Funktionsbegreppets införande i matematikundervisningen i skolan.

Af Ruben Mattson.

Af de ändringar i nederskolans matematikkurser, som den nyligen utgifna kursplanen för realskolan åstadkommit, är det särskildt tvänne, som komma att verka befruktande på matematikens studium i skolan. Den ena ändringen är den, att i kursplanen föreskrifvits, att undervisningen i algebra skall inledas med lösandet af enkla sifferekvationer; den andra betydelsefulla förändringen är den, att i kursen för klass 5 upptagits »uppritning af enkla diagram.»

Betydelsen af den förra reformen framgår till fullo af den motivering för densamma, som lemnats i den senaste läroverkskommitténs förslag till kurser för de allmänna läroverken (sid. 148 och följ.) och den skall här icke göras föremål för någon undersökning. Upptagandet af läran om geometriska diagram torde emellertid hafva lika stor betydelse för en fruktbringande matematikundervisning, förutsatt att det nämnda studiet ej tages som något fristående utan användes för att klargöra sambandet mellan de olika delarna af matematikkurserna. I stadgans metodiska anvisningar föreskrifves närmare, hur den nämnda undervisningen tänkes anordnad.

»I sjätte klassen, eventuellt i den femte, bör, i samband med de planimetriska räkningarna införas begreppet irrationellt tal, och särskildt böra lärjungarna vinna förtrogenhet med begreppet kvadratrot. — — Det torde emellertid icke vara lämpligt att genomgå den vanliga metoden för utdragning af kvadratrötter. *Däremot böra lärjungarna självfva på grafisk väg, helst genom konstruktion af ett diagram, få bestämma approximativa värden på kvadratrötter ur en följd af siffertal och på grund häraf upprätta ett stycke af en kvadratrottabell.* »(Sv. Förf. saml. n:r 10. 1906 s. 29). I samband med den geometriska undervisningen nämnes längre fram (i en not å sid. 31) några diagram som anses lämpliga att upprita: »*ett eller annat diagram rörande någon statistisk fråga, såsom folkmängdens tillväxt under en viss period i åtskilliga länder; någon kurva bestämd genom sin geometriska definition (ex. ellipsen, hyperbeln) eller genom sin ekvation (ex. de räta linierna* $y = 2x$; $y = 3x - 2$; *hyperbeln* $y = \frac{1}{x}$; *parabeln* $y = \sqrt{x}$ *eller* $x = y^2$, *hvaraf lärjungarna sedan kunna begagna sig för att uppräta en tabell öfver siffertals kvadratrötter); diagram öfver kapitalets tillväxt med tiden vid enkel och sammansatt ränteräkning.*»

Det är sålunda icke meningen, att frågan om grafisk framställning af talförhållanden skall inskränkas till det enda först nämnda exemplet, kvadratrötter ur siffertal. Men å andra sidan nämnes icke, att de geometriska diagrammen skola användas för att åstadkomma åskådlighet i algebraundervisningen utom i det enda fallet: beräkning af kvadratrötter. Men på det ifrågavarande stadiet torde den geometriska betydelsen af diagramritningen ej gå upp emot de fördelar, som denna kan medföra för algebraundervisningen. Något djupare ingående på den analytiska geometrien kan nämligen icke komma ifråga. Resultatet torde ur geometrisk synpunkt inskränka sig till att lärjungarna få reda på namnet och utseendet hos en och annan kroklinie. Ur allmänbildningens synpunkt är det vidare en stor fördel, att realskolans elever få reda på det vanliga grafiska framställningssättet af statistiska fakta.

För att den ifrågavarande diagramritningen skall bli så fruktbringande som möjligt vore det emellertid lämpligt att i skolkursen införa funktionsbegreppet, som ligger till grund för hela det använda framställningssättet. Införandet af den grafiska framställningen visar tydligen, att det är meningen att matematikundervisningen nu skall ske annorlunda än förr. Därpå tyda också de kurser, som i Kgl. Cirkulär hittills fastställts för gymnasiets 1:a och 2:a ringar. En jämförelse mellan kursen för dessa ringar å reallinien och den, som genomgåtts i de forna 6:e nedre och 6:e öfre realklasserna visar, att en stor ökning af kursen vidtagits så att i dessa klasser nu skall medhinnas t. ex. trigonometrisk beräkning af trianglar, som förut först genomgicks i klass 7:1. Det torde därför vara af intresse att undersöka de fördelar, som ett införande af funktionsbegreppet i skolkursen skulle medföra.

