svårare uppgifter ges. En grupp av problem, som brukar intressera eleverna är *rörelseproblem av olika slag.*

Alla vet att framme på instrumentbrädan i en bil brukar det finnas både vägmätare, hastighetsmätare och klocka. Om vi kört 150 km på 3 timmar, säger vi att hastigheten varit 50 km i timmen (50 km/tim.).

Hastighetsmätaren har emellertid visat att farten i själva verket varierat rätt mycket. Det är *medelhastigheten*, som varit 50 km/tim. Vi hade kommit fram lika fort, om vi hela tiden kört med just denna hastighet. Bilens rörelse hade då varit *likformig*. I våra problem räknar vi alltid med medelhastigheten, förutsätter alltså att rörelsen varit likformig.

Vi diskuterar olika sätt att ange hastigheten och övar förvandlingar från km/tim till m/min, från knop till km/tim osv.

Vi börjar med enkla problem, där *hastigheten* efterfrågas.

Ex. Snälltåg nr 24 avgår från Krylbo kl 23.47 och ankommer till Storvik kl 0.33. Vägen Krylbo-Storvik är 57 km. Hur stor är tågets medelhastighet på denna vägsträcka, uttryckt i meter per sekund?

Denna uppgift löstes av 85 % av realexamensaspiranterna. Annars är nästan alla rörelseproblemen i realexamen för svåra för flertalet elever, men de kan vara trevliga för ett mindre antal.

Det kan också bli fråga om att beräkna *vägen* och *tiden*.

Ex.: Hur långt kan man på 2 tim 15 min köra med en bil, om man beräknar att kunna köra med en hastighet av 45 km/tim?

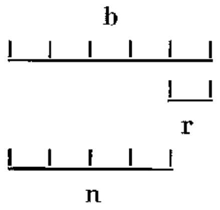
Ex.: Hur lång tid behöver man för att med en motorbåt, som kan göra 10 knop, tillryggalägga a) 4 distansminuter b) 10 km?

Problem av typerna: När möts A och B? När upphinnes A av B? kan vara lämpliga *överkursuppgifter*.

Affärsproblem av olika slag är naturligtvis en viktig problemgrupp. Hur långt man i klasserna 7 och 8 skall ge handelsteknisk kunskap är svårt att säga. Vi har redan något diskuterat denna fråga. Matematikläraren måste här samarbeta med läraren i samhällslära (ekonomilära). Sedan gammalt har det varit vanligt att i räkneexemplen syssla med självkostnads- och försäljningspris, rabatt, vinst och förlust, aktier och vanliga ränteproblem. Det synes rimligt att bibehålla uppgifter av detta slag. Tekniska termer som »fakturapris», »pålägg» bör ej användas i prov utan närmare förklaring. Problem om för elevernas värld så främmande ting som växlar och obligationer bör nog ej tas upp till matematisk behandling, även om eleverna i samhällsläran får någon kunskap om dylika värdepapper.

Ett område, som eleverna känner sig hemmastadda på, är rabatträkning (årsrabatt i Konsum t. ex.). Det skadar inte att gå ignom ett sådant problem grundligt. Det kan bidraga till att ytterligare klargöra förhållandebegreppet.

Ex.: Eleverna i en skola har rätt till 20 % rabatt vid köp av skolböcker. Axel betalar för en bok 2.40 kr. Vad var bokens pris utan rabatt?



Vi vet att 20 % är = 1/5. Vi delar en sträcka i 5 lika delar. En av dessa föreställer rabatten, de övriga 4 nettopriset. En blick på figuren visar att nettopriset är 4/5 av bruttopriset och bruttopriset 5/4 av nettopriset, vilket också kan uttryckas så att netto- och bruttopris förhåller sig som 4 till 5.

Vi ser vidare att varje smådel betyder 60 öre. Så stor är alltså rabatten och bruttopriset blir då 2,40 + 0,60 = 3 kr.

Ekvationslösningen blir:

$$x - \frac{20x}{100} = 2{,}40$$

Eleverna medger, att om man bara kan det, går det fortare att lösa problemet med huvudräkning, men de föredrar i alla fall ekvationsmetoden. »Man slipper tänka efter». Det gäller ju bara att formulera problemet på det algebraiska språket, sedan går räkningen av sig själv.

