Grupp 4. I mån av plats kunna även intagas ett fåtal elever, om vilka osäkerhet råder i allt utom folkskolans kursfordringar.

Då emellertid inga prov eller rekommendationer för barn i åldern 11—13 år kunna vara säkra som prognos, och då därjämte även andra än s. k. läsbegåvningar behöva högre bildning än folkskolans, och då en viss rörlighet i utbildningsmöjligheter bör erbjudas, borde varje realskola innehålla minst en praktisk linje vid sidan om den rent teoretiska. Man vet aldrig, vad det kan bli av ett barn, om inte flera möjligheter öppnas med avseende på bl. a. arbetstakt, lärosätt, ämnesval, prövningssätt och kamratlig miljö. Låt oss därför få praktiska ungdomsskolor i samma byggnad som den nuvarande realskolan är inhyst i!

Geometriundervisningens metodik.

Av **Anton Bokelid.**

Då undertecknad för många år sedan såsom ämneslärare vid en kommunal samskola fick till åliggande bl. a. att undervisa i geometri i anslutning till Laurins lärobok, väckte läroboken ifråga mitt livliga ogillande. Jag hade läst Euklides efter Broman och gamle Strömer och kunde icke erkänna något annat än Euklides' vackra tankebyggnader såsom geometri. Snart nog fann jag emellertid, att just de delar av läroboken, som bäst överensstämde med min uppfattning om geometri, voro svårtillgängliga för lärjungarna, medan dessa med lätthet tillägnade sig sådana satser (t. ex. satserna rörande trianglars kongruens), som Laurin framställt på sitt eget sätt. Det visade sig, att många av dem — huvudsakligen flickor — trots omsorgsfull analys av enkla bevis icke kunde reproducera tankeföljden i dessa, utan envist för-sökte återgiva dem ur minnet, och slutligen efter många misslyckanden grepos av en misströstan, som det kostade mycken möda att övervinna. Om de mer eller mindre verksamt fingo deltaga i konstruktionen av en geometrisk bild, kunde de däremot redan genom uppbyggandet av figuren förvärva ganska god kännedom om dess egenskaper. Jag sökte efter orsakssammanhanget och fann, att barnens föreställningar äro så starkt beroende av minnesbilder, att de blott med svårighet kunna uppfatta beskrivningar och jämförelser, om dessa icke hava stöd i deras egna erfarenheter. Undantagen äro icke flera än att de blott bekräfta regeln.

Till belysande av dessa iakttagelser vill jag anföra följande konkreta exempel.

1. Om man inför nybörjare i geometri uppritar en cirkel på tavlan och upplyser, att denna linje utgör sammanfattningen av alla de punkter, som hava ett givet avstånd till en given punkt, finner man att åhörarna icke fatta denna upplysnings innebörd. Ingen får av den någon insikt om cirkelns egenskaper. Orden kunna inläras, men de giva blott en minneskunskap, som snart försvinner. Om man däremot märker ut ett antal punkter *på*, *inom* och *utom* cirkeln, inser varje lärjunge utan svårighet, såväl att avståndet till medelpunkten från en punkt *på* cirkeln är lika med radien, som att varje annan punkt antingen har ett större eller ock ett mindre medelpunktsavstånd. Därefter återstår endast, att i ord uttrycka, vad var och en redan vet om cirkellinjen. På detta sätt blir definitionen, vad den bör vara, en sammanfattning av vad erfarenheten lärt.

2. Om man uppritar två trianglar ABC och DEF på tavlan och meddelar, att vinkeln D är lika med vinkeln A, sidan DE lika med sidan AB och sidan DF lika med sidan AC, samt att trianglarna på grund härav kunna visas vara kongruenta, hava dessa upplysningar ingen konkret innebörd för nybörjare. Om man däremot först ritar eller låter rita en godtycklig

triangel ABC på tavlan och därefter konstruerar eller låter konstruera en ny triangel DEF, i vilken en vinkel göres lika med vinkeln A och de omfattande sidorna lika med AB och AC, visar det sig, att de flesta själva finna ut, både att den ena triangeln kan läggas på den andra, så att figurerna helt och hållet täcka varandra, och hur de skola läggas för att detta skall inträffa. Därefter återstår endast att i ord uttala den erfarenhet undersökningen givit till resultat.

