Om räknefel hos nybörjare i algebra.

Av

Josef G. Nylin.

1. Inledning.

Avsikten med föreliggande undersökning har varit att studera orsakerna till de vanligaste räknefelen hos nybörjare i algebra för att möjligen från denna synpunkt kunna göra ett effektivare angrepp i det ondas rot. Räknefel förekomma, all tänkbar omsorg vid undervisningen till trots, även hos många eljest visst inte obegåvade pojkar. Undervisningen får också ofta nog inrikta sig på icke blott positivt kunskapsbibringande utan även, mera negativt, felutrotning. Meningen är att i det följande påpeka några förutsättningar för detta senare. Givetvis framlägges ingenting nytt för den erfarne läraren, denna lilla uppsats vill blott vara ett försök till att få lite »metod i galenskapen», d. v. s. system i feltyperna.

Materialet för undersökningen har varit 12 provräkningar, som utförts av ett tjugotal pojkar under tre skolår, motsvarande fjärde, femte och sjätte klasserna i allmänt läroverk. De förekommande räknefelen ha vart och ett analyserats och hänförts till olika grupper, som åtminstone ge en antydan om frekvensen av de olika feltyperna. På grund av materialets ringa omfång, inalles 1,990 räknade tal, kunna siffrorna naturligtvis inte göra anspråk på någon större grad av allmängiltighet men peka åt rätt håll, åtminstone enligt min erfarenhet.

Då jag icke haft tillfälle att personligen komma i kontakt med pojkarna, har jag måst inskränka mig till att behandla endast de rent algebraiska räknefelen. Ofta nog skulle även härvidlag en konferens med vederbörande felräknare ge en helt annan tydning åt vissa fel, än jag kunnat åstadkomma, då jag endast haft att stödja mig på liknande fall från en åttaårig erfarenhet som lärare på detta stadium.

Övergången från sifferräkning till bokstavsräkning innebär för barnen åtskilligt av svårigheter om inte rent av en revolution i deras matematiska åskådning. Det är inte fråga om en övergång från sifferbetecknade till bokstavsbetecknade tal utan från tal som sådana till tecken för tal. Skolpojkens begrepp om tal är nog närmast en skäligen konkret föreställning om några siffror efter varandra. Behandlingen av bokstäverna kan inte genast ske i analogi med förut bekanta räknemetoder. De nya momenten, bokstavstalen, föra ovillkorligen med sig en föreställning om nya räknesätt, som skapa osäkerhetskänsla.

En svårighet är, att de algebraiska uppgifterna icke »gå att räkna ut.» Svaret a + b är för nybörjaren skäligen otillfredsställande. Eftersom exempelvis 5 + 7 blir 12, så borde a + b också »bli någonting». Det dröjer någon tid, innan barnen resignera inför faktum, vilket varje lärare haft tillfälle att konstatera.

Sådana halvt mystiska egenskaper hos bokstäverna äro den yttersta grunden för de algebraiska räknefelen, fast de för den ytlige betraktaren snart nog synas vara en övervunnen ståndpunkt för pojkarna.

Innan jag övergår till själva undersökningen, bör framhållas, att de där framställda åsikterna endast ha med *pojkars* räknefel att göra. En analys av flickors prestationer i samma genre skulle med största sannolikhet ge avsevärt avvikande resultat. I synnerhet skulle feltypernas frekvens ge andra siffror, om jag vågar döma av ett par års erfarenhet på detta område. Flickorna lägga inte i dagen den »gåpåanda», som så ofta bringar pojkarna på fall, utan hålla sig mera på den säkra sidan. Någon närmare jämförelse är här inte anledning att ingå på.

Av de 1,990 räknade talen äro 670 stycken behäftade med ett eller annat fel, således 33,6 %. En tredjedel av samtliga lämnade lösningar skulle alltså vara felaktiga, vilket verkligen förefaller rätt betänkligt. Dock torde man i allmänhet få räkna med ett liknande resultat. Förutsättningarna för de här undersökta provräkningarna ha icke på något ofördelaktigt sätt avvikit från de normala. Läraren har varit en matematiskt och pedagogiskt skolad, intresserad personlighet, och lärjungematerialet har i genomsnitt varit det vanliga. Måhända ha uppgifterna i några fall varit något för svåra, vilket framgår av att de 1,990 behandlade uppgifterna endast utgöra 79,6 % av förhandenvarande möjligheter. Detta gäller närmast problemen och inverkar icke nämnvärt på denna undersökning.