Införandet af funktionsbegreppet på skolstadiet är en sak, som på senaste tiden mycket debatterats i den pedagogiska litteraturen. Krafvet ihärpå har då ofta innefattats i ett allmänt tal om »en tidsenlig ombildning af matematikundervisningen i de högre skolorna.» I *Frankrike* är en sådan ombildning redan företagen genom de nya skolplanerna af 1902 och där äro redan flera utmärkta läroböcker[1] utgifna, behandlande skolmatematiken efter de synpunkter, som afse funktionsbegreppets införande i skolorna. I *Tyskland* står frågan för närvarande under liflig diskussion och särskildt förfäktas saken af prof. Klein[2] i Göttingen.

Det är emellertid i *England*, som dessa sträfvanden först framkommit, och de ingå där som ett moment i den efter sin upphofsman benämnda Perry-rörelsen[3], som önskar införa en mer »praktisk» matematik-undervisning. Målsmän för upptagande af funktionsbegreppet i skolkursen finnas äfven i *Österrike*, där prof. Czuber[4] nyligen framställt önskemål i denna riktning. I samma riktning uttalar sig äfven beträffande *Danmarks* skolor T. Bonnesen i en uppsats i 16:e årg. af Nyt. Tiskr. f. Mat., i hvilken uppsats äfven citeras målsmän för samma uppfattning i *Schweiz*[5].

Hvad *Sverige* beträffar ingår läran om grafisk framställning redan i den år 1887 af lektor K. P. Nordlund ut-

---

[1] Af Borel, Bourlet m. fl.

[2] F. Klein: Über eine zeitgemässe Umgestaltung etc. Leipzig, 1904. Under tryckningen af föreliggande uppsats har utkommit af samma förf.: Vorträge über den mat. Unterricht. Bearb. von R Schimack.

[3] Angående Perryrörelsen hänvisas till lektor E. Göranssons nyligen utgifna föreläsningar: »Nyare riktlinjer för matematikundervisningen.»

[4] Jahresber. der Deutsch. Matematiker-Vereinigung, Band 15, s. 116.

[5] Från detta land härstammar äfven en uppsats af H. Fehr: La notion de fonction dans l'enseignement. L'Enseignement math. 1905, s. 177.

gifna »Elementarbok i Algebra». Den här afhandlade frågan beröres dessutom i pedagogiska uppsatser, som på de senaste åren publicerats af prof. Bjerknes[1], rektor Josephson,[2] lektor K. P. Nordlund[3] äfvensom i det nyss citerade arbetet af lektor Göransson.

Den fråga, som är föremålet för denna uppsats, är sålunda icke ny, utan den har sedan flere år debatterats i olika länder. Fordran på en »tidsenlig ombildning» af matematikundervisningen har tydligen uppkommit därigenom, att diskontinuiteten mellan skolmatematiken och den matematiska vetenskapen blifvit allt för stor. Undervisningen i ett skolämne måste alltid i viss mån följa med sin vetenskaps utveckling. Det kan annars mycket lätt hända, att det meddelade lärostoffet kommer att vara obetydliga detaljer utan verkligt innehåll.

Denna diskontinuitet mellan skolmatematiken och den vetenskapliga matematiken skulle upphäfvas, om funktionsbegreppet blefve en integrerande del i den matematiska undervisningen. Liksom numera det af den fysiska vetenskapen begagnade kraftlinjebegreppet allmänt användes för att förklara de olika fenomenen på induktionselektricitetens område, bör det af den matematiska vetenskapen genomarbetade funktionsbegreppet kunna användas för att t. ex. åskådliggöra sambandet mellan ekvationers lösning och analytisk geometri. De fördelar, som ett införande af detta begrepp skulle medföra i matematikundervsiningen skola närmare beröras vid diskussionen om dess apterande vid undervisningen i de olika klasserna.

Matematikundervisningen bör sålunda följa med vetenskapens utveckling liksom hvarje annan undervisning. Det kan förefalla underligt att tala om utveckling i fråga om ett ämne sådant som matematiken, hvars resultat väl icke kunna bli oriktiga. Skolan bör väl, tyckes det,

---

[1] Om matematiken i skolen. Skolan. Årg. 1, s. 241.

[2] Till frågan om gymnasiets matematikkurser. Pedagogisk tidskrift 1905 s. 301.

[3] Ett tillägg i den algebraiska kursen. Pedagogisk tidskrift 1907 s. 2. Denna uppsats och lektor Göranssons arbete hade ännu ej utkommit, då föreliggande uppsats utarbetades.