Med dessa exempel torde jag hava tillräckligt understrukit min uppfattning, att den uppgift åskådningen har att fylla vid kunskapstillägnandet icke är mindre väsentlig, när det gäller undervisning i geometri, än när det är fråga om undervisning i andra ämnen.

Denna åsikt innehåller ingenting märkvärdigt i och för sig. Ingen lärare ifrågasätter, att undervisningen i naturvetenskap i realskolan skall meddelas på teoretisk väg. Ingen lärare försöker formulera en abstrakt regel utan att först hava grundligt förberett den med konkret material. Ar det då rimligt att förvänta, att barn i realskolan helt utan stöd av praktiskt förarbete skola kunna uppfatta och tillämpa de fulländat logiska men på grund därav synnerligen abstrakta problemen och teoremen hos Euklides. Om också den geometriska logikens skönhet är uppenbar för den jämförelsevis ringa del av de vuxna, som är tränad i abstrakt tänkande, kan den knappast fattas av någon annan av de uppväxande i realskolans åldersstadier än den, som av naturen blivit utrustad med särskilda förutsättningar.

Alltsedan jag kom till denna övertygelse, har jag i alltjämt växande omfattning tillämpat den i de nyss anförda exemplen skisserade heuristiska metoden. Jag har, med andra ord sagt, sökt bygga upp geometriskt vetande på rent syntetisk väg med hjälp av manuellt arbete, åskådning och logiska slutledningar ur redan vunna erfarenheter. För egen del har jag funnit denna metod ändamålsenlig, ty den har gjort mitt arbete väsentligt lättare och givit märkbart bättre resultat. Då jag därför ansett, att den kunde vara av intresse även för andra lärare, i synnerhet om de på grund av gällande timplan måste söka nya vägar för att på de få veckotimmar, som stå geometriundervisningen till buds, nå ett tillfredsställande resultat, har jag samlat mina erfarenheter och utbyggt dem till en lärobok i geometri för realskolan, som utkom för ett år sedan. Jag kan alltså beträffande den närmare utformningen av mina idéer hänvisa till denna. Cirkeln spelar däri en framträdande roll såsom bevismateriel och konstruktionsmedel, varför det måhända kan vara lämpligt att här redogöra för den grundläggande framställningen av läran om densamma, då denna framställning följer de principer för vilka jag tidigare redogjort. Läran om cirkeln har jag påbörjat i inledningskapitlet med följande uppgift:

»Märk ut en punkt O, sätt passarspetsen i denna och rita med passarpennan en sammanhängande kroklinje. Den linje, som på detta sätt erhålles är en *cirkellinje (cirkel)*, och punkten O är dess *medelpunkt (centrum)*.»

Därpå har jag på liknande sätt med stöd av figurer, som lärjungarna skola teckna, redogjort för övriga benämningar såsom båge, sektor, segment m. fl. Sedan har jag med hjälp av en ny uppgift, satt lärjungarna i tillfälle att uttryckligen fastslå, att alla punkter på cirkeln hava samma medelpunktsavstånd, och att detta avstånd är dess radie, och slutligen visat, huru ett flertal enkla konstruktionsuppgifter, såsom delning av en sträcka, konstruktion av normaler m. fl. lösas med hjälp av cirkellinjer.

Då cirkeln i den egentliga geometrien åter upptagits till behandling, har jag först konstaterat, att medelpunktsavståndet för en punkt inom densamma är mindre än radien (sats 1, sid. 23) och för en punkt utanför den större än radien (sats 2). Därefter har jag fastslagit (sats 3), att det av de anförda undersökningarna framgår, att en punkt ligger *på, inom* eller *utom* en given cirkel allteftersom dess medelpunktsavstånd är lika med radien, mindre än radien eller större än denna. Slutligen har jag meddelat, att cirkeln på grund av de nämnda egenskaperna säges vara geometriska orten för punkter, som hava ett givet avstånd till en given punkt och sålunda, på samma gång som jag fullständigt definierat densamma, begagnat tillfället att införa begreppet geometrisk ort.