2. Psykologisk diskussion av viktigare felgrupper.

De 670 fel, som underkastats analys, utgöras till 31,3 % av sådana, som bero på *felaktigt uppställd ekvation.* Av förut nämnd orsak har jag icke kunnat ingå på någon granskning av dessa. Ett fåtal tyckas dock ha ett visst samband med de algebraiska felen, i det att svårigheten varit att få ett riktigt algebraiskt uttryck för en förmodligen riktig tankegång. Det största antalet fel hänföra sig till procentberäkningar, där formler använts utan urskillning: räntan sättes lika med ett kapital, vinst och förlust beräknas på försäljningssumman m. m. Även andra formler ha missuppfattats.

En annan grupp fel, som här icke närmare behandlas, äro de rena *sifferräknefelen,* som utgöra 10,6 % av samtliga fel. I allmänhet kunna de inordnas under de synpunkter, som E. Hylla framlägger i sin uppsats: »Analyse von Rechenfehlern», Zeitschrift für päd. Psych. und exp. Päd., 1916. Skrivfelen beröras något längre fram.

De rent *algebraiska räknefelen* dominera med 58,1 % av hela antalet. Till denna grupp ha hänförts samtliga fel, som icke bero på ekvationens uppställning eller slarv i sifferräkningen. I allmänhet torde alla dessa kunna sättas i något samband med de algebraiska räkningarna, om också en del inte precis röra sig om algebraiska storheter.

Pojkarnas förmåga att uppfinna nya fel är nästan outtömlig, ofta nog sakna räkningarna varje tillstymmelse till förnuft. Detta gäller särskilt om en mycket svagt begåvad elev, som under dessa tre år lyckats klara av endast 7 uppgifter av c:a 130 möjliga. Hans prestationer äro vanligen av den art, att de icke kunna betraktas som annat än ett godtyckligt omplockande av siffror och bokstäver och erbjuda endast intresse från patologisk synpunkt. Likaså förekomma en hel del ofullbordade uppgiftslösningar, där det utförda visserligen är riktigt men vederbörande av någon sorts osäkerhetskänsla tvingats att avbryta arbetet. Det kunde ju ha sitt stora intresse att veta, varför avbrottet skett, men försök till förklaringar skulle i detta fall leda ut på gissningarnas område.

Bland de algebraiska räknefelen intaga *teckenfelen*, d. v. s. förväxling av plus- och minustecken, ett framskjutet rum, 73 sådana förekomma. Möjligheterna att göra teckenfel äro mångahanda och ha rikligen utnyttjats.

Av hithörande fel hänföra sig 23 till reduktion av termer i samma membrum. Ett vanligt fel är exempelvis följande: $-6x + 2x$ ger $-8x$. Här saknas tydligen begreppen positiv och negativ kvantitet, som äro ett par av nybörjarens stötestenar. Ett annat fall av samma art: $-b - 8b$ ger $-7b$. På samma sätt som plustecknet i förra fallet gav inställning på addition ger i det senare minustecknet för b inställning på subtraktion. Att tecknen utmärka storheternas kvalitet får sålunda träda tillbaka för den gamla invanda associationen mellan tecken och räknesätt.

Något svårare att förklara är följande: $-5x - x$ ger $+4x$. Subtraktionen är given enligt föregående. Plustecknet kan möjligen härröra från en minnesregel vid multiplikation att »lika tecken ge plus», eller kanske inverkar en dunkel aning om att termer med lika tecken skola adderas; av addition följer så plustecknet. Ett liknande fall: $8a^2b - a^2b$ ger $-7a^2b$. Givetvis förekomma här som alltid en del rena slarvfel, som inte tarva närmare undersökning.

Vid överflyttning av termer från ena till andra membrum förekomma 13 teckenfel. Ex.: $292 = x - 8$ ger $292 - 8 = x$. Även härvidlag är det förmodligen den fasta associationen mellan minustecken och subtraktion, som tar loven av den för vederbörande bekanta regeln om teckenändring vid överflyttning. Oftast förekomma sådana fel, när både överflyttning och reduktion utföras i en enda operation. Ex.: $3\,ax = \cdots - ax$ ger $2\,ax = \cdots$

I 12 fall har teckenändring företagits utan överflyttning. Någon gång kan den bero på analogi med andra förekommande teckenändringar. Ex.: $15 - 3 = x - 7$ ger $15 + 7 + 3 = x$. I ett par fall förefaller ändringen alldeles omotiverad och bör närmast hänföras till felskrivning. Ett mera komplicerat fall: $15 - x = 3 - 7$ ger $x = 15 - 3 - 7$. Vågstycket att samtidigt verkställa överflyttning och ny teckenändring har på sistone misslyckats. Tankeenergien räckte inte till för sista termen. Sättet är ju inte heller att rekommendera.