ämna undervisning i den elementära matematiken och intet mer. Men det är just begreppet elementär matematik, som utvecklats under tidernas lopp. Mycket af hvad som nu räknas till den elementära matematiken och därmed till skolkursen ansågs förr ligga utom densamma. Så hafva först så småningom algebra, de negativa storheterna, logaritmerna upptagits bland skolans pensa.[1] Att matematikkurserna till mogenhetsexamen nu under årtionden varit ungefär desamma kan naturligtvis icke utgöra något bevis för att de icke kunna modifieras. I en uppsats af dåv. doc. Wahlgren i Pedagogisk Tidskrift för år 1905 sid. 65 och f. har påvisats, att en god del af den nuvarande kursen på latingymnasiet (och sålunda motsvarande kurser äfven på realgymnasiet) böra bortmönstras såsom saknande värde för åstadkommande af de mål matematikundervisningen har i skolan. Det bör sålunda kunna beredas god tid till införande af nytt »modernt» stoff i det gamlas ställe, utan att undervisningen ändå behöfver betungas med för stora kurser.

Vid bestämmandet af matematikundervisningens anordning bör man, såsom den senaste läroverkskommittén framhåller, städse betänka, att lärjungen med intresse kan omfatta blott det, hvars ändamål han fattar. Införandet af funktionsbegreppet skulle, tyckes mig, lämna god hjälp vid planläggandet af matematikundervisningen efter denna synpunkt.

Ett införande af det nya begreppet skulle naturligtvis icke ske förr än på det stadiet, där den nu föreskrifna diagramritningen påbörjas d. v. s. i 5:te klassen. Lämpligast förefaller att börja med grafisk framställning af en serie termometer- eller barometer observationer, naturligtvis under förutsättning att förut genomgåtts den geometriska representationen af de positiva och negativa talen som punkter på en rät linie. Om utgångspunkten blir den nämnda, komma blott sådana frågor att behandlas, som lärjungarna redan känna till.[2] I 4:de klassen hafva

[1] Se t. ex. Klein anf. uppsats sid. 7 o. f.

[2] Denna utgångspunkt väljes t. ex. af Borel i hans algebra afsedd för Classe de Quatrième B ungefär motsvarande vår 5:e klass. Den torde för öfrigt användas vid de läroverk i vårt land, där en undervisning sådan som den föreslagna redan meddelas.

lärjungarna antingen själfva gjort eller sett läraren göra observationer med termometer och barometer, hvilka observationers resultat ofta nog torde ha åskådliggjorts genom uppritande af kurvor på rutadt papper. I samband med redogörelsen för termometerkurvor kunna exempel angående medelvärden behandlas (ss. t. ex. Collins ex. n:r 135 i den nya upplagan af Haglunds exempelsamling del I, s. 21.) Som en lämplig förberedelse för den grafiska framställningen skulle det kanske också tjäna att vid hvarje läroverk på ett för lärjungarna tillgängligt ställe upphänga en själfregistrerande termometer och barometer. I den förut citerade algebran af Borel (2e cycle afsedd för »Classe de seconde, sections C et D» närmast motsvarande den forna klass VI: 2, latinlinjen B och reallinjen) är intagen en figur föreställande en sådan registreringsapparat.[1]

Sedan principen för uppritning af diagram genomgåtts kunna dylika uppritas för belysande af statistiska frågor och för uppritande af enkla *funktioner* sådana som $y = 2x$, $y = 3x - 2$, $y = x^2$. Huruvida detta kan göras i klass 5 eller klass 6 torde bero på omständigheterna. På det nämnda sättet fås emellertid en naturlig öfvergång till införandet af funktions- och koordinatbegreppen.

För klass 6 torde det lämpa sig att använda den grafiska framställningsmetoden[2] på problem rörande likformig rörelse[3] med särskildt afseende fäst vid tillämpningen på grafiska järnvägstidtabeller. I samband med kurvorna $y = x^2$ och $y = \sqrt{x}$ kan genomgås frågan om interpola-

[1] Hvad den »tidsenliga omgestaltningen» af matematikundervisningen innebär synes kanske bäst däraf, att den nämnda läroboken i algebra innehåller 59 figurer, hvaribland, utom den nämnda registreringsapparaten med exempel på registrerade kurvor, äfven figurer öfver Frankrikes höjdförhållanden (tvärsnitt med kartor), feberkurvor, grafiska järnvägstidtabeller o. d.

[2] I samband med diagram sådana som $y = 2x - 3$ torde vara lämpligt att genomgå den allmänna karaktäen af uttryck sådana som $ax + b$ (= »Variations du binome de premier degré», enl. Borel).