I anslutning till det nu anförda bör det uttryckligen framhållas, att den traditionella metoden börjar med den abstrakta definitionen, som i min framställning framkommit som resultat av en undersökning. Jag kan icke finna annat än att det gamla genom många generationer nedärvda tillvägagångssättet är felaktigt ur undervisningssynpunkt. Det kan icke vara riktigt, att en framställning, som har till uppgift att i lärjungarnas medvetande skapa ett nytt begrepp, tager detta begrepp till utgångspunkt. Så långt jag har mig bekant, är det också blott i geometriundervisningen denna metod användes. Det är väl t. ex. fullständigt otänkbart, att en kemilärare skulle kunna börja framställningen av kemiens lag om de konstanta viktsproportionerna med denna lag själv för att sedan övergå till tillämpningar, som avse att fästa den i minnet. Resultatet av en sådan undervisning blir blott en ordkunskap, ty föreställningarna skapas icke av orden utan komma från lärjungarna själva. Den korta vandringen från varseblivning till varseblivning *måste* företagas, och den som tror, att »omvägen» vållar tidsförlust må pröva, om icke denna förlust blir en vinst, då man tar hänsyn till de memoreringar, som faktiskt sparas, och till det nyförvärvade vetandets väsentligt högre värde. Tager man i betraktande det geometriska lärostoffets egenart, bör man dessutom komma ihåg, att det är så långt ifrån att det abstrakta infinner sig av sig själv i barnens tankevärld, att om det konkreta kan anses införlivat med deras vetande genom en eller ett par varseblivningar erfordras det en hel serie erfarenheter av en och samma art, om de skola bilda ett abstrakt begrepp.

Meningarna om den euklideiska metodens förtjänster och fel äro mycket delade. Jag är icke ensam om min mening, men den delas ingalunda av alla geometrilärare, eller ens av flertalet. Många anse Euklides vara det oupphinneliga idealet även i metodiskt avseende, och för dem är varje annat framställningssätt en styggelse, vilken de redan på förhand fördöma såsom ologisk och oredig. Andra äro visserligen icke nöjda med den gamla metoden men hava icke funnit någon annan vara bättre och bli därför kvar vid det som är. Att åstadkomma en fullgod lösning av geometriundervisningens aktuella problem är ingalunda lätt, att finna en, som tillfredsställer alla är omöjligt.

På en annan punkt torde full enighet råda, nämligen i fråga om om det resultat, som realskolans geometriundervisning förmår uppnå. Det lär icke finnas någon, som anser detta resultat tillfredsställande, och i synnerhet enligt deras mening, som ha att i gymnasiet tillämpa och påbygga realskolekunskaperna, gör sig behovet av en förbättring starkt gällande. Det är icke osannolikt, att de under de närmaste åren komma att finna detta behov ännu bestämdare framträda. Det är givet, att jag i den redan föreslagna omläggningen av framställningsmetoden ser det *främsta* medlet till förbättrande av kunskapernas art, men jag anser mig böra framhålla, att även andra möjligheter finnas, både när det gäller att höja deras kvalitet och att öka deras omfattning.