Vid bortskaffande av parentes, som föregås av minustecken förekomma 10 fel. Ett par fall bero på ren glömska, i några andra kan orsaken till felet spåras. Ex. $-(99 - 11\,x)\,8$ ger $-792 - 88\,x$ visar faran av att göra mer än en sak i sänder på nybörjarstadiet. Multiplikationen $99 \cdot 8$ har tagit för hårt på krafterna. Ett annat fel: $-[2\,x\,(x - y) + x(x + y)]$ ger $-2\,x\,(x + y) - x\,(x - y)$; ändringen har genomförts med samtliga förekommande tecken, oavsett om de tillhöra den yttre parentesens termer eller ej. Felet grundar sig på oklarhet om begreppet term, vilket längre fram behandlas.

Något oftare förekomma teckenfelen vid bråkstreck föregångna av minus, 12 fall. Ett exempel: $\frac{x}{5} - \frac{5\,x - 12}{3}$ ger efter multiplikation med 15 och förkortning: $3\,x - 25\,x - 60$. De övriga förekommande räkneoperationerna ha tagit uppmärksamheten i anspråk, så att teckenändringen avglömts, i synnerhet som försiktighetsmåttet med parentes icke vidtagits. Dessa fel stå i nära samband med följande huvudgrupp.

Ett antal av 87 fel bero ytterst på en *oklarhet ifråga om term- och faktorbegreppen.* Denna begreppsförvirring yttrar sig på mångahanda sätt, mest påtagligt i sådana exempel som $45{,}5 = 9{,}1\,(2\,x + 3)$ ger $45{,}5 - 9{,}1 = 2\,x + 3$. Faktorn $9{,}1$ har här överflyttats, som om den vore en term. Att termen är det komplexa begreppet, som i sig innefattar de två faktorerna, har inte kommit till medvetande. Uttrycket skall förenklas, och vederbörande väljer det bekvämaste sättet utan hänsyn till förekommande tecken. Någon klart fattad artskillnad mellan faktor och term finns inte. Ett annat exempel, $15 + \frac{7}{8}x = 78$ ger $15 + x = 78 \cdot \frac{7}{8}$, visar, att räknaren har en aning om att det är fråga om multiplikation. Att faktorn dock skall behandlas på annat sätt än termerna har inte ifrågasatts. Ett fel, som tydligt visar denna bristande uppfattning, är följande: $15 - x = 3 + 5x$ ger $15 - 8 = x + x$; $3 + 5$ i högra membrum ger omedelbart 8, och x lämnas ensamt kvar. I denna stil förekomma 23 fel.

Exemplet: $\cdots - (x - 8)\,0{,}25$, utfört: $-x + 8 \,.\, 0{,}25$, ger prov på ett i 5 fall förekommande betänkligt fel. Faktorparentesen behandlas som en vanlig termparentes med utstrykning och teckenändring. Faktorn 0,25 står här efter parentesen, och möjligt är, att det farliga minustecknet framför lagt beslag på hela uppmärksamheten. Ett annat fall, $-(x - 3)\,(0{,}5 + 0{,}25)$ ger $-x + 3\,(0{,}5 + 0{,}25)$, är svårare att förstå. Visserligen finns även här det farliga minustecknet, men produkten av två binom är en så vanlig företeelse, att man kunde väntat en multiplikation. I allmänhet visar det sig, att den svårare räkningen mera uppmärksammas. *De rena slarvfelen förekomma nästan uteslutande i en miljö av svårare men rätt utförda operationer.*

I fem fall användes ännu ett sätt att misshandla faktorsuttryck. Ex.: $\left(x + \frac{1}{6}\right) 12 = 10$ ger $x \,.\, 12 = 10 - \frac{1}{6}$ den första faktorns andra term flyttas trots parentes och allt till högra membrum, varefter återstoden multipliceras. Bakom detta ligger tydligen regeln att »flytta över alla bekanta termer till ena membrum». Ett par liknande exempel: ekvationen $\frac{4 - 8x}{5} = 0{,}2$ ger i ett fall $\frac{4}{5} = 0{,}2 + 8x$, i ett annat $\frac{4 - 0{,}2}{5} = 8x$. Särskilt det sistnämnda visar ett bekvämt sätt att »få x ensamt». Termerna flyttas över helt enkelt; att bråkstrecket möjligen skulle ha med en division av $8x$ att skaffa ifrågasättes inte.