[3] Metodens tillämpning på dylika problem förordas t. ex. af **E. Mosch**: Die Bewegungsleichungen; Lehrgänge und Lehrprobe aus der **Praxis** der Gymnasien etc. Årg: 1906. — Framställningen säges af förf. vara afsedd för tertia (= 4:e och 5:e).

tion ur en tabell och möjligen äfven påpekas, hur ekvationer kunna approximativt lösas genom uppritande af geometriska diagram. Om hela tiden funktionsbegreppet göres till det centrala vid undervisningen, torde icke denna kurs vara omöjlig att medhinna i realskolan.

Äfven på gymnasiet bör funktionsbegreppet bli förhärskande vid algebraundervisningen. I ring I (här afses reallinjen, men i tillämpliga delar bör det gå att tillämpa samma grundsatser för latinlinjen) är kursen delvis densamma som i klass 6. Af den för klass 6 omtalade kursen är det egentligen blott läran om ekvationers approximativa lösning, som bör uppskjutas. nämligen tills andragradsekvationen med en obekant genomgåtts. Vid behandlingen af denna utgås från funktionsbegreppet Antag t. ex. att det gäller att lösa ekvationen $x^2 = 9$. Problemet är då: *För hvilka x-värden får funktionen $y = x^2$ värdet 9?* Härför behöfves naturligen ingen geometrisk framställning, utan med stöd af förut kända förhållanden inses omedelbart, att bland positiva tal kan x ej vara annat än 3, bland negativa tal endast -3 d. v. s. ekvationen har rötterna ± 3. Sedan ekvationer af olika slag genomgåtts, konstrueras för olika fall kurvan

$$y = ax^2 + bx + c$$

och kan därmed åskådliggöras de olika möjligheter, som kunna inträffa vid lösningen af ekvationen

$$ax^2 + bx + c = 0$$

De fall, då denna ekvation icke har reella rötter, motsvaras då af sådana lägen hos kurvan, att den ej träffas af x-axeln (d. v. s., om teorien för komplexa tal öfverhoppas, ekvationen saknar rötter.)

Ekvationer af högre gradtal genomgås på liknande sätt. Kurvorna konstrueras och rötterna bestämmas genom att efterse abscissans värde i de punkter, där kurvan skär x-axeln. Den nu brukliga metoden behöfver och bör naturligen icke försummas, men den grafiska framställningen medför den fördelen, att lärjungarna få lära sig en metod, som de alltid kunna tillgripa äfven om den ekvation, som det gäller, icke skulle gå att lösa medelst teorien för andragradsekvationer. — För rotekvationer torde de emellertid icke vara lönt att tillämpa den grafiska metoden, som i detta fall blir allt för besvärlig.

Redan med nu gällande kurser genomgås ofta uppritande af funktionskurvor för åskådliggörande af teorien för maxima och minima. I Collins bearbetning af Haglunds algebra finnas t. o. m. figurer till flera af de behandlade exemplen. Men att först här använda den grafiska metoden för åskådliggörande af algebraiska frågor medför på latinlinjen den olägenheten, att lärjungarna så sent få reda på metoden, att den aldrig riktigt smältes och bortglömmes efter de få lektioner, som kunna ägnas maxima och minima. Vid uppritande af de kurvor, som erhållas vid lösningen af ekvationer, kan det vara lämpligt att införa begreppen maxima och minima samt påpeka dessas lägen. Själfva beräkningen i de fall, då detta är möjligt, måste få anstå längre eller kortare tid beroende på den lärobok, som användes[1], förutsatt att bokens ordning följes; frågan om maxima och minima skall åter upptagas längre fram.

Ekvationssystem med två obekanta kunna också lösas med tillämpning af den grafiska metoden. Genom afläsningar på millimeterpapper kunna då t. ex. diofantiska ekvationer lösas synnerligen lätt.

De nu afhandlade delarne af algebran äro enl. den gällande provisoriska kursplanen afsedda att i hufvudsak genomgås i I R. Kursen för denna ring förefaller väl dryg och med det nu föreslagna grundligare tillvägagångsättet blir nog nödvändigt att låta en del anstå till nästa klass.

Den här föreskrifna algebrakursen utgöres af läran om potenser och logaritmer. Hur denna bör behandlas ur den grafiska framställningens synpunkt meddelas utförligt af Rektor Josephson i hans förut citerade uppsats.[2] Till hans framställning bör väl läggas, att det berättigade i det vanliga interpolationsförfarandet vid användningen af logaritmtabeller kan visas genom att påpeka logaritmkurvans utseende. I samband med kurvan för kapitalets tillväxt efter ränta på ränta kan det också vara lämpligt att göra jämförelse med en kurva angifvande t. ex. befolkningens tillväxt under en viss period i något europeiskt land.