En utväg erbjuder sig i ett bättre utnyttjande av de praktiska mätnings- och konstruktionsuppgifterna i klasserna 2^5 och 1^4. Dessa övningar hava som bekant till uppgift att bibringa lärjungarna förtrogenhet med de geometriska fundamentalbegreppen, såsom räta linjen och planet, olika slag av vinklar, trianglar och parallellogrammer, cirklar och cirkelsektorer, och att därigenom göra de flesta definitioner överflödiga. Vill man nå ett sådant mål, måste man anslå ganska många undervisningstimmar (förslagsvis 12 à 15) åt denna undervisning och icke inskränka sig till att åt mätningar och ritningar offra några lektioner, som man tycker sig ha kunnat använda bättre. En ytlig genomgång av det omfattande stoffet är för övrigt sämre än ingen alls, åtminstone för så vitt läraren tror sig ha åstadkommit något annat än de mer eller mindre lyckade konstruktionerna i lärjungarnas häften. Men matematiktimmar äro dyrbara i realskolan, och det är angeläget att väl tillvarataga dem. Även för den förberedande geometriundervisningen bör det därför finnas en ordentlig plan, så att lärjungarnas alla erfarenheter kunna omsorgsfullt tillgodogöras. Med inledningskapitlet i den tidigare nämnda läroboken har jag sökt åstadkomma ett sådant medel till effektivisering av undervisningen i fråga. Jag tillåter mig därför att ännu en gång hänvisa till denna och vill här blott i största korthet redogöra för kapitlets struktur i metodiskt avseende. Huvudinnehållet utgöres av ett antal enkla uppgifter av den art, som ovan angavs i samband med redogörelsen för den metodiska behandlingen av cirkeln och dessa äro avsedda att i främsta rummet fylla övningarnas särskilda ändamål enligt de metodiska anvisningarna. Dessutom skola de enligt mitt förmenande åstadkomma den fond av minnesbilder, vilken ända från början skall göra det geometriska vetandet till något annat än ordkunskap. Jag har emellertid också medtagit några satser, som äro så enkla, att deras sanning osökt framgår av lärjungarnas eget arbete. De erfarenheter deras undersökningar giva till resultat, har jag dessutom sökt fixera med hjälp av sammanfattande minnesord, som motsvara den egentliga geometriens satser och äro formulerade på samma sätt som dessa. Utanläsning av dessa minnesord torde icke böra förekomma, men med en eller annan repetition i lämpligt sammanhang skola de göra samma gagn som satserna och hopfoga iakttagelserna till en pålitlig grundval för den följande geometriundervisningen. Det torde icke desto mindre bli nödvändigt, att lärjungarna anskaffa lärobok, om allt skall medhinnas på den tid, som rimligen kan anslås för ändamålet. Skall läraren lämna anvisningar för allt och lärjungarna teckna sig till minnes, vad de böra tillvarataga, skulle denna tid icke räcka till. Om de kunna tillgodogöra sig den handledning en lärobok ger, kommer läraren däremot att få tid övrig för den individuella handledning, utan vilken några av dem skulle bli hopplöst efter kamraterna på grund av dåligt handlag för användning av ritinstrument eller allmän oföretagsamhet.

En annan del av lärostoffet, som för närvarande fordrar sin särskilda uppmärksamhet, bilda de satser, som måste medtagas, utan att man bevisar dem i egentlig mening. Det är av icke ringa vikt, att även de väl tillvaratagas. I en ny upplaga av en äldre lärobok, ha åtskilliga satser anförts på så sätt, att deras ordalydelse meddelats jämte möjligast kortfattade påpekande, att deras sanning inses genom åskådning. Figur saknas emellertid, varför icke något som helst belägg för påståendets riktighet förebragts. Av vad jag förut anfört torde framgå, att jag finner dessa satser bli till föga gagn för undervisningen. Då orden icke äro uttryck för resultatet av någon tankeverksamhet och inga föreställningar om konkreta fall äro knutna till dem, kunna de icke hos lärjungarna åstadkomma någon tankebana, som kan föranleda reproduktion av tankeföljden, än mindre tjäna såsom underlag för en självständig sådan. Då memoreringar dessutom i deras föreställningsvärld blott kan åstadkomma ett svagt spår, som lätt utplånas av nya intryck, blir det sammanhang i larogången, vilket dessa satser äro avsedda att säkerställa, blott skenbart. Enligt min mening bör varje sats, som skall byggas på åskådningen, så härledas att den kommer att framstå som en sanning i sig själv, icke blott som ett av lärare och lärobok uppställt kategoriskt påstående. För att visa hur en sats kan bli resultat av slutledningar, som hava en figur till underlag, vill jag anföra en härledning, som återfinnes på sid. 32 i min lärobok.