Vid tecknande av produkter, där ena faktorn är binom, utelämnas ofta binomparentesen, vilket har till följd, att endast ena termen multipliceras. Produkten av exempelvis $x + \frac{1}{6}$ och 12 tecknas $x + \frac{1}{6} \cdot 12$, som i sin ordning ger $x + 2$. Likaså när nämnarna $x - 3$ och 9 ge minsta gemensamma dividenden $x - 9$. I 9 ingår ju 3 som faktor, och så är saken klar. I ett annat fall ge samma nämnare $x - 27$. Här har multiplikationen utförts för säkerhets skull. $x - 27$ ser något enklare ut än $9x - 27$, denna synpunkt torde nog kunna tas i beaktande. Av två onda ting välja pojkarna med förkärlek det »minst» onda. Strävan efter enkelhet är hos felräknarna större än sanningskärleken.

Detta visar sig i en art av fel, som man kan kalla »förkortning av termer». 18 sådana operationer ha utförts. Ex.: $\frac{10 - x}{2}$ ger $5 - x$. Frestelsen att på detta förträffliga sätt bli av med nämnaren har varit för stark och förkvävt eftertanken, som förresten inte haft någon större grad av klarhet om faktorsbegreppet att stödja sig på. Analogien med förkortning av faktorer ligger i öppen dag.

Ett något annorlunda förfarande visar sig i följande exempel: $\frac{2ab}{4a}$ ger $\frac{b}{2a}$. Här har en subtraktion av faktorer genomförts. Orsaken torde väl närmast vara en förväxling av koefficient och exponentbegreppen. Tankegången är väl denna: 2 st. a i täljaren och 4 st. i nämnaren, ge vid förkortning 2 st. a i nämnaren. Att a intar en ställning som självständig faktor vid sidan av siffrorna har inte uppfattats, d. v. s. bokstaven har inte fått talkaraktär. Den räknare, som presterat 5 av de 7 fallen, fortsätter med sin taktik även på de rena sifferräkningarnas område: $\frac{35}{5}$ ger 30 och $\frac{56}{8}$ ger 48. Denna återverkan på förut invanda operationer är intressant som bevis på den begreppsförvirring, som algebran mäktar åstadkomma. Ett analogt fall skall i det följande påpekas.

I fyra fall förekommer förväxling av addition eller subtraktion med multiplikation utan några egentliga miljösvårigheter. $-2x^2 - x^2$ ger exempelvis $2x^4$ och $a - 7a^4 + 7a^4$ ger $a - 35a^8$. Bägge dess fel ha troligen influerats av tanken på minnesregeln att »lika tecken ge plus» resp. »olika minus», och så kom multiplikationen i släptåg.

Ännu några fall av mera obestämd art. $3 - 7$ ger i en uträkning $3:7$; någon anledning till denna förväxling kan inte upptäckas. Något egendomligt förefaller det, när uttrycket $x + \left(6\frac{[illegible]}{[illegible]} + 1\frac{2}{[illegible]}\right)$ uppfattas som en produkt och ger $6\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{3}x$. rakt emot all felräknarpraxis, som huvudsakligen går ut på förenkling. Att i ett par fall $\frac{2}{5}$ av x tecknas $x : \frac{2}{5}$ beror väl på att »av» associeras med »delar av», som sedan ger division. $6x + 29 = 53$ ger $6x = \frac{53}{29}$; 29 behandlas som x-koefficient trots plustecknet och ställningen efter x-termen. Liknande fel, 9 till antalet, erbjuda ingenting av större intresse annat än som bevis på en synnerligen slapp uppmärksamhet.