Läran om sammansatt ränta kommer väl att tillhöra

[1] I den omnämnda läroboken af Collin behandlas maxima och minima efter sammansatt ränta.

[2] Sid. 307.

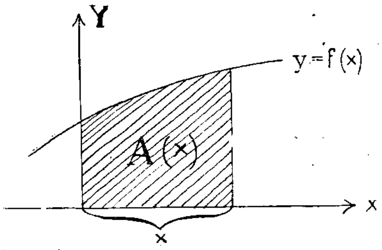
kursen för III R. I denna klass kan funktionsbegreppet lämpligen utsträckas till trigonometrien såsom också föreslås i den af C. F. Rydberg nyligen utgifna läroboken. I denna förekomma funktionskurvorna dock för långt fram i trigonometrikursen. För vinnande af åskådlighet böra de ifrågavarande kurvorna studeras långt förut.

I ring III skall äfven den analytiska geometrien påbörjas. Men, om i algebraundervisningen en ständig hänvisning gjorts till funktionernas geometriska representation, äro lärjungarna redan fullt förtrogna med den analytiska geometriens grundbegrepp. Kursen i analytisk geometri bör sålunda kunna medhinnas på mycket kortare tid än förut, och, om ej endast kägelsnitten behandlas, bör denna del af matematiken erbjuda mycket mer af intresse än förr. Det finnes då intet skäl att göra bestämningen af kroklinjers tangenter enligt speciella metoder för hvarje särskild kurva. När lärjungarna äro förtrogna med funktionsbegreppet och gränsvärden flera gånger förekommit i deras algebrakurs, bör det ej erbjuda någon svårighet att på skolstadiet definiera begreppet derivata. Med dettas tillhjälp kan då studiet af alla de genomgångna kurvorna ytterligare fördjupas och teorien för maxima och minima genomgås på ett enkelt och naturligt sätt.

För ytberäkningar behöfves integralbegreppet, hvilket enklast torde definieras på så sätt, att den af kurvan:

$$y = f(x)$$

i vidstående figur begränsade ytan A visas vara en funktion af x sådan, att



$$\frac{dA}{dx} = f(x).$$

Innebörden af beteckningssättet:

$$A = \int_0^a f(x)\, dx,$$

kan sedan klargöras ur figuren.

Betydelsen af differential- och integralkalkylens upptagande i skolkursen är tydlig. På alla de ställen i den nuvarande skolkursen, där differentiation eller integration företages utan att operationernas namn utsägas, kommer då ett och samma förfaringssätt att användas. Särskildt för undervisningen i stereometri och i dynamik måste detta medföra en stor fördel.

Angående omfånget af den kurs i infinitesimalkalkyl, som bör meddelas i skolan äro i den utländska litteraturen flera förslag framställda. Så innehåller Bonnesens ofvan citerade uppsats ett detaljeradt kursförslag för de danska skolorna. Enligt detta förslag omfattar kursen differentiation och integration af de elementära funktionerna, Taylors formel utan resttermens beräknande och dess tillämpning på de elementära funktionerna. Detta förslag öfverensstämmer med de af Klein i hans uppsatser framlagda åsikterna. Läroböcker för de högsta gymnasialklasserna äro publicerade både i Frankrike och Tyskland t. ex. af Bourlet (sista delen af: Leçons d'algèbre élementaire) och Lesser (Die Infinitesimalrechnung im Unterrichte der Prima. Berlin 1906). Den förra af dessa framställningar innefattar endast differentiationsreglerna för de i algebran behandlade funktionerna, den senare däremot torde motsvara behofvet vid skolorna, ehuru innehållet förefaller att vara något för omfattande för de svenska skolornas behof. Att närmare undersöka detta ingår emellertid icke i målet för denna uppsats, som endast velat utgöra en bidrag till diskussionen, om det är *möjligt*, att i matematikundervisningen vid de svenska läroverken införa funktionsbegreppet.

Anmälningar och recensioner.

Elementär lärobok i oorganisk kemi I, förberedande kurs af W. Abenius behandlar förbränning, andning, luften, vattnet, vattnets beståndsdelar, vätgas, vattnets kvantitativa sammansättning, saltsyra, klor, syror, baser, salter och elektrolys. Häftet omfattar 37 sidor.