»Teckna en vinkel *ABC* (fig. 35), dela den mitt itu och drag från en godtyckligt vald punkt *P* på halveringslinjen normalen *PX* till vinkelbenet *AB*. Vi vika bilden utefter *AB*. Då faller vinkelbenet *BA* utefter vinkelbenet *BC* (sats 5, sid. 22) och punkten *X* i en punkt *Y* på den senare linjen. Det är uppenbart, att sträckan *PY* är normal till vinkelbenet *BC*, och att denna normal är lika med normalen *PX*. Då punkten *P* var godtyckligt vald kunna vi därför uppställa följande sats:

Om en punkt ligger på halveringslinjen till en given vinkel, så har den lika avstånd till båda vinkelbenen.»

På liknande sätt har jag härlett de flesta satser av ifrågavarande kategori. De övriga hava framgått ur enkla beräkningar och konstruktioner. Jag tillåter mig att anföra exempel även på denna art av härledning (s. 21 i läroboken).

»*Övningsuppgift.* Teckna två räta linjer *AB* och *CD* (fig. 18), som skära varandra under a) 55°, b) 90°, c) 115° vinkel. Sätt därefter med hjälp av gradskivan i punkten *D* vid linjen *CD* en vinkel, som är *likbelägen med vinkeln BCD* och *lika stor* som denna. Angiv storleken av alla övriga vinklar, som de tre linjerna bilda med varandra.

Av dessa konstruktioner och beräkningar framgår riktigheten av följande påstående:

Om två räta linjer skära en tredje och med denna bilda två lika stora, likbelägna vinklar, så äro även övriga likbelägna vinklar lika stora, alla växelvinklar äro lika stora och alla närliggande vinklar supplementära.»

Det bör måhända här påpekas, att satserna om sidovinklar och korsvinklar behandlats redan i inledningskapitlet (sid. 14). Det förtjänar även framhållas, att det konkreta material, på vilket den nyss anförda satsen grundats, erhållits med hjälp av en *övningsuppgift*. Jag vill i detta sammanhang påpeka, att även om övningsuppgifterna äro avsedda att utgöra tillämpningar av det redan genomgångna, böra de väljas icke blott med tanke på den sats, dit de höra. Hänsyn både kan och bör tagas till deras användbarhet för särskilda ändamål, till deras betydelse för den följande geometriundervisningen och för planimetrien.

Med allt det nu sagda har jag ingalunda velat påstå, att den euklideiska geometrien kan med hänsyn till sitt ändamål av något annat ersättas. Jag vill uttryckligen framhålla, att det är mot metoden jag riktat kritik. Ingen kan bestrida, att en framställning, som skall användas vid undervisning av barn, måste taga hänsyn till det vetande barnen tidigare inhämtat, till deras förmåga att fatta och till deras sätt att lära, och ingen kan påstå, att euklideiska metoden i detta avseende fyller kraven. Med all sin abstrakthet och sin konstlade redogörelse för även enkla fakta har den träffande karakteriserats såsom en sista rest av medeltida skolastik i modern undervisningsteknik, och det måste betecknas såsom anmärkningsvärt, att den kunnat leva kvar så länge. Gång på gång har frågan om geometriundervisningens gestaltning upptagits till behandling, men något annat resultat än att det bör bli vid det gamla har ännu icke uppnåtts tack vare Euklidesanhängarnas envisa — för att icke säga blinda — motstånd. Det är säkerligen att vänta alltför mycket, om jag hoppas att dessa rader skola föra diskussionen vidare, men *om* de visa sig ha en sådan verkan, skall jag finna mig rikligen lönad för mödan.

Anmälningar och recensioner.

A. Gierow, G. Hellstén och S. Malmberg: Arbetsskola — Arbetsglädje. II. C. W. Gleerups förlag.