I de två första provräkningarna förekomma 9 fall av *reduktion av olikformiga termer*. Endast den förut omnämnda undermålige räknaren har i ett fall längre fram använt denna metod. Faran av detta fel bör således inte överskattas. Ett par exempel: $x + x + 3$ ger $5x$, en ren hopplockning av allt som finnes; $3 + 5x$ ger $8x$ och $4 - 8x$ ger $-4x$ bero på bristande uppfattning av x-koefficientens samhörighet med det obekanta, d. v. s. felet hänför sig till termfaktorbegreppet, som förut avhandlats.

En mindre grupp fel, 12 stycken, ha uppkommit genom en *förväxling av x och $\frac{1}{x}$*. Ett exempel: $\frac{b}{x} = a$ ger $x = \frac{a}{b}$. Att första ledet efter divisionen blir $\frac{1}{x}$ har inte observerats. Här föreligger en förväxling med ekvationen $bx - a$. Koefficienten för x skall enligt regeln divideras bort; så sker även: faktorn är borta, alltså står x ensamt kvar. Längre fram förekomma ett par liknande fel. Exempelvis: $625 = 2{,}500x$ ger $x = 4$. Det har tydligen känts behagligare att dela det större talet med det mindre och på så sätt slippa från den besvärliga decimalbråksdivisionen. Vanligen blir ju roten ett helt tal, och denna vana tillsammans med en undermedveten bekvämlighetskänsla ha stört uppmärksamheten.

Vid *bortskaffande av nämnare* förekomma 34 fel. I några fall bortmultipliceras varje nämnare för sig oberoende av de andra, exempelvis i ekvationen $x + \frac{3x - 9}{5} = 4 \frac{5x - 12}{3}$, som ger $x + \frac{5(3x - 9)}{5} = 4 - \frac{(5x - 12)3}{3}$. Att jämvikten rubbas härigenom, generar inte. Tydligen tillämpas en halvt uppfattad regel om förfaringssättet.

I flera fall har en term uteglömts vid multiplikationen, i synnerhet om den stått ensam i ena membrum, exempelvis ettan i ekvationen: $\frac{45,5}{9,1(x + x + 3)} = 1$. Liknande fel förekomma 13 gånger, och i så gott som samtliga fall är den bortglömda termen en ensam siffra. I motsats härtill ha 7 räknare alltför väl kommit ihåg en ensam 0 i högra membrum och vid multiplikationen fått den lika med minsta gemensamma nämnaren. Orsaken härtill ligger i att nollan som tal betraktad intar en särställning, som har mycket liten motsvarighet i dagliga livet. De andra siffrorna ha ju ständig användning, men i stället för noll säger man »ingenting». Dessutom har nollan en stor betydelse för markering av talsorterna. Detta har gjort, att pojkarna inte vågat lämna nollan åt sitt öde, i synnerhet som de nog kommit ihåg åtskilliga tillfällen, då en uteglömd nolla skaffat dem obehagligheter på halsen.

Andra räknare ha förfarit med ett annat slag av överdriven grundlighet. I några fall ha samtliga faktorer (och termer) i ekvationens täljare ihågkommits vid multiplikationen utan hänsyn till att flere stycken stå på samma bråkstreck. Ett exempel: $\frac{25(8 - x)}{8} - \frac{11(9 - x)}{5} = 1\frac{1}{2}$ ger $\frac{40 . 25(40 . 8 - 40 . x)}{8} - \frac{40 . 11(40 . 9 - 40 . x)}{5} = 40 . 1\frac{1}{2}$. Förkortningen sker sen lite ojämt, vadan arbetet uppges efter några förtvivlade försök att bringa reda i de stora talen.

En räknare har ansett nämnaren bragt ur världen endast genom multiplikationer utan någon åtföljande förkortning. Ex.: $4 = \frac{x . 85}{100}$ ger $400 = x . 8{,}500$. För pojken ifråga är matematiken en trollkonst, som det inte lönar sig att försöka begripa. Han arbetar med delvis uppfattade regler på ett rent mekaniskt sätt. Någon enstaka gång blir det emellertid rätt.

En annan har förenklat $\frac{2x}{9} = 3$ till $9 \cdot \frac{2x}{9} = \frac{3}{9}$, d. v. s. multiplicerat å ena sidan och dividerat å andra. Möjligen för symmetriens skull eller för att det går så bra att förkorta 9 med 3. Någon sådan obestämd föreställning ligger säkert till grund för misstaget.

Slutligen har en räknare dividerat bort x-koefficienten och låtit nämnarens försvinnande vara en mystisk följd av denna operation: $\frac{2x}{9} = 3$ ger $x = \frac{3}{2}$.