Aktieproblem kan vara av typen:

Ex.: Ett aktiebolag har ett år en nettovinst av 65 000 kr. Bolagsstämman har beslutat att avsätta 20 % av vinsten till fonder och dela ut resten till aktieägarna. Hur stor utdelning får en person, som äger 120 av bolagets 1000 aktier?

Ex.: Vi studerar börslistan i en större tidning och finner att ett bolags aktier betalats med 356 kr stycket och att sista utdelningen var 12 kr per aktie. Om man kan räkna med att utdelningen även i framtiden blir lika stor, hur många procents årlig ränta får man på sina pengar, om man köper några av bolagets aktier?

Uppgifter angående *sammansatt ränta* måste anses så betydelsefulla att de något bör behandlas i den kurs som alla elever i enhetsskolan skall syssla med. De brukar förläggas till realskolans högsta klass, och i »huvudmomenten» finns de omnämnda endast i »alternativkurs 2» i klass 9. Det är emellertid redan nu vanligt att enkla uppgifter av detta slag behandlas i folkskolans högsta klass eller i fortsättningsskolan. Det vore då egendomligt om denna för enhetskolans mål i samhällslära betydelsefulla problemtyp skulle uteslutas. Vi citerar följande från Wigforss' arbete »Den grundläggande matematikundervisningen»: »Vid nu ifrågavarande uppgifter gäller det ej, såsom vid växlar och obligationer att införa barnen på ett nytt komplicerat sakområde, utan man rör sig på ett för dem från de vanliga ränteproblemen välbekant område. De rent matematiska svårigheterna är i fråga om de enkla uppgifter det här bör gälla, ej heller betydande.»

Allt vad eleverna behöver lära sig är att använda tabeller, med vilkas hjälp de kan räkna ut vad en viss summa växer till på ett visst antal år, då räntan varje år lägges till kapitalet, samt vad en viss årlig insättning växer till under ett visst antal år under samma förutsättning.

De *planimetriska* och *rymdgeometriska* formlerna kommer till användning vid en mångfald problem, som kan lösas med eller utan ekvation. Exempel: Känner man ytan och basen i en rektangel eller triangel, kan man beräkna höjden. Likaså kan man räkna ut höjden i en cylinder, när man känner volymen och basradien. Känner man förhållandet mellan vinklarna i en triangel, kan man räkna ut deras storlek.

Då eleverna blivit förtrogna med begreppet förhållande, kan de använda tredje likformighetssatsen (ensvinkliga trianglar är likformiga) för lösning av problem rörande indirekt avstånds- och höjdmätning. Av en figurs dimensioner på kartan kan de räkna ut dess yta.

Satserna att cirkelbågar och cirkelsektorer i en cirkel förhåller sig som bågarnas gradtal (= medelpunktsvinklarnas gradtal) torde accepteras av eleverna utan bevis. De är då mogna för grafisk framställning med hjälp av cirkelsektorer, varvid exempel kan tagas från andra ämnesområden eller från sådana, som eleverna kan väntas ha särskilt intresse för.

Bland problemslagen må ytterligare nämnas *bolags-, arbets-, blandnings-* och *medeltalsproblem*. I fråga om arbetsproblemen bör även sådana begrepp som tim- och dagsverken tas upp. Ur realexamensuppgifterna tar vi följande exempel:

»En person har åtagit sig att fullborda ett arbete på 50 arbetsdagar och använder i början 33 man vid detsamma. När 28 arbetsdagar förgått är endast halva arbetet verkställt. Hur mycket behöver han öka arbetsstyrkan för att kunna fullgöra sitt åtagande i rätt tid?»

Halva arbetet 33 · 28 dagsverken. Han ökar arbetsstyrkan med x man. Ekvationen blir alltså:

$$(33 + x) \cdot 22 = 33 \cdot 28$$

Naturligtvis bör de problem som ges även omfatta uppgifter som inte kan inordnas under »typproblem».

