

## Några ord om matematiken och matematikundervisningen i våra elementarskolor.

Af Frans de Brun.

Det har sedan gammalt varit ett önskemål att få tyngdpunkten för matematikundervisningen i våra skolor förlagd till ett högre stadium. Öfverstyrelsen har gått dessa önskingar till mötes och framflyttat geometrien ett år, så att numera Euklides skall påbörjas i 4:e klassen. Det kan dock sättas i fråga, om detta steg — ehuru taget i rätt riktning — är att anse som tillräckligt. I Frankrike, det land där forskningen inom de matematiska vetenskaperna i alla tider stått högst och som därför med större skäl än andra torde kunna betraktas som mönsterlandet, införes matematiken i Quatrième (= vår kl. 5) och drifves sedan med i allmänhet ökad timal i de följande klasserna, enl. denna plan:

*Quatrième, A (Latin):* 1 obl. + 1 friv. timme;

*B (Icke latin):* 4 timmar.

*Troisième, A:* 2 obl. + 1 friv. timme; *B:* 3 timmar.

*Seconde, A & B (Grec-Latin, Latin-Lang. viv.):* 1 obl. timme;

*C & D (Latin-Sciences, Sciences-Lang. viv.)* 5 timmar.

*Première, A & B:* 1 obl. timme; *C & D:* 5 timmar.

*Classe de Philosophie:* 2 obl. timmar; *Classe de Mathématique:* 8 timmar.

Härvid är dock att märka, att kurserna i skolans två sista klasser för linjerna C & D (Sciences), som sig bör, äfven omfatta kinematik, mekanik, deskriptiv geometri och kosmografi, hvilket likväl ej hindrar, att af fysikläraren samtidigt på detta ämnets timmar genomgås en kurs i mekanik och matematisk fysik af ungefär samma omfattning som hos oss. Den motsvarande svenska timplanen är:

*Klass 4:*  $3\frac{3}{4}$  timmar.  
*Klass 5:* 3 »  
*R I (Real):*  $5\frac{1}{4}$  timmar; *R I (Latin):*  $3\frac{3}{4}$  timmar;  
*R II (Real):*  $4\frac{1}{2}$  timmar; *R II (Latin):* 3 timmar;

Detta förefaller — med undantag för kl. 4, där enl. min åsikt ingen matematikundervisning ännu bort förekomma — som en god början; och, om timtalet ökas för den sista ringen på motsvarande sätt som i Frankrike, d. v. s. på reallinjen till 11 lektioner (=  $8\frac{1}{4}$  t.), har man all anledning att vara Öfverstyrelsen förbunden för det intresse, som visats de matematiska ämnena i fråga om timplanen. En god ekonomi fordrar, att ej tiden förslösas på ett lägre stadium på ett ämne, som på grund af sin abstrakta natur där ej kan på allvar drifvas. De 5 lektioner, som äro anvisade åt matematiken i kl. 4, skulle säkerligen kunna ersättas af 2 i 4:de ringen.

Men viktigare än timplanen är läraren och de fordringar, han anser sig böra ställa på sina elever. Undervisningen måste göras lefvande; det är ej nog, att eleverna slå i sig en del bevis ur läroboken (hvilka för öfrigt ofta nog äro ofullständiga eller på annat sätt felaktiga) eller kunna rabbla upp en rad af definitioner, hvilkas innehåll de kanske ej förstå, om de nu ens äro riktigt formulerade.

Meningen bör vara, att lärjungen redan från första stund skall göras förtrogen med de matematiska forskningsmetoderna; om han därvid hinner några satser mera eller mindre, betyder i förhållande härtill mindre. Öfverstyrelsens föreskrift, att eleven redan första året på egen hand skall taga itu med enklare geometriska konstruktionsuppgifter, anser jag lycklig. Beträffande teoremerna, vare sig de geometriska eller algebraiska, borde lärjungarna så småningom vänjas vid att själfva söka finna på satserna, ej blott bevisen. Läraren bör framhålla, huru det går till att generalisera ett teorem. Intresset för ämnet ökas, då lärjungen sättes i tillfälle att själf upptäcka nya satser, och han får en helt annan syn på saken. Lika litet som t. ex. fullt förstående af versbyggnadskonsten kan ernås utan eget diktande, eller ett språk studeras utan dess talande eller skrifvande, kan något verkligt re-