Möjligen kan nämnarens försvinnande i detta sista fall bero på ren *glömska*. I 19 andra fall ha faktorer eller termer kommit bort av denna orsak. Vanligen sker detta vid förkortning, då den nya faktorn kommit ett stycke från kamraterna eller klämts in mellan andra, så att den inte genast faller i ögonen. Likaså vid reduktioner av längre polynom, då icke lämpliga försiktighetsmått vidtagits. I så gott som alla fall äro räkningarna slarvigt nedskrivna; en sådan felkälla borde skäligen lätt kunna undvikas.

Dignitetsbegreppet är en källa till 34 fel. Ofullständig eller oriktig uppfattning om exponentens betydelse är härvidlag huvudorsaken. Den har ju till uppgift att ange faktorernas antal i digniteten, vilket inte hindrar, att den ofta själv behandlas som en vanlig sifferfaktor. Eller också föranleder ett dunkelt medvetande om dess särställning till andra egendomliga misstag.

Exemplet $a^2 . a^3$ ger a^6 är ett vanligt fall av exponentens förväxling med faktor. Det är fråga om multiplikation, alltså: $2 . 3 = 6$. Så var det en bokstav med; resultat a^6. Bokstaven spelar en mycket obetydlig biroll, huvudsaken är, att den kommer med någonstans. Fel av denna art höra hemma på det tidigare stadiet. Så småningom associeras de nya metoderna med de nya momenten, bokstäverna, och dessa behandlas som sig bör. Så icke sifferfaktorerna, som äro gamla bekanta och helst behandlas på det gamla vanliga sättet.

Ett exempel: $\left(\frac{3a}{4b}\right)^2$ ger $\frac{6a^2}{8b^2}$. Bokstavstalen äro rätt beräknade, men siffrorna få nöja sig med exponenten som faktor. Någon uppfattning om att exponenten *är* någonting annat föreligger inte. Ett annat särdeles talande exempel: $\frac{a^{18}}{a^{14}}$ ger $\frac{a^9}{a^7}$; exponenterna ha helt enkelt förkortats med 2. Ännu ett exempel: $(2a^3 - 3b^4)^2$ ger $4a^9 + 9b^{16} - 12a^3b^4$; i kvadraterna ha talens exponenter fått samma behandling som koefficienterna, däremot är dubbla produkten riktig, eftersom digniteternas baser äro olika. I ett par andra fall har den senare blivit $12a^6b^4$, som synes en samvetsgrant genomförd fördubbling över lag. Kvadratexponenten har i dessa exempel visserligen gett upphov till kvadreringen, men det beror endast på formelkunskap, inte på uppfattning om exponentens uppgift. Detta framgår av följande exempel: $3a(a - b)^2$ ger $(3a^2 - 3ab)^2$, som visar, att vederbörande alls inte tänker sig två parenteser, fast den följande utvecklingen av kvadraten utföres rätt. Liknande fel äro inte ovanliga.

Den räknare, som får dubbla produkten av $2a^3$ och $3b^4$ att bli $6ab^7$, har inte den avlägsnaste aning om vad exponenten är till för. »Vid multiplikation av digniteter skola exponenterna adderas», sak samma om baserna äro olika.

Förväxlingen av exponent och koefficient tar sig stundom uttryck i rakt motsatt riktning; koefficienterna behandlas som exponenter, i synnerhet vid tillämpning av kvadreringsreglerna. $(2a^3 - 3b^4)^2$ ger i dubbla produkten $10a^3b^4$ eller i ett annat fall $5a^3b^4$, d. v. s. $2 . 3 = 5$. I en annan lösning: $2(a^4 - b^4)$ ger $a^8 + b^8 - 2a^4b^4$, har 2, trots den står framför parentesen, fått fungera som exponent, tack vare en omgivning av kvadratuttryck.

En grupp på 20 fel utgöras av misstag vid *kvadrerings- och konjugatreglernas* användning. I de förra insättes enkla i st. f. dubbla produkten eller ock fördubblas samtliga termer som i följande exempel: $(a - b)^2$ ger $2a^2 + 2b^2 - 2ab$. Teckenfel, $(a - b)^2$ ger $a^2 - b^2 + 2ab$, synas bero på att läroboken och läraren använt olika formuleringar av grundformlerna; läraren har den mera praktiska utvecklingen $a^2 + b^2 - 2ab$, då däremot läroboken har $a^2 - 2ab + b^2$. I andra fall rent slarv med tecknen.