En problemgrupp, som nog försvarar sin plats, skulle kunna benämnas *algebraiska problem*. Hit hör allmänna problem ävensom matematiska gåtor av olika slag, som får sin förklaring genom algebraisk räkning.

Allmänt problem: På en provräkning fick ⅓ av klassen AB, halva klassen Ba och de 5 återstående B. Hur många var det i klassen?

Man tycker att det skulle vara lätt att komma underfund med att de 5 utgör 1/6 av klassen och att denna sålunda räknar 30 elever. Men de flesta har svårt att klara uppgiften medelst huvudräkning och sätter hellre upp ekvationen

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{2} + 5 = x$$

Matematiskt konststycke: Tänk på ett tal, fördubbla det, lägg 10 därtill, dela med 2, drag ifrån det tal du först tänkte på! Nu har du 5 kvar!

Redan i småskolan har barnen antagligen roat sig och andra med sådana uppgifter. Högstadiets elever får nu den enkla förklaringen genom sin algebraiska kunskap:

$$\frac{2a + 10}{2} - a = a + 5 - a = 5$$

De kan också få generalisera problemet genom att lägga till b i stället för 10. Alltså:

$$\frac{2a + b}{2} - a = a + \frac{b}{2} - a = \frac{b}{2}$$

Möjligen kan eleverna även få härleda enkla formler.

Ex.: Om a kg av en vara kostar b kr, vad bör då c kg kosta?

Ex.: Hur lång tid behöver man för att med en hastighet av v m/min tillryggalägga en sträcka av s m?

Enkla fysikaliska och kemiska problem i anslutning till kurser i dessa ämnen bör ej heller försummas.

XVII. *Översikt av sorterna och talsystemet. Positiva och negtiva tal*

En samlad översikt av såväl *de dekadiska som de icke-dekadiska sorterna* är lämplig. Man bör då inte försumma att berätta något om *måttsystemets historia.* Det kan t. ex. vara en intressant detalj att vi i vårt land har använt inte mindre än 32 olika slags famnmått vid mätning av ved, och att det var först år 1927 som förhållandena på detta område ordnades genom bestämmelsen att all ved skulle mätas i kubikmeter. Vid undervisningen om dessa ting bör matematik- och fysikläraren samarbeta. Är dessa lärare en och samma person är det så mycket bättre.

Enkla exempel på omräkningar mellan gamla och nya mått bör ges, särskilt när det gäller mått som ännu ej helt kommit ur bruk, t. ex. tum, fot, aln.

Förvandlingen mellan våra och andra länders mått-, vikt- och myntsystem bör naturligtvis också förekomma vid räkneundervisningen.

»*Översikt av positionssystemet*» är en rubrik i huvudmomenten i matematikkurser för klasserna 7—8. Benämningen behöver förklaras. Och i samband därmed berättas något om olika talbeteckningssystem och att det säkerligen ej var lätt att uppfinna vårt sätt att skriva talen. Andra system där varje taltecken har sin bestämda betydelse är mera närliggande. Uppfinningens oerhörda betydelse för kulturutvecklingen understrykes. Samtidigt kan visas hur svårt det skulle vara att räkna med hjälp av de romerska siffrorna.

Enkla talproblem bör ges. De ger god hjälp att uppfatta det väsentliga i positionssystemet. Men när det gäller grundkursen bör man vara försiktig så att problem av denna typ ej blir för svåra för eleverna.

I samband med denna genomgång av talsystemet bör man också något syssla med *dignitetsbeteckningen av talen.* Vid läsning av t. ex. populärvetenskaplig litteratur kommer eleverna att träffa på sådan beteckning av stora tal, t. ex. $5{,}2 \cdot 10^{18}$.

Positiva och negativa tal

Någon mera ingående behandling av begreppen *positiva oc negativa tal* kan ej ges på realskolestadiet. Men eleverna bö få erfara att det ibland kan vara mening att ange en storhe med ett minustecken framför siffran. Enklast och mest näı liggande demonstreras detta med termometerskalan. Ex. tem peraturen var vid ett tillfälle + 5°. Den sjönk 7°. Hur myckε visade då termometern? Vi får + 5 — 7 = — 2. Om vi har eı nollpunkt av det slag som finnes på en termometer har j sådana minustal god mening. Man har kallat dem negativ tal. Man kan visa på andra fall där det även kan ges menin åt sådana tal.