sultat vinnas i fråga om matematik utan att eleven får försöka att uppöfva sin egen fantasi. Dyliga generaliseringar äro lätta att finna. Närmast till hands ligga generaliseringar från planet till rymden. Exempel: att generalisera satsen om nödv. och tillräckl. villkoren för att en cirkel tangerar en 4-hörnings sidos till motsvarande för att en sfär skall tangera de sex kantlinjerna till en tetraeder; att generalisera satsen, att ytan af en kring en cirkel omskrifven rätlinig figur är lika med ytan af en triangel med radien till höjd och omkretsen till bas, till en polyeder, omskrifven kring en sfär; att generalisera satsen om medianen i en triangel till motsvarande sats för den rätta linje, som sammanbinder en hörnpunkt i en tetraeder med motstående sidas masscentrum; att bestämma läget af masscentrum i en pyramid o. s. v.

Att läsa planets geometri först och åratat efteråt — eller kanske ej alls — rymdens anser jag som ett af de största felen i kursplanen och delar i detta afseende den åsikt som redan år 1884 framträdde i Italien med *de Paolis Elementi di Geometria*. I *L'Enseignement Mathématique*, årg. 1 finnes en opartisk redogörelse af *Candido* för den 14-åriga striden angående principen om sammansmältning mellan planimetri och stereometri; äfven torde intresserade läsare taga del af *Lazzeri & Bassanis Elementi di Geometria*, där denna tankegång är konsekvent genomförd.

Vidare tror jag, att mera vikt borde läggas vid den *rena* matematiken, hvilken mest tilltalar gossarnes fantasi och skönhetskänsla. Det finns väl knappast något olidligare inom matematikundervisningen än detta ständiga idislande af ekvationsproblem. Särskildt förefaller det som om dyliga problem vore olämpliga vid det skriftliga hemarbetet. Skulle vilja förorda som omväxling, att gossarne finge redogöra för vissa kapitel ur algebran eller geometrien, t. ex. teorien för maxima och minima, lösning af andra gradens olikheter, förenkling af dubbla radikaluttryck etc.

Något, som äfven skulle höja intresset för de matematiska vetenskaperna, vore att läraren, så ofta tillfälle erbjöde sig, lämnade biografiska upplysningar om de

störste tänkarne: Lionardo, Galilei, Newton, Leibniz, Cartesius, Pascal, Gauss, Abel m. fl.

Innan jag går vidare, vill jag yttra några ord om hvad matematik egentligen är. Det har nämligen vid flerfaldiga tillfällen visat sig, att utomstående personer, därom hafva en ganska grumlig uppfattning. Vänder man sig till en naturvetenskapsman för att höra hans åsikt om matematiken, höjer han föraktligt på axlarna och gertill svar, att det är en »hjälpvetenskap» åt fysiken, astronomin, kemien, etc. allt eftersom han representerar den ena eller andra af dessa vetenskaper. Liknande svar får man om man vänder sig till en affärsman, en sjöofficer, en praktisk ingenjör m. fl. Sedan gammalt har man för sig, att matematiken är ett så praktiskt ämne, att den behöves för nära nog all verksamhet här i lifvet, och man får tillägga, att många matematici själfva trott det vara för ämnet förmånligt, att denna uppfattning fortfarande vunne allmän tilltro. Professor Mittag-Leffler påpekar i sin Abelbiografi (»Ord och Bild» för 1903), huru själfve Gauss af denna anledning tvekade offentliggöra sin upptäckt om rummet. Den, som intresserar sig för hvad gångna tiders tänkare haft för mening om matematikens betydelse ber jag få hänvisa till *Rebière: Mathématiques & Mathématiciens*, där uttalanden finnas allt ifrån Aristoteles (»Hvarmed sysslar matematiken om ej med proportionen och ordningen?») till Kant (»Matematiken bildar så att säga en bro mellan metafysiken och fysiken»).

Det är ej svårt att inse, hvarifrån denna åsikt, att matematiken skulle vara en uteslutande hjälpvetenskap, härleder sig. Ingen af naturvetenskaperna kan undvara den. Vare sig det gäller mekanik, astronomi, fysik eller kemi kan man icke reda sig utan differentialekvationer; för mutationsteorin behöfs probabilitetskalkyl; och om vi vända oss åt andra håll, huru skulle statistikern, försäkringsmannen, arkitekten, ingenjören kunna reda sig utan matematik? Hvad skulle därförutan blifvit af sådana vetenskaper som topografi, geodesi, geografi, navigation, kronologi, strategi? Då Leibniz och Newton upptäckte differentialkalkylen, gafvo de fysiken en värdefullare present än dussintals Nobelpristagare tillsammantagna. —