Rätt vanlig är en förväxling av andra kvadreringsregeln och konjugatregeln, i synnerhet vid upplösning i faktorer. $a^2 - b^2$ ger $(a - b)^2$, båda uttrycken äro i pojkarnas ögon egentligen likadana. Att andra regeln bör tillämpas på följande uttryck har vederbörande inte observerat, han upplöser i faktorer på detta sätt: $16x^4 + 1 - 8x^2$ ger $1 + 4(2x^2 - 2x)(2x^2 + 2x)$. Att uttrycket fortfarande består av två termer betyder ingenting, huvudsaken är, *att* faktorer förekomma. Och de utgöra ju också en så förkrossande majoritet gent emot den stackars ettan, så att den kan helt lämnas ur räkningen.

23 uppgifter äro rätt utförda så när som på själva *svaret.* I 9 fall är detta inte fullständigt förkortat. Ex: $\frac{ab}{a^2}$, som är rot till ekvationen $a^3x = a^2b$. En faktor har förkortats bort, vilket tillfredsställer räknaren, i all synnerhet som det inte finns några siffror kvar i täljaren. Ekvationen $\frac{5abc}{4x} = 15bc$ ger $x = \frac{5a}{60}$. Nämnaren är här resultatet av en multiplikation och har således redan varit under behandling, vilken tydligen ansetts tillfyllest.

De övriga svarfelen bero på missuppfattningar om vad svaret egentligen skall röra sig om vid problemlösning och ha i detta sammanhang mindre intresse.

Rena *skrivfel* från den givna uppgiften, 13 st., och under räkningens gång, 18 st., bero vanligen på otydlighet i de hektograferade uppgifterna eller i egna uträkningar: 9 blir 2, 5 blir 8, 6 blir 0, 4 blir 7 eller 9 och i ett fall tages x för 8. Dessa fel ligga ju egentligen utanför uppsatsens ram men ha medtagits för jämförelsens skull.

Slutligen kommer en samling av 13 mera *obestämda* fel, som inte höra hemma under föregående avdelningar. Då de samtliga presterats av matematiskt synnerligen undermåliga individer, erbjuda de föga av intresse härvidlag. Någon förklaring lönar sig inte att kosta på dem. Ett par exempel: $\frac{1}{3} - \frac{1}{x}$ ger $\frac{1-1}{3-x}$, troligen analogt med multiplikation. De övriga äro i stil med: $a - 7a^4 + 7a^4$ ger $a - 8$ och kunna endast betecknas som rent nonsens.

I 24 fall har *arbetet avbrutits* av ett eller annat skäl, vanligen osäkerhet om möjligheten att komma fram eller brist på kunskap. Någon gång av alltför vidlyftiga och tidsödande räkningar.

De i det föregående behandlade felgrupperna äro således följande, ordnade efter fallande frekvens:

	%
term-faktor förväxling	22,4
teckenfel	18,7
dignitetsfel	8,7
fel vid bortskaffande av nämnare	8,7
skrivfel	8,0
ofullbordade lösningar	7,5
svarfel	5,9
formelfel	5,2
glömskefel	4,9
obestämbara fel	4,6
förväxling av x och dess inverterade värde	3,1
reduktion av olikformiga termer	2,3
	100,0

Detta försök till systematisering kan givetvis icke göra anspråk varken på fullständighet eller allmängiltighet, då materialet varit alltför ringa. Indelningen kunde ju även ske efter delvis andra grunder och mera logiskt genomföras. Den här använda indelningen har använts för att få närmast möjliga anslutning till de i praktiken förekommande metoderna.

3. Felens orsaker och botemedel.

(Sammanfattning.)

Vilka äro orsakerna till de algebraiska felräkningarna? Ett uttömmande svar på denna fråga torde väl ingen vara nog förmäten att söka ge, ty orsakerna äro legio. Här endast en antydan om de viktigaste.

Frågar man en pojke, varför han räknade så eller så, får man väl oftast svaret: »Jag kom inte att tänka på det». Den riktiga operationen är visst inte obekant, men under förhandenvarande omständigheter blev den inte genomförd. Ofta nog på grund av rent slarv, men vanligen har uppmärksamheten fängslats av någon annan samtidig uträkning, som varit svårare eller ovanligare för vederbörande, och så har felet varit där. Kontrollen, om sådan överhuvudtaget förekommer, har endast berört detta svåra, det lätta är »naturligtvis rätt», i synnerhet om svaret ser tilltalande ut eller liknar det vanliga.