Om vi antecknar en persons inkomster och utgifter unde loppet av en dag, och med plustecken anger att hans tillgånga ökas och med minustecken att de minskas, skulle vi t. ex kunna få följande avteckningar + 3 kr — 5 kr + 6 kr + 1 k — 10 kr = — 5 kr. Svaret betyder att hans tillgångar minskat med 5 kr. Så långt erbjuder förklaringen av de positiva oc negativa talen inga större svårigheter. Man räknar med tillägg ningar och fråndragningar. På realskolestadiet är det nog bäs att inte tala om additioner och subtraktioner av positiva oc negativa tal. Utvärdering av ett algebraiskt uttryck kan emel lertid erbjuda svårighet då en parentes föregås av minustec ken, t. ex. a — (b — c). Antag a = 5, b = 3, c = 7. Vid direk insättning får vi 5 — (3 — 7). Om parentesen uträknas upp kommer uttrycket 5 — (— 4), alltså en fråndragning av et negativt tal. Man bör emellertid undvika sådana teckensam manställningar och uträkna uttrycket genom borttagandet a parenteserna. Multiplikation eller division av negativa och po sitiva tal behandlas ej. Utvärdering av algebraiska bråkuttryc som skulle ge ett negativt tal i nämnaren behandlas sålund ej.

Denna begränsning innebär emellertid inte att regler fö multiplikation av två binom ej skulle givas. Dessa regler kaı som redan visats härledas, utan att det behöver bli tal on multiplikation av negativa tal.

XVIII. *Problem och prov av skilda slag*

Kursavsnittet är närmast avsett för repetitionsuppgifter elle »blandade uppgifter» och prov av olika slag.

Trevligt är om uppgifterna kan samlas till »units» elle

»intresseområden». Möjligheten för grupparbete bör undersökas här liksom i de andra kursavsnitten.

För detta sista kursavsnitt bör mycket god tid beredas. Utom för ovan nämnda uppgifter behöver eleverna tid för avslutande av *överkursuppgifter*. Viktigt är också att de *»luckor i kunskaperna»* som ev. återstår om möjligt blir fyllda. Slutligen bör tid också beräknas för *standardiserade prov för betygsättningen*. Visserligen har sådana ännu ej utkommit för högstadiet, men då skolkommissionen förutsätter att prov av detta slag skall vara tillgängliga för lärarna, kan man väl räkna med att de kommer att tillhandahållas i en ej alltför avlägsen framtid.

LITTERATURFÖRTECKNING

Utom föreliggande studieplan har följande planer för enhetsskolans högstadium utarbetats på uppdrag av kursplanedelegationen inom 1946 års skolkommission:

Åstrand: Studieplan i matematik för högstadiet (klass 7—8)
Ehrnst: Studieplan i matematik för högstadiet (klass 9, alternativkurs 1)
Carli: Studieplan i matematik för högstadiet (klass 9, alternativkurs 2)

Dessa studieplaner föreligger ännu endast i stencilerat skick.

Ett metodiskt arbete för räkneundervisningen i folkskolan till och med klass 7 är

Wigforss: Den grundläggande matematikundervisningen, Bergvalls förlag 4:e uppl. 1952

Läroböcker med metodiska inslag är:

Nilsson-Wigforss: Aritmetik. Gebers förlag. 1951
Nilsson-Wigforss: Algebra I. Gebers förlag. 1952

Följande arbeten sysslar ej med räknemetodiken men kan vara av intresse för lärare och elever:

Almquist: Matematiska förströelser (Natur och Kulturs förlag)
Hagström: Sagan om de tio tecknen (Bonniers förlag)
Mc Kay: Siffrornas sällsamma värld (Natur och Kulturs förlag)
Orne: Förtrollade siffror (Wahlström & Widstrands förlag)

Geometriundervisningens metodik behandlas i arbetet:

Sjöstedt: Geometri och geometriundervisning (Gleerups förlag)