Men häraf följer icke — och det är här det vanliga felslutet ligger — att matematiken ej har något värde i sig själf, eller att den ej skulle bearbetas i riktningar, som för tillfället ej kunna sättas i direkt förbindelse med den eller den naturvetenskapens utveckling. För matematikern äro talets egenskaper af större intresse än naturens. Redan Gauss talade med förakt om »diese Dreckklumpen, die man Planeten nennt» (Mittag-Leffler l. c.). — I en afhandling i Acta Mathematica B. 21 har den franska matematikern Poincaré framlagt sin mening om den matematiska analysen, hvilken torde få anses sammanfalla med den inom mathematicis krets allmänt antagna. Han påpekar, huru matematiken naturligtvis är en fullt själfständig vetenskap, hvars objekt är talet, men dock ej bör omgifvas med en kinesisk mur, som kan hindra utvecklingen. Fysikern är ej endast problemställaren och matematikern endast »un simple fournisseur de formules», utan ett intimt samarbete bör äga rum dem emellan till bådads båtnad. Han säger, att matematiken har ett trefaldigt mål:

1: o) Den tjänar som instrument för studiet af naturen.

2: o) Den tjänar filosofien, i det den hjälper denna vetenskap att klargöra begreppen tal, rum, tid.

3: o) Den har ett estetiskt ändamål. »Et surtout leurs adeptes y trouvent des jouissances analogues à celles que donnent la peinture et la musique. Ils admirent la délicate harmonie des nombres et des formes; ils s'émerveillent quand une découverte nouvelle leur ouvre une perspective inattendue; et la joie qu'ils éprouvent ainsi n'a-t-elle pas le caractère esthétique, bien que les sens n'y prennent aucune part? Peu de privilégiés sont appelés à la goûter pleinement, cela est vrai, mais n'est-ce pas ce qui arrive pour les arts les plus nobles?»

I Abelbiografien meddelar prof. M. L. ett yttrande af Weierstrass i en skrifvelse till fru Kovalewsky: »Dazu kommt ein Mangel, der sich bei vielen höchst verständigen Menschen, namentlich bei denen semitischen Stammes findet, er besitzt nicht ausreichend Phantasie (Intuition möchte ich lieber sagen), und es ist wahr, ein Mathematiker, der nicht etwas Poet ist, wird nimmer ein vollkom-

mener Matematiker sein.» På ett annat ställe i samma uppsats talar Prof. M. L. om det abelska additionsteoremet såsom ett lyriskt poem af ovanlig skönhet.

Jag tror, att det skulle vara önskligt, att det estetiska momentet bättre kom till sin rätt vid undervisningen i matematik, i hvilket fall nog intresset för ämnet skulle ökas. I skolan förekomma sång och musik af enbart estetiska skäl, hvarför icke då också tillgodose skönhetskrafvet inom matematiken? Det är svårt att finna, att något gjorts i den nya kursplanen för framhållande af denna viktiga synpunkt. Skulle nästan vilja påstå, att många ändringar verka i rakt motsatt riktning. Så t. ex. tycks meningen vara att stryka det gamla, klassiska beviset för Pythagoras' sats (hvarefter sedan de viktiga 12:te och 13:de satserna i 2:dra boken kunde analogt bevisas — ett vackert exempel på generalisering). Vill emellertid ej gå in på några detaljanmärkningar, då afsikten endast är att framhålla allmänna synpunkter. Vår tid sträfvar efter förenkling! Detta är naturligtvis intet fel, men jag undrar, om inte mången gång dylika förenklingar äro ganska illusoriska, i det att satsernas innehåll förytligas, hvilket sedan måste tagas igen genom drifvande af problemlösning till större kvantitet. Under alla förhållanden böra de bevis, som lämnas vara stränga; hellre inga bevis alls än felaktiga!

Kursplanen för det nya gymnasiet är ännu ej fastslagen, men vi skola hoppas, att kurserna ej dragas ned under den nivå, man ställt upp för sig i utlandet. Det talas så vackert i våra dagar om att vi böra bygga upp ett större, stoltare Sverige. Konkurrensen med utlandet kräfver, att en minst lika god skolunderbyggnad erbjudes våra söner. Kunna vi ej genomföra detta i alla ämnen för hvarje gosse, så må vi specialisera oss. Specialisering är framtidens lösen, och idén om valfrihet i skolans högsta klasser är en god tanke, som vi böra taga vara på. Vår tid har större fordringar på kunskaper än våra fäders, våra söners skall ha proportionsvis ännu större bildningskraft än vår haft. Må vi då se till att åtminstone *möjlighet* beredes våra gossar att här genomgå samma kurser som i de stora kulturländerna. För att läsaren må få en före-

ställning om kursen i de franska lyceernas sista klass, vill jag här göra ett kort utdrag:

*Aritmetik*: repetition med korrekta definitioner och bevis; proportionslära;\* ) ränte- och blandningsproblem; absoluta och relativa fel, bestämning af felet vid de vanliga räknesätten m. m. *Algebra*: repetition, omfattande bland annat grafisk framställning af  $y = ax^4 + bx^2 + c$ ; differentialkalkylen, tillämpad på de till alg. och trig. hörande funktionerna; maxima och minima af enkla funktioner; derivatan af ytan hos en kurva, betraktad som funktion af abskissan. *Trigonometri* af ungefär samma omfattning som hos oss. *Geometri*: en utförlig kurs af plan- och rymdgeometrien, särskildt omnämnes »Calcul de  $\pi$ »; ellipsen, parabeln och helicen tagas syntetiskt; modern geometri med homografiska knippen m. m. *Mekanik, deskriptiv geometri* och *kosmografi* föras vidare — som jag förut nämnt — till matematiken. Det är att tillägga, att de i studentexamen i Frankrike gifna problemen förutsätta äfven kvalitativt större kunskaper än våra uppgifter.

Trots att de skäl, som pläga anföras för infinitesimalkalkylens införande på realgymnasiet, torde vara väl kända, vill jag dock erinra om några: den analytiska geometrien och dynamiken kunna tagas allmännare, likaså teorien för maxima och minima, på samma gång som framställningen blir naturligare; felet vid approximativa räkningar kan lätt beräknas; vidare behöfvas differential- och integralkalkyl redan för nuvarande skolkurs, för kinematiken (hastighet, acceleration m. m.), för mekaniken (masscentrum, tröghetsmoment, krökningsradie m. m.), för optiken (teorin för regnbågen, bestämning af minsta deviationen hos ett prisma m. m.). Då staten har råd att hålla en särskild linje (A-linjen) för det lilla fåtal, som sedan skall ägna sig åt teologiska eller filologiska studier, synes rättvisan fordra, att äfven något göres för dem, som skola ut i det praktiska lifvet som ingenjörer eller drifva specialstudier inom de olika naturvetenskaperna, så att

\*) För detta kapitel och öfriga delar af kursen hänvisas till *Dauzet*: *Eléments de Méthodologie Mathématique*.

de ej vid fackskola eller universitet behöfva förspilla en dyrbar tid på rent elementära saker.

Sedan ofvanstående uppsats sammanskrefs, hafva kurs- och timplanerna för de två högsta ringarna utkommit. Det är med ett visst vemod matematikläraren nödgas konstatera, att ämnet ej fått någon ökning i timantal, utan tvärtom fått siffran förminskad, i det att på skolans högsta stadium numera skall anslås endast 4 1/2 veckotimmar däråt. Då timtalen redan förut voro i knappaste laget, förefaller det ogörligt att medhinna ökade kurser, äfven om sådana hade funnits på papperet. Att ordet »derivata» nämnes i kursplanen, får väl näppeligen tolkas som att differentialkalkylen numera skulle tillhöra skol-schemat. Derivatbegreppet kan man helt enkelt ej undgå, vare sig inom kinematiken eller analytiska geometrien och har i alla tider förekommit i skolan; om *ordet* derivata användes eller icke, spelar naturligtvis ingen roll. Mycket skulle vara att tillägga i anledning af den utkomna kursplanen, och hoppas jag därtill få återkomma vid ett annat tillfälle.

---

### Den poetiska kursen i latin å gymnasiet.

Af Bernhard Risberg.

Sedan numera kursplan för tredje gymnasialringen utfärdats, hvori en förberedande uppgift om fjärde ringens kurser äfven meddelas, är en diskussion om tillämpningen af kursplanen i dess helhet både möjlig och behöflig.

Hvad nu den poetiska latinkursen beträffar, innehåller kursplanen blott, att i L. II skall läsas omkring 500 verser, exempelvis Ovidius, i L. III omkring 600 och i L. IV omkring 1,000 verser utan närmare uppgift om författare. Kursens omfattning är helt naturligt mindre än enligt den hittills gällande ordningen, dock icke så synnerligen mycket. Hittills torde man oftare ha läst *under* än *öfver* 3,000 verser poesi. Så beräknar undertecknad för sin del kursen på följande sätt: i L. 6: 1 omkring 200 ver-