En känsla av bekvämlighet spelar härvidlag en stor roll. Det ser så lätt och enkelt ut att göra på det eller det sättet, så det måste vara rätt. Räknaren litar helt på intuitionen, som bland en mängd möjligheter väljer ut den behagligaste, den som fordrar minsta energiförbrukningen. Än har inte räknandet mekaniserats till den grad, att ett misstag är uteslutet.

I samband härmed står begreppsförvirringen, som från metodisk synpunkt är allvarligast. Slag i slag införas nyheter i pojkens värld. Det ena begreppet hinner inte stabiliseras, förrän nästa kommer till, och så sker en partiell sammansmältning av båda. Det dröjer länge, innan det hela systematiseras. Från början ter sig alltsammans som ett skäligen sammanhangslöst virrvarr av fristående operationer, som först efter lång träning sammanfogas till en klar enhet, där inte lösa beröringsassociationer utan klart begripande bestämma hans angreppsmetoder. Dessförinnan få halvt uppfattade regler och formler tjänstgöra som surrogat.

Ett radikalt sätt vore ju att slopa allt vad regler och formler heter, företrädare för denna mening saknas inte. På så sätt skulle kunskapen växa fram som ett organiskt helt, och en hel del felkällor skulle aldrig uppstå. Frågan är, om detta sätt med hänsyn till räknelärandets ekonomi vore särdeles lyckligt. De formler, som förekomma på detta elementära stadium, äro så få, att man bör kunna fordra deras begripande, förutsatt att inlärandet skett på rätt sätt. Den träning i uppmärksamhet, som formelräknandet innebär, är förresten alltför värdefull för att kunna undvaras vid en effektiv undervisning. Vill man undanrödja räknefelen, är fastmer nödvändigt att ta vara på alla möjliga tillfällen för träning av uppmärksamhet och iakttagelseförmåga.

Det är gott och väl, om pojkarna få lära sig den rätta vägen, men i många fall är det nog nödvändigt att även rikta deras uppmärksamhet på de faror, som lura på denna väg, d. v. s. rakt på sak framvisa felmöjligheterna.

I min undervisning har jag använt mig av denna metod med synbarligen gott resultat. Teckenfelen har jag sökt utrota genom att vid räkning på svarta tavlan ständigt och jämt fråga: »Vilka möjligheter att göra teckenfel finnes det här?» Så småningom har den frågan gått pojkarna i blodet, och de ha svårligen kunnat företa en operation utan att göra klart för sig farorna.

Likaså ifråga om begreppen term och faktor. Genom att ständigt låta pojkarna analysera de algebraiska uttrycken med avseende på dessa begrepp, ha dessa så småningom nötts in, och den riktiga skillnaden dem emellan har ständigt varit aktuell. Lämpliga frågor i varje fall tvinga pojkarna att göra klart för sig felmöjligheterna och nogsamt undvika dem. Dock måste lärarens takt och goda omdöme bestämma gränserna för metodens användning, så att inte denna exercis i stället skapar inställning på felräkning.

För att markera exponentens särställning har jag låtit pojkarna teckna exempelvis digniteten $a.a.a$ på följande sätt $a^{3 \text{ faktorer}}$. Det dröjer inte länge, förrän de tröttna på detta skrivsätt, och när tiden är inne, förenklas uttrycket till a^3. Genom upprepade frågor hålles minnet av vad som »står efter» 3 vid makt, och misstag bli inte särdeles vanliga.

Några allmänna regler för matematikundervisningen har det givetvis icke varit min mening att framlägga. Varje intresserad lärare skapar själv det system, som lämpar sig för hans personliga läggning. Jag har blott velat framhålla den synpunkten till klart beaktande, att även felen kunna ha sitt goda med sig, nota bene om de användas för att driva ut det onda med. Kunskapens träd är på gott och ont, och med en klart uppfattad och väl innött kunskap om bägge dessa arter ha pojkarna stora möjligheter att komma fram på matematikens vanskliga stig. Det tillkommer ett nytt intresse, en ny njutning i att känna faran och sålunda veta, huru den skall undgås.